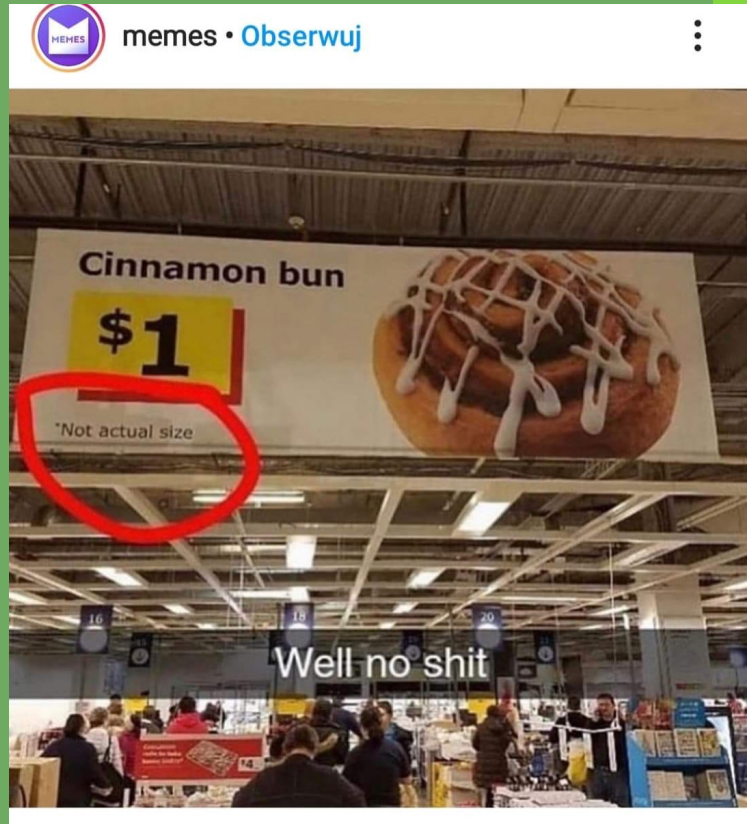


PDEs I: Tutorial 13

10.06.2021



MAN IF OLD

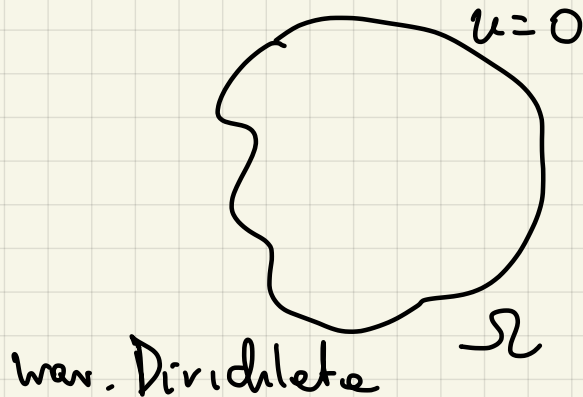
5! $\rightarrow$ za pytg. na wstny metody
Galerkina

Zachęcam

w razie problemów $\rightarrow$ pomoc.

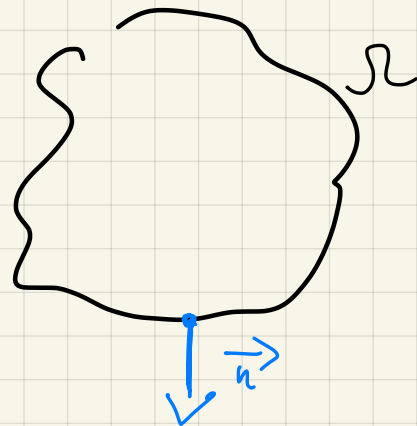
Zad. 4 PSC2

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$



$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

war. Neumanno.



$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad (*)$$

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

Def.: $u \in H^1(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem (*) jeżeli:

$$\forall \begin{matrix} \varphi \in H^1(\Omega) \\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{matrix} \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

Ⓐ $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ u jest mocnym rozwiązaniem (*)
 $\Rightarrow u$ jest oczywiście słabym.

