

Zad. Pokazać, że $\|x\|_A = \inf \{ t > 0 : \frac{1}{t}x \in A \}$, gdzie A - wypukły, zaokrąglony, pochlonyjący, x - liniowy, jest normą.

$$\bullet \| \lambda x \|_A = |\lambda| \cdot \|x\|_A, \quad \lambda \neq 0$$

$$\inf \{ t > 0 : \frac{1}{t} \lambda x \in A \} = \inf \{ t > 0 : \frac{|\lambda|}{t} \frac{x}{|\lambda|} \in A \} \stackrel{\text{zaokr.}}{=} \inf \{ t > 0 : \frac{|\lambda|}{t} x \in A \} = |\lambda| \inf \{ t > 0 : \frac{1}{t} x \in A \} = |\lambda| \|x\|_A$$

$$\bullet \|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$$

$$r_x > \|x\|_A$$

$$r_y > \|y\|_A$$

$$\frac{1}{r_x} x \in A, \quad \frac{1}{r_y} y \in A$$

$$\frac{1}{r_x + r_y} (r_x \frac{x}{r_x} + r_y \frac{y}{r_y}) \in A \quad \text{z wypukłości}$$

Przykład:

$C(\mathbb{R})$ - w naturalnej normie nie jest przestrzenią Banacha

Naturalna topologia?

$$\|f\|_k = \sup_{|x| \leq k} |f(x)|$$

$C(U)$ - dla przestrzeni Polskiej U ,
 $\|f\|_k = \sup_{x \in K} |f(x)|$ K - zwarty

Zad. X - liniowa, topologiczna

$f: X \rightarrow K$ liniowy funkcjonal $\equiv f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in X$

f - ciągły

$$X = L^p([0,1], B, \lambda)$$

$$X^* = \{ f : \text{funkcjonal liniowy ciągły na } X \}$$

$$\varphi: [0,1] \rightarrow K$$

f^* - funkcjonal liniowy ciągły

$$\varphi(t) = f^*(f|_{[0,t]}) \Rightarrow \varphi'(t) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^*(f|_{[0,t+h]} - f|_{[0,t]})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^*(f|_{[t,t+h]})}{h}$$

$$f_h = \frac{f|_{[t,t+h]}}{h} \rightarrow L_p$$

f - ogr.

$$\|f\| \leq M$$

$$\left| \lim_{h \rightarrow 0} f^*\left(\frac{f|_{[t,t+h]}}{h}\right) \right|$$

$$\left\| \frac{f I_{[t, t+h_n]} }{h_n} \right\| = \int \left| \frac{f I_{[t, t+h_n]} }{h_n} \right|^p = \left| \int |f|^p \frac{I_{[t, t+h_n]} }{h_n^p} \right| \leq M^p m^{1-p} \rightarrow 0$$

Def:

X, Y - są izomorficzne $\Leftrightarrow \exists T: X \rightarrow Y$, T -liniowy T jest 1-1, T, T^{-1} - ciągłe.
 $T: X \rightarrow Y$ - jest ciągły $\Leftrightarrow \forall u \in B_0(Y) \exists v \in B_0(X) T(v) \in u$.

$$\dim X = n, \quad X \cong (K^n, || \cdot ||) \quad K = \mathbb{R}$$

$$T: K^n \rightarrow X$$

$\dim X = n$ $e_1, e_2, \dots, e_n$ - baza nad dowolnym K dla X

$$T((d_i)) = \sum_{i=1}^n d_i e_i$$

$$(d_i)_{i=1}^n \in K^n$$

$$|(d_i)| = \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right)^{1/2}$$

U - otoczenie 0 w X

$Tv \in U$ istnieje otoczenie $W \in B_0(X)$
 $v \in V$

$$\underbrace{W + W + \dots + W}_n \subset U$$

$$|\lambda| \leq \varepsilon \quad |\lambda e_i| \in W$$

$$|d_i| \leq \varepsilon \quad i = 1, \dots, n$$

$$T(K(0, \varepsilon)) \subset U$$

Jak pokazać, że odwrotne jest ciągłe?
 X - jest F^*

$$|| (d_i) || \quad || T(d_i) ||$$

$$(d_i) \in S$$

$$|| (d_i) || = r$$

$$|| (d_i) || \geq r$$

$$|| T(d_i) || \geq \varepsilon$$

$$|| T(d_i) || \rightarrow 0$$

$$|(d_i)| \geq r$$

21.02.2011

Zad. Jeżeli X - n -wymiarowa, to $X \cong \mathbb{R}^n$, $(X \cong K^n)$
 (liniowo-topologiczna)

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad \phi: K^n \rightarrow X \quad (x_i)_{i=1}^n \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

ϕ - „1-1”, ciągły, ϕ^{-1} - ciągły - chcemy
 mamy

$$T(U)$$

U - otoczenie zera
 w $\mathbb{R}^n$

$$\text{istnieje } \forall \varepsilon > 0 \quad \forall v \in T(U)$$

$$K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n, \quad T(K_\varepsilon) - \text{zbiór zwarty w } X$$

$$S_\varepsilon = \{x: |x| \leq \varepsilon\}$$

Zad. X, Y - metryczne, zupełne, liniowe

$T: X \rightarrow Y$ ciągły, „na” $\Rightarrow T$ - zwarte odzorowanie

$T(U)$ - otwarty dla U - otwartego

U - otoczenie zera, $T(U)$ - zawiera otoczenie zera w Y

$K_X(\varepsilon) = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$ istnieje δ t.ze $T(K_X(\varepsilon)) \supset K_Y(\delta)$

$$T(x+U_0) \supset y+V_0$$

$$T_x + T U_0$$

$$T U_0 \supset y_0 + V_0$$

$$T(U_0 - U_0) \supset V_0 + V_0$$

$$K_X(\varepsilon)$$

$$\overline{T_X(K_\varepsilon)} \text{ zawiera otoczenie zera}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad K_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\bigcup_n \overline{n T_X(K_{\frac{\varepsilon}{2}})} \subset Y$$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n} \quad K\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$n T_X(K_{\frac{\varepsilon}{2}})$$

