Geometria rzutowa - skrypcik

Dominik Burek, Tomasz Cieśla

13 września 2012

Już niedługo kolejne brakujące rzeczy.

1 Garść twierdzeń i definicji

Definicja 1.1. Dane są proste AB, AC, AD. Prosta AE taka, że $\angle EAB = \angle DAC$, nazywa się prostą izogonalnie sprzężoną do AD względem kąta BAC.

Definicja 1.2. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P. Proste izogonalnie sprzężone do AP, BP, CP względem kątów BAC, CBA, ACB przecinają się w jednym punkcie, zwanym izogonalnym sprzężeniem punktu P względem trójkąta ABC.

Definicja 1.3. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P. Proste AP, BP, CP przecinają proste BC, CA, AB w punktach D, E, F. Punkty K, L, M są odbiciami punktów D, E, F względem środków odcinków BC, CA, AB. Wówczas punkt wspólny prostych AK, BL, CM nazywamy punktem izotomicznie sprzężonym do P względem trójkąta ABC.

Wprowadzimy teraz kilka punktów szczególnych trójkąta. Będziemy używać standardowych oznaczeń takich jak G, N, I, O itp. oraz oznaczeń z *Encyclopedia of triangle centers* takich jak X_1, X_4, X_{442} itp.

Definicja 1.4. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów. Oznaczamy go I lub X_1

Definicja 1.5. Środkiem ciężkości trójkąta nazywamy punkt przecięcia środkowych. Oznaczamy go G lub X_2.

Definicja 1.6. Środek okręgu opisanego oznaczamy przez O lub X_3.

Definicja 1.7. Ortocentrum trójkąta nazywamy punkt przecięcia wysokości. Oznaczamy go H lub X_4.

Definicja 1.8. Okrąg dziewięciu punktów to okrąg przechodzący przez środki boków, spodki wysokości oraz środki odcinków AH, BH, CH.

Definicja 1.9. Środek okręgu dziewięciu punktów oznaczamy przez N lub X_5.

Definicja 1.10. Punkt Lemoine'a to izogonalne sprzężenie środka ciężkości. Oznaczamy je L lub X_6.

Definicja 1.11. Gergonne

Definicja 1.12. Nagel

Definicja 1.13. izog sprz gergona

Definicja 1.14. izog sprz nagela

Definicja 1.15. kosnita

Definicja 1.16. jeszcze jakieś punkty

Definicja 1.17. więcej punktów

Definicja 1.18. prosta eulera

Definicja 1.19. prosta nagela

Definicja 1.20. schiffler jeszcze

Definicja 1.21.

2 Wprowadzenie do krzywych stożkowych

Definicja 2.22. Krzywą stożkową nazywamy przekrój stożka płaszczyzną.

Oczywiście płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek stożka przecina stożek albo w jednym punkcie, albo wzdłuż prostej, albo wzdłuż dwóch prostych przecinających się. Te przypadki są nieciekawe. Znacznie bardziej interesujące jest, gdy płaszczyzna tnąca nie przechodzi przez wierzchołek stożka. Okazuje się, że może ona przeciąć stożek na trzy różne sposoby!

Definicja 2.23. Elipsą nazywamy przekrój stożka płaszczyzną, która tworzy z osią stożka kąt większy niż połowę rozwarcia stożka.

Definicja 2.24. Hiperbolą nazywamy przekrój stożka płaszczyzną, która tworzy z osią stożka kąt mniejszy niż połowę rozwarcia stożka.

Definicja 2.25. Parabolą nazywamy przekrój stożka płaszczyzną, która tworzy z osią stożka kąt równy połowie rozwarcia stożka.

Powiemy teraz, co to są ogniska.

Rozważmy stożek $\mathcal{C}$ o wierzchołku S. Niech elipsa $\mathcal{E}$ będzie przecięciem płaszczyzny τ z $\mathcal{C}$. Rozważmy sfery $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ wpisane w stożek $\mathcal{C}$ które są styczne do płaszczyzny τ w punktach F, G. Oznaczmy okręgi styczności sfer $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ ze stożkiem $\mathcal{C}$ przez ω_1, ω_2. Rozważmy dowolny punkt P na elipsie $\mathcal{E}$. Niech prosta PS przecina okręgi ω_1, ω_2 w punktach A, B. Zauważmy, że $PA = PF$, gdyż są to odcinki styczne do sfery $\mathcal{S}_1$. Podobnie, $PB = PG$, gdyż są to odcinki styczne do sfery $\mathcal{S}_2$. Zatem $PF + PG = PA + PB = AB$. Długość odcinka AB nie zależy od wyboru punktu P. Możemy więc sformułować następujące

Twierdzenie 2.26. Elipsa jest zbiorem punktów P takich, że suma odległości od dwóch ustalonych punktów F, G jest stała. Punkty F, G nazywamy ogniskami elipsy, a wartość $PF + PG$ - osią wielką elipsy.

