PDEs I: Tutorial 11.

20.05.2021

WŁOŻENIA :

continuous embedding.

u jest funkcją z $W^{1,p}$ $\Rightarrow$ u jest funkcją w jakiejś innej przestrzeni. X

Włożenia będą ciągłe: $I : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow X$ jest ciągły tzn. $\exists_C$ $\| I(u) \|_X \leq C \| u \|_{W^{1,p}}$

$$\| u \|_X \leq C \| u \|_{W^{1,p}},$$

Włożenia będą ciągłe: $I : W^{1,p}(\Omega) \to X$ jest ciągły tzn. $\exists_C$ $\|I(u)\|_X \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$

$\|u\|_X \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset X$$

ciągłe włożenie

<u>Tw. Sobolewa</u> $1 \leq p < n$, Ω ogr., $\partial\Omega$ jest C^1

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

dla wszystkich $q < p^*$

wykładnik Sobolewa $p^* = \frac{np}{n-p}$.

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \text{(oczywiste)}$$

ale $p^* > p \iff \frac{np}{n-p} > p \quad p \neq 0 \quad \frac{n}{n-p} > 1.$

Tw. Morreya $p > n$, Ω jest ogr, $\partial\Omega$ jest C^1

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \gamma \in (0,1)$$

funkcje höldernowskie z wykładnikiem gamma $\in (0,1)$

$$\|u\|_\infty + |u|_{Höl,\gamma}$$

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$$

$$\gamma = 1 - \frac{n}{p}$$

Było takie zadanie, że (wymiar 1)

$u \in W^{1,p}(0,1)$ to u jest ciągłe i

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C\, |x-y|^{1-\frac{1}{p}}$$

ZWARTE WŁOŻENIA

Jeżeli $\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$

i on jest ograniczony w $W^{1,p}(\Omega)$

to $\{u_n\}$ ma podciąg zbieżny w X. $(X = L^q)$

$\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ jest ogr $\Rightarrow \exists\, a_{n_k} \to a$

z tw. B-W.

$\{y_n\}_n$ jest ciągiem ogr. w Y nieskoń. wym.

to niekoniecz. się zdarza że podciągu mocno zb.

nie ma.

w H — przestrzeni Hilberta, $\{e_n\}_{n \geq 1}$,

$$\|e_n - e_m\|_H^2 = \|e_n\|_H^2 + \|e_m\|_H^2 = 2.$$

$$\left(e_n \rightharpoonup 0 \quad w\ H\right)$$ z nier. Bessela.

Ciągłe włożenie: $W^{1,p}(\Omega) \subset X$

Zwarte włożenie: $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset X$.

$(\Subset)$

Twierdzenie (Reillich-Kondrachov)

$1 \leq p < n$, Ω jest ogr., $\partial\Omega$ jest C^1

Wówczas $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ $\forall_{q < p^*}$.

(Historia, we wtorek na wyk)

- $p > n$?
- $p = n = 1$?

(luka w Evansie)

E1 Udowodnimy sobie R-K dla $p=1$ (i $n=1$)

$$W^{1,1}(I) \subset\subset L^1(I)$$

czyli $\{u_n\}_{n\geq 1}$ jest ogr. w $W^{1,1}(I)$ to istnieje podciąg zbieżny <u>mocno</u> w $L^1(I)$.

Krok 1: Istnieje $\{\tilde{u}_n\}_{n\geq 1} \subset W^{1,1}(\mathbb{R})$,

mają nośnik na $J \supset I$ zwarty oraz

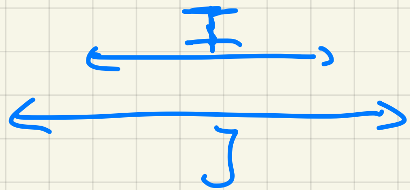
$$\|\tilde{u}_n\|_{W^{1,1}(J)} \leq C\|u_n\|_{W^{1,1}(I)}.$$

(przedłużenie),

Było takie tw. że na $W^{1,p}(\Omega)$ istnieje op.

przedłużenia do $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

(tw. o przedłużeniu, extension theorem)



<u>Krok 2</u> $\quad u_m^{\varepsilon} := u_m * \eta_{\varepsilon}$

$(\varepsilon \to 0)$ $\quad u_m^{\varepsilon} \longrightarrow u_m$ w $L^1(J)$ jednostajnie po m.