$\Downarrow$

$$\overline{n_0 T_X(K_{\frac{\varepsilon}{2}})} \supset \checkmark$$

$$\supset K(y_0, \delta)$$

$$n_0 T_X(K(x, \varepsilon))$$

Def. w przestrzeniach metrycznych zbiór S jest prezwarty jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in S$$

$$\bigcup_{i=1}^n K(x_i, \varepsilon) \supset S \quad \varepsilon\text{-sieć}$$

S nazywamy prezwartym jeżeli dla dowolnego otoczenia zera U w X istnieje $A \subset S$, A - skończony zbiór, t.ze $A+U \supset S$

Ład. (tw. Mazura)

Jeśli S - prezwarty, wówczas $\text{conv}(S)$ - prezwarty, w przestrzeni liniowo-top.

$$\text{conv}(S) \subset \bigcup_{a \in A} a + U$$

$$V+V \subset U$$

$$\text{conv}(A)$$

$$B \subset \text{conv}(A) \subset B+V$$

$$S \subset \text{conv}(A) + V \subset B+V+V \subset B+V$$

$\Downarrow$ wypukłe

$$\text{conv}(S) \subset B+V$$

$$\text{Zad. } \|a_i\| = \sum |a_i|^p < \infty, \quad 0 < p < 1$$

$$A = (\beta_i e_i) \quad \beta_i \rightarrow 0$$

$$\sum \lambda_i \beta_i e_i \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \|\sum \lambda_i \beta_i e_i\| = \sup_{\substack{\lambda_i \rightarrow 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \sum |\lambda_i|^p |\beta_i|^p$$

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{\ln k} \right|^p \frac{1}{n^p} \geq \left| \frac{1}{\ln n} \right|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Twierdzenie: X -liniowa, topologiczna jest lokalnie zwarta $\Leftrightarrow$ jest skończona wymiarowa.

Jeżeli istnieje przewarte otoczenie zera wówczas X -skończona wymiarowa.

$$V - \text{przewarte} \quad \alpha \quad |\alpha| < \frac{1}{4}$$

M -przestrzeń liniowa
skończona wymiarowa

$$V \subset S + \alpha V \quad V \subset M + \alpha V$$

$$x \in M \quad \{r: (x + rV) \cap M \neq \emptyset\} \quad M \cup \{x\}$$

$$d < r < d(1+\varepsilon)$$

$$m \in M$$

$$x - m \in rV$$

$$x - m \in r(M + \alpha V)$$

$$x - m \in rm_1 + r\alpha V_1$$

$$x - m_2 \in r\alpha V$$

$$r\alpha > d$$

$$d < d(1+\varepsilon) \cdot \alpha, \quad \alpha < \frac{1}{4}$$

$$d < \frac{d(1+\varepsilon)}{4}$$

opr.

28.02.2011

X -przestrzeń liniowa A -wypukły, $A \subset X$, $a \in A$ dla dowolnego

funkcyjonału liniowego $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) \geq 0$ dla $a \in A$, f -zerowa

$$X = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} : a_i \neq 0 \text{ co najwyżej dla skończonej ilości } i \}$$

$$A = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} : a_{i_0} > 0 \text{ gdzie}$$

$$(a_i) \xrightarrow{f} \sum \alpha_i a_i$$

$$e_i \xrightarrow{f} \alpha_i$$

$$(a_i) \quad \alpha_k \neq 0 \quad \alpha_{k+1}$$

$$\alpha_k > 0$$

B -maksymalny zbiór wypukły, zawierający A i nie zawierający 0 .

$x \neq 0$
 $x \notin B, \Rightarrow x \in -B$ (czyli $B \cup \{-B\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Niech $x \notin B \cup -B \wedge x \in B \Rightarrow \text{konv } B \cup \{x\}$

$$\lambda x + (1-\lambda)b = 0$$

Zad. X - przestrzeń liniowa nad $\mathbb{C}$.

$p: X \rightarrow \mathbb{R}$ subaddytywny, $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$, $x_0 \in X$ i t.z.e

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq p(x), \quad |f(x_0)| \geq p(x_0)$$

Dowód: Niech $g = |f|/p$ g - funkcjonal nieczywisty

$$g(x_0) = p(x_0)$$

$$\text{na } \langle x_0 \rangle$$

$$g(tx_0) = tp(x_0)$$

$$L = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\exists f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq p(x)$$

$$f(x_0) = p(x_0)$$

$$\tilde{f}(x_0) = f(x) - if(ix)$$

$$g(tx_0) \leq p(tx_0)$$

$$p(-x_0) = p(x_0)$$

$$\tilde{f}((a+bi)x) =$$

$$\tilde{f}(ix) = f(ix) - if(-x) = if(x) + f(ix) = i[f(x) - if(ix)] = i\tilde{f}(x)$$