Podobne rachunki można przeprowadzić dla hiperboli. Jako ćwiczenie zostawiamy wykazanie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.27. Pokazać, że hiperbola to zbiór punktów P takich, że $|PF - PG| = \text{const}$ (przy ustalonych punktach F, G, które nazywamy ogniskami hiperboli).

Nieco inaczej jest przy paraboli, gdyż nie możemy wpisać dwóch sfer jak powyżej, ale tylko jedną.

Rozważmy stożek $\mathcal{C}$ o wierzchołku S i osi a. Niech parabola $\mathcal{H}$ będzie przecięciem płaszczyzny τ z $\mathcal{C}$. Rozważmy sferę $\mathcal{S}$ wpisaną w stożek $\mathcal{C}$, która jest styczna to płaszczyzny τ w punkcie F. Oznaczmy okrąg styczności sfery $\mathcal{S}$ ze stożkiem $\mathcal{C}$ przez ω. Oznaczmy płaszczyznę zawierającą okrąg ω przez σ. Niech płaszczyzny τ, σ przecinają się wzdłuż prostej l. Rozważmy dowolny punkt P na paraboli $\mathcal{P}$. Oznaczmy jego rzuty prostokątne na płaszczyznę σ oraz na prostą l przez Q oraz R. Niech PS przecina ω w punkcie A. Z twierdzenia o trzech prostopadłych wiemy, że $QR \perp l$. Kąty $\angle QPR$ oraz $\angle QPA$ mają miarę równą połowie kąta rozwarcia stożka. Zatem trójkąty prostokątne PQR oraz PQA są przystające. Stąd $PR = PA$, a skoro $PF = PA$ (odcinki styczne do sfery), to $PR = PF$. Otrzymaliśmy zatem poniższe

Twierdzenie 2.28. Parabola jest zbiorem punktów P, które są równoodległe od ustalonego punktu F oraz od ustalonej prostej l. Punkt F nazywamy ogniskiem paraboli, a prostą l jej kierownicą.

Naturalnym pytaniem jest, czy można coś podobnego jak wyżej wyprowadzić dla elipsy i hiperboli. Odpowiedź brzmi: można. Pozostawiamy jako ćwiczenie wykazanie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.29. Krzywa stożkowa jest zbiorem punktów P takich, że iloraz odległości punktu P od ustalonego punktu F przez odległość punktu P od ustalonej prostej l jest stały. Stosunek ten, oznaczany zazwyczaj literą e, nazywamy mimośrodem krzywej stożkowej. Prosta l zwie się kierownicą, a punkt F ogniskiem. Gdy $e > 1$, to stożkowa jest hiperbolą, gdy $e = 1$ to jest parabolą, a gdy $e < 1$, to jest elipsą.

Wskazówka. Przeprowadzić analogiczne rozumowanie do powyższego. Dążyć do tego, że (przy oznaczeniach z poprzedniego dowodu) $\frac{PA}{PR} = \frac{\cos\angle QPR}{\cos\angle QPA} = e$.

Krzywe stożkowe czasami nazywa się krzywymi drugiego stopnia. Za chwilę przekonamy się skąd ta nazwa.

Rozważmy stożek o wierzchołku S i kącie rozwarcia 2α oraz krzywą stożkową będącą przecięciem tego stożka z pewną płaszczyzną. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby płaszczyzna określona równaniem $z = 0$ zawierała naszą krzywą stożkową, żeby punkt S miał współrzędne $(0, a, b)$ oraz żeby oś stożka przechodziłą przez punkt $(0, 0, 0)$. Rozważany stożek jest zbiorem punktów (x, y, z) takich, że kąt między wektorami $[0, -a, -b], [x, y - a, z - b]$ wynosi α. Zatem stożek można opisać równaniem $c = \cos\alpha = \frac{\langle[0,-a,-b],[x,y-a,z-b]\rangle}{|[0,-a,-b]|\cdot|[x,y-a,z-b]|} = \frac{a^2 - ay + b^2 - bz}{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+(y-a)^2+(z-b)^2)}}$, zaś punkty na naszej stożkowej dodatkowo spełniają $z = 0$. Stożkowa jest więc dana równaniem $c = \frac{a^2 - ay + b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+(y-a)^2+b^2)}} \iff c^2(a^2+b^2)(x^2+(y-a)^2+b^2) = (a^2+b^2-ay)^2$, a to jest równanie, w którym zmienne występują w maksymalnie drugiej potędze, czyli innymi słowy jest to równanie drugiego stopnia.

