PDEs I: Tutorial 1

4.03.2021

A) Klasyczne równania (3)

$\rightsquigarrow$ hiperboliczne $\to$ równanie transportu

$\rightsquigarrow$ eliptyczne $\to$ Laplace, Poisson.

$\rightsquigarrow$ paraboliczne $\to$ ciepła.

B) Przestrzenie Sobolewa !!!

C) Zastosowanie (B) do (A): równania eliptyczne, parabolicznych

Zaliczenie:

- egzamin ustny
- zaliczone ćwiczenia:
  - zadania domowe (2 co tydzień, oddawane przez moodle'a w parach) → 60%
  - aktywność ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ za aktywność kamere) → 80%
  - referat (15-20 min). + raport w TeXu.

Równanie transportu :

$$u(\underset{\text{czas}}{t}, \underset{\text{przestrzeń}}{x}) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$ dane

Zad. 1

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{dane} \end{cases} \qquad (*)$$

(A) Istnieje rozwiązanie. Jeżeli u spełnia $(*)$ to

$t \longmapsto u(t, x+tb)$ jest stałe.

$$\frac{d}{dt} u(t, x+tb) = u_t(t, x+tb) + u_x(t, x+tb) \cdot b =$$

$$= 0$$

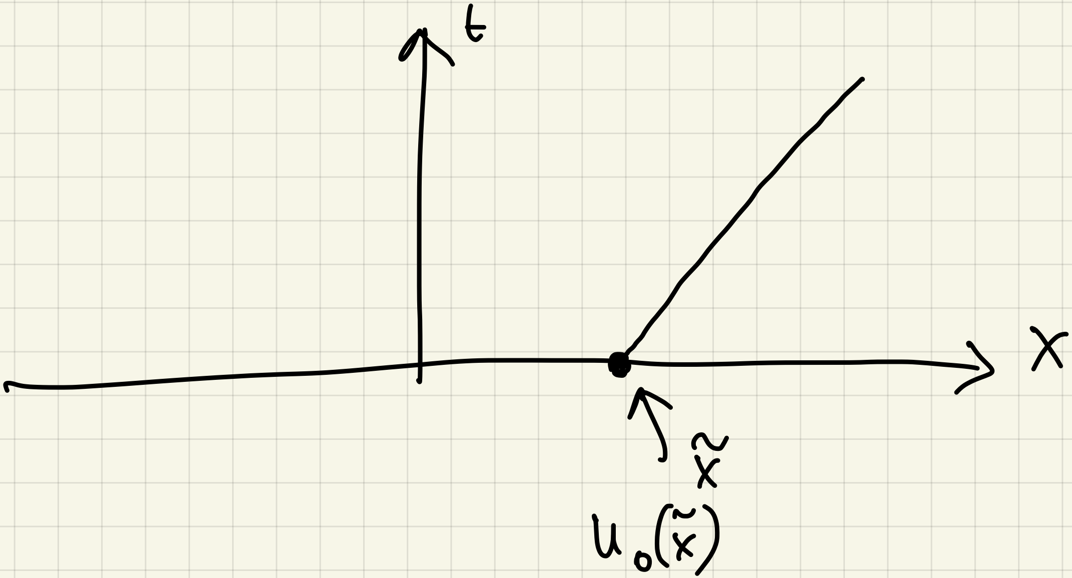
$$\forall_t \quad u(t, x+tb) = u(0, x) = u_0(x)$$

$$u(t, y) = u_0($$

$$u(t, \underbrace{x+tb}_{y}) = u_0(x)$$

$$x = y - tb$$

$$u(t,y) = u_0(y-tb)$$



$u(t,y) = u_0(y-tb)$ spełnia to równanie:

$$\partial_t u + b \cdot \partial_x u = u_0'(y-tb)\left[-b+b\right] = 0.$$

(B) Jednoznaczność:

Zał. że $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ spełniają

$$\begin{aligned} \partial_t u^{(1)} + b\,\partial_x u^{(1)} &= 0 \\ \partial_t u^{(2)} + b\,\partial_x u^{(2)} &= 0 \end{aligned} \implies$$

$$u^{(1)}(0,x) = u^{(2)}(0,x) = u_0(x).$$

$$\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}.$$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + b\,\partial_x \tilde{u} = 0. \\ \tilde{u}(0,x) = 0 \end{cases}$$

