Definicja (grafy proste)| Niech $(V,\mu)$ - k-hipergraf, $(v_1,v_2 \dots v_m),(w_1,w_2 \dots w_m) \in V^m$, $A=\{v_1,v_2 \dots v_m\}$, $B=\{w_1,w_2 \dots w_m\}$, $C=V\setminus(A\cup B)$. Powiemy, że $(V,\mu)$ jest $(m,a)$-prosty jeżeli:

1) $|C|=2(k-m)-1$ (jeśli $|C|=-1$, to przyjmujemy $C=\emptyset$).
2) $A,B,C$ są parami rozłączne.
3) $\forall X\subset V$ t.że $X=\{x_1,x_2 \dots x_m\}$, gdzie $x_i\in\{v_i,w_i\}$ mamy $\mu(X)=(-1)^{|B\cap X|}\cdot a$.
4) Dla każdego innego $X$ t.że $|X|=m$ mamy $\mu(X)=0$.
5) $\forall X\subset V$ t.że $|X|<m$ mamy $\mu(X)=0$.

Wierzchołki $(v_1 \dots v_m)$ nazywamy dodatnimi, wierzchołki $(w_1 \dots w_m)$ nazywamy ujemnymi, a wierzchołki ze zbioru $C$ nazywamy neutralnymi. Koniec kroku 1

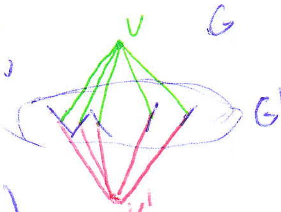
Można sprawdzić, że wszystkie przykłady grafów prostych spełniają tę definicję. Okazuje się też, że jeśli $S$ jest prosty, to graf zdefiniowany tak jak w (*) również jest prosty. Zachodzi również następujące:

Twierdzenie| Jeżeli $A\subset V_H$ oraz $S$ jest $(|A|,\mu(A))$-prosty, to $S$ jest kombinacją liniową $\mathbb{H}$. Tego twierdzenia nie chcę tutaj dowodzić, jako że jego dowód jest mocno techniczny i nieprzyjemny.

Szybkim wnioskiem z tego twierdzenia jest następujący:

Fakt| Jeżeli $e\in V_G^{(k)}$ to istnieje k-hipergraf $(k,\mu_G(e))$-prosty $S$, który jest kombinacją liniową $\mathbb{H}$ t.że $\mu_{G+S}(e)=0$. Dodatkowo, jeżeli $|V_G|>2k-1$, to istnieje $S$ j.w., który nie powiększa zbioru wierzchołków ($V_S\subseteq V_G$)

Dowód| Weźmy $e_1 \dots e_n$, $e_i\in V_{H_i}^{(k)}$, $H_i\in\mathbb{H}$ t.że $\mu_G(e)=\sum_{i=1}^{n}\mu_{H_i}(e_i)$. Niech $S_1 \dots S_n$ będą grafami prostymi dla $e_1 \dots e_n$ o tych samych wierzchołkach pozytywnych i negatywnych. Wtedy $-\sum_{i=1}^{n}S_i$ jest komb. liniową $\mathbb{H}$ i jest żądanym grafem $S$. Druga część trywialna. □




Wróćmy teraz do sztuczki. W wyniku sztuczki dostaliśmy hipergraf, którego wszystkie krawędzie zawierały $v$ lub $v'$, przy czym zachodziła równość $(v\,v')e = -e$ dla każdej $e \in V_G^{(k)}$. Wprowadźmy $G' = (V_G \setminus \{v, v'\}, \mu_{G'})$

to oznacza zamianę $v$ na $v'$ (i odwrotnie) w $e$

t. że $\mu_{G'}(e) = \mu_G(e \cup \{v\})$. Zwróćmy też uwagę na to, że $\mu_G(e \cup \{v\})$ nie zmieniała się w trakcie wykonania sztuczki. Taki $G'$ oznaczamy przez $G|_v$.

Teraz jesteśmy już gotowi (prawie) do wykonania kroku 3. Ten krok będziemy wykonywać przez indukcję. Indukcja ta będzie prowadzona po parametrze, który musimy jeszcze zdefiniować:

<u>Def</u> Mówimy, że $G$ jest <u>$m$-izolowany</u> jeżeli dla każdego $A \subset V_G$, $|A| \leq m$ mamy $\mu_G(A) = 0$

<u>Fakcik</u> Jeśli $G$ jest $k$-izolowany, to $G = 0$.