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq p(x)$$

$$f((\alpha+i\beta)x) \leq p((\alpha+i\beta)x) = p(x)$$

$$\alpha f(x) + \beta f(ix) \leq p(x)$$

$$= \sqrt{f^2(x) + f^2(ix)} \leq p(x)$$

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$$

$$\text{Re } |\tilde{f}(x_0)| \geq p(x_0)$$

$$f(x_0) \geq p(x_0)$$



Def: X, Y - przestrzenie Banacha

$$T: X \rightarrow Y$$

$$Tx = x^*(x)y$$

T - nazywa się

ścis nuklearny

jeżeli

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n, \quad \sum \|x_n\| \|y_n\| < \infty$$

$$\|Tx\| \leq \sum |x_n^*(x)| \|y_n\| \leq (\sum \|x_n^*\| \|y_n\|) \|x\|$$

$$\|T\| \leq \sum \|x_n^*\| \|y_n\|$$

$$T: X \rightarrow X$$

$$T = \sum x_n^* \otimes y_n$$

$$(\text{tr } T) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(y_n)$$

$$x_n^*(y_n)$$

u_n - baza ortonormalna

$$H_1$$

$$H_2$$

$$(u_n)$$

$$T: H_1 \rightarrow H_2$$

jest Hilberta - Schmidt

$$\sum \|Tu_n\|^2 < \infty$$

$$\sum \|Tu_n\|^2 < \infty$$

$$\|T\| \leq \|T\|_{HS} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2}$$

$$A(m,n) = \langle Tu_n, v_m \rangle$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |\langle Tu_n, v_m \rangle|^2$$

$$\|y\|^2 = \sum |\langle v_n, y \rangle|^2$$

$$L_2 \rightarrow L_2$$

$$A((\alpha_n)) = (\sum_n A(m,n) \alpha_n)$$

$$\sum | \langle u_n, T^* v_m \rangle |^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \| T^* v_m \|^2$$

$$\| A(\alpha_m) \|_{L_2} \leq \| T_{HS} \| \| \alpha_n \|$$

$$K: L_2(S, \Sigma, \sigma) \rightarrow L_2(T, \Xi, \theta)$$

$$G: S \times T \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\| K \|_{HS} = \sqrt{\int_S \int_T |G(s,t)|^2 \sigma(ds) \theta(dt)} < \infty$$

$$Kf = \int_T G(s,t) f(t) \theta(dt)$$

Zad. Pokazać, że operator Hilberta-Schmidta jest tej postaci

Zad.* W przestrzeni Hilberta dwa zbiory domknięte, wypukłe, rozłączne. Czy można je rozdzielić hiperpraszczym.

7.03.2011

H_1, H_2 - przestrzenie Hilberta

$$T: H_1 \rightarrow H_2 \quad \text{NWSR:}$$

$$\bullet \sum \| T e_i \|^2 < \infty \quad \text{dla pewnego } (e_i) - \text{ONZ (ortonormalne zupełne)}$$

$$\bullet \sum \| T e_i \|^2 < \infty \quad \text{dla każdego ONZ}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} | \langle T e_i, f_j \rangle |^2 < \infty \quad \text{dla pewnego } (e_i) (f_j) \text{ ONZ}$$

$$\| T \|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \| T e_i \|^2} \quad u(T) \geq \| T \|_{HS} \geq \| T \|^2$$

$$H_1 = L_2(S_1, \Sigma_1, \sigma_1)$$

$$H_2 = L_2(S_2, \Sigma_2, \sigma_2)$$

$$T: H_1 \rightarrow H_2 \quad \text{jest Hilberta-Schmidta} \Leftrightarrow$$

$$K: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\sqrt{\int_{S_1 \times S_2} |K(s,t)|^2 \sigma_1(ds) \sigma_2(dt)} = \| T \|_{HS}$$

$$Tf = \int_{S_2} K(s,t) f(t) \sigma_2(dt)$$

$$T = e \otimes f$$

$$Tx = e \langle x, f \rangle$$

$$f_i - \text{ONZ w } L_2$$

$$g_i - \text{ONZ w } L_2$$

$$\| T \|_{HS} = \sqrt{\sum_{i,j} \langle T e_i, f_j \rangle^2}$$

$$K(s,t) = \sum_{i,j}$$

Operator nuklearny $T: X \rightarrow Y$

$$\text{jeżeli } T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i^*, \quad y_i^* \in Y_i^*, \quad x_i^* \in X_i^*$$

$$\sum \| x_i^* \| \| y_i^* \| < \infty$$

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) y_i \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \|x_i^*\| \right) \|x\|$$

$$u(T) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \|x_i^*\| : y_i \in Y, x_i^* \in X, Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) y_i \text{ dla } x \in X \right\}$$

$$\|T\|_{HS}$$

$$T = \sum x_i^* \otimes y_i$$

$$\|T\|_{HS} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^* \otimes y_i\|_{HS} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\| \|y_i\|$$

T -nuklearny $\Rightarrow T$ -H.S. $\Rightarrow T$ -graniczny

Każdy H.S. jest zwarty

$$\|T_n - T\|_{HS} \rightarrow 0 \quad T_n - \text{składowy}$$

$$TP_n$$

$$P_n = \sum e_i \otimes e_j^*$$

$$T_n = TP_n$$

$$T_n e_i = \begin{cases} 0 & i > n \\ T e_i & i \leq n \end{cases}$$

$$\|T - T_n\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i>n} \|T e_i\|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|T - T_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$T = \sum x_i^* \otimes y_i$$

$$\text{tr } T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(y_i)$$

$$|\text{tr } T| \leq n(T)$$

$$\|P_n\| \leq 1 \quad \text{oraz} \quad P_n x \rightarrow x \quad \forall x$$

$$\text{weźmy} \quad P_n T P_n = \sum_{i=1}^{\infty} (P_n^* x_i^*) \otimes P_n y_i = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \sum x_i^*(y_i)$$

Ślad dla operatora

$$M\text{-reprezentant} \quad \sum \lambda_i = \text{tr } M = \text{tr } (P_n T P_n)$$

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(A) \quad \lambda_i - \text{wartości własne}$$

$$\text{tr } AA^* = \|A\|_{HS}^2$$

Jeśli T -operator nuklearny, wówczas

$$\text{tr } T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(T)$$

$\lambda_i(T)$ - wartość własna

| Tylko w przestrzeniach Hilberta

$$\text{Zad. } L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$$

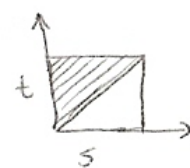
$$Tf(t) = \int_0^t f(s) ds$$

Czy jest to operator Hilberta-Schmidta? Czy jest nuklearny?