Po uproszczeniach i wszelakich podstawieniach można otrzymać kanoniczne równania krzywych stożkowych. Równanie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ określa elipsę, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolę, natomiast $y^2 = 2px$ parabolę. Istnieją wzory na ogniska, kierownice, etc. Są one łatwo znajdowalne w sieci.

3 Własności krzywych stożkowych

3.1 Styczne do stożkowych

3.2 Elipsa i izogonalne sprzężenia

3.3 Własności paraboli. Czworokąt zupełny.

4 Dualność

Rozważmy dwie płaszczyzny euklidesowe E_1 oraz E_2. Na każdej z nich wprowadźmy układ współrzędnych. Rozważmy przekształcenie f określone następująco: każdemu punktowi $(a, b) \in E_1$ przyporządkujemy prostą $\{(x, y) : ax+b = y\} \subset E_2$, a każdej prostej $\{(x, y) : ax+b = y\} \subset E_1$ przyporządkujemy punkt $(a, b) \in E_2$. Przekształcenie f ma ciekawe własności: trzy współpękowe proste przekształca na trzy współliniowe punkty. Trzy równoległe proste też przekształca na trzy współliniowe punkty, co więcej, punkty te mają tę samą odciętą. Trzy współliniowe punkty o różnych odciętych przekształca na trzy współpękowe proste. Trzy współliniowe punkty o tych samych odciętych przekształca na proste równoległe. Zauważmy jednak, że nie przyporządkowaliśmy nic prostym równoległym do osi OY. Nieco irytujące jest też to, że niektóre współliniowe punkty przechodzą na współpękowe proste, a niektóre na równoległe. Zmodyfikujmy więc nieco nasze płaszczyzny.

Przyjmiemy, że dla dowolnego b proste $y = ax + b$ przecinają się w tzw. punkcie w nieskończoności P_a. Teraz przez prostą daną równaniem $y = ax + b$ będziemy rozumieć zbiór punktów spełniających to równanie oraz punkt P_a. Skoro zdecydowaliśmy się dodać punkty w nieskończoności, musimy też określić na nich wartość funkcji f. Sensownie jest punktowi $P_a \in E_1$ przyporządkować prostą $\{(x, y) : x = a\} \subset E_2$. Wciąż nie przyporządkowaliśmy nic prostym równoległym do osi OY. Aby zachować analogię, przyporządkujemy im punkty w nieskończoności płaszczyzny E_2, tj. prostej $\{(x, y) : x = a\} \subset E_1$ przyporządkujemy punkt w nieskończoności $P_a \in E_2$.

Otrzymaliśmy nieco lepszy model - każdej prostej przyporządkowaliśmy jakiś punkt, każdym trzem prostym mającym wspólny punkt odpowiadają trzy współliniowe punkty. Lecz są niedoskonałości, które trzeba poprawić. Na ogół, przez dowolne dwa punkty możemy poprowadzić prostą. My jednak nie umiemy poprowadzić prostej przez dwa punkty w nieskończoności np. P_{69}, P_{-666}. Dlatego wygodnie jest przyjąć, że wszystkie punkty w nieskończoności leżą na jednej prostej w nieskończoności p_∞. W ten sposób przez dowolne dwa punkty umiemy poprowadzić prostą. Pojawia się pytanie: jaki punkt przyporządkować prostej w nieskończoności? Przyporządkujemy im nowy punkt w nieskończoności P_∞. Przyjmijmy, że P_∞ leży na prostych równoległych do osi OY (tak, tych prostych nie uzupełniliśmy jeszcze o punkt w nieskończoności). Ostatnia rzecz, jaką musimy zrobić, to przyporządkować punktowi $P_\infty \in E_1$ prostą w nieskończoności $p_\infty \subset E_2$.