Z części (4) $t \mapsto \tilde{u}(t, x+tb)$ jest stała.

$$\tilde{u}(t, \underbrace{x+tb}_{y}) = \tilde{u}(0,x) = 0$$

$$\tilde{u}(t,y) = 0 \implies u^{(1)}(t,x) = u^{(2)}(t,x).$$

✓ Istnienie

✓ Jednoznaczność

✓ Stabilność

Jeśli $u_0(x)$ jest Lipschitzowski

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq C\,|x-y|. \qquad \exists_C$$

i rozważymy $u^{(1)}(t,x)$, $u^{(2)}(t,x)$ rozwiązania z b^1 i b^2 to $|u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)| \leq t\,|b^1 - b^2|$.

$$u^{(1)}(t,x) = u_0(x-b^1 t)$$

$$u^{(2)}(t,x) = u_0(x-b^2 t)$$

$$|u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)| \leq |u_0|_{Lip} \, |(x-b^1 t) - (x-b^2 t)|$$

$$= t\,|u_0|_{Lip}\,|b^1 - b^2|. \qquad \checkmark.$$

V Stabilność na war. początkowe.

$u^{(1)}$ – rozw. z $u_0^{(1)}$

$u^{(2)}$ – rozw z $u_0^{(2)}$.

Cel:

$\leq \|u_0^{(1)} - u_0^{(2)}\|$

$$u^{(1)}(t,x) = u_0^{(1)}(x - tb)$$

$$u^{(2)}(t,x) = u_0^{(2)}(x - tb)$$

$$|u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)| = |u_0^{(1)}(x-tb) - u_0^{(2)}(x-tb)|$$

$$\leq \|u_0^{(1)} - u_0^{(2)}\|_\infty$$

V Istnienie

V Jednoznaczność

V Stabilność na zal. parametry

Chcemy od każdego PPE

(E) "zasada maksimum"

Jeżeli u spełnia równanie transportu to

$$\|u\|_\infty \le \|u_0\|_\infty$$

<u>D-d</u>:

$u_0(x-tb)$

(F) Semigroup property

$f \in C^1(\mathbb{R})$

Def. operator $S_t f$ to rozwiązanie równania z war. początkowym f.

$$S_t S_s f = S_{t+s} f$$

$$(S_s f)(x) = f(x - sb)$$

$$S_{t+s} f.$$

$$\parallel$$

$$(S_t S_s f)(x) = f(x - sb - tb) = f(x - b(s+t))$$

✓

Zad. 2

$$u(t,x) : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\partial_t u(t,x) + b \cdot \nabla_x u(t,x) = 0 \qquad b \in \mathbb{R}^n.$$

Teraz $t \mapsto u(t, \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{tb}_{\in \mathbb{R}^n})$ jest stałe

$$\frac{d}{dt}\left[u(t, x+tb)\right] = u_t(t, x+\underbrace{tb}) + b \cdot \nabla_x u(t, x+tb)$$

$$= 0.$$

$$u(t,y) = u_0(y - \underbrace{t}b).$$

$\boxed{b \equiv \text{prędkość}}$

Zad. 3

$$u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b \cdot \nabla_x u(t,x) = c\, u(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

$$b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$t \mapsto u(t, x+tb).$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t, x+tb) = c\, u(t, x+tb). \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t, x+tb) = e^{ct} \cdot u_0(x)$$

$$u(t,y) = u_0(y - tb.) e^{ct}$$

CEL:

