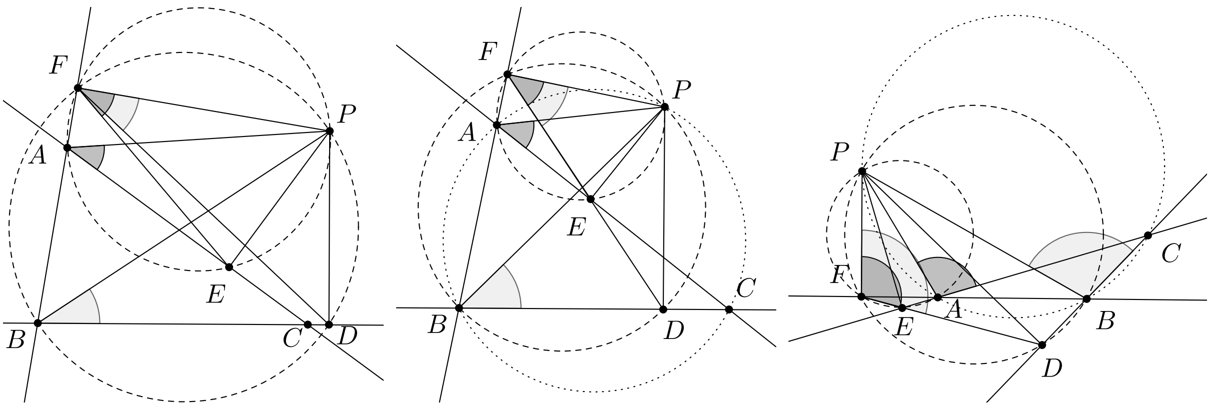
Prosta Simsona

Twierdzenie 1. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy gdy jego rzuty prostopadłe na proste BC, CA, AB są współliniowe.

Dowód. Oznaczmy rzuty punktu P na proste BC, CA, AB przez D, E, F odpowiednio. Niech $\sphericalangle(k, l)$ oznacza kąt skierowany między prostymi k, l, tzn. miarę kąta, który zatoczymy przez obracanie prostej k przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wokół pewnego punktu aż do momentu, w którym k, l staną się równoległe. Jest to wygodna notacja, bowiem niezależnie od położenia punktów X, Y, Z, T zachodzą równoważności: punkty X, Y, Z, T leżą na okręgu $\iff \sphericalangle(XY, YZ) = \sphericalangle(XT, TZ)$ oraz X, Y, Z leżą na jednej prostej $\iff \sphericalangle(XY, YT) = \sphericalangle(ZY, YT)$.



Punkty A, F, P, E leżą na okręgu o średnicy AP, a punkty B, F, P, D na okręgu o średnicy BP. Mamy zatem równości $\sphericalangle(CA, AP) = \sphericalangle(EA, AP) = \sphericalangle(EF, FP)$ oraz $\sphericalangle(CB, BP) = \sphericalangle(DB, BP) = \sphericalangle(DF, FP)$.

Zatem punkty A, B, C, P leżą na okręgu $\iff \sphericalangle(CA, AP) = \sphericalangle(CB, BP) \iff \sphericalangle(EF, FP) = \sphericalangle(DF, FP)$ $\iff$ punkty D, E, F są współliniowe. $\square$

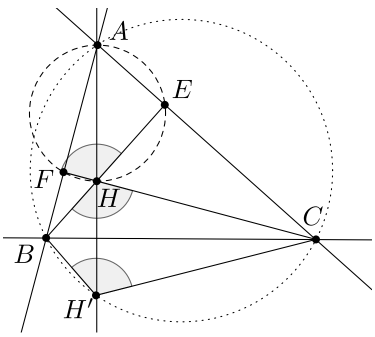
Definicja 2. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz punkt $P \in \omega$. Prostą Simsona punktu P względem trójkąta ABC nazywamy prostą przechodzącą przez rzuty prostopadłe punktu P na proste BC, CA, AB.

Jeżeli z kontekstu wiadomo względem którego trójkąta rozważamy prostą Simsona pewnego punktu, będziemy mówić po prostu: prosta Simsona punktu P.