Jaki ślad?

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s) ds = \int_0^t f(s) ds, \quad k(t,s) = \chi_{\{s < t\}}$$

$$\sqrt{\int \int k^2(s,t) ds dt} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$



Owszem, jest Hilberta - Schmidta. wiemy to dupki odwadze Janka.

$$\lambda f(t) = \int_0^t f(s) ds$$

$$\lambda f' = f \Rightarrow c e^{\lambda t} \text{ ale w } 0 \text{ jest } 0 \Rightarrow c=0$$

Wsk: $T: X \rightarrow Y$ - nuklearny

$S: W \rightarrow X$, $R: Y \rightarrow Z$, S, R - ograniczony

RTS - jest tez nuklearny

$$n(RTS) \leq \|R\| n(T) \|S\|$$

$$H_0 \xrightarrow{S} H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{R} H_3$$

$$\|RTS\|_{HS} \leq \|R\| \|T\|_{HS} \|S\|$$

$$T = \sum x_i^* y_i$$

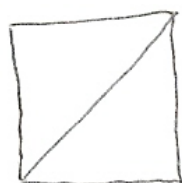
$$T(x) = \sum x_i^*(x) y_i$$

$$RTS = R(\sum x_i^*(S(x)) y_i) = \sum x_i^*(S(x)) R(y_i) = \sum (S^* x^*)(x) R(y_i)$$

$$\|S^* x^*\| \|R y_i\| \leq \|S^*\| \|R\|$$

$$\sum_i \|RTe_i\|^2 \leq \sum_i \|R\|^2 \|Te_i\|^2 = \|R\|^2 \sum_i \|Te_i\|^2 = \|R\|^2 \|T\|_{HS}^2$$

Wsk.



$$K(s,t) = \overline{K(t,s)}$$

$$(\tilde{T}f)(t) = Tf(1-t) \text{ jeśli } \tilde{T} \text{ nuklearny, to } T \text{ tez}$$

$$g(t) \rightarrow g(1-t) \text{ izometria}$$

$$\tilde{T}f(t) = \int_0^{1-t} f(s) ds = \int_0^1 K(t,s) f(s) ds \Rightarrow K(t,s) = \mathbb{1}_{\{s \leq 1-t\}}$$



Fakt:

$$T \text{ samosprzeczony} \quad n(T) \geq \sum |\lambda_i(T)| > \infty$$

Teraz liczymy wartości własne operatora

$$\lambda f(t) = \int_0^{1-t} f(s) ds$$

$$\lambda f'(t) = -f(1-t)$$

$$f(1-t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t f(s) ds$$

$$\Rightarrow \lambda^2 f'(t) = -\int_0^t f(s) ds$$

$$\lambda^2 f''(t) = -f(t)$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = B \cos(\hat{\lambda} t) + A \sin(\hat{\lambda} t)$$

$$0 = B \cos \hat{\lambda} + A \sin \hat{\lambda}$$

$$0 = -\hat{\lambda} B \sin \hat{\lambda} + \hat{\lambda} A \cos \hat{\lambda}$$

$$\Rightarrow A = 0, f(t) = B \cos \hat{\lambda} t$$

$$\cos \hat{\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$$T^* = T$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i$$

$$\|T\| = \sqrt{\sum |\lambda_i|^2}$$

Zad * Udowodnić, że złożenie dwóch operatorów Hilberta - Schmidta jest nuklearne.

14.03.2011

Zad 1 * X - przestrzeń liniowa

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{t.j.}$$

$$1^\circ \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$2^\circ \quad t_n \rightarrow 0, t_n \in K, \|t_n x\| \rightarrow 0$$

$$x_n \rightarrow 0, \|x_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|t_n x_n\| \rightarrow 0$$

$$\text{też: } x_n \rightarrow 0, t_n \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n t_n\| \rightarrow 0$$

$$(1, \|x\|)$$

$$1 \wedge (a+b) \leq (1 \wedge a) + (1 \wedge b)$$

$$\begin{aligned} (1 \wedge \|t_n x_n\|) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 \wedge \|t_n x_n\|) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 \wedge \|(t_n + s)x_n - s x_n\|) ds \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 \wedge \|(t_n + s)x_n\|) ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 \wedge \|s x_n\|) ds \leq \end{aligned}$$

$$\text{Zad. } D = \{z: |z| < 1\}$$

$$\mathcal{H}(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{C}, \text{ holomorphic}\}$$

1) znaleźć naturalną topologię naturalną

2) pokazać, że jest Montela / Schwarz / nuklearna

Def: X - lokalnie wypukłe nad K Montela, jeżeli każdy domknięty ograniczony jest zwarty.

$$\forall u \exists v \text{ i } i: E_v \xrightarrow{i} E_u \text{ jest zwarty}$$

$$(E, p_v) \rightarrow (E, p_u)$$

$$D_n = \{z: |z| \leq 1 - \frac{1}{n}\} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} D_n = D$$

$$\|f\|_n = \sup_{x \in D_n} |f(x)|$$

$$\|f_k - f\|_n \rightarrow 0$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \Leftrightarrow \sum |a_n| r_n < \infty$$

$$\forall k \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2n} < \infty$$

$$\forall 0 < r < 1 \quad \sum |a_n|^2 r^{2n} < \infty$$

$$\mathcal{H}(D) \simeq \left\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} : \forall k \quad \sum |a_n|^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2n} < \infty \right\}, \quad \|(a_n)\|_k = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2n}}$$

$$(E, \|\cdot\|_m) \rightarrow (E, \|\cdot\|_k)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \uparrow \text{izometria} \\ (a_n (1 - \frac{1}{k})^n) & \xrightarrow{\Delta} & b_n \rightarrow (1 - \frac{1}{m})^n b_n \\ \ell_2 & & \ell_2 \\ & \xrightarrow{\Delta} & \\ & \frac{(1 - \frac{1}{k})^n}{(1 - \frac{1}{m})^n} & \end{array}$$

jeszcze raz to to jest operator diagonalny.