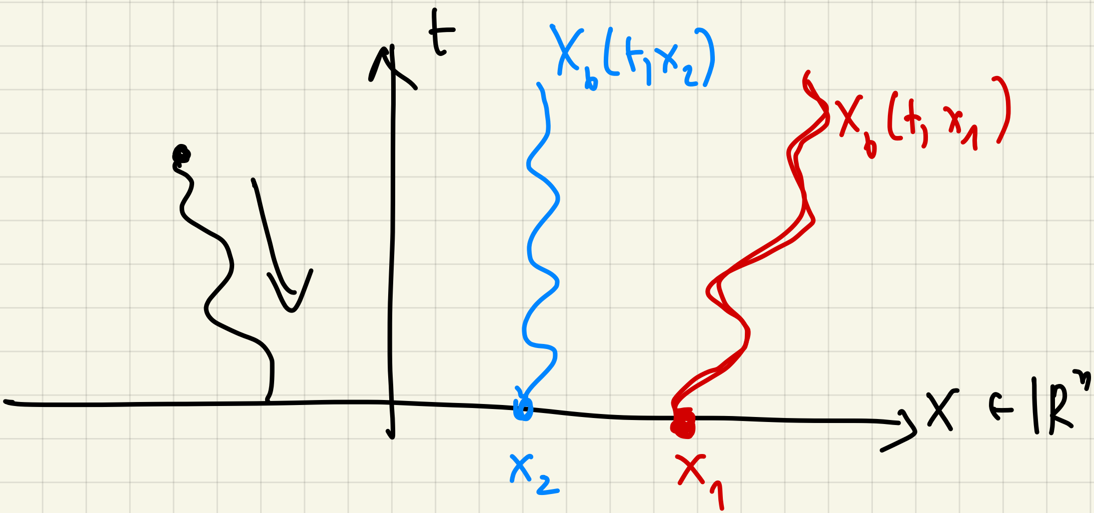
$$b(t,x) \qquad\qquad c(t,x)$$

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x) \cdot \nabla_x u(t,x) = c(x) u(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

ZAD. 4 $\quad b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

flow of the vector field $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_t X_b(t,x) = b(X_b(t,x)) \\ X_b(0,x) = x \end{cases}$$

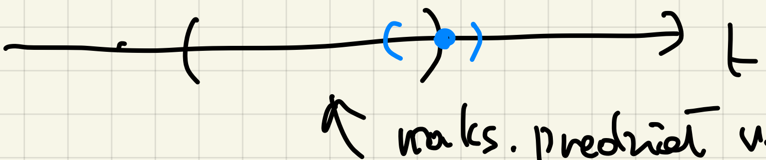


$b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest Lipschitzowskie.

(A) $X_b(t, x)$ jest dobrze zdefiniowane dla $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

[przyp: $\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{x}(t) \\ x(0) = \varepsilon \end{cases} \to$ wybucha w skończonym czasie]

Tw: Jeżeli rozwiązania nie da się przedłużyć ze skończonego przedziału czasu to wybucha.



maks. przedział rozw.

$t \mapsto X_b(t,x)$ jest dobrze zdefiniowane $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_b(t,x) = b(X_b(t,x)) \\ X_b(0,x) = x. \end{cases}$$

$$X_b(t,x) = X_b(0,x) + \int_0^t b(X_b(s,x))\,ds =$$
$$= x + \int_0^t b(X_b(s,x))\,ds$$

$$\underbrace{|X_b(t,x)|} \leq x + \int_0^t |b(\underbrace{X_b(s,x)})|\,ds \leq$$

$$x + \int_0^t \underbrace{|b(X_b(s,x)) - b(0)|}_{\leq |b|_{Lip} |X_b(s,x)|} ds + \int_0^t |b(0)| ds \quad = t \cdot |b(0)|$$

$$\Rightarrow \underline{|X_b(t,x)|} \leq x + t|b(0)| + |b|_{Lip} \int_0^t \underline{|X_b(s,x)|} ds$$

nicr. Grönwalla

$$f(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t f(s)\, ds \Rightarrow$$

$$f(t) \leq C_1 e^{C_2 t}$$

$$|X_b(t,x)| \leq \left(x + t|b(0)|\right) e^{|b|_{Lip} t} < \infty \Rightarrow \text{globalne istnienie}$$

nier. Grönwalla

$$f(t) \le \underbrace{C_1 + \int_0^t C_2 f(s)\,ds} \implies f(t) \le C_1 e^{C_2 t}$$

to spełnia

$$\dot f(s) = C_2 f(s) \qquad \implies f(s) = C_1 e^{C_2 t}$$

$$f(0) = C_1$$

[Na Wiki dowody]

(B) $X_b(t,x)$ też ma własność półgrupową.

Chcemy $\forall_{t,s} \quad X_b(t, X_b(s,x)) \overset{?}{=} X_b(t+s,x)$

Ustalmy $s \in \mathbb{R}$.

$$t \mapsto X_b(t, X_b(s,x)) = y(t)$$

$$t \mapsto X_b(t+s,x) = z(t).$$

$$y(0) = X_b(s,x)$$
$$z(0) = X_b(s,x)$$

$$t \mapsto X_b(t, X_b(s,x)) = y(t)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = \partial_t X_b(t, X_b(s,x)) = b(X_b(t, X_b(s,x)))$$

$$= b(y(t))$$

$$z(t) = X_b(t+s,x)$$

$$\frac{d}{dt} X_b(t+s,x) = \partial_t X_b(t+s,x) = b(X_b(t+s,x))$$

$$= b(z(t)).$$

$\Rightarrow$ z jednoznaczności dla ODE mamy $y(t) = z(t)$.

