PDEs I: Tutorial 2

11. 03. 2021

Zerwanie domowe (2)

$$\begin{cases} u_t + u\, u_x = 0 \\ u_0(x) = 1 - x \end{cases}$$

$u_0 \in C^\infty$

$$u(t,x) = \frac{1-x}{1-t}$$

$t \to 1$

(typowa cecha problemu hiperb.)

Zad. 7 (PS1)

$$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\partial_t u(t,x) + b(x) \cdot \nabla_x u(t,x) = c(x)\, u(t,x)$$

$$u(t,x) = u_0\left(X_b(-t,x)\right)$$ gdy nie ma.

A gdy to czerwone jest?

$$\frac{d}{dt} u(t, X_b(t,x)) = \partial_t u(t, X_b(t,x)) + \nabla_x u(t, X_b(t,x)) \cdot \underline{b(X_b(t,x)) = \frac{d}{dt} X_b(t,x)}$$

$$= c(X_b(t,x))\, u(t, X_b(t,x))$$ z równania

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t, X_b(t,x)) = \overbrace{c(X_b(t,x))}^{C} \, u(t, X_b(t,x)) \\ u(0, X_b(0,x)) = u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$u(t, X_b(t,x)) = u_0(x) \, e^{\int_0^t c(X_b(s,x)) \, ds}$$

$$\left(\text{bc} \quad \frac{d}{dt} e^{\int_0^t c(X_b(s,x)) \, ds} = e^{\int_0^t \cdots} \cdot c(X_b(t,x)) \right)$$

$$u(t,y) = ? \qquad y = X_b(t,x) \implies x = X_b(-t, y)$$

$$u(t, X_b(t,x)) = u_0(x)\, e^{\int_0^t c(X_b(s,x))\,ds}$$

$$y = X_b(t,x) \qquad x = X_b(-t,y).$$

$$u(t,y) = u_0(X_b(-t,y))\, e^{\int_0^t c(X_b(s,\, X_b(-t,y)))\,ds}$$

$$= u_0(X_b(-t,y))\, e^{\int_0^t c(X_b(s-t,y))\,ds}.$$

$\square$.

Metoda charakterystyk: jeżeli u jest rozwiązaniem

$\forall_0$ $\frac{d}{dt} u(t, X_0(t,x))$ jest stałe

$$\Downarrow$$

$\ldots$

$$u(t,y) = \ldots$$

Czy to jest nieczywiście rozwiązanie

(potrzebna implikacja w 2gą stronę)

Przykład: u jest rozw. $\partial_t u + \partial_x u \cdot b = cu$

to

$$\Uparrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t, X_b(t,x)) = \overbrace{c(X_b(t,x))}^{c}\, u(t, X_b(t,x)) \\ u(0, X_b(0,x)) = u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$u(t,y) = u_0(X_b(-t,y))\, e^{\int_0^t c(X_b(s-t,y))}$$

($\Uparrow$ implikacja)

$$\frac{d}{dt} u(t, X_b(t,x)) = c(\underbrace{X_b(t,x)}_{y})\, u(t, \underbrace{X_b(t,x)}_{y})$$

$$\|$$

$$\partial_t u(t, \underbrace{X_b(t,x)}_{y}) + \nabla_x u(t, \underbrace{X_b(t,x)}_{y}) \cdot b(\underbrace{X_b(t,x)}_{y}) \quad \forall_{t}\,\forall_{x}$$

$$\Downarrow$$

każdy $y = X_b(t,x)$ $\exists_{x,t}$.

$$\partial_t u(t,x) + \nabla_x u(t,x) \cdot b(x) = c(x)\, u(x).$$

SŁABE, DYSTRYBUCYJNE ROZWIĄZANIA

(16) $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzowska

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x F(u(t,x)) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

(hiperboliczne prawa zachowania)

Równanie Burgersa $\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$. jest HPZ

$$F(u) = \frac{1}{2}u^2.$$

Słabe (dystrybucyjne, całkowe) rozwiązania:

(A) $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$

$/ \cdot \varphi \in C_c^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$.

funkcja testowa

$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t u \cdot \varphi + \partial_x F(u) \cdot \varphi = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left[\partial_t u \cdot \varphi + \partial_x F(u) \cdot \varphi\right] dt\, dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \partial_t u \cdot \varphi\, dt\, dx = \int_{\mathbb{R}} u \varphi \Big|_{t=0}^{t=\infty} dx - \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty u\, \partial_t \varphi$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \underset{u_0(x)}{\underset{\parallel}{u(0,x)}} \, \varphi(0,x) \;-\; \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \partial_t \varphi(t,x) \cdot u(t,x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \partial_x F(u(t,x)) \cdot \varphi(t,x) \, dt \, dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \partial_x F(u(t,x)) \, \varphi(t,x) \, dx \, dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty F(u((t,x)) \, \varphi(t,x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} \;-\; \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} F(u(t,x)) \, \partial_x \varphi \; dt\,d$$

$$(*)\quad \iint \partial_t \varphi(t,x)\, u(t,x)\, dt\, dx + \iint \partial_x \varphi(t,x)\, F(u(t,x)) + \int \varphi(0,x)\, u_0(x)\, dx = 0.$$

$u(t,x) \in L^\infty$ jest słabym (dystr, całkowym) jeżeli

$(*)$ zachodzi $\forall_{\varphi \in C_c^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})}$.

Zaleta: nie potrzebujemy że u jest różniczkowalne.

Zadanie

u - rozw. dystrybucyjne, które jest C^1

$\Rightarrow$ u jest klasycznym rozwiązaniem

$$\partial_t u + \partial_x F(u(t,x)) = 0.$$

$$\iint \partial_t \varphi(t,x)\, u(t,x)\, dt\, dx + \iint \partial_x \varphi(t,x)\, F(u(t,x))$$
$$+ \int \varphi(0,x)\, u_0(x)\, dx = 0.$$

CHCĘ: $\partial_t u + \partial_x F(u(t,x)) = 0$

Jak $\underline{u \in C^1}$ rozw. dystrybucyjne to można całkować

przez części ↓ bo $u \in C^1$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \left[\partial_t u \cdot \varphi + \partial_x F(u)\cdot \varphi\right] dt\, dx = 0$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \varphi \left[\partial_t u + \partial_x F(u)\right] dt\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty$$

$$\Downarrow$$

Lemat (z AF)

$$\int \varphi \cdot f = 0 \quad \forall_{\varphi \in C_c^\infty} \Rightarrow f = 0 \quad !$$

(z gęstości C_c^∞ w L^p albo przez mollifikację).

Korzystając z lematu

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \quad \text{punktowo.}$$

Odnośnie słabych sformułowań

1. Jak je formułować?

2. Jak słabe rozw. jest dost. regularne (np. C^1) to staje się klasycznym (mocnym).

RÓWNANIA ELIPTYCZNE

równanie Laplace'a

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega \\ u = f & \partial\Omega \end{cases}$$

$$\left(\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \ldots + u_{x_n x_n}\right).$$

równanie Poissona

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$

Δ Laplasjan, operator Laplace'a

Bardzo często wygodnie jest zapisać $f = \Delta u_f$

Twierdzenie o dywergencji:

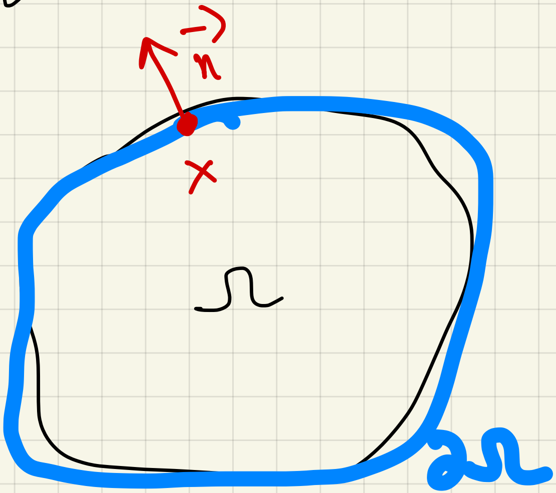
$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$$

$$\operatorname{div} F(x) = \partial_{x_1} F_1(x) + \partial_{x_2} F_2(x) + \dots + \partial_{x_n} F_n(x)$$

$$= \nabla \cdot F \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, n \rangle \, ds$$

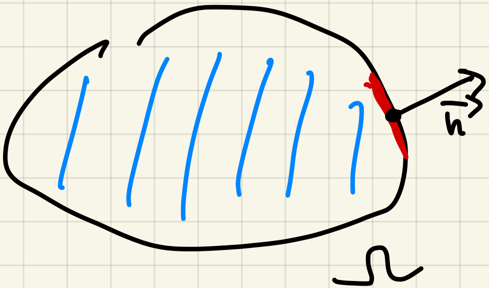


Przykład:

A1 / PS2 :

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \boxed{\frac{\partial u}{\partial n}} \, dS$$

pochodna kierunkowa u w kier $\vec{n}$



$$\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} \langle F, n\rangle \, dS \qquad F = \ldots$$

$$\Delta u \stackrel{?}{=} \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}\left(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right) =$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i x_i} u$$

$$= u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n} = \Delta u.$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, n\rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}$$

(AM II-1).

- $u \in C^2(\Omega)$ jest funkcją harmoniczną jeżeli

$$\Delta u = 0 \quad w \ \Omega.$$

- $u \in C^2(\Omega)$ jest funkcją SUB harmoniczną (podharm.) jeżeli

$$\Delta u \geqslant 0 \quad w \ \Omega$$

- $u \in C^2(\Omega)$ jest SUP harmoniczna (nadharm.) jeżeli

$$\Delta u \leqslant 0 \quad w \ \Omega.$$

(B2) u harmoniczna w Ω

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest gładka i wypukła

$\Rightarrow$ $\varphi(u)$ jest podharmoniczna.

$\varphi(u)$ jest C^2 bo $u \in C^2$ a $\varphi \in C^\infty$

$$\Delta \varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i x_i} \varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \left[\varphi'(u)\, u_{x_i} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi''(u)\, u_{x_i}^2 + \underbrace{\varphi'(u)}\, u_{x_i x_i} \right] =$$

$$= \underbrace{\varphi''(u)}_{\geq 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2}_{\geq 0} + \underset{\text{bo } \Delta u = 0}{0} \geq 0.$$

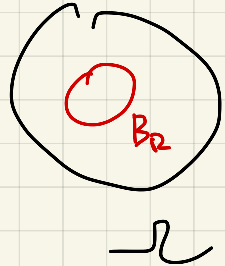
podmartyngał $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$ p.w.

nadmartyngał $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$ p.w.

M_t jest podm. $\Rightarrow$ $\varphi(M_t)$ jest podm. dla φ wypukłej

(z nier. Jensena)

Problem B3



u podharm. w Ω, $\forall\, B_R(\Omega) \subset \Omega$

$$u(y) \leq \fint_{\partial B_R(y)} u(x)\, \underbrace{dS(x)}$$

miara powierzchniowe

$$u(y) \leq \fint_{B_R(y)} u(x)\, \underbrace{dx}$$

miara Lebesgue'a

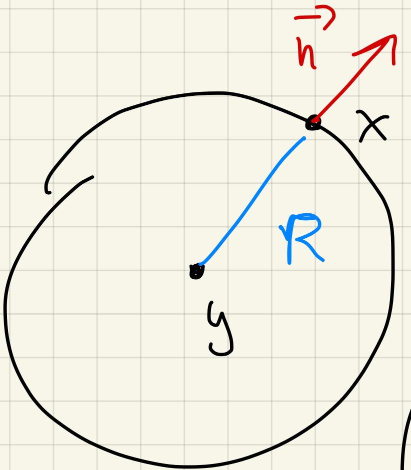
[u harmoniczna:

$$u(y) = \fint_{B_R(y)} u(x)\, dS(x), \quad u(y) = \fint_{B_R(y)} u(x)\, dx$$

]

$$0 \leq \int_{B_R(y)} \Delta u \, dx = \int_{\partial B_R(y)} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS(x) = \int_{\partial B_R(y)} \nabla u \cdot \vec{n} \, dS(x)$$

$$\|$$



$$\vec{n} = \frac{x-y}{R}$$

$$\int_{\partial B_R(y)} \nabla u \cdot \frac{x-y}{R} \, dS(x).$$

$$\boxed{\forall r \quad B_r(y) \subset \Omega \qquad 0 \leq \int_{\partial B_r(y)} \nabla u \cdot \frac{x-y}{r} \, dS(x).}$$

$$\phi(r) = \fint_{\partial B_r(y)} u(x)\, dS(x)$$ i policzyć pochodną po r.

$$\phi(r) = \frac{1}{\quad}$$

	Sfera	Kula
$d=2$	$2\pi r$	πr^2
$d=3$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$.

objętość kuli: $\alpha(n)\cdot r^n$

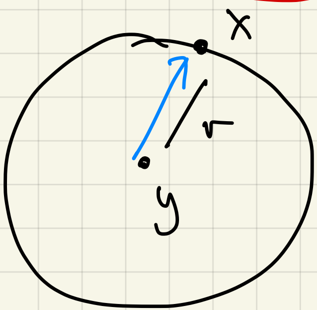
objętość sfery: $n\alpha(n) r^{n-1}$

$\alpha(n)$ = objętość kuli jednostkowej

$$\phi(r) = \fint_{\partial B_r(y)} u(x)\, dS(x)$$ i policzyć pochodną po r.

$$\phi(r) = \frac{1}{\alpha(n)\cdot n \cdot r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\, dS(x)$$

$$= \frac{1}{\alpha(n)\, n\, \cancel{r^{n-1}}} \int_{\partial B_1(0)} u(rz+y)\, dS(z)\, \cancel{r^{n-1}} =$$



$$z = \frac{x-y}{r} \Rightarrow x = rz + y$$

$$dS(x) = r^{n-1}\, dS(z)$$

$$\phi(r) = \fint_{\partial B_1(0)} u(rz+y)\, dS(z)$$

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B_1(0)} Du(rz+y) \cdot z \; dS(z) =$$

$$= \frac{1}{\alpha(n) \cdot n} \int_{B_1(0)} Du(rz+y) \cdot z \; dS(z)$$

$$\underbrace{x = rz+y} \qquad dS(x) = r^{n-1}\, dS(z)$$

$$= \frac{1}{r^{n-1} \alpha(n) n} \int_{B_y(r)} Du(x) \cdot \frac{x-y}{\cancel{r}}\, dS(x) =$$

$$= \fint_{\partial B_y(r)} \nabla u(x) \cdot \frac{x-y}{r} \, dS(x) \underbrace{\geq} 0$$

$$\Rightarrow \phi'(r) \geq 0$$

$$\boxed{\forall_{\substack{r \\ B_r(y) \subset \Omega}} \quad 0 \leq \int_{\partial B_r(y)} \nabla u \cdot \frac{x-y}{r} \, dS(x).}$$