Na chwilę załóżmy, że u_m jest gładkie

$$u_m^{\varepsilon}(x) - u_m(x) = \int u_m(x-y)\,\eta_{\varepsilon}(y)\,dy - u_m(x)$$

$$= \int_{B(0,\varepsilon)} \big(u_m(x-y) - u_m(x)\big)\,\eta_{\varepsilon}(y)\,dy$$

$$\int_{B(0,\varepsilon)} \left(\int_{x-y}^{x} u_m'(s)\,ds \right) \eta_{\varepsilon}(y)\,dy$$

ZAPAMIĘTAJ!

(A) Jak f jest klasy C^1 to mamy:

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(u)\,du$$

(B) Jak f jest klasy $W^{1,p}(I)$ to mamy:

dla p.w. t, s

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(u)\,du.$$

arg:

$f \in W^{1,p}(I) \Rightarrow$

$\exists f_n \to f \quad W^{1,p}(I)$

L^p, p.w., ...

$$u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \int u_m(x-y)\,\eta_\varepsilon(y)\,dy - u_m(x)$$

$$= \int_{B(0,\varepsilon)} \big(u_m(x-y) - u_m(x)\big)\,\eta_\varepsilon(y)\,dy$$

$$= \int_{B(0,1)} \big(u_m(x-\varepsilon z) - u_m(x)\big)\,\eta(z)\,dz$$

$$= \int_{B(0,1)} \left[\int_0^1 \frac{d}{dt} u_m(x - \varepsilon t z)\,dt\right] \eta(z)\,dz$$

$$z = \frac{y}{\varepsilon} \qquad dz = \frac{1}{\varepsilon}\,dy \qquad \frac{1}{\varepsilon}\,\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$= \int_{B(0,1)} \left[\int_0^1 \frac{d}{dt} u_m(x - \varepsilon t z)\, dt \right] \eta(z)\, dz$$

$$= \int_{B(0,1)} (-\varepsilon z) \int_0^1 u_m'(x - \varepsilon t z)\, dt\, \eta(z)\, dz$$

$$|u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 |u_m'(x - \varepsilon t z)|\, \eta(z)\, dt\, dz$$

$$|u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 |u_m'(x-\varepsilon t z)| \eta(z) \, dt \, dz$$

$$\int_J |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_J \int_{B(0,1)} \int_0^1 |u_m'(x-\varepsilon t z)| \eta(z) \, dt \, dz \, dx$$

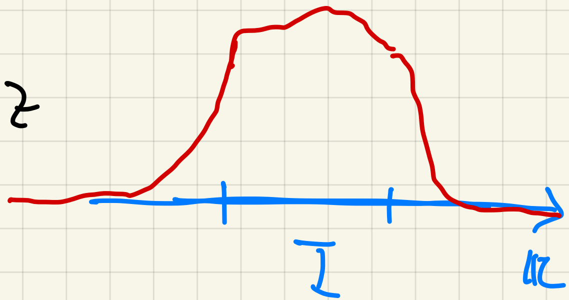
$$= \varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 \left[\int_J |u_m'(x-\varepsilon t z)| \, dx \right] dt \, dz.$$

$$= \varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 \left[\int_J |u_m'(\underbrace{x - \varepsilon t z}_{v})| \, dx \right] dt \, dz .$$

to jest przesunięcie o $|\varepsilon t z| \leq \varepsilon$ bo $|t|, |z| \leq 1$

$$= \varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 \int_{J \pm \varepsilon t z} |u_m'(v)| \, dv \, dt \, dz$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 \| u_m' \|_{L^1} \, dt \, dz$$



$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(J)} \leq \varepsilon \underbrace{\|Du_m\|_{L^1(J)}}_{\text{ogr.}}$$

$$u_m^\varepsilon \to u_m \text{ w } L^1(J) \text{ przy } \varepsilon \to 0$$

jednostajnie po m.

No. wyk: **Łatwo** $L^p \longrightarrow L^1$

można $L^1 \longrightarrow L^p$.

Step 3: $\forall_{\varepsilon > 0}$ $\{u^\varepsilon_m\}_{m=1,2,\ldots}$ spełnia

zał. tw. Arzeli-Ascoli.