(c) $x \longmapsto X_b(t,x)$ jest lipschitzowskie

$$\left| X_b(t,x) - X_b(t,y) \right| \leq C\,|x-y|$$

$$x + \int_0^t b(X_b(s,x))\,ds \qquad y + \int_0^t b(X_b(s,y))\,ds$$

$$\begin{cases} \partial_t X_b(t,x) = b(X_b(t,x)) \\ X_b(0,x) = x \end{cases}$$

$$|X_b(t,x) - X_b(t,y)| \leq |x-y| +$$

$$+ \int_0^t |b(X_b(s,x)) - b(X_b(s,y))| \, ds$$

$$\leq |x-y| + \int_0^t |X_b(s,x) - X_b(s,y)| \, ds$$

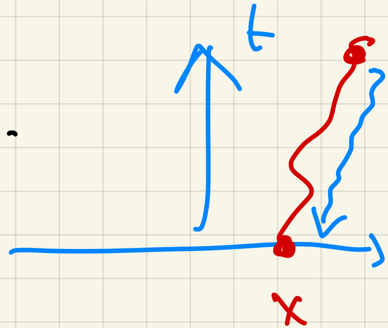
$$\Rightarrow |X_b(t,x) - X_b(t,y)| \leq |x-y| e^t \qquad \checkmark.$$

(D) Jak $b \in C^1$, $\quad x \longmapsto X_b(t,x)$ jest C^1 różniczk. na warunek początkowy.

(E) $x \longmapsto X_b(t,x)$ jest odwracalne i odwrotność

równa się $x \longmapsto X_b(-t,x)$

<u>Bo:</u> $X_b(s, X_b(t,x)) = X_b(t+s, x)$.



$s = -t$

$X_b(-t, X_b(t,x)) = X_b(0, x) = x$.

(F) $x \longmapsto X_b^{-1}(t,x)$ jest Lipschitzowska

(jak $b \in C^1$, to to przekszt. jest C^1).

$$x \longmapsto X_b(t,x)$$

$$X_b^{-1}(t,x) = X_b(-t,x).$$

Zad. 5

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x)\cdot \nabla_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{dany} \end{cases}$$

$X_b(t,x)$ flow pola b.

Pok. że $t \mapsto u(t, X_b(t,x))$ jest stałe.

$$\frac{d}{dt} u(t, X_b(t,x)) = u_t(t, X_b(t,x)) + \partial_t X_b(t,x) \cdot \nabla_x u(\ldots)$$

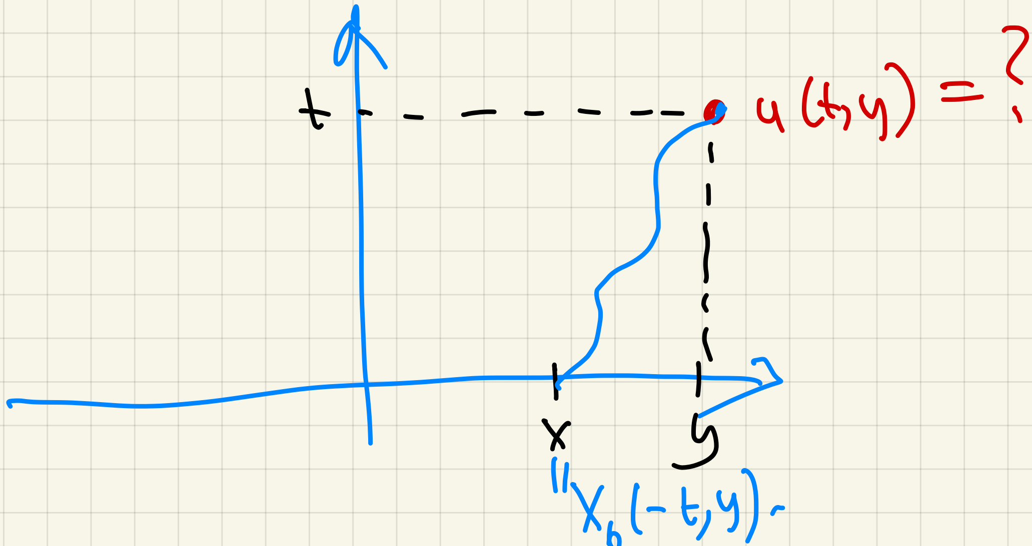
$$= u_t(t, X_b(t,x)) + b(X_b(t,x)) \cdot \nabla_x u(t, X_b(t,x))$$