To już koniec konstrukcji. Tak zmodyfikowane płaszczyzny E_1, E_2 mają następujące własności:
- przez dowolne dwa punkty przechodzi prosta
- dowolne dwie proste przecinają się

Przekształcenie f jest określone na zbiorze punktów i prostych płaszczyzny E_1 i przyjmuje wartości ze zbioru punktów i prostych płaszczyzny E_2. Jest to bijekcja. Oto dwie najważniejsze własności przekształcenia f:
- trzy współliniowe punkty są przekształcane na trzy współpękowe proste
- trzy współpękowe proste są przekształcane na trzy współliniowe punkty

Warto odnotować, że gdy $E_1 = E_2$, to $f \circ f = \mathrm{Id}$. Takie przekształcenia nazywa się inwolucjami.

Można też rozpatrywać krzywe stożkowe na naszych płaszczyznach. Rozważając parabolę na płaszczyźnie rzutowej, dorzucamy do niej punkt w nieskończoności odpowiadający kierunkowi jej osi symetrii. Do hiperboli zaś dorzucamy punkty w nieskończoności odpowiadające kierunkom jej asymptot. Po takim uzupełnieniu parabol i hiperbol w pewnym sensie nie jesteśmy w stanie odróżnić ich od elipsy. Każda z nich jest krzywą zamkniętą. Jeżeli przez styczną do stożkowej będziemy rozumieć prostą mającą dokładnie jeden punkt wspólny z nią, to prosta w nieskończoności jest styczna do paraboli, a asymptoty hiperboli są styczne do niej w punktach w nieskończoności. Możemy rozróżnić wnętrze i zewnętrze krzywej stożkowej. Wnętrze to zbiór punktów płaszczyzny takich, że każda prosta przechodząca przez ten punkt przecina stożkową w dwóch punktach. Zewnętrze to zbiór takich punktów, przez które można poprowadzić prostą rozłączną ze stożkową. Pozostałe punkty należą do stożkowej.

Można pokazać, że punkty krzywej stożkowej przy przekształceniu f przechodzą na proste styczne do pewnej krzywej stożkowej. Jest to kolejna piękna własność.

Zauważmy, że tracimy tutaj pojęcie równoległości. Możemy też zapomnieć, która prosta była prostą w nieskończoności. Oznacza to, że jeśli mamy pewną konfigurację na zwykłej płaszczyźnie, to możemy potraktować płaszczyznę tak jakby była rzutowa i przerysować konfigurację w inny sposób, interpretując inną prostą jako prostą w nieskończoności. Należy jednak pamiętać, że kąty się nie zachowują, jak również stosunek równoległych odcinków czy też stosunek pól figur! Zachowuje się za to dwustosunek, o którym powiemy później, jak również stożkowość krzywych.

Możemy teraz sformułować zasadę dualności.

Twierdzenie 4.30. Jeżeli dane twierdzenie jest prawdziwe, to prawdziwe jest też twierdzenie, w którym słowa "prosta" i "punkt" zamieniają się miejscami, "przecinać się w punkcie" zamienia się z "leżeć na prostej" oraz "prosta styczna do stożkowej" zamienia się z "punkt na krzywej stożkowej". Tak zmodyfikowane twierdzenie nazywa się twierdzeniem dualnym.

Udowodnimy teraz twierdzenie Pascala, a następnie sformułujemy twierdzenie dualne doń.

Twierdzenie 4.31. (Pascal) Wierzchołki sześciokąta $ABCDEF$ (być może z samoprzecięciami) leżą na krzywej stożkowej. Wówczas punkty $X = AB \cap DE, Y = BC \cap EF, Z = CD \cap FA$ są współliniowe.
Dowód. Udowodnimy wpierw twierdzenie, gdy stożkowa jest okręgiem. Jest jasne, że trójkąty ADZ, CFZ są podobne. Niech X' będzie takim punktem, że pary trójkątów DAX, FCX' oraz $ZXA, ZX'C$ oraz $ZXB, ZX'F$ są podobne. Kąty się ładnie przenoszą i widzimy, że punkty X', Y są izogonalnie sprzężone w trójkącie CFZ. Stąd $\angle FZY = \angle X'ZC = \angle AZX$, a zatem punkty X, Y, Z są współliniowe.

