Macierze

Oznaczenie Rząd macierzy M (czyli liczbę liniowo niezależnych wierszy) będziemy oznaczać przez r_M. Rząd macierzy jest <u>maksymalny</u> jeśli wszystkie jej wiersze (lub kolumny) są liniowo niezależne.

Fakt/przypomnienie Jeśli M jest macierzą blokową postaci $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, gdzie A i B są macierzami kwadratowymi to $r_M \geq r_A + r_B$. W szczególności, jeśli rzędy macierzy A i B są maksymalne, to rząd macierzy M też jest maksymalny. $\square$

Definicja Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$, A jest zbiorem mocy a, $a \geq c \geq b$. Macierz jest <u>macierzą Knesera</u>, ~~jeżeli~~ oznaczaną przez $\langle a, b, c \rangle$ jeżeli:

1. Kolumny są indeksowane podzbiorami A mocy b.
2. Wiersze są indeksowane podzbiorami A mocy c.
3. $\langle a,b,c \rangle(B,C) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subseteq C$, gdzie B jest indeksem kolumny natomiast C jest indeksem wiersza.

Uwaga Macierze Knesera są zdefiniowane z dokładnością do permutacji wierszy i kolumn. My przyjmujemy, że mamy ustalony porządek na elementach zbioru A i kolumny oraz wiersze indeksujemy zgodnie z porządkiem leksykograficznym, rosnąco. (zakładamy też, że elementy zbiorów są uporządkowane w rosnącej kolejności)

Przykłady

1. $$\langle 4,1,3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$\langle 4,1,2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $$\langle 5,2,3 \rangle = \begin{array}{c|cccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 14 & 24 & 34 & 15 & 25 & 35 & 45 \\ \hline 123 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 124 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 134 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 234 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 125 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 135 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 235 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 145 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 245 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 345 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Twierdzenie) Każda macierz Knesera $\langle 2k+1, k, k+1\rangle$ ma maksymalny rząd.

Jest to najważniejszy wynik tego wykładu i reszta tego wykładu zostanie poświęcona na udowodnienie tego twierdzenia.

Lemat (dekompozycja macierzy)

1) $\langle a, b, b\rangle$ jest macierzą identyczności

2) $\langle a+1, b, c\rangle = \begin{bmatrix} \langle a, b, c\rangle & 0 \\ \langle a, b, c-1\rangle & \langle a, b-1, c-1\rangle \end{bmatrix}$ dla $b < c$

Dowód) 1) $\langle a, b, b\rangle(X, Y) = 1 \iff X \subseteq Y$, ale $|X| = |Y|$, zatem $X = Y \iff X \subseteq Y$. Stąd teza.

2) Niech A będzie zbiorem mocy $a+1$, użytym do indeksowania kolumn i wierszy naszej macierzy. Niech x będzie największym elementem A. Podzielmy kolumny i wiersze na 2 części: te zawierające x i te niezawierające x. Przeanalizujmy powstałe bloki:

(a) Jeśli wiersze i kolumny oba zawierają x, to blok jest taki sam jak macierz $\langle a, b-1, c-1\rangle$ (bo wszystko zawiera x, także równie dobrze mogłoby tego x nie być)

(b) Jeśli kolumny zawierają x, a wiersze nie, to dostajemy zera (bo kolumna nie może być podzbiorem wiersza).

(c) Jeśli wiersze zawierają x, a kolumny nie, to dostajemy $\langle a, b, c-1\rangle$ (bo x „nie pomaga" wierszowi w zawieraniu kolumny)

(d) Jeśli wiersze i kolumny nie zawierają x, to dostajemy $\langle a, b, c\rangle$ (bo x nie ma wpływu na kolumny/wiersze).

Jest to dokładnie struktura, którą chcieliśmy otrzymać. $\square$

Lemat) Jeśli $\langle a, a-b, b\rangle$ oraz $\langle a, a-b-1, b+1\rangle$ mają maksymalne rzędy, to $\langle a+1, a-b, b+1\rangle$ ma maksymalny rząd.