$$(E, \|\cdot\|_m) \rightarrow (E, \|\cdot\|_k)$$

m, k - ustalone

$$\begin{array}{ccc} \downarrow (1 - \frac{1}{m})^n & & \uparrow \frac{1}{(1 - \frac{1}{k})^n} \text{izometria} \\ \ell_2 & \xrightarrow{\Delta} & \ell_2 \\ & \xrightarrow{\Delta} & \\ & \frac{(1 - \frac{1}{k})^n}{(1 - \frac{1}{m})^n} & \end{array} \quad (a_n) \rightarrow (a_n (1 - \frac{1}{m})^n)$$

$$\ell_2 \xrightarrow{\Delta} \ell_2$$

$$\Delta (\delta_n)$$

$$\sum |\delta_n| < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n e_n) \otimes e_n$$

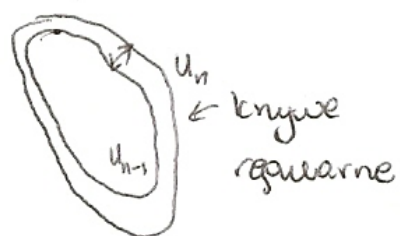
normy $\|f\|_n$ i $\|(a_n)\|_k$ są równoważne

$$\|f\|_n = \left(\int_{\mathbb{D}_k} |f(z)|^2 dz \right)^{1/2} = \sqrt{\sum |a_n|^2 \int_{\mathbb{D}_k} |z|^{2n} dz} = \sqrt{\sum |a_n|^2 (1 - \frac{1}{k})^{2n+2}}$$

w drugą stronę podobnie

A jak mamy dany obszar $\mathcal{H}(U)$?

$$U_n \subset U_{n+1} \quad \bigcup U_n = U$$



$$\|f\| = \sqrt{\int_{\partial U_n} |f(z)|^2 |dz|}$$

$$\gamma(t), \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\|f\|_n = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(\gamma(t))|^2 |\gamma'(t)| dt}$$

$$(\mathcal{H}(D), \|f\|_{n+1}) \rightarrow (\mathcal{H}(D), \|f\|_n)$$

Pokażemy, że id jest H-S

(bo to jest prosta metoda dowodzenia nuklearności)

$$f(z), \quad z \in \partial U_n$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_{n+1}} \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_{n+1}(t))}{z - \gamma_{n+1}(t)} \gamma'(t) dt$$

$$E \hookrightarrow H$$

$$S \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'$$

21.03.2011

Tw. Peano

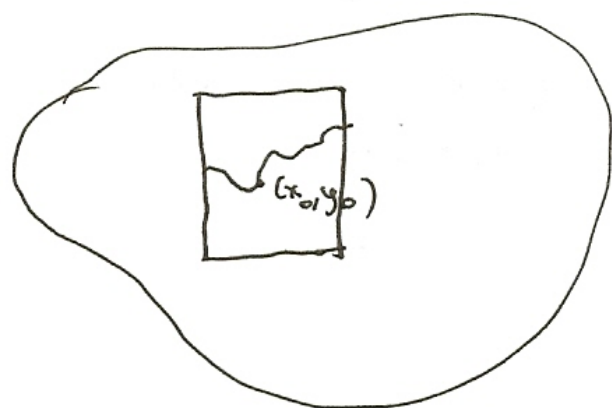
$$f(x, y), \quad f - \text{ciągła}, \quad f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, y_0) \in U$$

$$\exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta, y_0 - c, y_0 + c) \quad \text{oraz} \quad \varphi: \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

$$\varphi(x_0) = y_0$$

$$y_0 - c \leq \varphi(x) \leq y_0 + c$$



$$\text{Dawid:} \quad \varphi(x) = y_0 + \int_0^x f(s, \varphi(s)) ds, \quad T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

$$|f(x, y)| \leq M$$

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta, y_0 - M\delta, y_0 + M\delta] \subseteq U$$

$$X = C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$$

$$B_M = \{ \varphi : |\varphi(t) - y_0| \leq M \}$$

$$|T\varphi - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \right|$$

$$\text{Przedział } \delta \text{ mały, więc } T: B_M \rightarrow B_M$$

$$T \text{ zwarty, więc } \overline{\text{conv } T(B)} \subseteq B_M$$

$$\text{zwarty} = K, \quad T: K \rightarrow K$$

Kryterium na zwartość: Arzela - Arzeli:

$$|T\varphi(x) - T\varphi(y)| = \left| \int_x^y f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M(y - x)$$

S - kompakt metryczny

C(S) - przestrzeń Banacha

$\varphi: S \rightarrow S$ ciągłe, wówczas istnieje miara μ na S t.z.e

$$\varphi(\mu) = \mu, \quad \text{gdzie} \quad \varphi(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)).$$

$$\varphi^*: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$$

K - miary probabilistyczne na S

$$X = C^*(S)$$

T - stała *

$$K = \mathcal{P}(S)$$

B - kule jednostkowe w $C^*(S)$

X - metryzowalna, więc wystarczy mówić o ciągach

$$\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu \iff \forall \varphi \in C(S) \quad \mu_n(\varphi) \rightarrow \mu(\varphi)$$

$$\varphi^*(\mu_n) \xrightarrow{w^*} \varphi^*(\mu), \quad \text{bo} \quad \mu_n(\varphi \circ \varphi) \rightarrow \mu(\varphi \circ \varphi)$$