Aby wykazać twierdzenie Pascala dla dowolnej stożkowej, rozważmy stożek o wierzchołku S zawierający tę stożkową, a następnie rozważmy rzut środkowy z punktu S na pewną płaszczyznę prostopadłą do osi stożka. Oznaczmy obrazy punktów $A, B, C, D, E, F, X, Y, Z$ przez $A', B', C', D', E', F', X', Y', Z'$. Punkty A', B', C', D', E', F' leżą na okręgu oraz $X' = A'B' \cap D'E', Y' = B'C' \cap E'F', Z' = C'D' \cap F'A'$. Na mocy już udowodnionego przypadku, możemy stwierdzić, że punkty X', Y', Z' są współliniowe. Rzut środkowy zachowuje współliniowość, więc także punkty X, Y, Z są współliniowe.

Twierdzeniem dualnym do twierdzenia Pascala jest tzw. twierdzenie Brianchona.

Twierdzenie 4.32. (Brianchon) Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na krzywej stożkowej (tzn. proste zawierające boki sześciokąta są styczne do stożkowej). Wówczas proste AD, BE, CF są współpękowe.

Prawdziwe są też twierdzenia odwrotne do twierdzeń Pascala i Brianchona. Podamy je bez dowodu.

Twierdzenie 4.33. (odwrotne do Pascala) Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Jeżeli punkty $X = AB \cap DE, Y = BC \cap EF, Z = CD \cap FA$ są współliniowe, to punkty A, B, C, D, E, F leżą na krzywej stożkowej.

Twierdzenie 4.34. (odwrotne do Brianchona) Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Jeżeli proste AD, BE, CF są współpękowe, to istnieje krywa stożkowa styczna do prostych AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Twierdzenia Pascala i Brianchona mówią o sytuacjach, w których sześć punktów leży na stożkowej oraz sześć prostych jest stycznych do stożkowej. Można się domyślać, że nie przez każde 6 punktów przechodzi pewna krzywa stożkowa. Tłumaczy to fakt, że każdą stożkową można opisać równaniem postaci $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$, a zatem równaniem zależnym od sześciu parametrów, które zmieniane proporcjonalnie nie zmieniają opisywanej stożkowej (tzn. równanie $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ opisuje tę samą stożkową, co równanie $kax^2 + kby^2 + kcxy + kdx + key + kf = 0$ dla $k \neq 0$), a zatem możemy wymusić, aby któryś niezerowy parametr był jedynką. Tak więc stożkowa zależy od pięciu niezależnych parametrów, a jak wiadomo z algebry liniowej, układ sześciu równań z pięcioma niewiadomymi na ogół nie ma rozwiązania.

Pojawia się pytanie: ile punktów jednoznacznie wyznacza krzywą stożkową? Powyższe dywagacje sugerują odpowiedź: pięć. I tak w istocie jest, ale z zastrzeżeniem, że żadne cztery z punktów nie są współliniowe, a gdy żadne trzy nie są współliniowe to stożkowa jest niezdegenerowana. Zachodzi ogólniejsze twierdzenie.

Twierdzenie 4.35. (Braikenridge-Maclaurin) Krzywa stożkowa jest jednoznacznie wyznaczona przez:
(1) pięć punktów
(2) cztery punkty i jedną prostą styczną przechodzącą przez jeden z nich
(3) trzy punkty i dwie proste styczne przechodzące przez dwa z nich
(4) trzy styczne i dwa punkty leżące na dwóch z nich
(5) cztery styczne i jeden punkt leżący na jednej z nich
(6) pięć stycznych.

5 Dwustosunek i biegunowe.

W publikacji *Dwustosunek i biegunowe* Dominika Burka (można ją znaleźć pod adresem `http://students.mimuw.edu.pl/~tc319421/dwustosunek.pdf`) wprowadzono pojęcie dwustosunku. Zdefiniowano też biegunową punktu względem okręgu. Okazuje się, że pojęcie biegunowej oraz niektóre twierdzenia dotyczące dwustosunku i biegunowych, można uogólnić na dowolne krzywe stożkowe. Przypomnijmy najważniejsze definicje i twierdzenia (dowody znajdują się w przywołanej pracy).

Definicja 5.36. Niech A, B, C, D będą współliniowymi punktami. Liczbę $(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ nazywamy dwustosunkiem czwórki punktów A, B, C, D.

Twierdzenie 5.37. Dwustosunek jest zachowywany przez rzut środkowy, tzn. gdy przetniemy współpękowe proste a, b, c, d inną prostą k i otrzymamy kolejno punkty A, B, C, D, to wielkość $(A, B; C, D)$ nie zależy od wyboru prostej k.

Definicja 5.38. Dwustosunkiem pęku prostych a, b, c, d nazywamy liczbę $(A, B; C, D)$, gdzie A, B, C, D to punkty przecięcia pewnej prostej k z prostymi a, b, c, d i oznaczamy go przez $(a, b; c, d)$.