1) $$|u^\varepsilon_m(x)| = \left| \int u_m(x-y)\, \eta^\varepsilon(y)\, dy \right|$$

$$\leq \|\eta^\varepsilon\|_\infty \int |u_m(x-y)|\, dy$$

$$\leq \|u_m\|_{L^1(J)} \underbrace{\|\eta^\varepsilon\|_{L^\infty}}_{1/\varepsilon} \leq \frac{\|u_m\|_{L^1}}{\varepsilon}.$$

2) $$|Du_m^\varepsilon(x)| = \left| \int Du_m(x-y)\,\eta^\varepsilon(y)\,dy \right|$$

$$\leq \|Du_m\|_{L^1} \, \|\eta^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq C \, \|Du_m\|_{L^1} \, \frac{1}{\varepsilon}$$

Step 4:

$$\begin{cases} 1) \quad \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1} \to 0 \quad \varepsilon \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{jednost. po } m \\ 2) \quad \{u_m^\varepsilon\}_m \text{ jest zwarty } \forall_{\varepsilon > 0}. \end{cases}$$

Ustalmy $\delta > 0$. Pokażemy, że istnieje podciąg $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ taki, że

$$\limsup_{k,l \to \infty} \|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{L^1(J)} \leq \delta.$$

Ustalmy $\delta > 0$. Pokażemy, że istnieje podciąg $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ taki, że

$$\limsup_{k,l\to\infty} \|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{L^1(J)} \leq \delta.$$

$$\|u_{m_k} - u_{m_l}\| \leq \|u_{m_k} - u^{\varepsilon}_{m_k}\| + \|u^{\varepsilon}_{m_k} - u^{\varepsilon}_{m_l}\| + \|u^{\varepsilon}_{m_l} - u_{m_l}\|$$

$$\limsup_{m_k, m_l \to \infty} \| u_{m_k} - u_{m_l} \| \leq \underbrace{\| u_{m_k} - u^{\varepsilon}_{m_k} \|}_{\leq \delta/3} +$$

$$\underbrace{\limsup_{m_k, m_l \to \infty} \| u^{\varepsilon}_{m_k} - u^{\varepsilon}_{m_l} \|}_{= 0.} + \underbrace{\| u^{\varepsilon}_{m_l} - u_{m_l} \|}_{\leq \delta/3} \leq \delta.$$

1) $\| u^{\varepsilon}_m - u_m \|_{L^1} \to 0 \quad \varepsilon \to 0$ jednost. po m

Dobieramy ε małe żeby $\| u^{\varepsilon}_m - u_m \| \leq \frac{\delta}{3}.$

2) $\{u^\varepsilon_m\}_m$ jest zwarty $\forall_{\varepsilon>0}$.

czyli $\{u^\varepsilon_m\}_m$ sp. A-A więc $\exists\, u^\varepsilon_{m_\ell}$

$$u^\varepsilon_{m_\ell} \rightrightarrows u$$

$$\limsup_{m_k, m_\ell \to \infty} \| u^\varepsilon_{m_\ell} - u^\varepsilon_{m_k} \|_{L^1} \leq$$

$$\leq \limsup_{m_k, m_\ell \to \infty} \| u^\varepsilon_{m_\ell} - u^\varepsilon_{m_k} \|_{L^\infty} = 0.$$

$$\int_U |f| \leq \text{miara}(U) \, \|f\|_\infty$$

Mamy podciąg $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ taki, że

$$\limsup_{m_k, m_\ell \to \infty} \| u_{m_k} - u_{m_\ell} \|_{L^1} \leq \delta.$$

Krok 5: Chcemy podciąg $\{u_{m_k}\}$ taki, że

$$\limsup_{m_k, m_\ell \to \infty} \| u_{m_k} - u_{m_\ell} \|_{L^1} \leq 0.$$

Skoro L^1 jest zupełna to u_{m_k} jest zbieżny.

Bierzemy $\sigma = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

podciąg

$\|\ldots\| \leq \frac{1}{2} \quad \|\ldots\| \leq \frac{1}{3} \quad \ldots$

Stosując metodę diagonalną kończymy dowód.

Na wultechie :

$$f \in L^p, \quad f \in L^q \implies f \in L^r \quad \forall\, r \in (p, q).$$

(E3) $\boxed{W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)}$

$\boxed{\Omega \text{ jest ogr.}, \ \partial\Omega \text{ jest klasy } C^1.}$

$1 \leq p < n.$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega) \qquad \forall q < \underbrace{p^*}_{p^* > p} = \frac{pn}{n-p}$$

$\{u_n\}_{n\geq 1}$ ogr. w $W^{1,p}(\Omega)$

Chcemy $\{u_{n_k}\}$ zbieżny w $L^p(\Omega)$.