$$= 0$$

$$u(t, X_b(t,x)) = u(0,x) = u_0(x)$$

$$X_b(t,x) = y \qquad x = X_b(-t,y)$$

$$u(t,y) = u_0(X_b(-t,y)).$$



Równania hiperboliczne (przykład PDE)

takie, że w równaniu występują tylko pochodne pierwszego rzędu.

$$\partial_t u(t,x) + b \cdot \nabla_x u(t,x) = 0$$

$$u_t + u u_x = 0$$

(Evans, rozdział 3.2)

każde równanie hip. ma takie własności.

Zad. 8

$$\begin{cases} u_t + x\,u_x = 0 \\ u(0,x) = \cos x \end{cases} \qquad u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Zał. że istnieje $X(t,x)$ krzywa t. że $X(0,x) = x$ taka, że $t \mapsto u(t, X(t,x))$ jest stałe.

$$0 = u_t(t, X(t,x)) + \underline{X_t(t,x)} \cdot \overline{u_x(t, X(t,x))}$$

$$0 = u_t(t, X(t,x)) + \underline{X(t,x)} \cdot u_x(t, X(t,x))$$

$$\begin{cases} X_t(t,x) = X(t,x) \\ X(0,x) = x \end{cases} \Rightarrow X(t,x) = xe^t$$

$$u(t, X(t,x)) = u(0, \underbrace{X(0,x)}_{= x}) = u_0(x) = \cos x$$

$$u(t, \underbrace{xe^t}_{y}) = \cos x$$

$$x = y \cdot e^{-t}$$

$$u(t,y) = \cos(ye^{-t})$$

$$t = 0$$

$$u(0,y) = \cos(y)$$

$$\partial_t u + x\,\partial_x u = 0 \qquad u(t,x) = \cos(x e^{-t})$$

$$\partial_t u = -\sin(x e^{-t})\,(-x e^{-t})$$

$$x\,\partial_x u = -\sin(x e^{-t})\, e^{-t} x$$

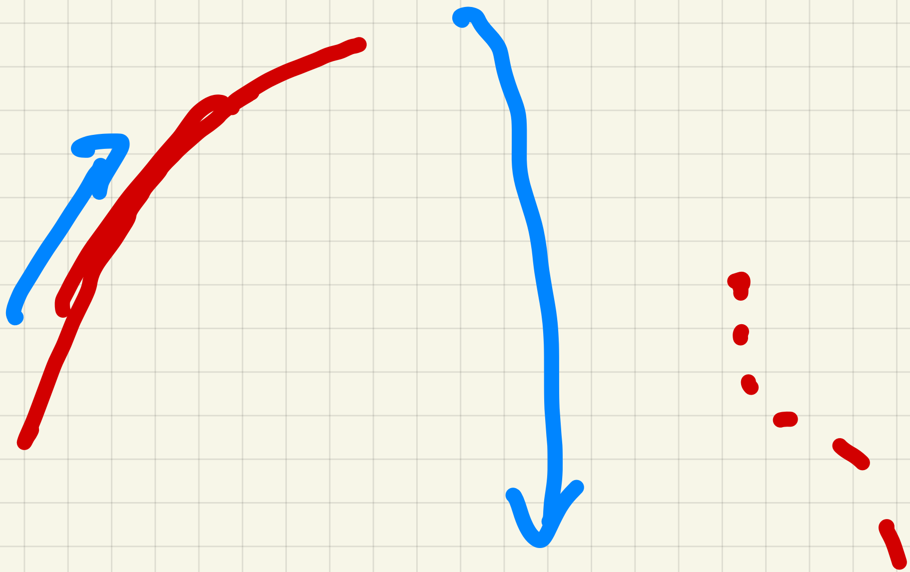
to jest nieczywiście rozw.

$$u_t + b\, u_x = 0$$

nie jest Lipschitzowskie.

'80 DiPerna–Lions

'04 Ambrosio



Uczyć się bo
Łatwo wypaść...