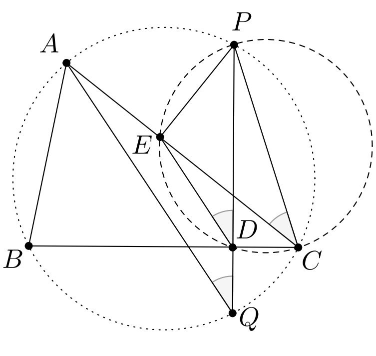
W dalszej części przedstawimy rozwiązania kilku zadań i to tylko dla konfiguracji przedstawionych na rysunkach. Przeprowadzenie analogicznych dowodów dla pozostałych konfiguracji (tam gdzie to potrzebne) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Pozostałe zadania Czytelnik powinien rozwiązać sam. Niektóre z nich zawierają wskazówki. Kolejność zadań nie ma nic wspólnego z ich poziomem trudności.

Zadanie 3. Odbicia ortocentrum względem boków leżą na okręgu opisanym.

Rozwiązanie. Przy oznaczeniach z rysunku mamy $\sphericalangle CH'B = \sphericalangle BHC = \sphericalangle EHF = \pi - \sphericalangle BAC$. $\square$



rys. 3

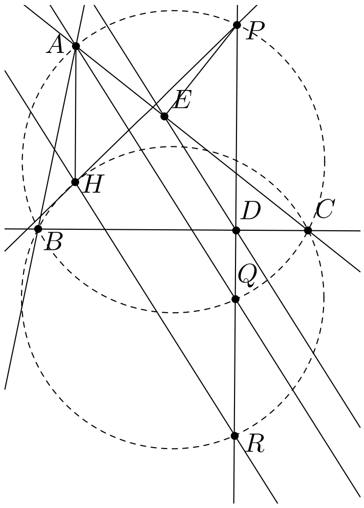


rys. 4

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz punkt $P \in \omega$. Obierzmy punkt $Q \in \omega$ tak, że $PQ \perp BC$. Wykazać, że prosta Simsona punktu P jest równoległa do prostej AQ.

Rozwiązanie. Przy oznaczeniach z rysunku mamy $\sphericalangle PDE = \sphericalangle PCE = \sphericalangle PCA = \sphericalangle PQA$. $\square$

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω i jego ortocentrum H. Wówczas dla dowolnego punktu $P \in \omega$ jego prosta Simsona połowi odcinek PH.



rys. 5

Rozwiązanie. Niech R będzie odbiciem P względem BC oraz niech Q będzie przecięciem przecięciem prostej PR z ω. Z zadania 3 wynika, że punkty B, C, R, H leżą na okręgu ω', który jest odbiciem ω względem BC. Łatwo widzieć, że okrąg ω' jest okręgiem ω przesuniętym o wektor $\vec{AH}$. Stąd czworokąt $AHRQ$ jest równoległobokiem, a zatem $RH \parallel AQ$. Z zadania 4 wynika, że $AQ \parallel DE$. Zatem $DE \parallel RH$ i skoro D jest środkiem PR, to DE przechodzi przez środek odcinka PH. $\square$

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω i jego ortocentrum H. Punkt P leży na ω. Punkty X, Y, Z są odbiciami punktu P względem boków trójkąta ABC. Wykazać, że punkty X, Y, Z, H leżą na jednej prostej.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 5.

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz punkty $P, Q \in \omega$. Wykazać, że kąt między prostymi Simsona punktów P, Q równy jest kątowi opartemu na łuku PQ.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 4.

Zadanie 8. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz średnica PQ tego okręgu. Wykazać, że proste Simsona punktów P, Q są prostopadłe, a ich przecięcie leży na okręgu Feuerbacha.

Rozwiązanie. Prostopadłość prostych Simsona wynika z zadania 7. Przez punkt P poprowadźmy prostą równoległą do prostej Simsona punktu Q, a przez punkt Q prostą równoległą do prostej Simsona punktu P. Niech te dwie proste przecinają się w punkcie R. Wówczas $\sphericalangle QRP$ jest prosty, zatem $R \in \omega$. Rozważając jednokładność o środku w ortocentrum i skali $\frac{1}{2}$, dochodzimy do wniosku że obrazem punktu R jest punkt wspólny prostych Simsona punktów P, Q (korzystamy tu z zadania 5). Oznacza to, że ten punkt leży na okręgu Feuerbacha. $\square$

Zadanie 9. Dane są punkty A, B, C, D, E takie, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, a czworokąt $BCED$ jest wpisany w okrąg. Prosta l przechodząca przez A przecina wnętrze odcinka CD w punkcie F, a prostą BC w punkcie G. Przypuśćmy, że $EF = EG = EC$. Wykazać, że l jest dwusieczną kąta $\sphericalangle DAB$.

