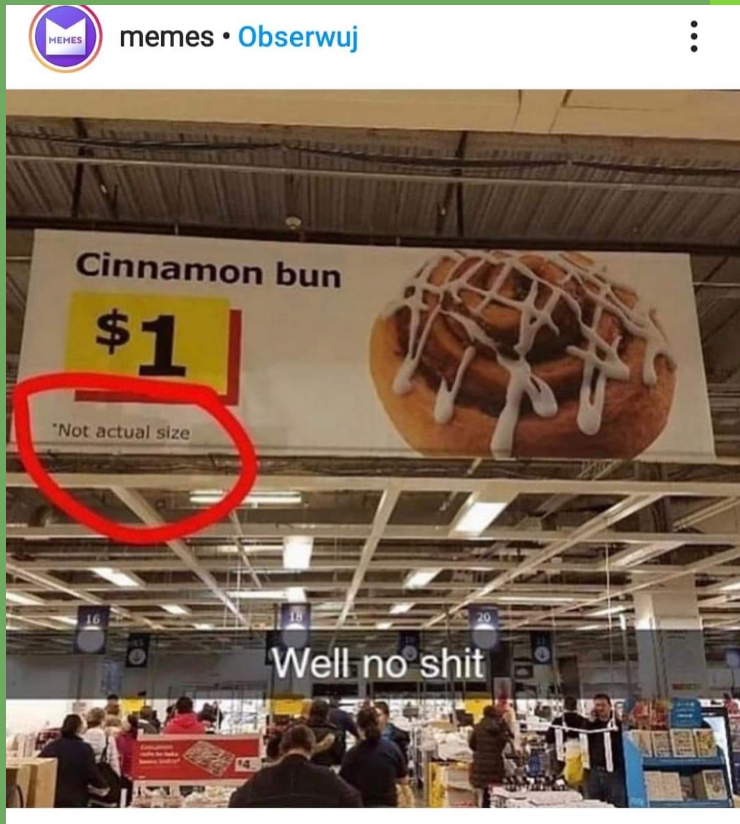
PDEs I: Tutorial 12.

27.05.2021



Wniosek z tw. R-K:

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$$

$\partial\Omega$ jest klasy C^1

(tw. o przedłużaniu)

E4: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$

bez założenia o C^1 $\partial\Omega$ (wystarczy, że Ω jest ogr.).

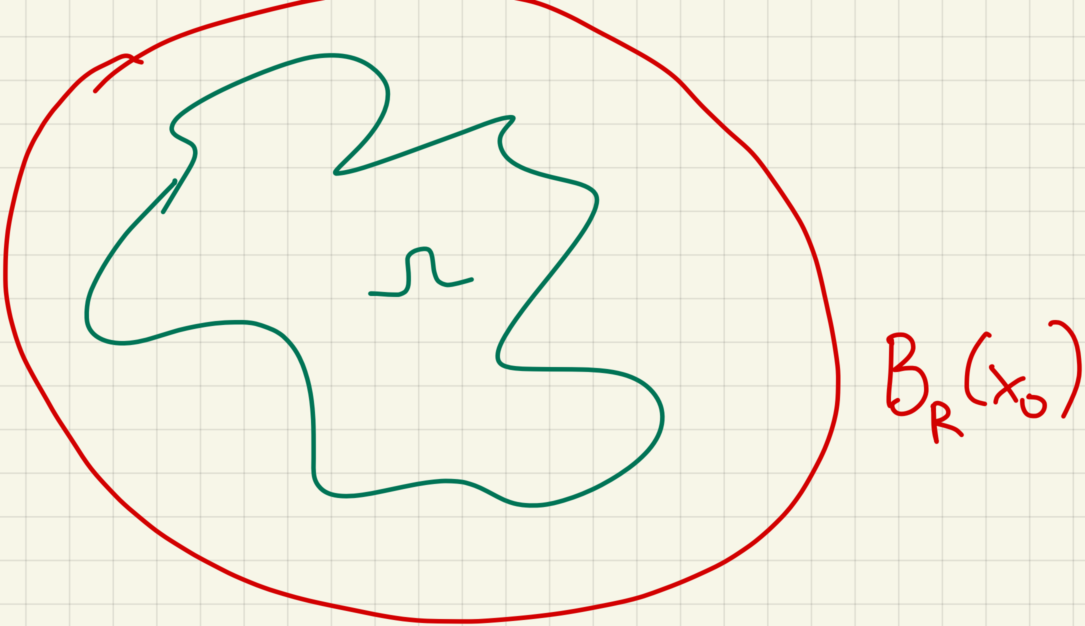
E4: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$

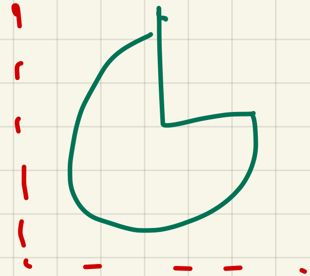
bez założenia o C^1 $\partial\Omega$ (wystarczy że Ω jest ogr.)

