Rozwiąż równanie różnicowe $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 2n + 1$ z warunkami początkowymi $a_0 = 2$ oraz $a_1 = 4$.

Wielomian charakterystyczny równania jednorodnego:

$$w(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$$

$$w(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

Miejsca zerowe: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$.

Zatem, rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci:

$$d_1\lambda_1^n + d_2\lambda_2^n = d_1 3^n + d_2 4^n$$

Szukamy teraz rozwiązania szczególnego dla równania niejednorodnego, tzn równania postaci:

$$a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + f(n)$$

Wiemy, że $f(n) = 2n + 1$, oraz że $f(n) = p(n)\mu^n$, gdzie $p(n)$ to wielomian, a μ to stała. Możemy zauważyć, że $p(n) = 2n + 1$, oraz $\mu = 1$, a rząd wielomianu $p(n)$ to 1.

Wiemy więc, że istnieje rozwiązanie szczególne postaci:

$$a_n = q(n)\mu^n = (b_0 + b_1 n)1^n = b_0 + b_1 n$$

Teraz podstawiamy to rozwiązanie do wzoru rekurencyjnego i otrzymujemy:

$$b_0 + b_1 n = 7(b_0 + b_1(n - 1)) - 12(b_0 + b_1(n - 2)) + 2n + 1$$

Po uproszczeniu powinniśmy otrzymać:

$$0 = -6b_0 - 6b_1 n + 17b_1 + 2n + 1$$

Możemy teraz podstawić małe wartości n, na przykład $n = 0$ oraz $n = 1$, i otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} -6b_0 + 17b_1 + 1 = 0 \\ -6b_0 + 11b_1 + 3 = 0 \end{cases}$$

Zatem, $b_0 = \frac{10}{9}$ oraz $b_1 = \frac{1}{3}$, więc rozwiązanie szczególne to:

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{10}{9}$$

Ostatecznie rozwiązanie to suma rozwiązania ogólnego i szczególnego:

$$a_n = d_1 3^n + d_2 4^n + \frac{n}{3} + \frac{10}{9}$$

Teraz wystarczy podstawić do rozwiązania wartości pierwszych elementów ciągu, tzn $a_0 = 2$ oraz $a_1 = 4$ i otrzymujemy wartości $d_1 = 1$ oraz $d_2 = -\frac{1}{9}$. Zatem, wzór jawny ciągu a_n to:

$$a_n = 3^n - \frac{4^n}{9} + \frac{n}{3} + \frac{10}{9} = \frac{1}{9}(3^{n+2} - 4^n + 3n + 10)$$