Ⓐ $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ u jest mocnym rozu (*)
 $\Rightarrow u$ jest nieskończenie słabym.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$$-\Delta u \cdot \phi = f \cdot \phi$$

$$\Downarrow$$

$$\int f \phi$$

$$\parallel$$

$$\int Du \cdot D\phi$$

$\Leftarrow$

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot \phi = \int_{\Omega} f \cdot \phi$$

$$\parallel$$

$$+ \int Du \cdot D\phi - \int \phi \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\parallel$$

$$0$$

u jest słabym rozwiązaniem $u \in H^1(\Omega)$

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

1 ponieważ $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

Wtedy u jest moc w rozwiązaniem $\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \partial\Omega \end{array} \right. \quad (*)$

Dowód: Mamy pokazać (*). Weźmy $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = - \int \Delta u \cdot \varphi + \int \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{many zerowy}} \cdot \varphi = - \int \Delta u \cdot \varphi$$

$$\int f \cdot \varphi \Rightarrow \int \varphi (\Delta u + f) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Step 1 $-\Delta u = f \text{ in } \Omega.$

Then using $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$

$$\int f \cdot \varphi = \int Du \cdot D\varphi = - \int \Delta u \cdot \varphi + \int \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi$$

$\uparrow$
 def. of weak sol.

$\parallel$
 $\int f \cdot \varphi$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi = 0 \quad \forall \varphi \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Warunek Dirichleta $u=0$ $\partial\Omega$

jest zaskodowany w przestrzeni $(u \in H_0^1(\Omega))$

Warunek Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ $\partial\Omega$

jest zaskodowany $\cup$ wybrane funkcje testowych.

(B)

Jeśli u jest stałym wzw.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{to } \int_{\Omega} f = 0.$$

$$\underline{\text{Def:}} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad \int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int f \cdot \varphi$$

$$\text{Weźmy } \varphi = 1 \in H^1(\Omega) \quad (\notin H_0^1(\Omega))$$

$$\nabla \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \int f = 0.$$

Funkcje stałe równa 1 nie należą do $H_0^1(\Omega)$.

Nier. Poincaré

$$\exists C \forall u \in \underbrace{H_0^1(\Omega)}_{=1} \quad \|u\|_{L^2} \leq C(\Omega) \cdot \underbrace{\|Du\|_{L^2}}_{=0}$$

Spójność :)

$$(c) \quad u \in H^1(\Omega)$$

$$(*) \quad \int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Zał. że u spełnia (*). Jak konstruować inne rozwiązanie?

$$(\int f = 0)$$

Jak u spełnia (*) to $u + C$ też spełnia (*)

$$\nabla(u+C) = \nabla u, \quad \int f(u+C) = \int f u + C \int f = 0.$$

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \underbrace{\int u}_{=0} = 0 \right\}$$

Cel zadania: pokazać istnienie i jednoznaczność $u \in \mathcal{H}$.

Czy $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{H^1})$ jest przestrzenią Hilberta?

Wystarczy sprawdzić, że $\mathcal{H}$ jest domknięte w $H^1(\Omega)$.

$L^p(0,1), \|\cdot\|_q$ jest
przestrzenią Banacha?

(AF)

$$H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u = 0 \right\}$$

Неймы $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset H$, $u_n \rightarrow u$ в $H^1(\Omega)$,

Оценим погрешность, т.е. $u \in H$.

$$\Omega \text{ jest ogy, } u_n \rightarrow u \text{ в } H^1(\Omega) \Rightarrow$$

$$u_n \rightarrow u \text{ в } L^2(\Omega) \Rightarrow$$

$$u_n \rightarrow u \text{ в } L^1(\Omega) \Rightarrow$$

$$\int |u_n - u| \rightarrow 0$$

$$\int_{\Omega} |u_n - u| \rightarrow 0 \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \left| \int_{\Omega} u_n - \int_{\Omega} u \right| \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\Omega} u_n - \int_{\Omega} u \right| \leq \int_{\Omega} |u_n - u| \rightarrow 0.$$

$\parallel$
0

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} u = 0}.$$

$\Rightarrow H$ ist prestrukturiertes Hilbertraum.