<u>Lemat (o macierzach)</u> Jeśli $|V_G| \leq 2k-1$ oraz $G$ jest $(k-1)$-izolowany, to $G = 0$

BSO przyjmijmy $|V_G| = 2k-1$

<u>Dowód</u> Niech $A_1 \ldots A_n$ oznaczają wszystkie $(k-1)$-elementowe podzbiory $V_G$, natomiast $B_1 \ldots B_{n'}$ – wszystkie $k$-elementowe podzbiory $V_G$. Zauważmy, że $n = \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k} = n'$.

Rozważmy równania $\left\{ \sum_{B_j \supset A_i} \mu(B_j) = \mu(A_i) = 0 \right\}_{i \in \{1 \ldots n\}}$ – są to definicje $\mu(A_i)$ oraz $(k-1)$-izolacji. Jeśli przyjmiemy $u = \begin{bmatrix} \mu(B_1) \\ \mu(B_2) \\ \vdots \\ \mu(B_n) \end{bmatrix}$, to ten układ równań możemy zapisać jako $Cu = 0$, gdzie $C$ (jak udowodniono w części macierzowej tego wykładu) jest macierzą maksymalnego rzędu. Stąd jedynym rozwiązaniem jest $u = 0$. □

Kolejny lemat sformułujemy w pełnej ogólności, ale udowodnimy go jedynie dla $k = 4$. Dodatkowo przyjmijmy, że wierzchołki hipergrafu $G$, to będą kolejne liczby całkowite dodatnie. Przyjmijmy też, że jeśli wypisujemy podzbiór $V_G$, to jego elementy są wypisywane w kolejności rosnącej.

Lemat | Niech $G$ będzie $(k-1)$-izolowanym. Wtedy istnieją $S_1, \dots, S_n$ - $(k,0)$-proste kombinacje liniowe HI t. że $G + \sum_{i=1}^{n} S_i = 0$.

$e_1, \dots, e_n \in V_G^{(k)}$ dokładniej: $S_i$ jest $(k, -\mu_G(e_i))$-pros...

Dowód $(k=4)$ | 1) Zdefiniujmy częściowy porządek na krawędziach: $e \leq_\omega e' \iff$ suma wierzchołków $e \leq$ suma wierzchołków $e'$. Niech $K$ będzie porządkiem liniowym na krawędziach t. że $e \leq_\omega e' \Rightarrow e \leq_K e'$.

Powiemy, że $e = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ spełnia $(*)$ dla $t$ jeśli $v_t \geq 2t$. Zauważmy, że jeśli $e$ spełnia $(*)$ dla każdego $t$, to istnieje $e' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ t. że $w_i < v_i$ dla każdego $i$ oraz $w_i \neq v_j$ dla każdych $i, j$. Rozważmy 4-hipergraf $S_e$ $(4, -\mu(e))$-prosty o pozytywnych wierzchołkach $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ i negatywnych $(w_1, w_2, w_3, w_4)$. Zauważmy, że $\mu_{G+S_e}(e) = 0$ oraz dla dowolnej $e''$ t. że $e \leq_K e''$, $e \neq e''$ mamy $\mu_G(e'') = \mu_{G+S_e}(e'')$. W związku z tym przechodząc po wszystkich krawędziach spełniających $(*)$ dla każdego $t$ w sposób malejący względem porządku $K$ ~~możemy wyed~~) i dla każdej z nich wykonując operację $G := G + S_e$ możemy wyredukować wszystkie krawędzie spełniające $(*)$ dla każdego $t$.

2) Weźmy teraz $e$ spełniającą $(*)$ dla $t \in \{2,3,4\}$ (ale nie dla $t=1$), czyli $e = \{1, v_2, v_3, v_4\}$. Wiemy, że $\underset{=0}{\mu(\{v_2, v_3, v_4\})}$. Jednocześnie dla dowolnej krawędzi $e' \supset \{v_2, v_3, v_4\}$, $e' \neq e$ mamy, że $e'$ spełnia $(*)$ dla $t=1$, zatem $\mu(e') = 0$. Stąd $\mu(e) = \sum_{\{v_2,v_3,v_4\} \subset e'} \mu(e') = \mu(\{v_2, v_3, v_4\}) = 0$. Czyli dowolna krawędź spełniająca $(*)$ dla $t \in \{2,3,4\}$ ma wagę zero.

