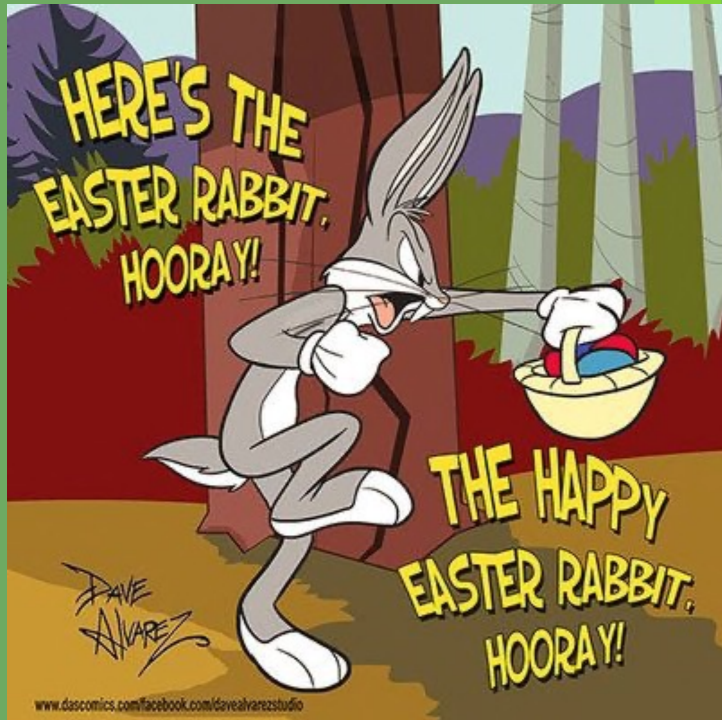
PDEs I: Tutorial 8.

29.04.2021



Odn. referatu Oli:

- $$\int_{\mathbb{R}^n} (f * \eta_\varepsilon) \cdot g = \int_{\mathbb{R}^n} f\,(g * \eta_\varepsilon)$$

- Mereana-Yosida: jak $f : \Omega \to \mathbb{R}$ to def. się

$$\tilde{f}(x) = \min_{y \in \Omega} \left[f(y) + C\, d(x-y) \right]$$

to przedł. zachowuje wszystkie własności ciągłości f.

- w PDEs rozumowanie w 2 krokach
  - → (Michał + Daniel) przy dużej regularności
  - → (Ola) przy niższej regularności z tego

wymaga splotów i ciągłości w splotach.

Słabe pochodne :

Def: $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ to mówimy że u jest słabo różniczkowalne gdy istnieje $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\int_\Omega u \cdot \varphi_{x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi \, dx.$$

jednoznacznie definiuje v_i

Wtedy mówimy, że v_i jest słabą pochodną u w i-tym kierunku.

$$\underbrace{\int_\Omega u \cdot \varphi_{x_i}\, dx}_{\parallel} = -\underbrace{\int_\Omega v_i\, \varphi\, dx}_{\parallel}.$$

$$(\partial_{x_i} T_u)(\varphi) = -T_u(\varphi_{x_i}) \qquad T_{v_i}(\varphi)$$

$$\boxed{(\partial_{x_i} T_u)(\varphi) = T_{v_i}(\varphi)}$$

HIST.

DYSTR. POCH $<<$ SŁABA POCH $<<$ MOCNA POCH.

Przykład: słaba pochodna $u_{x_i x_j}$ to v_{ij}

$$\int u \, \partial_{x_i x_j} \phi = \int v_{ij} \phi$$

$(-1)\cdot(-1)$ nie ma minusa.

- Suma funkcji słabo różniczk. jest słabo różniczk.

$$\int_\Omega u \cdot \varphi_{x_i} \, dx = - \int_\Omega v_i^{(1)} \varphi \, dx ,$$

$$\int_\Omega u \, \varphi_{x_i} \, dx = - \int_\Omega v_i^{(2)} \varphi \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \left(v_i^{(1)} - v_i^{(2)} \right) \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow v_i^{(1)} = v_i^{(2)} \quad \text{p.w. na } \Omega .$$

Przestrzeń Sobolewa

$W^{1,p}(\Omega)$ to przestrzeń funkcji $u \in L^p(\Omega)$, słabo różniczk. takich, że

$$u_{x_i} \in L^p(\Omega). \quad \forall_{i=1,\ldots,n}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ = to samo tylko wszystkie poch. do k-tego rzędu włącznie.

(fractional Sobolev spaces $W^{\alpha,p}$ $\alpha \in (0,1)$.).