$\forall_{q<p^*}$ mamy $\{u_{n_k}\}$ zbieżny do u w L^q.

Wybieramy $q \in (p, p^*)$ $u_{n_k} \to u$ w L^q

Z nier. Höldera na ogr. zbiorach

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^p} \leq C \|u_{n_k} - u\|_{L^q}.$$

$$\to 0.$$

$\square$.

$\underline{p=n}$: $\{u_k\}$ jest ogr w $W^{1,n}(\Omega)$

$\Rightarrow$ $\{u_k\}$ ma podciąg zb. w L^n

$\{u_k\}$ jest ogr w $W^{1,n}(\Omega)$ $\Rightarrow$

$\{u_k\}$ jest ogr w $W^{1,\boxed{r}}(\Omega)$ $\underbrace{\forall\ \boxed{r} < \boxed{n}}$ (Hölder)

R-K: $\{u_k\}$ ma podciąg zbieżny w L^q $\forall_{q<r^*}$

$r^* = \dfrac{rn}{n-r} \longrightarrow \infty$ gdy $r \to n$, więc można wybrać

r żeby $r^* > p$.

Wtedy istnieje dla $p < s < r^*$ istnieje podciąg zbieżny w $L^s(\Omega)$.

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u_{n_k} - u\|_{L^s(\Omega)}.$$

$$\to 0.$$

<u>Kłamstwo:</u> $p = n = 1$.

(ale ten przypadek załatwiony przez większość ćwiczeń).

$\underline{p > n}$:

Włożenie Morreya: $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\gamma}(\Omega)$

$\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

$$\forall_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \quad \|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

$\{u_n\}_{n\geq 1}$ ogr w $W^{1,n}(\Omega) \overset{?}{\Longrightarrow} \exists \{u_{n_k}\}$ zbieżny w L^p,

$\Downarrow$

$\{u_n\}_{n\geq 1}$ ogr w $C^{0,\gamma}(\Omega) \Rightarrow$

$\{u_n\}_{n\geq 1}$ ogr w $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\{u_n\}_{n\geq 1} \text{ spełniają zał. tw. A-A}:}$

$$\Downarrow$$

$\exists\, u_{n_k} \rightrightarrows u$ w $\overline{\Omega}$. $\quad$ (w $L^\infty(\Omega)$)

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\,\|u_{n_k} - u\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{?} 0$$