$\mathcal{A} = \{ \psi: S \rightarrow S \text{ ciągłe} \}, \psi^*(\mu) = \mu, \forall \psi \in \mathcal{A}$

$$\psi_1 \psi_2 = \psi_2 \psi_1$$

ψ^* musi być afiniczne

$$\tilde{\psi}: C(S) \rightarrow C(S)$$

$$\tilde{\psi}: \mu(S) \rightarrow \mu(S) \quad \tilde{\mu}(\mu(f)) = \mu(\tilde{\psi}(f))$$

Inne tw:

K - zwarty w lokalnie wypukłej X , $T: K \rightarrow K$ - ciągłe

T - afiniczne, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, $x, y \in K$

to T ma punkt stały

Dowód:

$$Tx - x \notin U \quad \forall x$$

Rozpatrzmy no sumy:

$$\underbrace{y + Ty + T^2y + \dots + T^{n-1}y}_n = x$$

$$Tx - x = \frac{T^n y - y}{n}, \text{ od pewnego miejsca } \in U \text{ wbrew założeniu}$$

Uogólnienie: T, S - afiniczne, $TS = ST$ wtedy mają wspólny punkt stały

spójrzmy na $A = \{x \in K : Tx = x\}$

A - zwarty, wypukły - a wypukłości T

$$y \in A: Sy = \dots = TSy$$

Połączenie tw. o odwz. zwspazajmy, czyli z tw. Schaudera

$T: B \rightarrow B$, $B \subset X$, B - kula domknięta

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|$$

$$\alpha(A) = \inf_{\epsilon} \exists \text{ sk } B(\epsilon) \quad - \text{ miara nie zwartości zbioru}$$

Jeśli $\forall A \subset \text{wypukła}$ $\alpha(T(A)) \leq \lambda \alpha(A)$ wówczas istnieje punkt stały

$$T: B \rightarrow B$$

B - zwarty, wypukły $\Rightarrow$ tw. Schaudera

$$\alpha(\text{konv}(T(A))) = \alpha(T(A))$$

Dowód:

Rozczynnimy od B

$$B_0 = B \quad : \quad T: B \rightarrow B, \text{ więc} \quad T: B_1 \rightarrow B_1$$

$$B_1 = \overline{\text{konv}(T(B))}$$

$\vdots$

$$B_\infty = \bigcap_n B_n$$

$$T: B_\infty \rightarrow B_\infty, \quad \alpha(B_\infty) = 0 \quad : \quad \text{tw. Schaudera}$$

Zad. $x = (x_i)$

C_0 B-kula jednostkowa w C_0

$T_1((x_n)) = (1 - \|x\|, x_1, x_2, \dots)$
nieoddalające, czy ma punkt stały? Pokazać, że jest to odwzorowanie

T nieoddalające, bo: $(x_n), (y_n) \in C_0$

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - T(y_n)\| &= \sup_n \{ |1 - \|x\| - 1 + \|y\||, |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots \} = \\ &= \max \{ |\|y\| - \|x\||, \|x - y\| \} = \|x - y\| \quad (|\|y\| - \|x\|| \leq \|x - y\|) \end{aligned}$$

$$\|T(x)\| = \sup_n \{ 1 - \|x\|, |x_1|, \dots \} = \max \{ 1 - \|x\|, \|x\| \} \leq 1, \text{ bo } \|x\| \leq 1$$

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 = 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2$$

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \leq 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2$$

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 - \delta$$

$$\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon$$

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

Zad. X - przestrzeń Banacha jednostajnie wypukła

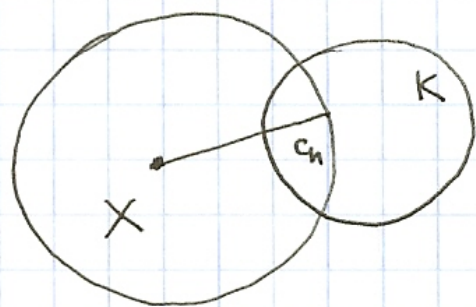
K - zbiór wypukły, domknięty

$\forall x \exists y \in K \quad d(x, K) = d(x, y)$ Rozw:

$$\|u\|, \|v\| = r$$

$$\|u - v\| \geq \varepsilon$$

$$\left\| \frac{u + v}{2} \right\| \leq (1 - \delta(\frac{\varepsilon}{r}))r$$



$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$z, y \in C$$

$$\|x - x\| = r$$

$$\|x - y\| = r$$

$$r \leq \left\| x - \frac{x + y}{2} \right\| = \left\| \frac{x - y}{2} \right\| \leq (1 - \delta(\frac{\varepsilon}{r}))r$$

Zad. K - wypukły, domknięty, ograniczony. T - nieoddalające
(w przestrzeni Banacha) - wówczas

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in K \text{ t.ze } \|x_\varepsilon - T x_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

$$x_0 \in K, \varepsilon$$

$$L(x) = \varepsilon x_0 + (1 - \varepsilon)T(x)$$

$$\|Lx - Ly\| = (1 - \varepsilon)\|Tx - Ty\| \leq (1 - \varepsilon)\|x - y\|, x \in K, Lx \in K, \text{ bo } K \text{ - wypukły}$$

na mocy tw. Banacha $\Rightarrow \exists x_\varepsilon$ t.z.e. $Lx_\varepsilon = x_\varepsilon \Rightarrow$

$$x_\varepsilon = \varepsilon x_0 + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \|\varepsilon(x_0 - Tx_\varepsilon)\| < 2\varepsilon M$$