Twierdzenie 5.39. Dwustosunek zachowywany jest na okręgu, tzn. dla ustalonych punktów A, B, C, D na okręgu i dowolnych punktów P, Q na tym samym okręgu, zachodzi równość $(PA, PB; PC, PD) = (QA, QB; QC, QD)$

Okazuje się, że ostatnie twierdzenie zachodzi, gdy zamienimy okrąg na dowolną krzywą stożkową.

Twierdzenie 5.40. Dwustosunek zachowywany jest na krzywej stożkowej, tzn. dla ustalonych punktów

A, B, C, D na stożkowej $\mathcal{K}$ i dowolnych punktów $P, Q \in \mathcal{K}$, zachodzi równość $(PA, PB; PC, PD) = (QA, QB; QC, QD)$.
Dowód. Rozważmy stożek o wierzchołku S zawierający stożkową $\mathcal{K}$. Rozważmy płaszczyznę $\pi \not\ni S$ prostopadłą do osi stożka. Niech rzut środkowy o środku w S przekształca punkty A, B, C, D, P, Q na punkty $A', B', C', D', P', Q' \in \pi$. Wówczas punkty A', B', C', D', P', Q' leżą na okręgu. Mamy więc równości $(PA, PB; PC, PD) = (P'A', P'B'; P'C', P'D') = (Q'A', Q'B'; Q'C'; Q'D') = (QA, QB; QC, QD)$.

Przypomnijmy, co to jest czwórka harmoniczna oraz jak określamy biegunową punktu względem okręgu.

Definicja 5.41. Gdy $(A, B; C, D) = 1$, to mówimy, że punkty A, B, C, D tworzą czwórkę harmoniczną.

Definicja 5.42. Dany jest okrąg o i punkt P na zewnątrz tego okręgu. Z punktu P prowadzimy styczne do okręgu, a punkty styczności oznaczamy przez A, B. Prostą AB nazywamy biegunową punktu P względem okręgu o.

Okazuje się, że biegunowe są ściśle powiązane z czwórkami harmonicznymi.

Twierdzenie 5.43. Dany jest okrąg o i punkt P na zewnątrz okręgu. Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg o w punktach X, Y oraz biegunową punktu P w punkcie Q. Wówczas $(P, Q; X, Y) = 1$.

Powyższa własność pozwala zdefiniować biegunową punktu leżącego wewnątrz okręgu.

Definicja 5.44. Dany jest okrąg o oraz punkt P. Przez punkt P prowadzimy dowolną prostą k, która przecina okrąg w punktach X, Y. Rozważmy punkt Q_k taki, że $(P, Q_k; X, Y) = 1$. Przy zmieniającej się prostej k, punkt Q_k porusza się po prostej, zwanej biegunową punktu P względem okręgu o.

Powyższa definicja bez przeszkód uogólnia się na dowolną krzywą stożkową.

Przytoczymy jeszcze dwa twierdzenia dotyczące biegunowych.

Twierdzenie 5.45. (La Hire) Biegunowa punktu P względem okręgu o przechodzi przez punkt Q wtedy i tylko wtedy, gdy biegunowa punktu Q względem okręgu o przechodzi przez punkt P.

Twierdzenie 5.46. Trzy punkty są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy ich biegunowe względem pewnego okręgu są współpękowe.

Jako ćwiczenie pozostawiamy uogólnienie dwóch powyższych twierdzeń na dowolne krzywe stożkowe (wskazówka: trik kilkakrotnie pojawił się już w skrypcie).

6 Szczególne hiperbole w trójkącie.

7 Kilka fajnych zadanek ze stożkowych do porobienia

Zadanie 7.47. Okrąg ma następującą własność: gdy z punktu P poprowadzimy styczne PA, PB, to punkt P, środek odcinka AB oraz środek okręgu są współliniowe. Parabole nie mają takiej własności, bo nie mają środka. Rozstrzygnąć, czy podana własność zachodzi dla elips i hiperbol.

Zadanie 7.48. Dane są dwie parabole o prostopadłych kierownicach. Wykazać, że ich punkty wspólne leżą na jednym okręgu.

Zadanie 7.49. Ośmiokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ jest wpisany w krzywą stożkową. Niech $B_i = A_iA_{i+1} \cap A_{i+3}A_{i+4}$. Wykazać, że ośmiokąt $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ jest wpisany w krzywą stożkową.