A1 $\quad |x| \in W^{1,p}(-1,1)$? $\quad 1 \leq p \leq \infty$.

- $|x| \in L^p(-1,1)$ (jest)
- Wiemy, że dystr. pochodna $|x|$ to $\operatorname{sgn} x$.

$$\forall_{\phi \in C_c^\infty(-1,1)} \quad \int_{-1}^{1} |x| \, \partial_x \phi \, dx = -\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \, \phi \, dx$$

$$\int_\Omega u \cdot \phi_x \, dx = -\int_\Omega v \, \phi \, dx.$$

$v(x) = \operatorname{sgn} x \in L^p(-1,1)$ (jest).

A2 $\quad \mathbb{1}_{x>0} \in W^{1,p}(-1,1)$?

z zał. domowego poch. dystr. to δ_0.

$$\forall_{\phi \in C_c^\infty(-1,1)} \quad \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{x>0}\, \partial_x \phi(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \phi(x)\, d\delta_0(x) = \phi(0)$$

$$\Rightarrow \quad \forall_{\phi \in C_c^\infty(-1,1)} \quad \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{x>0}\, \partial_x \phi(x) = \phi(0)$$

$$\forall_{\phi \in C_c^\infty(-1,1)} \quad \int_{-1}^{1} 1\!\!1_{x>0}\, \partial_x \phi(x) = \phi(0)$$

Gdyby $1\!\!1_{x>0}$ było słabo różniczkowalne to $\exists_{v(x)}$

$$-\int_{-1}^{1} v(x)\, \phi(x)\, dx = \phi(0) \,. \quad \forall_{\phi \in C_c^\infty(-1,1)}$$

$$-\int_{-1}^{1} v(x)\,\phi(x)\,dx = \phi(0) \qquad \forall\, \phi \in C_c^\infty(-1,1)$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(0,1) \qquad -\int_{-1}^{1} v(x)\,\phi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = 0 \ \text{p.w.}$$

tylko na $(0,1)$.

$$\forall\, \phi \in C_c^\infty(-1,0) \qquad -\int_{-1}^{1} v(x)\,\phi(x) = 0$$

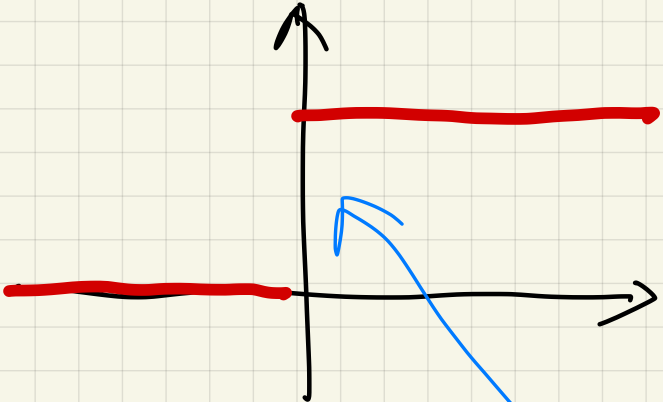
$$\Rightarrow \quad v(x) = 0 \ \text{p.w. na } (-1,0)$$

$$\Rightarrow \quad v = 0 \ \text{p.w. na } (-1,1).$$

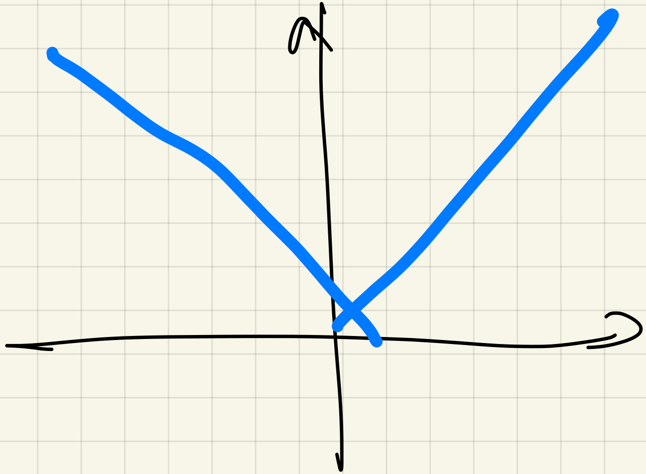
$$-\int_{-1}^{1} v(x)\,\phi(x)\,dx = \phi(0) \quad \forall \phi \in C_c^\infty(-1,1)$$

Gödyby $v = 0$ p.w to

$$0$$



$\mathbb{1}_{x>0}$



w 1D takie funkcje nie mogą być w pr. Sobolewa.

na pierwszych zajęciach $\Rightarrow$ w 1D: każda funkcja w $W^{1,p}$ jest ciągła.