Dowód) Niech A będzie zbiorem mocy $a+1$, użytym do indeksowania kolumn i wierszy, niech x będzie największym elementem A. Z lematu o dekompozycji macierzy dostajemy: ~~$a+1$ b~~

te macierze są kwadratowe

$$\langle a+1, a-b, b+1\rangle = \begin{bmatrix} \langle a, a-b, b+1\rangle & 0 \\ \langle a, a-b, b\rangle & \langle a, a-b-1, b\rangle \end{bmatrix}$$

natomiast te nie są.

Niech $B \subseteq A$ mocy $a-b$ będzie indeksem wiersza niezawierającym x. Dla $\alpha \in B$ przyjmijmy oznaczenie $C_{B,\alpha} := B \cup \{x\} \setminus \{\alpha\}$.

Przeprowadźmy na naszej macierzy następujące operacje dla każdego $B \not\ni x$:

1. Pomnóżmy wiersz oznaczony indeksem B przez $-((b+1)-(a-b))$

2. Dodajmy do wiersza z indeksem B wiersze $C_{B,\alpha}$, dla każdego $\alpha \in B$.

Sprawdźmy, co się dzieje z ~~(niezerowymi)~~ wartościami w odpowiednich kolumnach w wyniku tych operacji. Oznaczmy indeks kolumny przez Y

a) Jeśli $Y \not\ni x$

- Jeśli $Y \not\subset B$, to $Y \not\subset C_{B,\alpha}$ dla każdego α, zatem $M(B,Y)=0$
- Jeśli $Y \subset B$, to:

$M(B,Y) = -((b+1)-(a-b)) + \sum_{\alpha\in B} M(C_{B,\alpha}, Y) =$

$= -((b+1)-(a-b)) + \sum_{\alpha \in Y} 0 + \sum_{\alpha\in B\setminus Y} 1 =$

$= -((b+1)-(a-b)) + ((b+1)-(a-b)) = 0$

b) Jeśli $Y \ni x$

- Jeśli $Y\setminus\{x\} \not\subset B$, to $Y\setminus\{x\} \not\subset C_{B,\alpha}$ dla każdego α, zatem $M(B,Y)=0$
- Jeśli $Y\setminus\{x\} \subset B$, to: ~~$C_{B,\alpha}$~~

$M(B,Y) = \sum_{\alpha\in B} M(C_{B,\alpha}, Y) = \sum_{\alpha\in B\setminus Y} 1 =$

$= (b+1)-(a-b-1)$

W szczególności z punktu a) wynika, że w lewej górnej części macierzy mamy jedynie zera. Natomiast z punktu b) wynika, że w prawej górnej części macierzy pojawi się w niektórych polach liczba $(b+1)-(a-b-1) =: c$. Będą to pola, w których $Y \setminus \{x\} \subseteq B$. Ale to jest dokładnie definicja macierzy $\langle a, a-b-1, b+1 \rangle \cdot c$.

$\uparrow$ indeks kolumny $\quad \uparrow$ indeks wiersza

Stąd ~~[illegible]~~ jeśli $\langle a, a-b, b \rangle$ oraz $\langle a, a-b-1, b+1 \rangle$ mają maksymalne rzędy, to z pierwszego lematu $\langle a+1, a-b, b+1 \rangle$ też (przekształcenia nie zmieniały rzędu całej macierzy).

~~(Dowód twierdzenia)~~ Twierdzenie | Dla $a \geq b \geq a-b$ macierz $\langle a, a-b, b \rangle$ ma maksymalny rząd.

Dowód | Jeśli $b = a-b$, to $\langle a, b, b \rangle = \langle a, b, a-b \rangle$ jest macierzą identyczności, zatem ma maksymalny rząd.

Jeśli $a = b$, to $a-b = 0$ i $\langle a, 0, a \rangle$ jest macierzą ~~[illegible]~~ 1×1 złożoną z pola zawierającego jedynkę, zatem jest maksymalnego rzędu.

Jeśli $a > b > a-b$, to ~~$(a \geq b+1 \geq a-b-1)$~~ $a-1 \geq b \geq a-b-1$ oraz $a-1 \geq b-1 \geq a-b$, czyli korzystając z poprzedniego lematu dostajemy tezę przez trywialną indukcję. □

Główne twierdzenie tego wykładu jest szczególnym przypadkiem powyższego twierdzenia.