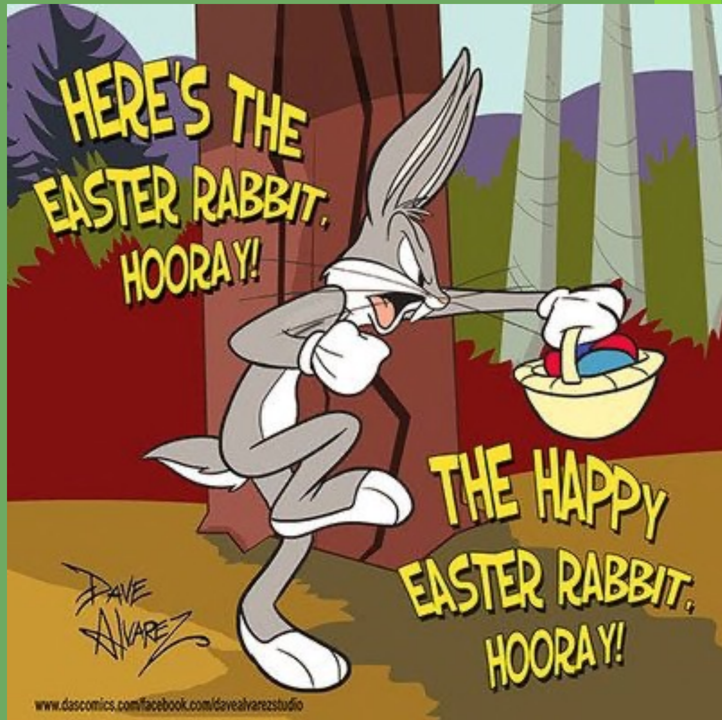
PDEs I: Tutorial 9.

6.05.2021



Dowód chain rule:

$u \in W^{1,p}(\Omega)$, $F \in C^1$, F jest Lipschitzowska

$F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$, $\partial_{x_i} F(u) = F'(u)\,\partial_{x_i} u$

$u \in W^{1,p}(\Omega)$

Weźmy $u_n \longrightarrow u$ w $W^{1,p}(\Omega)$

(kolejny podciąg aby mieć zb. p.w.)

$u_n \longrightarrow u$ w L^p, $\partial_{x_i} u_n \longrightarrow \partial_{x_i} u$ w L^p

$u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

$$\int F(u_n)\,\partial_{x_i}\phi(x) = -\int F'(u_n)\,\partial_{x_i} u_n\,\phi(x)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int F(u)\,\partial_{x_i}\phi(x) \qquad\qquad \int F'(u)\,\partial_{x_i} u\,\phi(x)$$

(DONE) (NOT DONE)

Powód $\displaystyle\int F'(u_n)\,\partial_{x_i} u_n\,\phi(x) \longrightarrow \int F'(u)\,\partial_{x_i} u\,\phi(x)$:

$$\left| \int_\Omega F'(u_n)\,\partial_{x_i} u_n\,\phi(x) - \int_\Omega F'(u)\,\partial_{x_i} u\,\phi(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\int_\Omega |F'(u_n)|\,|\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u|\,\phi(x)} \quad (A)$$

$$+ \underbrace{\int_\Omega |F'(u_n) - F'(u)|\,|\partial_{x_i} u|\,\phi(x)} \quad (B)$$

$$\int_\Omega |F'(u_n)|\, |\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u|\, \phi(x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

szacuje się przez stałą Lipschitza F.

$$\leq C\, \| \partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u \|_{L^p(\Omega)}\, \| \phi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

$$\to 0$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} |F'(u_n) - F'(u)| \, |\partial_{x_i} u| \, \phi(x)}$$

$(\operatorname{supp} \phi)$

$n \to \infty$

$u_n \to u$ p.w.

F' jest ciągłe bo F jest C^1

$F'(u_n) \to F'(u)$ p.w.

(B)

$u \in W^{1,p}(\Omega)$

$\Longleftrightarrow$

u jest w $L^p(\Omega)$

oraz $\partial_{x_i} u$ są

w $L^p(\Omega)$

$$\Big| |F'(u_n) - F'(u)| \, \partial_{x_i} u \, \phi(x) \Big| \leq$$

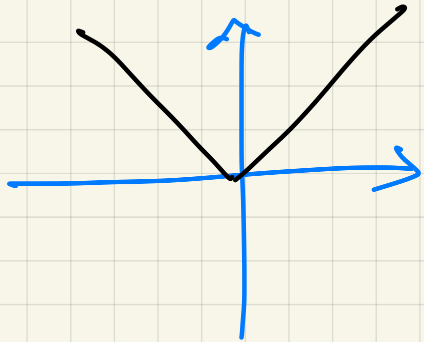
$$\leq 2 \underset{\leq |F|_{Lip}}{\|F'\|_\infty} \, |\partial_{x_i} u| \, \|\phi\|_\infty \in L^1(\Omega)$$

bo $\partial_{x_i} u \in L^p(\Omega)$, Ω jest ogr.