$\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$

$\Rightarrow \exists\, u_{n_k} \longrightarrow u$ w $L^p(\Omega)$

Przedłużamy $\tilde{u}_n = \begin{cases} u_n & \Omega \\ 0 & \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$





$\tilde{u}_n$ jest ogr w $W^{1,p}(B_R(x_0))$ $\Rightarrow$

z R-K $\exists\, \tilde{u}_{n_k} \to u$ w $L^p(B_R(x_0))$

$\Rightarrow$ $\tilde{u}_{n_k} \longrightarrow u$ w $L^p(\Omega)$ $\qquad \tilde{u}_{n_k}|_{\Omega} = u_{n_k}$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$$

(zał o brzegu $\partial\Omega$ jest C^1)

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$$

(bez zał. o brzegu),

E5: w języku AF:

$$I: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

operator włożenia jest zwarty

$T: X \to Y$ jest zwarty wtw $\forall \{x_n\}_{n\geq 1}$ ogr

mamy, że $\{Tx_n\}$ ma podciąg zb. w Y,

E6 tw. A-A:

$\{f_n\}$ jest jedn. ogr, jedn. ciągłe

$$\|f_n\|_\infty \leq C \qquad \|Df_n\|_\infty \leq C$$

$$\Rightarrow \quad \exists \; f_{n_k} \rightrightarrows f$$

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \|Df_n\| \, |x-y| \qquad \text{(tw. o wart. średniej)}$$

$$\leq C|x-y|,$$

$\{f_n\}$ jest $\underbrace{\text{jedn. ogr.}}_{\|f_n\|_\infty \leqslant C}$, $\underbrace{\text{jedn. ciągłe}}_{\|Df_n\|_\infty \leqslant C}$

$$\Rightarrow \quad \exists \quad \underbrace{f_{n_k} \rightrightarrows f}_{\|f_{n_k} - f\|_\infty \to 0}$$

<u>tw. A-A:</u> $W^{1,\infty}(\Omega) \subset\subset L^\infty(\Omega)$

<u>tw. R-K:</u> $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ $\quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty$

Nierówności Poincaré:

1) $\forall_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \underbrace{\|u\|_{L^p(\Omega)}}_{\neq 0} \leq C \underbrace{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}_{=0}$ dla $u=1$

2) $\forall_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \quad \|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$

$$(u)_\Omega = \fint_\Omega u \, dx.$$

Na $W_0^{1,p}(\Omega)$ mamy równoważną normę

$$u \longmapsto \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

$\boxed{C}$ Wstęp do systematycznej teorii PDE

$\boxed{C1}$ Wstęp do słabych sformułowania.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

1) Słabe sf. Patryka: $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$

i $\Delta u = f$ p.w.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

1) Słabe sf. Patryka: $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$

$\quad$ i $-\Delta u = f$ p.w.

2) Słabe sf. Daniela $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int \varphi \cdot f$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

ostatecznie:

$u \in W_0^{1,1}(\Omega)$

3) $$-\int u \cdot \Delta\varphi = \int \varphi f$$

$$u \in C(\overline{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

4) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ $$-\int u \cdot \Delta\varphi = \int \varphi f$$

Które jest najlepsze?

1) Słabe sf. Patryka: $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$

tutaj się spodziewamy najłatwiej jedn.

i $-\Delta u = f$ p.w.

2) Słabe sf. Daniela $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int \varphi \cdot f$$

osłabienie: $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$

tutaj liczymy na najłatw. istnienie

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

3) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\quad - \int u \cdot \Delta \varphi = \int \varphi f$

Cel: mamy nadzieję, że słabsze jest znaleźć łatwiej.

Sens gdy: klasyczne wzw. musi spełniać słabe

Najlepsze słabe sformułowanie:

1) pokrywa z mocnym sformułowaniem (mocne spełnia słabe)

2) Łatwo o istnienie

3) Łatwo o jednoznaczność

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

(Lista C2)

<u>**Def.**</u> Mówimy, że $u \in H^1_0(\Omega)$ jest słabym rozw $(*)$ jeżeli $\forall_{\varphi \in H^1_0(\Omega)}$ mamy $\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int \varphi \cdot f$.