Lax-Milgram; $a(u, v) = l(v)$

$\sim$ forme dwukrotnie
 $\sim$ fest funkcyjatem w H

- a musi być ciągłe $\exists_C |a(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|$
- a musi być koercyjny $\exists_C |a(u, u)| \geq C \|u\|^2$
- l musi być ciągłe $\exists_C |l(v)| \leq C \|v\|$

(Stronie dwuk., jedno u t-re $a(u, v) = l(v) \quad \forall_v$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v$$

$f \in L^2(\Omega)$

Stosujemy L-M na przestrzeni $\mathcal{H}$

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

ciągłość

$$|a(u, v)| \leq \|Du\|_{L^2} \|Dv\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv$$

$$\{u \in H^1(\Omega) : \int u = 0\}$$

Chcemy $\forall u \in \mathcal{H} \quad a(u, u) \geq C \|u\|^2$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |Du|^2 \geq C \|u\|_{H^1}^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{2 równoważne} \\ \text{normy na} \\ H_0^1 \end{array} \right)$$

wier. Poincaré: $\|u\|_{L^2} \leq C \|Du\|_{L^2} \quad \text{na } H_0^1(\Omega)$

obliczonic także samo wier. na $H^1(\Omega)$.

Nierówność Poincaré ze średnimi:

$$\forall_{u \in H^1(\Omega)} \|u - (u)_{\Omega}\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|Du\|_{L^p}$$

$$\forall_{u \in H} (u)_{\Omega} = 0 \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

Na H mamy równoważną normę $u \mapsto \|Du\|_{L^2(\Omega)}$.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^2(\Omega)} \quad / \cdot + \|Du\|_{L^2}$$

$$\underbrace{\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Du\|_{L^2(\Omega)}}_{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \leq (C+1) \underbrace{\|Du\|_{L^2(\Omega)}}_{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \leq$$

$$\underbrace{\|u\|_{H^1(\Omega)}}_{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \leq$$

$$\leq (C+1) \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Wniosek: $\alpha(u, v)$ jest ciągłe i koercyjne.

2 L-M dostajemy, że $\exists! u \in H$ t.z.e

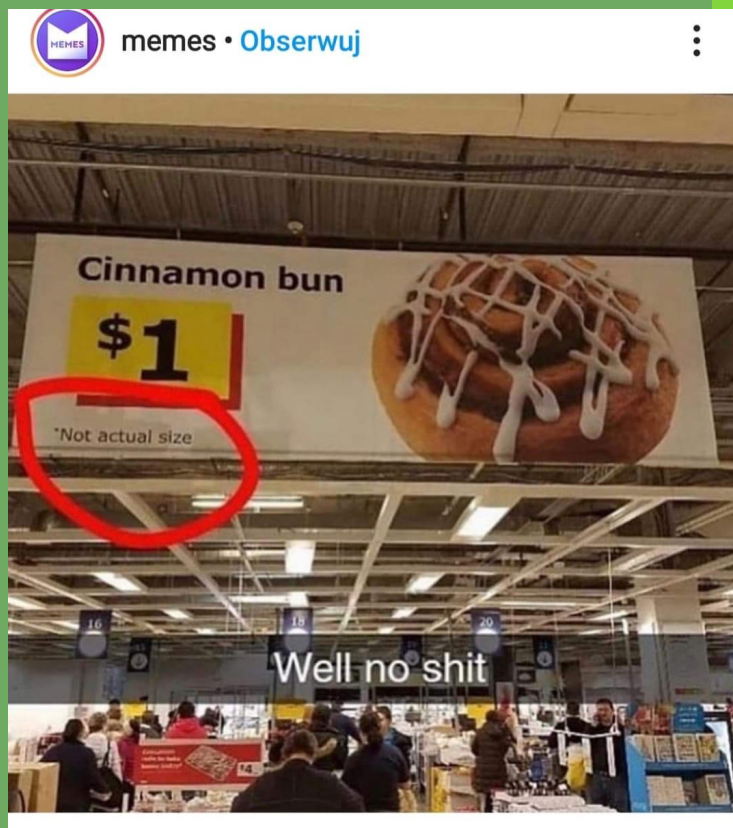
$$\forall_{v \in H} \int Du \cdot \underline{Dv} = \int f \cdot \underline{v}$$

Dla $v \in H^1(\Omega)$ wzorem $\tilde{v} = v - \int v \in H$. Stosując $\downarrow$
do $\tilde{v}$ dostajemy:

$$\forall_{v \in H^1(\Omega)} \int Du \cdot Dv = \int f \cdot v$$

PDES I

PODSUMOWANIE



CO BY TO ?