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \implies |u|,\ u^+,\ u^- \in W^{1,p}(\Omega)$$

w klasycznych pochodne

$$x \in C^\infty(-1,1) \quad \text{ale} \quad |x| \notin C^\infty(-1,1)$$



Zad. B5 / PS B1

$x \longmapsto \Phi(x)$ rozw. fundamentalne

pokażemy, że $\Delta \Phi = -\delta_0$ w sensie dystrybucji.

(przyp: $\mathbb{1}_{x>0}$ ma pochodną δ_0).

$$T_\Phi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\varphi(x)\,dx$$

$\boxed{\begin{array}{l} \Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \\ |T_\Phi(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{C^k} \\ \text{zadanie 1 z dystr.} \end{array}}$

$$(\partial_{x_i} T_\Phi)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\partial_{x_i}\varphi(x)\,dx$$

$$(\partial^2_{x_i} T_\Phi)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\partial^2_{x_i}\varphi(x)\,dx$$

$$(\partial^2_{x_i} T_\Phi)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, \partial^2_{x_i} \varphi(x)\, dx \qquad \Delta = \sum \partial^2_{x_i}$$

$$\boxed{(\Delta T_\Phi)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx} \;\underset{\text{chcemy}}{=}\; \boxed{-\varphi(0)}$$

δ_0 jako miara

$$T_{\delta_0}(\varphi) = \varphi(0) = \int \varphi(x)\, d\delta_0(x)$$

Na wyk. było (przy wypr. metody Greena) był taki wzór:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\,\frac{\partial \Phi}{\partial n}(y-x)\,dS(y) + \int_{\partial\Omega} \Phi(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,dS(y)$$

$$-\int_{\Omega} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy$$

$$\forall_{\substack{x \\ \| \\ 0}} \quad \forall_{\substack{\Omega \\ \| \\ \operatorname{int}\operatorname{supp}\varphi}} \quad \forall_{\substack{u\in C^2(\Omega) \\ \| \\ \varphi}}$$

$u \in C^2(\Omega)$, Ω jest ograniczony.

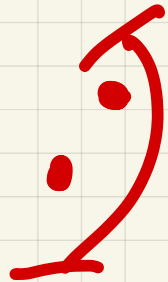
Chcemy $\quad -\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx$

$$\varphi(0) = -\int_{\operatorname{supp}\varphi} \Phi(y)\,\Delta\varphi(y)\,dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\,\Delta\varphi(y)\,dy$$

bo φ ma nośnik na $\operatorname{supp}\varphi$.

Chcemy $\quad -\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx$



C1 nierówność Poincaré

(będzie kilka ...)

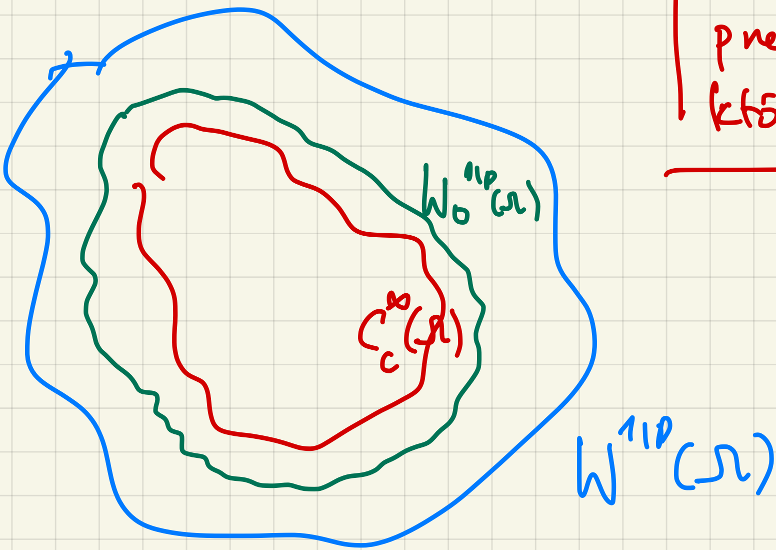
$u \in W^{1,p}(\Omega)$ gdy $u \in L^p(\Omega)$, $\partial_{x_i} u \in L^p(\Omega)$
(słabe)

$u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, podprzestrzeń $W^{1,p}(\Omega)$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

Intuicje: $W_0^{1,p}(\Omega)$ to przestrzeń funkcji $u \in W^{1,p}$ które mają 0 na $\partial\Omega$.



domknięcie:

nad $\mathbb{R}$ $I = (0,1)$

to jego domknięcie

to $[0,1]$.