DYSTR. POCH $<<$ SŁABA POCH $<<$ MOCNA POCH.

$\mathbb{1}_{x>0}$

nie

$|x|$

nie

(A4) $u \in C^1(\bar{\Omega})$, Ω jest ograniczony

to $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $\forall_{1 \leq p \leq \infty}$.

- $u \in L^p(\Omega)$ bo u jest ciągła i Ω jest ogr.
- $$\int_\Omega u \cdot \varphi_{x_i} + \int_\Omega u_{x_i} \cdot \varphi = \underbrace{\int_{\partial\Omega} u \varphi n_i \, dS(y)}$$

$$\int_\Omega u \cdot \varphi_{x_i} = -\int_\Omega u_{x_i} \cdot \varphi$$

Mocna pochodna jest słabą pochodną.

$u_{x_i} \in L^p(\Omega)$?

Tak

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, dS(y).$$

$$\parallel$$

$$\int_{\partial\Omega} u \varphi \cdot n_i \, dS(y)$$

$$F = (F_1, \ldots, F_n)$$

$$F = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{u \cdot \varphi}_{\uparrow \text{ i-ta wsp. } F}, 0, \ldots, 0)$$

$$\operatorname{div} F \doteq \partial_{x_i}(u \cdot \varphi) = \partial_{x_i} u \cdot \varphi + u \cdot \partial_{x_i} \varphi$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\Omega} \partial_{x_i} u \cdot \varphi + u \cdot \partial_{x_i} \varphi$$

CALCULUS RULES

(wszystkie jak rozniczkowac)

B1 $U \subset \Omega$, $u \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow$

$u \in W^{k,p}(U)$

$$\forall_f \quad \int_U |f| \leq \int_\Omega |f|.$$

B2 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \in C^1$, F jest lipschitzowska

Ω był ograniczony, $1 \leq p \leq \infty$

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$$

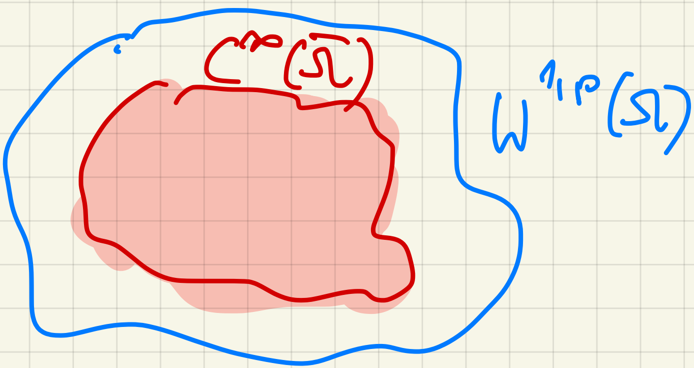
$$\partial_{x_i} F(u) = F'(u)\, \partial_{x_i} u$$

[chain rule]

[o tym dowodzie]

(1) to jest typ dowodu który każdy musi umieć przeprowadzić

(2) argument gęstościowy



__Tw:__ $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p<\infty$

to istnieje ciąg $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ taki, że

$u_n \to u$ w $W^{1,p}(\Omega)$

Tw: $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $p<\infty$

to istnieje ciąg $\{u_n\} \in C^\infty(\overline{\Omega})$

taki, że

$u_n \longrightarrow u$ w $W^{1,p}(\Omega)$

Norma na $W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n} \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)}$$

$u_n \longrightarrow u$ w $L^p(\Omega)$

$\partial_{x_i} u_n \longrightarrow \partial_{x_i} u$ w $L^p(\Omega)$

$\underline{\text{Tw}}$: $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $\quad p < \infty$

to istnieje ciąg

$\{u_n\} \in C^\infty(\bar{\Omega})$

taki, że

$u_n \to u$ w $W^{1,p}(\Omega)$

$u_n \to u$ w L^p

$\partial_{x_i} u_n \to \partial_{x_i} u$ w L^p

$u_n \to u$ p.w.

$\partial_{x_i} u_n \to \partial_{x_i} u$ p.w.

(z dokładnością do podciągu).