(A) Klasyczne problemy

↳ równanie transportu

↳ równanie Laplace'a / Poissona

↳ równanie ciepła

(B) Stabe pochodne / dystrybucje

↳ teoria dystrybucji

↳ teoria przestrzeni Sobolewa

(C) Wstęp do współczesnej teorii

↳ lemat Laxa-Milgrama

CO BĘDZIE ?



Cząstki na wysokości

Informacje ogólne



Kod przedmiotu:	1000-1S20CW	Kod Erasmus / ISCED:	11.1  / (0541) Matematyka 
Nazwa przedmiotu:	Cząstki na wysokości		
Jednostka:	Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki		
Grupy:	Seminaria monograficzne dla matematyki 2 stopnia		
Punkty ECTS i inne:	6.00  → zobacz reguły punktacji		
Język prowadzenia:	angielski		
Rodzaj przedmiotu:	seminaria monograficzne		
Skrócony opis:	Seminarium "Cząstki na wysokości" to seminarium o charakterze wyjazdowym. Zajęcia odbywają się w formie tygodniowego wyjazdu (w semestrze zimowym jest to najczęściej styczeń, w semestrze letnim maj). Tematyka dotyczy współczesnych problemów badawczych równań cząstkowych, które są ściśle powiązane z innymi działami matematyki jak geometria różniczkowa, rachunek prawdopodobieństwa czy statystyka.		

W przyszłym roku jako "Cząstki na wysokości 2" żeby umożliwić powolny udział.

3

Rozwiązania miarowe

[🏠 wróć do wyników wyszukiwania przedmiotów](#)

Informacje ogólne

Kod przedmiotu:	1000-1M21RM	Kod Erasmus / ISCED:	11.1 i / (0541) Matematyka i
Nazwa przedmiotu:	Rozwiązania miarowe		
Jednostka:	Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki		
Grupy:	Przedmioty monograficzne dla matematyki 2 stopnia		
Punkty ECTS i inne:	6.00 i → zobacz reguły punktacji		
Język prowadzenia:	angielski		
Rodzaj przedmiotu:	monograficzne		

Zajęcia w cyklu "*Semestr letni 2021/22*" (jeszcze nie rozpoczęty)

c

Równania różniczkowe cząstkowe

 Drukuj sylabus

[wróć do wyników wyszukiwania przedmiotów](#)