Zatem ϕ jest niemalejąca

$$\left\{ \phi(r) = \fint_{\partial B_1(0)} u(rz+y)\, dS(z) \geq u(y) \right.$$

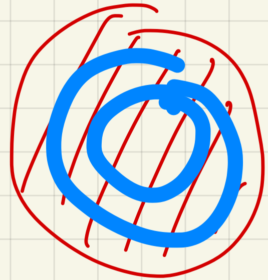
$$\lim_{r \to 0^+} \phi(r) = u(y) \quad (\text{bo } y \text{ jest ciągłe})$$

$$\left(\text{AM 1-2: } \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\, dy \longrightarrow f(x) \quad \text{jak } h \to 0 \right)$$

$$u(y) \leq \fint_{\partial B_R(y)} u(x)\, dS(x).$$

$$\Downarrow \qquad ?$$

$$u(y) \leq \fint_{B_R(y)} u(x)\, dx$$



$$\int_{B_R(y)} u(x)\, dx = \int_0^R \int_{\partial B_r(y)} u(x)\, dx\, dr$$

(AM II.2 : twierdzenie o materacu

$$\int_{B_R(y)} u(x)\,dx = \int_0^R \underbrace{\int_{\partial B_r(y)} u(x)\,dx}\,dr$$

$$⨍_{\partial B_r(y)} u(x)\,dS(x) \geq u(y)$$

$$\int u(x)\,dS(x) \geq u(y)\,\alpha(n)\,n\,r^{n-1}$$

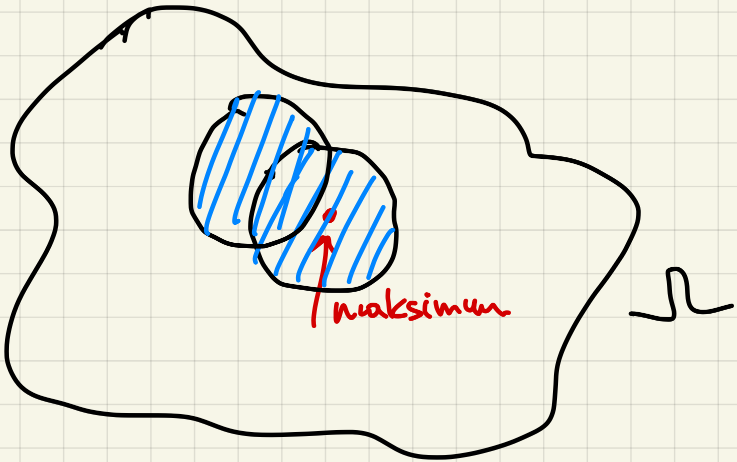
$$\int_{B_R(y)} u(x)\,dx \geq \int_0^R \underline{u(y)\,\alpha(n)\,n}\,r^{n-1}\,dr =$$

$$= u(y)\,\alpha(n) \int_0^R n r^{n-1}\,dr = u(y)\,\underbrace{\alpha(n)\,R^n}$$

objętość $B_R(y)$.

Problem B4.

u jest podharmoniczna w Ω (spójny) i
u przyjmuje maksimum we wnętrzu Ω to
u jest stałe [ZASADA MAKSIMUM].



$$u(y) \leq \fint_{\partial B_r(y)} u(x)\,dS(x),$$

Jak u nadharm: jeżeli przyjmuje inf we wnętrzu Ω to u jest stała na Ω.

dla harm: obydwa scenariusze powyżej.

Problem B5

u jest podharmoniczna

Ω ograniczony, spójny, otwarty,

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

domknięcie

$$\boxed{\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)}$$

D-d: u przyjmuje kresy $\Rightarrow$ $\exists_{x\in\overline{\Omega}}$ że $u(x) = \sup_{y\in\Omega} u(y)$.

- $x \in$ wnętrze Ω $\Rightarrow$ u jest stałe
- $x \in \partial\Omega$ $\Rightarrow$ to załatwione

dla u nadharm: $$\inf_{x\in\partial\Omega} u(x) = \inf_{x\in\Omega} u(x)$$

dla u harm: $$\inf_{x\in\partial\Omega} u(x) = \inf_{x\in\Omega} u(x)$$

$$\sup_{x\in\partial\Omega} u(x) = \sup_{x\in\Omega} u(x),$$