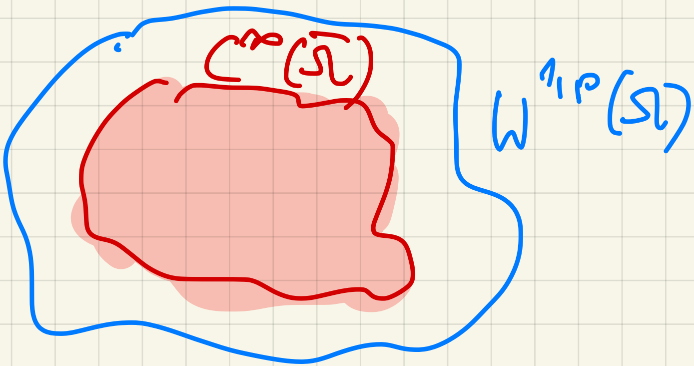
$[\, f_n \to f$ w L^p to $\exists\, f_{n_k}$ $\quad f_{n_k} \to f$ p.w. $]$.

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \in C^1$, F jest lipschitzowska

Ω był ograniczony, $1 \le p \le \infty$

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \implies F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$$

$$\partial_{x_i} F(u) = F'(u)\, \partial_{x_i} u$$



<u>Krok 1</u>: Jeżeli $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ to teza zachodzi

bo $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$: $(p<\infty)$

$F(u) \in L^p(\Omega)$ bo $u \in C(\overline{\Omega})$, F jest ciągłe

więc $F(u)$ jest ograniczone.

$\partial_{x_i}(F(u)) \in L^p(\Omega)$?

$$\parallel$$

$F'(u) \cdot \partial_{x_i} u \in L^p(\Omega)$.

Krok 2: $u \in W^{1,p}(\Omega)$. $(p < \infty)$.

$\exists\, u_n \in C(\bar{\Omega})$ $\quad u_n \to u$ w L^p, p.w. na Ω

$\partial_{x_i} u_n \to \partial_{x_i} u$ w L^p, p.w. na Ω

$$\forall_n \quad \underbrace{\int_\Omega F(u_n) \cdot \partial_{x_i} \phi}_{\substack{\downarrow\, n \to \infty \\ \int_\Omega F(u)\, \partial_{x_i} \phi}} = (-1) \cdot \underbrace{\int F'(u_n)\, \partial_{x_i} u_n \cdot \phi}_{\substack{\downarrow\, n \to \infty \\ \int F'(u)\, \partial_{x_i} u\, \phi}}$$

Pierwszy kawałek : $\int_\Omega F(u_n)\partial_{x_i}\phi \to \int_\Omega F(u)\partial_{x_i}\phi$

$$\int_\Omega |F(u_n)-F(u)|\,\partial_{x_i}\phi\,dx \leq$$

$$\leq |F|_{Lip}\int_\Omega |u_n-u|\,|\partial_{x_i}\phi| \underset{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq |F|_{Lip}\,\|u_n-u\|_{L^p}\,\|\partial_{x_i}\phi\|_{L^{p'}}$$

$$\longrightarrow 0 \text{ w } L^p(\Omega)$$

Drugi kawałek:

$$\left| \int F'(u_n)\, \partial_{x_i} u_n \cdot \phi - \int F'(u)\, \partial_{x_i} u\, \phi \right| \leq$$

$$\leq \left| \int F'(u_n) \left[\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u \right] \phi \right| +$$

$$+ \left| \int \left(F'(u) - F'(u_n) \right) \partial_{x_i} u\, \phi \right| = A + B$$

$$\left|\int F'(u_n)\left[\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u\right]\phi\right| \leq \dots$$

$$F'(u_n) = \lim_{h\to 0} \frac{F(u_n+h) - F(u_n)}{h}$$

$$|F'(u_n)| \leq \limsup_{h\to 0} \frac{|F(u_n+h) - F(u_n)|}{h} \leq |F|_{Lip}$$

$$\leq |F|_{Lip} \, \| \partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u \|_{L^p} \, \|\phi\|_{L^{p'}} \longrightarrow 0 .$$

- drugi projekt
  - referat Bartka (dwa tyg, w przyszłej serii zadań będzie krótkie zadanie).
  - jedno spotk. dodatkowe (połowy maja)
    → wszystkie ref. przed-tnohoni
  - dwa pozostałe na zajęciach.
- miniprojekt (w grupach)

FACT SHEET : przestrzenie Sobolewa

- wysłać mi prezentację!!

$$\partial_t u = \Delta u$$

$$\partial_t u = \underset{\text{operator}}{A} u$$

$$u(t) = \underset{\text{dobrze zdef. jeśli } A \text{ ogr.}}{e^{At}} u(0)$$

$$e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{(At)^k}{k!}$$

większości op. różniczk. jest

NIEOGRANICZONA

Hille-Yosida theory

(Feller) '50

'70