Informacje ogólne

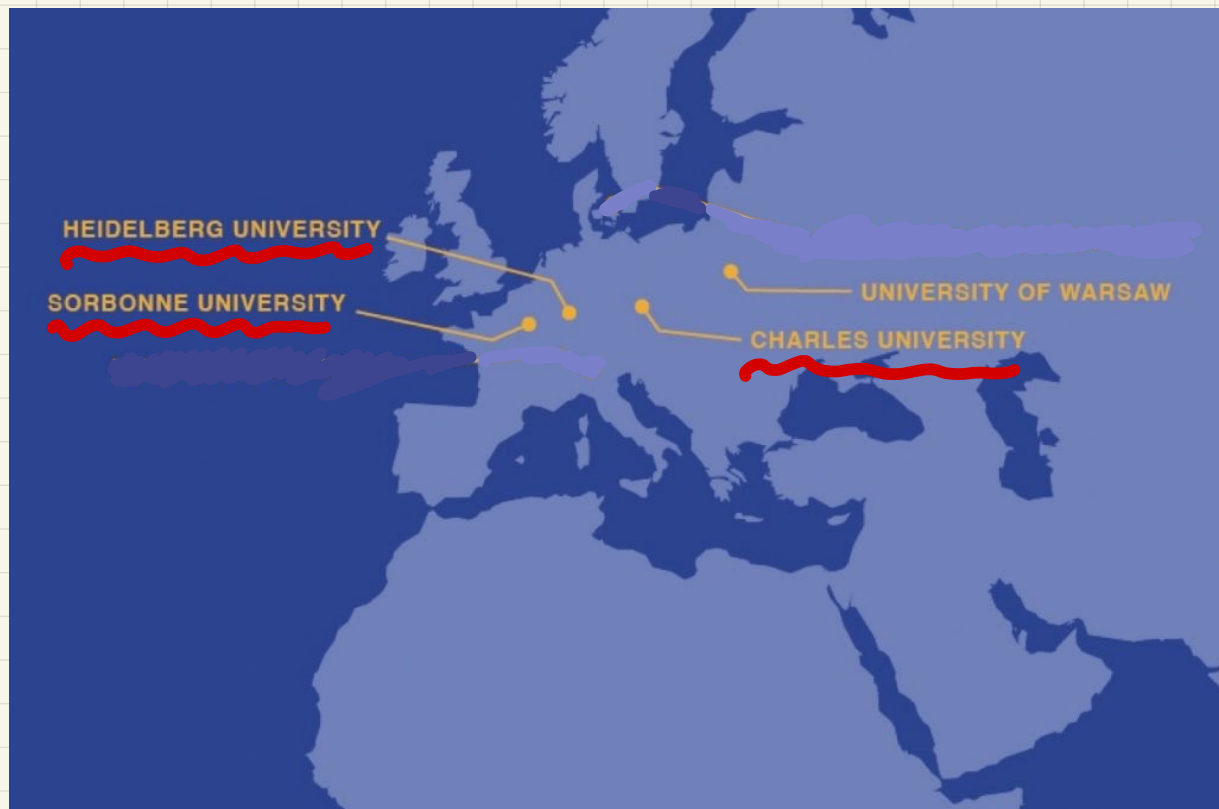
Kod przedmiotu:	1000-135RRC	Kod Erasmus / ISCED:	11.143  / (0541) Matematyka 
Nazwa przedmiotu:	Równania różniczkowe cząstkowe		
Jednostka:	Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki		
Grupy:	Przedmioty fakultatywne dla studiów 2 stopnia na matematyce Przedmioty fakultatywne na matematyce		
Punkty ECTS i inne:	6.00  → zobacz reguły punktacji		
Język prowadzenia:	angielski		
Rodzaj przedmiotu:	fakultatywne		
Założenia (opisowo):	Wskazane jest przejście podstawowego kursu <i>Analizy funkcjonalnej</i> , przynajmniej równolegle.		
Skrócony opis:	Wykład stanowi wprowadzenie do teorii liniowych równań różniczkowych cząstkowych. Pierwsza część wykładu koncentruje się na klasycznej teorii równań pierwszego i drugiego rzędu. Druga część stanowi wprowadzenie do nowoczesnych metod: teorii przestrzeni Sobolewa i teorii słabych rozwiązań równań eliptycznych. Wykład nie wymaga wcześniejszego przygotowania z teorii równań różniczkowych cząstkowych. Wskazane jest natomiast przejście podstawowego kursu <i>Analizy funkcjonalnej</i>, przynajmniej równolegle. Pewne zagadnienia omawiane na wykładzie <i>Wstęp do równań różniczkowych cząstkowych</i> zostaną omówione szerzej, dotyczy to przede wszystkim teorii słabych rozwiązań, pojawiają się także elementy teorii równań nieliniowych.		

ale to właściwie powtórka (kto to wymyślił ???)

- ① - zajęcia z analizy, teorii mowy
- wyjazd na stypendium !!!

CO JA

ROBIE ?



PARIS.