Porównanie $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ to przestrzeń Banacha bo jest domkniętym podprzestrzenią przestrzeni Banacha.

Nierówność Poincare:

Jeżeli Ω jest ograniczony w $\mathbb{R}^n$ i $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

to $$\boxed{\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \, \|Du\|_{L^p(\Omega)}}$$

WAŻNE bo:

norma na $W^{1,p}(\Omega)$ $\quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega)}$

równoważna norma na $W_0^{1,p}(\Omega)$ $\quad |||u|||_{W^{1,p}(\Omega)} = \|Du\|_{L^p(\Omega)}$

Nierówność Poincare:

Jeżeli Ω jest ograniczony w $\mathbb{R}^n$ i $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

to $$\boxed{\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p)\, \|Du\|_{L^p(\Omega)}}$$

Czy to może obowiązać dla $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

$u = 1$ $\quad \|u\|_{L^p(\Omega)} > 0$

$\quad \|Du\|_{L^p(\Omega)} = 0.$ $\quad \Rightarrow$ $W_0^{1,p}(\Omega)$ jest ściśle zawarte w $W^{1,p}(\Omega)$

$$\boxed{\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p)\, \|Du\|_{L^p(\Omega)}}$$

Chcę dla $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, wystarczy dla funkcji gładkich

$$W_0^{1,p} = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$$

o zwartym nośniku bo jak $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ to istnieje

$u_n \longrightarrow u$ w $W^{1,p}(\Omega)$ $\big(u_n \to u$ w $L^p(\Omega)$, $Du_n \to Du$ w $L^p \big)$.

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p)\, \|Du_n\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega; p)\, \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

Chcemy $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p)\, \|Du\|_{L^p(\Omega)}$.

dla $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^p \, dx = \int_\Omega \underbrace{\partial_{x_i}(x_i)}_{1} |u(x)|^p \, dx$$

OSZUSTWO!

$$= -\int_\Omega x_i \, \partial_{x_i}\left(|u(x)|^p\right) =$$

$$= -p \int_\Omega x_i \operatorname{sgn} u \cdot |u|^{p-1} \partial_{x_i} u \leq$$

$$\leq C(\Omega, p) \int_\Omega |u|^{p-1} |Du| \leq$$

$$C(\Omega,p)\int |u|^{p-1}\,|Du|\,dx$$

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \le C(\Omega,p)\left(\int |u|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\int |Du|^p\right)^{1/p}$$

Höldera

$$\le C(\Omega,p)\left(\int |u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\|Du\|_{L^p}$$

$$\le C(\Omega,p)\,\|u\|^{p-1}_{L^p}\,\|Du\|_{L^p}$$

$$(p-1)q = p$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$\int |fg| \le \left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |g|^q\right)^{1/q}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \, \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

<u>Naprawianie oszustwa:</u>

problemem jest moduł który nie jest różniczkowalny

$$F_\varepsilon(z) = \sqrt{z^2+\varepsilon^2} - \varepsilon \qquad F_\varepsilon(0) = 0$$

$F_\varepsilon \in C^1$, jest 1-lipschitzowska, $|F_\varepsilon'| \leq 1$

$$F_\varepsilon(z) \longrightarrow |z|, \quad F_\varepsilon'(z) \longrightarrow \operatorname{sgn} z \, \mathbb{1}_{z\neq 0}.$$

Zamiast $\int |u|^p$ startujemy z

$$\int_\Omega (F_\varepsilon(u))^p = \int_\Omega \partial_{x_i}(x_i)\,(F_\varepsilon(u))^p =$$

$$= -\int_\Omega p\, x_i\, (F_\varepsilon(u))^{p-1}\, \overbrace{|F_\varepsilon'(u)}^{\leq 1}\cdot \partial_{x_i} u$$

$$\leq C(\Omega, p) \int_\Omega (F_\varepsilon(u))^{p-1} |Du| \leq$$

F_ε jest 1-Lipschitzowska, $F_\varepsilon(0) = 0$ więc

$$|F_\varepsilon(z)| \leq |z|$$

$$\leq C(\Omega, p) \int_\Omega |u|^{p-1} |Du|$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (F_\varepsilon(u))^p \leq C(\Omega, p) \int_\Omega |u|^{p-1} |Du|$$