Bo tak akurat dziełą.

Lax – Milgram:

H – p. Hilberta.

$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ forma dwuliniowa ciągła

$$\exists_{C} \quad |a(u,v)| \leq C \, \|u\| \cdot \|v\|$$

koercytywna (coercive)

$$\exists_{\tilde{C}} \quad |a(u,u)| \geq C \, \|u\|^2$$

ciągłość operatora $\exists_{C} \quad \|Tu\| \leq C \, \|u\|$

<u>Teza:</u> $a: H \times H \to \mathbb{R}$ dwulin., ciągła, koercytywna
$l: H \to \mathbb{R}$ funkcjonał ($l \in H^*$)

to wówczas $\exists!_{u \in H} \; \forall_{v \in H} \quad a(u,v) = l(v)$

<u>Dowód</u> a jest sym. $a(u,v) = a(v,u)$ to był na AF,

Dowód na wyk.

Lemat $\exists!_{u \in H} \forall_{v \in H} \quad a(u,v) = \ell(v)$

Słabe sformułowanie: $\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int \varphi f$

Pomysł:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

$$\ell(v) = \int_\Omega f \cdot v$$

$$H = H^1_0(\Omega)$$

(B) $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ p. Hilberta.

iloczyn skalarny na $H^1(\Omega)$:

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u \cdot v + \int_\Omega Du \cdot Dv$$

bo to suma iloczyn. skalarnych.

$\Rightarrow$ $H^1(\Omega)$ to p. Hilberta bo p. Banacha i ma iloczyn. sk.

$H^1_0(\Omega)$ to p. Hilberta

$$H^1_0(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

$\to$ domkn. podzbiór $H^1(\Omega)$

$\Downarrow$

p. Banacha

$\Downarrow$

p. Hilberta.

Normy na $H^1_0(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = \left(\int |u|^2 + \int |Du|^2\right)^{1/2}$$

równoważna:

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = \left(\int |Du|^2\right)^{1/2}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

Musimy sprawdzić, że $\exists_{C_1, C_2}$

1) $|a(u,v)| \leq C_1 \|u\| \, \|v\|$

2) $a(u,u) \geq C_2 \|u\|^2$

nier. Höldera

Dlaczego (1): $\left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \right)^{1/2}$

$= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$

Dlaczego (2):

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|_{H^1_0(\Omega)}$$

$\Rightarrow$ $a(u,v)$ jest f. dw. koercytywną, ciągłą.

Odnośnie prawej strony:

$$\ell(v) = \int_\Omega f \cdot v$$

? ℓ jest ciągłym funkcjonałem na $H_0^1(\Omega)$

? $\exists_C \quad |\ell(v)| \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$

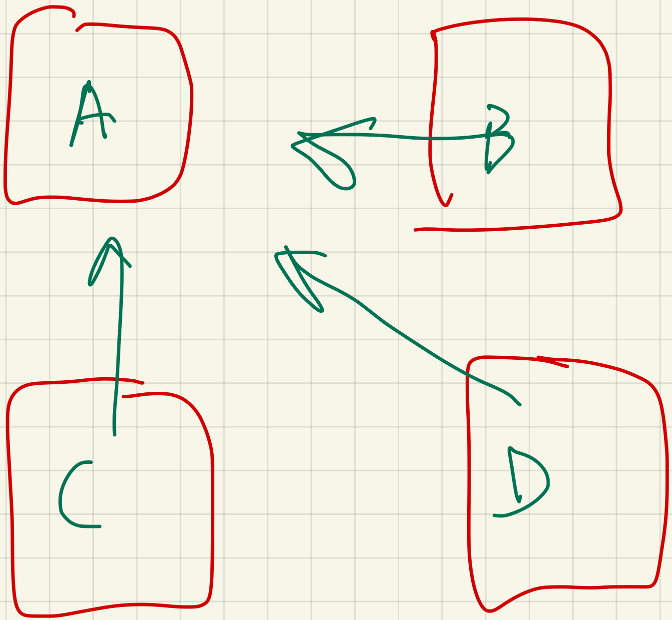
$$\left| \int_\Omega f v \right| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \underset{L^2}{\|v\|_2} \leq C \|f\|_2 \underbrace{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

Spełnione są zał. lematu;

$\Rightarrow$ $\exists$ dokładnie jedno $u \in H^1_0(\Omega)$ że

$$\forall_{v \in H^1_0(\Omega)} \quad \int \nabla u \cdot \nabla v = \int v f.$$

$$\left(f \in L^2(\Omega) \right).$$


A
B
C
D