Zad. K -zawarty, wypukły w przestrzeni lokalnie wypukłej

$$F: K \rightarrow 2^K$$

$F(x)$ - domknięty, wypukły

$\forall U \subset X$ zbiór otwarty w X (x_0 - ustalone)

$$F(x_0) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow F(x) \cap U \neq \emptyset, \quad x \in x_0 + V \quad \text{dla } V - \text{ pewne otoczenie zera}$$

$$\text{też: } \exists x \in K, \quad x \in F(x)$$

11.04.2011

Zad. $\{x \in \mathbb{C} : |x|=1\}$

$$\mu - \text{ ma } G \quad \int_G x^n \mu(dz) = x(n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$(x(n))$ jed. ciąg momentów pewnej miary na G probabilistycznej
wtedy tylko wtedy, gdy $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ jest dodatnio określony

$$\Rightarrow \forall k \quad \forall (x_n)_{n=-k}^k \quad \sum_{-k \leq n, m \leq k} \int_G x^{n-m} \mu(dz) \overline{x_n x_m} \geq 0$$

$$\int_G \left(\sum_{-k \leq n, m \leq k} x^{n-m} \overline{x_n x_m} \right) \mu(dz) = \int_G \sum_{-k \leq n \leq k} x^n \overline{x_n} + \sum_{-k \leq m \leq k} x^{-m} \overline{x_m} \mu(dz) =$$

$$= \int_G \left| \sum_{-k \leq i \leq k} x^i \overline{x_i} \right|^2 \mu(dz) \geq 0$$

" $\Leftarrow$ "
 $X = \mathbb{C}^\infty = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}\}$ - topologia zbieżności po współrzędnych

$K = \{(a(n))_{n \in \mathbb{Z}} : a(n) - \text{dodatnio określony}, a(0)=1\}$ - jest zwarty, wypukły

K - jest ograniczony (z kryt. Sylwestera) : $(x_0)^n = 0$ pkt ekstremalnych, co wykazemy.
 $a(n) \in \text{Ext}(K)$

$$b(n) = 2a(n) + a(n+k) + a(n-k) \quad k - \text{ustalone}$$

$$c(n) = 2a(n) + (a(n+k) + a(n-k))$$

$b(n)$ i $c(n)$ są dodatnio określone

$$b'(n) = \frac{b(n)}{b(0)} - \text{żeby w } 0 \text{ było } 1$$

$$a(n) = \frac{b(0)}{4} b'(n) + \frac{c(0)}{4} c'(n)$$

$$b(0) = 2 + a(k) + a(-k) = 2(1 + \text{Re } a(k)) \geq 0$$

$$c(0) \geq 0$$

$$a(n)a(k) + a(n)a(-k) = a(n+k) + a(n-k)$$

$$a(k)a(n) + a(k)a(-n) = a(n+k) + a(k-n)$$

$$2 \operatorname{Im} a(-k)a(n) = 2 \operatorname{Im} a(n-k)$$

$$? \Downarrow a(n-k) = a(n)a(-k)$$

Chytróść:

$$a_n \in K_{\mathbb{R}}$$

$$a_n(n) \in \operatorname{Ext}(K)$$

$$z_0^n \in K(a_n) \in K$$

$$\operatorname{Im}(z_0^{-k}(a(-k))a(n)) = \operatorname{Im} z_0^{n-k} a(n-k)$$

Zad.

$X \rightarrow Y$, X - ok. wymiarowa

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

$$B = \{x : \|x\| \leq 1\}$$

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \quad e_i \in \operatorname{Ext}(B)$$

$$\|Tx\| = \left\| \sum \lambda_i T e_i \right\| \leq c \sum \lambda_i \|e_i\| \leq c$$

Zad (z zycia wazne)

$$(a_{ij})_{n \times n}$$

$$s(n) = \max_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \max_i a_{i, \sigma(i)} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s(k) = \max a_{ij}$$

$$K = \{a_{ij} : a_{ij} \geq 0 \mid \frac{1}{n} \max_{\substack{C \subset I_n \times I_n \\ |C|=n}} \sum a_{ij} \leq 1\}$$

* $\checkmark$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s(k)$$

$$(a_{ij})_{n \times n}$$

$$a_{ij} \geq 0$$

$$K = \sum_{\substack{(i,j) \in L \\ \#L = n}} a_{ij} \leq n$$

Zad.
$$\left. \begin{array}{l} a_{i_0 j_0} = n \\ a_{ij} = 0 \\ (i,j) \neq (i_0 j_0) \end{array} \right\} \text{ to jest punkt ekstremalny}$$

Uwaga: $a \in \text{Ext}(K) \Leftrightarrow (\forall b \in X \quad a+b \in K \wedge a-b \in K) \Rightarrow b=0$

dozad: „ $\Rightarrow$ ” jasne

„ $\Leftarrow$ ” nie wprost

$$a = \frac{c+d}{2} \quad c \in K, d \in K$$

$$a+x=c$$

$$a-x=d$$

$$2x=c-d, \quad x = \frac{c-d}{2} = b$$

$$a+b \in K, \quad \text{bo } a + \frac{c-d}{2} = \frac{c+d}{2} + \frac{c-d}{2} = c \in K$$

$$a-b \in K, \quad \text{tak samo}$$

$$b \neq 0, \quad \text{bo } c \neq d.$$

z uwagi zadanie jest jasne.

Jakie są inne punkty ekstremalne?

$J = (n+1)$ jedynek, poza tym zera.

Zad. Pokazać, że
$$\|a\| = \sup_{I \subset \{0, \dots, n\}} \left| \sum_{i \in I} a_i \right|$$

Nier. Hadamarda:

$$\det |a_{ij}| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2$$

$$|\det a_{ij}| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|$$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \quad \|a\| = \sup_{I \subset \{1, \dots, n\}} \left| \sum_{i \in I} a_i \right|$$

$$K = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\| = 1\}$$

$(1, 0, \dots, 0)$ jest p. ekstremalnym. Zai nie wprost

$$\frac{a+b}{2} = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\frac{a_1+b_1}{2} = 1 \Rightarrow a_1 = b_1 = 1$$

$(1, -1, 0, \dots, 0)$ - jest p. ekstremalnym

Zad. (WAŻNE ZADANIE)

$$h: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$h(x, y) = \frac{1}{4} (h(x+1, y+1) + h(x-1, y+1) + h(x+1, y-1) + h(x-1, y-1))$$

Udowodnić, że h jest funkcją stałą.