$u \in C_c^\infty(\Omega)$

$|F_\varepsilon(u)| \leq |u|$ jest całk. bo $u \in C_c^\infty(\Omega)$

więc z tw. o zb. zmaj. $\int_\Omega (F_\varepsilon(u))^p \longrightarrow \int_\Omega |u|^p$

$$\int_\Omega |u|^p \leq C(\Omega, p) \int_\Omega |u|^{p-1} |Du|$$

Kończymy tak samo jak przy oszacowaniu.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Höldera}}}{\leq} C(\Omega, p) \left(\int |u|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\int |Du|^p \right)^{1/p}$$

$$\leq C(\Omega, p) \left(\int |u|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \| Du \|_{L^p}$$

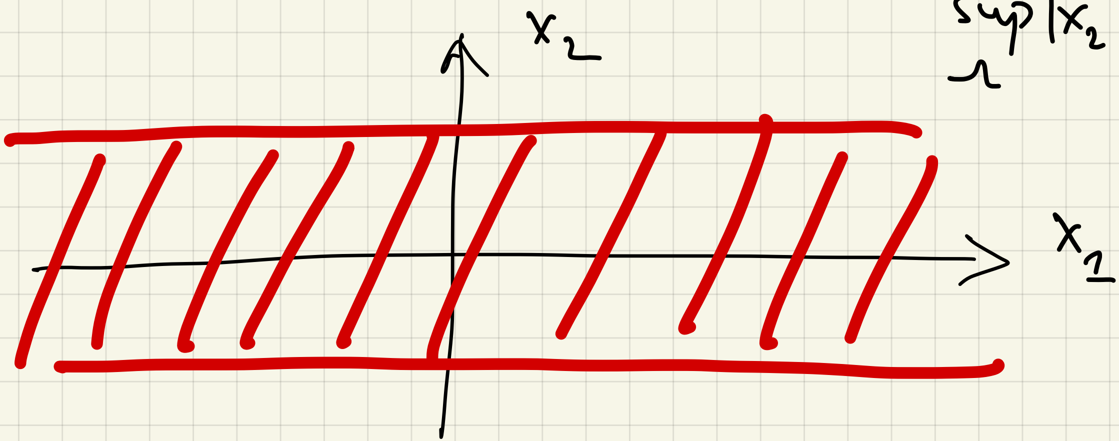
$$\leq C(\Omega, p) \| u \|_{L^p}^{p-1} \| Du \|_{L^p}$$

(C2) Mamy nierówności jeśli Ω jest ograniczony.

Ω jest kierunkowo ograniczony tzn. że $\exists_i$

$$\sup_{\Omega} |x_i| < \infty.$$

$$\sup_{\Omega} |x_2| < \infty.$$



$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) \\ Du \in L^p(\Omega) \end{array} \right\} = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\,W^{1,p}(\Omega)}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\,W^{1,p}(\Omega)}$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) \\ Du \in L^p(\Omega) \\ D^2 u \in L^p(\Omega) \\ \vdots \\ D^k u \in L^p(\Omega) \end{array} \right\}$$

meine $k = 0, 1, 2.$

Szczególny przypadek $p=2$

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

$$\left(W^{1,p}(\Omega) \text{ z } p=2 \right)$$

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$$

$$H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$$

W domu:

na $H^2_0(\Omega)$ pokażcie, że $\|\Delta u\|_2$ zadaje równoważną normę.

(z nier. Poincare mamy na H^2_0 równ. normę

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|\partial_{x_i}\partial_{x_j} u\|_2$$
).

Stosujemy nier. Poincare do $u \rightsquigarrow Du$.

$$\|u\|_{L^2} \leq C(\Omega)\, \|Du\|_{L^2}.$$

w klasycznych pochodnych:

$$\Delta u \text{ jest ciągły} \;\not\Rightarrow\; \partial_{x_i}\partial_{x_j} u \text{ jest ciągłe}$$

(Adam robił ten przykład).

w $H^2_0(\Omega)$

$$\Delta u \in L^2(\Omega) \Rightarrow \partial_{x_i}\partial_{x_j} u \in L^2(\Omega).$$

B3: dotyczy kilku ważnych twierdzeń o przestrzeniach Sobolewa.