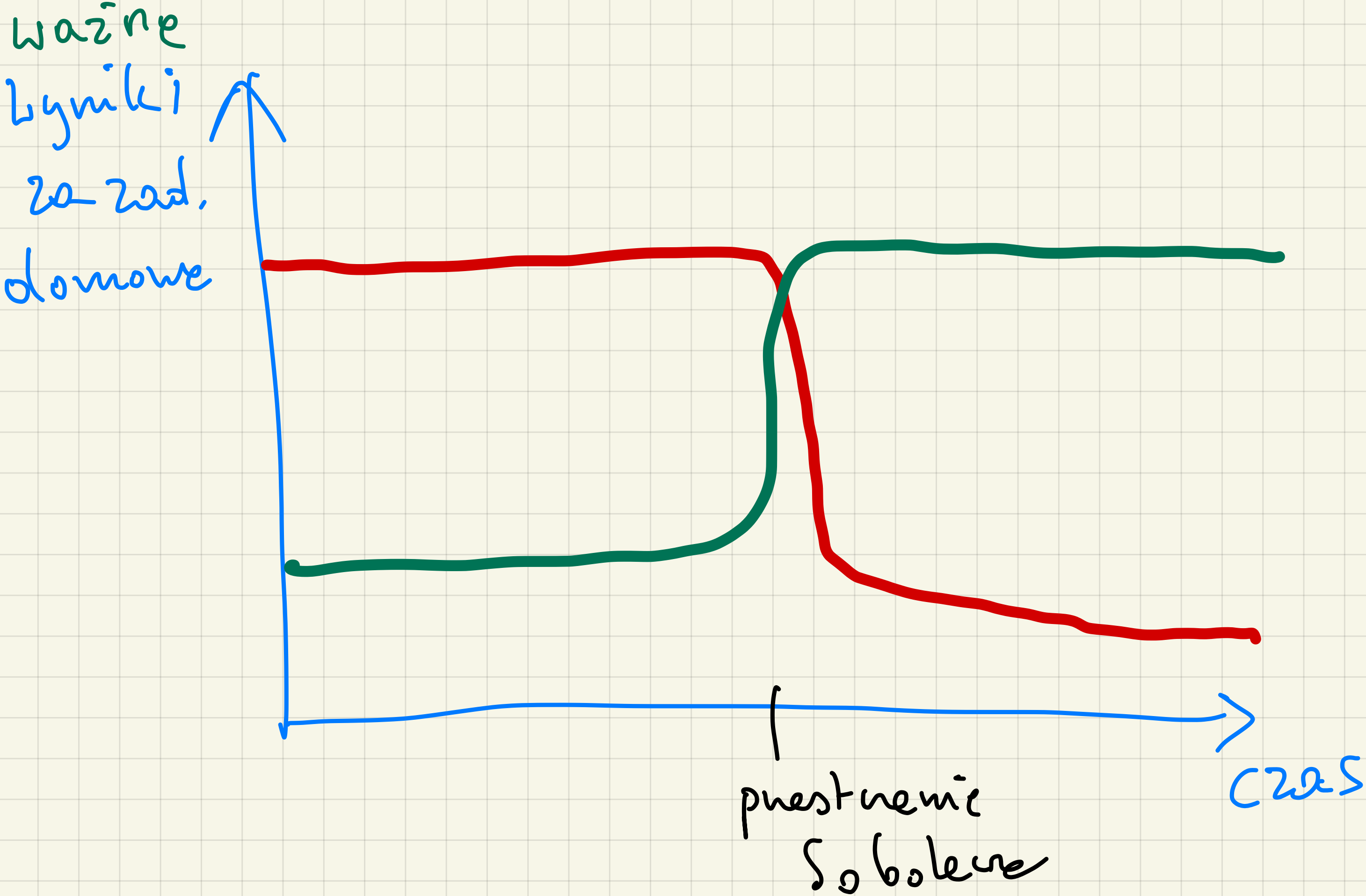
$$\|u_n\|_{C^{0,\gamma}} = \underbrace{\|u_n\|_\infty}_{\text{jednostajnie ograniczone}} + \underbrace{|u_n|_\gamma}_{\text{jednakowa ciągłość}} \leq C$$

! $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$.

$$\forall_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \|Du\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

---

dowodzimy przez to zwarte włożenie :)


ważne
wyniki
za zad.
domowe
czas
przestrzenie
Sobolewa

10.06 na ćw. zrobimy szybkie pods. p-dobskie

21.05 (16:00) spot.

---

za tydzień p-Hilberta, tw. Riesza o repr.,

$$u_t + \partial_x \underbrace{F(u)} = 0$$

(najtrudniejsza klasa problemów).

→ Kruzkhov

dla skalarnego równania

→ kinetyczne sformułowanie ('90)

(2010) Szekelhydi, delellis:

$$u_t + \operatorname{div}(\ldots) = 0$$

def: stabe vorw. compakt

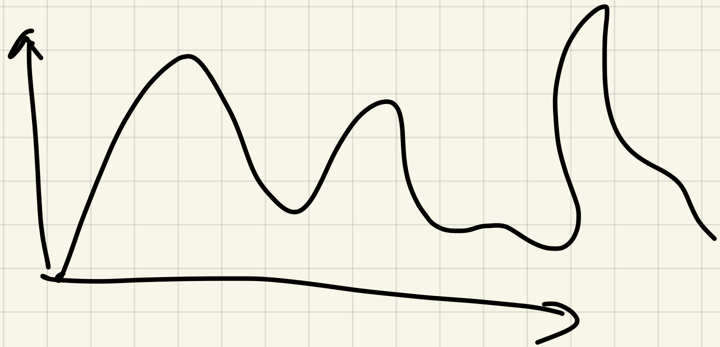
1990 Scheffer $E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 \, dx$

$E(t)$:

1/10 : Szekelyhidi, deLellis

$$E(t) = \int_{\Omega} |u(t,x)|^2$$

Różnicie ;



$\in L^{\infty}$