Wskazówka. Wykazać, że prosta Simsona punktu E względem trójkąta BCD przechodzi przez środek równoległoboku $ABCD$. Wywnioskować, że $DE = EB$.

Zadanie 10. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz punkt $P \in \omega$. Wykazać że odbicie prostej AP względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$ jest prostopadłe do prostej Simsona punktu P.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 4.

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω. Niech punkty D, E, F będą środkami łuków BAC, CBA, ACB. Wykazać, że proste Simsona punktów D, E, F są współpękowe.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 4. Wykazać, że punktem wspólnym tych prostych jest środek okręgu wpisanego trójkąta środkowego.

Zadanie 12. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω. Punkt $K \in \omega$ i punkt A leżą po przeciwnych stronach prostej BC. Punkty L, M są odbiciami punktu K względem AB, BC. Okrąg przechodzący przez punkty B, L, M przecina ω po raz drugi w punkcie E. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Wykazać, że proste KH, EM, BC mają punkt wspólny.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 6.

Zadanie 13. Niech $ABCD$ będzie czworokątem, w który można wpisać okrąg. Niech punkt M leży na odcinku BC. Niech N będzie punktem wspólnym prostych AM, CD. Niech I_1, I_2, I_3 będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABM, MNC, NDA. Wykazać, że ortocentrum trójkąta $I_1I_2I_3$ leży na prostej AM.

Wskazówka. Wykazać, że punkty I_1, I_2, I_3, C leżą na okręgu. Skorzystać z zadania 6.

Zadanie 14. Dana jest prosta k oraz różne punkty $A, B, C \in k$, $P \notin k$. Wykazać, że okrąg przechodzący przez środki okręgów opisanych na trójkątach PBC, PCA, PAB przechodzi przez punkt P.

Zadanie 15. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu. Rozważmy proste Simsona punktów A, B, C, D względem trójkątów BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio. Wykazać, że są one współpękowe.

Zadanie 16. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy gdy jego rzuty pod danym kątem φ na proste BC, CA, AB są współliniowe. Przez rzut punktu X pod kątem φ na prostą k rozumiemy punkt $Y \in k$ taki, że $\sphericalangle(XY, k) = \varphi$.

Zadanie 17. Punkt P leży na okręgu opisanym na czworokącie $ABCD$. Oznaczmy proste Simsona punktu P względem trójkątów BCD, CDA, DAB, ABC przez l_A, l_B, l_C, l_D. Wykazać, że rzuty prostopadłe punktu P na proste l_A, l_B, l_C, l_D są współliniowe.

Zadanie 18. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz średnica PQ okręgu ω. Punkt R wybrano tak, że prosta PR jest prostopadła do prostej Simsona punktu Q, a prosta QR jest prostopadła do prostej Simsona punktu P. Wykazać, że $R \in \omega$ oraz że prosta Simsona punktu R jest równoległa do PQ.

Zadanie 19. Dane są trójkąty ABC i DEF wpisane w okrąg ω. Na okręgu ω wybrano punkt P. Wykazać, że kąt między prostymi Simsona punktu P względem trójkątów ABC i DEF nie zależy od jego wyboru.

Zadanie 20. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω. Punkty P, Q, R są rzutami punktu D na proste BC, CA, AB. Wykazać, że $PQ = QR$ wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów ABC, ADC oraz prosta AC mają punkt wspólny.

Zadanie 21. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz cięciwa $PQ \parallel BC$. Proste Simsona punktów P i Q przecinają się w punkcie X. Wykazać, że $AX \perp BC$.

Zadanie 22. Dany jest trójkąt ABC oraz jego wysokości AD, BE, CF. Wykazać, że rzuty punktu D na proste AB, AC, BE, CF są współliniowe.

opracował: Tomasz Cieśla