Tw. o aproksymacji:

$u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow$ istnieje $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$

taki, że $u_n \to u$ w $W^{1,p}(\Omega)$

$1 \leq p < \infty$

$= \infty$ nigdy nie działa w tw. o aproksymacji.

(A1) $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $Du \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$\forall$ K zwarty $u \in L^1(K)$.

słaba pochodna

$$\partial_{x_i}(u * \eta_\varepsilon) = u * \partial_{x_i}\eta_\varepsilon = (\partial_{x_i} u) * \eta_\varepsilon$$

AF, $\Uparrow$,

AM II-2.

to jest do pokazania

$$\boxed{\text{Po pokazaniu:} \quad \partial_{x_i}(u*\eta_\varepsilon) = (\partial_{x_i}u)*\eta_\varepsilon}$$

Ustalam $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Chcemy pokazać:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i}(u*\eta_\varepsilon)\,\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i}u)*\eta_\varepsilon\,\varphi}$$

$$\|$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n}(u*\eta_\varepsilon)\,\partial_{x_i}\varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} u\,(\partial_{x_i}\varphi)*\eta_\varepsilon =$$

$$\int (f*\eta_\varepsilon)\cdot g = \int f\,(g*\eta_\varepsilon)$$

Dowód:

$$\int (f*\eta_\varepsilon)(x)\, g(x)\, dx = \int\int f(y)\,\eta_\varepsilon(x-y)\, dy\, g(x)\, dx$$

$$= \int\int g(x)\,\underbrace{\eta_\varepsilon(x-y)}_{=\,\eta_\varepsilon(y-x)}\, dx\, f(y)\, dy =$$

$$= \int g*\eta_\varepsilon(y)\, f(y)\, dy.$$

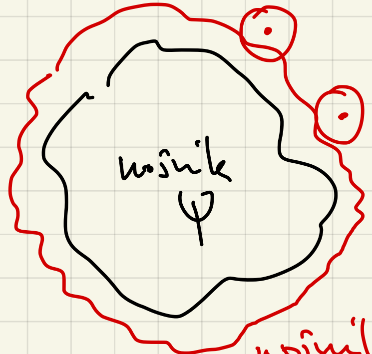
korzystamy z

$$\eta_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(-x).$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} u\,(\partial_{x_i}\varphi) * \eta_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^n} u\,\partial_{x_i}\Big(\overbrace{\underbrace{\varphi}_{\text{na zwarty nośnik}} * \eta_\varepsilon}^{\text{na zwarty nośnik}}\Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} u \;\varphi * \eta_\varepsilon =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} u * \eta_\varepsilon \;\varphi$$



nośnik $\varphi * \eta_\varepsilon$.

$\partial_{x_i} u \in L^p$

$\partial_{x_i} u * \eta_\varepsilon \in L^p$?

Nierówność Younga dla splotów (AF)

$$\|f * g\|_{L^r} \leq C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

o ile $1 + \dfrac{1}{\underset{\underset{p}{\shortparallel}}{r}} = \dfrac{1}{\underset{\underset{p}{\shortparallel}}{p}} + \dfrac{1}{\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{q}}$.

$$\|\partial_{x_i} u * \eta_\varepsilon\|_{L^p} \leq C \|\partial_{x_i} u\|_{L^p} \overbrace{\|\eta_\varepsilon\|_{L^1}}^{1} = C \|\partial_{x_i} u\|_{L^p}.$$

Nowe

w klasycznym przypadku $u_{x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{u(x+e_i h)-u(x)}{h}}_{\text{iloraz różnicowy}}$.

$$x \mapsto \frac{u(x+e_i h)-u(x)}{h} \quad \text{jest w } L^p(\Omega) \quad 1<p<\infty$$

$$\Rightarrow \quad u \in W^{1,p}(\Omega)$$

<u>Dowód</u>: tw. Banacha-Alaoglu z AF.

na $\mathbb{R}^n$ wszystkie normy są równoważne.

$$\|Du\|_{L^p} = \sum \|\partial_{x_i} u\|_{L^p} = \|Du\|_{l^1}$$

równoważne

$$\left(\sum \|\partial_{x_i} u\|_{L^p}^2 \right)^{1/2}$$

równoważnie $\sup\limits_{i=1,\dots,n} \|\partial_{x_i} u\|_{L^p}$