3) Weźmy $e$ spełniającą $(*)$ dla $t \in \{3,4\}$, ale nie dla $t=2$. Stąd $e = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, gdzie $v_1, v_2 \in \{1,2,3\}$. Podobnie jak poprzednio, każda niezerowa krawędź $e' \supset \{v_3, v_4\}$ również nie spełnia $(*)$ dla $t=2$, zatem $e' = \{w_1, w_2, v_3, v_4\}$, gdzie $w_1, w_2 \in \{1,2,3\}$. Rozważmy $(G|_{v_4})|_{v_3} = G|_{\{v_3,v_4\}}$. Jest to 2-hipergraf 1-izolowany (bo $\mu_{G|_{\{v_3,v_4\}}}(v) = \mu_G(\{v, v_3, v_4\})$) o 3 wierzchołkach. Zatem z lematu o macierzach jest to graf zerowy. Stąd $0 = \mu_{G|_{\{v_3,v_4\}}}(\{v_1, v_2\}) = \mu_G(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \mu...$

~~To zachodzi~~) Zatem dla dowolnej $e$ spełniającej $(*)$ dla $t \in \{3,4\}$ mamy $\mu(e) = 0$

4) Weźmy e spełniające (*) dla $t=3$, ale spełniające (*) dla $t=4$. Stąd $e=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ t.że $v_1,v_2,v_3 \leq 5$. Niech ~~(e' = ...)~~ $e'=\{w_1,w_2,w_3,v_4\}$, $\mu(e')\neq 0$. Wtedy $e'$ nie może spełniać (*) dla $t=3$, zatem $w_1,w_2,w_3 \in \{1,2,3,4,5\}$. Rozważmy $G|_{v_4}$. Jest to 3-hipergraf 2-izolowany o co najwyżej 5 wierzchołkach, zatem z lematu o macierzach jest to hipergraf zerowy. Stąd $0=\mu_{G|_{v_4}}(\{v_1,v_2,v_3\}) = \mu_G(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}) = \mu_G(e)$. Z dowolności e wszystkie krawędzie spełniające (*) dla $t=4$ są zerowe.

5) ~~Weźmy e nie spełniające (*) dla t=4. Wtedy~~ Pozostały krawędzie niespełniające (*) dla $t=4$. Każda taka krawędź $e=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ spełnia $v_1,v_2,v_3,v_4 < 7$. Stąd G jest 4-hipergrafem 3-izolowanym o co najwyżej 7 wierzchołkach, zatem z lematu o macierzach G jest ~~graf~~ hipergrafem zerowym. □

Lemat/ Niech G będzie $l$-izolowany. Wtedy istnieją $S_1 \dots S_n$ – $(l+1,\cdot)$-proste kombinacje liniowe HI t.że $G+\sum_{i=1}^{n} S_i$ jest $(l+1)$-izolowany.

Dowód/ Jeżeli $l=k-1$, to z poprzedniego lematu wynika teza. Przyjmijmy $l<k-1$. Niech $F=(V_G,\mu_F)$, gdzie $\mu_F(e) := \mu_G(e)$ dla $e\in V_G^{(l+1)}$. Taki F będzie $l$-izolowany, ponieważ dla dowolnego $A\in V_G^{(l)}$ mamy: $\mu_F(A) = \sum_{\substack{B\supset A\\ |B|=l+1}} \mu_F(B) = \sum_{\substack{B\supset A\\ |B|=l+1}} \mu_G(B) = \sum_{\substack{B\supset A\\ |B|=l+1}} \sum_{\substack{|e|=k\\ e\supset B}} \mu_G(e) =$
$= \sum_{\substack{e\supset A\\ |e|=k}} (k-l)\mu_G(e) = (k-l)\sum_{\substack{e\supset A\\ |e|=k}} \mu_G(e) = (k-l)\cdot 0 = 0$.

(l+1)-hipergrafy

Z poprzedniego lematu istnieją $B_1 \dots B_n \in V_F^{(l+1)}$, $S_1' \dots S_n'$ t.że $S_i'$ jest $(l+1,-\mu_F(B_i))$-prosty oraz $F+\sum_{i=1}^{n} S_i' = 0$. Weźmy $S_i$ – $(l+1,-\mu_G(B_i))$-prosty k-hipergraf o tych samych pozytywnych i negatywnych wierzchołkach co $S_i'$ oraz dowolnym zbiorze neutralnych wierzchołków (tzn. dowolnym rozłącznym z pozytywnymi i negatywnymi). Dla dowolnego B mocy $\leq l+1$ mamy $\mu_{G+\sum S_i}(B) = \mu_{F+\sum S_i'}(B) = 0$. Stąd $G+\sum S_i$ jest $(l+1)$-izolowany. □

Prosta indukcja kończy dowód głównego twierdzenia.