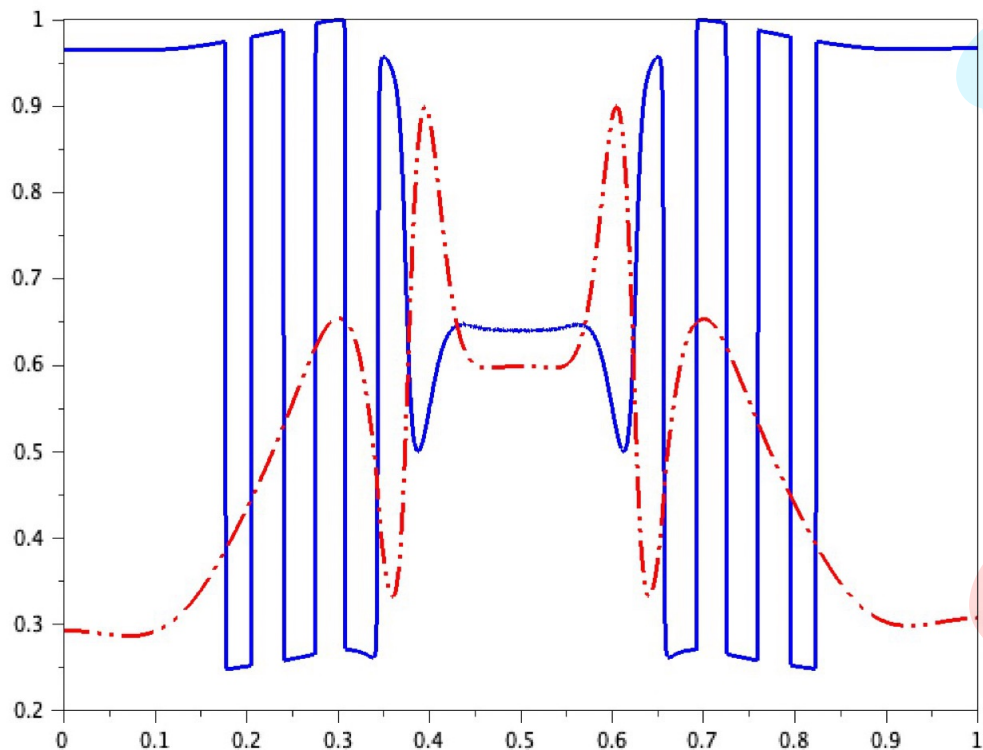
$$\begin{cases} \partial_+ u^\varepsilon = \frac{v^\varepsilon - F(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \\ \partial_+ v^\varepsilon = \Delta v^\varepsilon + \frac{F(u^\varepsilon) - v^\varepsilon}{\varepsilon} \end{cases}$$

co się dzieje gdy $\varepsilon \rightarrow 0$?



PARIS.

du mtego $\varepsilon > \rho$



u^ε

v^ε

Reaction-diffusion systems

- J. Skrzeczkowski

Fast reaction limit and forward-backward diffusion: a Radon-Nikodym approach

arXiv: 2105.11218.

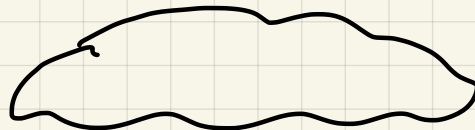
- B. Perthame, J. Skrzeczkowski

Fast reaction limit with nonmonotone reaction function

Accepted in Communications on Pure and Applied Mathematics, arXiv: 2008.11086.

CPAM

HEIDELBERG.



wsłowanie transportu w prostotniach miar.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Spaces of Measures and their Applications to Structured Population Models

Part of [Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics](#)

AUTHORS:

[Christian Düll](#), Universität Heidelberg

[Piotr Gwiazda](#), Polska Akademia Nauk (PAN), Warsaw

[Anna Marciniak-Czochra](#), Universität Heidelberg

[Jakub Skrzeczkowski](#), Uniwersytet Warszawski, Poland

PUBLICATION PLANNED FOR: October 2021

AVAILABILITY: Not yet published - available from October 2021

FORMAT: Hardback

ISBN: 9781316519103

[Rate & review](#)

£ 95.00

Hardback

[Pre-order](#)

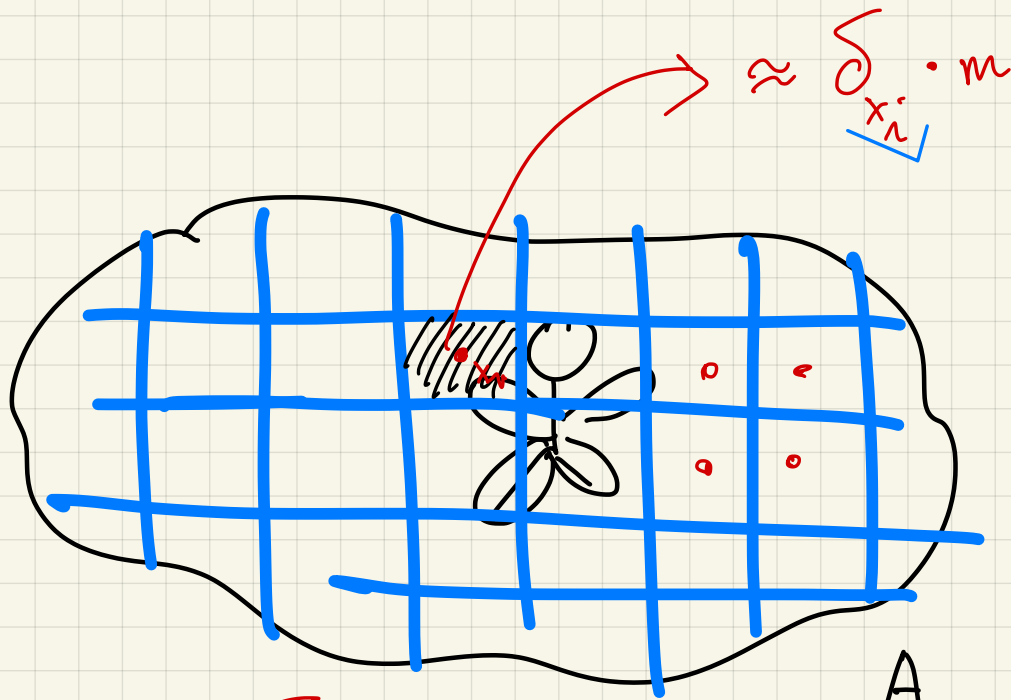
[Add to](#)



[Looking for an inspection copy?](#)

This title is not currently available on inspection

> I want this title to be available as an eBook



$$\approx \sum \delta_{x_i} \cdot m_i$$

PRAGA:

równania z operatorami zależnymi nieciągłe od czasu

$$\partial_t v = \Delta v \quad \text{równanie ciepła}$$

||
 $\operatorname{div}(\nabla v)$

$$\partial_t v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) \quad p\text{-Laplace}$$

$p=2 \Rightarrow$ ciepło.

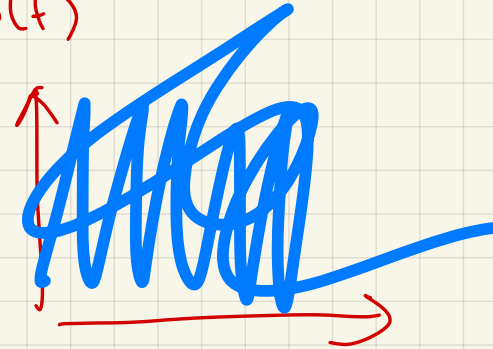
$$\Rightarrow \partial_t v = \operatorname{div} \left(|\nabla v|^{p(t,x)-2} \nabla v \right) \quad 1$$

We have :

$$p(t,x) = p(t)$$

→ existence,

→ uniqueness



for p discontinuous in time.

Parabolic regularization is very strong.

M. Bulicek, P. Gwiazda, J. Skrzeczkowski

Parabolic equations in Musielak -- Orlicz spaces with discontinuous in time N -function

Journal of Differential Equations, 290, 17-56, 2021.

WY

Jeśli NAUKA, DOKTORAT to:

- jak najszybciej DOBRY promotor
- temat mało ważny (z interesującą dziedziną ale co konkretnie to NIEISTOTNE)
- jak najwięcej wymian, wyjazdów ZAGRANICZNYCH.

Zawsze warto:

→ ERASMUS...