$x_1, x_2, \dots$ - ciąg niezależnych zmiennych losowych i.i.d

o wartościach w $\mathbb{Z}^2$

$$\mathbb{E} h(x + x_1) = h(x)$$

$$h(0,0) = 1$$

K - zwarty, wypukły

$a = (x, y)$ - pkt. ekstremalny

$$h(a) = \frac{1}{4} \left(h(a+e_1) \frac{h(e_1)}{h(a+e_1)} + h(a-e_1) \frac{h(e_1)}{h(a-e_1)} + h(a+e_2) \frac{h(e_2)}{h(a+e_2)} + h(a-e_2) \frac{h(e_2)}{h(a-e_2)} \right)$$

$$h(a+e_1) = \lambda h(a)$$

$$\frac{1}{4} (h(e_1) + h(e_2) + h(e_3) + h(e_4)) = 1$$

$$\frac{h(a+e_1)}{h(e_1)} = h(a) \quad \begin{aligned} h(a+e_1) &= h(a) \cdot h(e_1) \\ h(a-e_1) &= h(a) \cdot h(-e_1) \end{aligned}$$

$$\text{Bra tym } 1 = h(e_1 - (-e_1)) = h(e_1) h(-e_1)$$

$$h(a) = (h(e_1))^{a_1} (h(e_2))^{a_2}$$

$$h(x, y) = e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y}$$

$$1 = \mathbb{E} h(0+x) = \mathbb{E} e^{\lambda x} > e^{\lambda \mathbb{E} x} = 1$$

Def: Macierz stochastyczna

$$(a_{ij})_{n \times n} \quad a_{ij} \geq 0$$

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

macierz stochastyczna + $\forall j \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$

Def: Macierz bistochastyczna

Zad. Punkty ekstremalne w macierzy bistochastycznej to takie, które mają dokładnie jedną jedynkę w każdym wierszu i w każdej kolumnie

Zad. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ t.z.e

$\forall$ f - ciągła, wypukła

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^n f(\beta_i)$$

$$\Leftrightarrow \sum \alpha_i = \sum \beta_i \quad \alpha_1^* \geq \alpha_2^* \geq \dots \geq \alpha_n^* ; \beta_1^* \geq \beta_2^* \geq \dots \geq \beta_n^* \quad \text{- permutacje}$$

$$\forall_k \sum_{i=1}^k \alpha_i^* \geq \sum_{i=1}^k \beta_i^*$$

$\Rightarrow \exists (a_{ij})_{n \times n}$ - bistochastyczna t.z.e

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j$$

Uwaga:



59 punktami
w zbiorze ekstremalnych
funkcji wypukłych

zeeee

3.05.2011

zad. $\|(a_i)\| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|$

$$((a_i) * (b_i))_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{n-i} b_i$$

Pokazać, że jest to algebra Banacha

1. $(a_i) * (b_i) = (b_i) * (a_i)$ bo $n-i=j \Rightarrow i=n-j$

2. $\|(a_i) * (b_i)\| \leq \|(a_i)\| \|(b_i)\|$

$$\sum_n \left| \sum_i a_{n-i} b_i \right| \leq \sum_{i,n} |a_{n-i} b_i| = \sum_i |b_i| \|(a_i)\| = \|(a_i)\| \|(b_i)\|$$

3. $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

funkcjonalny multiplikatywny

$$\varphi(e_0) = 1$$

$$\varphi(e_1) \neq e_1 * e_1 = e_2$$

$$e_i * e_j = e_{i+j}$$

$$\varphi(e_i) = x^i$$

$$\varphi(e_j) = x^j$$

$$\mathcal{H} = T = \{x : |x| = 1\}$$

$$A \rightarrow C(\mathcal{H})$$

$$\downarrow \quad \hat{a}$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x^j$$

$$\int \varphi(x) \bar{x}^j \lambda(dz) = a_j$$

$$a \in \ell_1(x)$$

$$\hat{a} \neq 0$$

$$\varphi(x) = \hat{a}$$

$$\sum a_j x^j \neq 0$$

$$\frac{1}{a} \in \ell_1(x)$$

$$\hat{a}$$

$$\varphi(a) \neq 0$$

$$(a)^{-1} = b \in \ell_1$$

$$ab = e$$

$$(\hat{a})^{\hat{b}} = 1$$

$$\hat{b}(x) = \frac{1}{\hat{a}}$$

$$a \in \ell_1(\mathbb{Z})$$

$$\ell_1(G) = \{ f: G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{k \in G} |f(k)| = \|f\| \} \quad (f * h)(n) = \sum_{k \in G} f(n-k)h(k) \}$$

$$\gamma: G \rightarrow \mathbb{T}$$

$$\gamma(a+b) = \gamma(a)\gamma(b)$$

G- topologia, przemienne

$\mathcal{M}(G) = \{ \mu : \text{miary o wartościami zespolonymi skończonej miary} \}$

$$\|\mu\| = \text{var } \mu = \sup_{C=A_1 \cup A_2 \dots} \sum |\mu(A_i)|$$

$$\mu * \gamma(A) = \int_G \mu(A-x) \gamma(dx)$$

$$\|\mu * \gamma\| \leq \|\mu\| \|\gamma\| \quad G\text{-przemienne}$$

$$e = \delta_0 \quad \{ \gamma: G \rightarrow \mathbb{T} \text{ są wszystkie } \gamma(a+b) = \gamma(a)\gamma(b) \} = \hat{G}$$

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(s) \mu(ds)$$

$A = C(K)$ - Algebra Banacha, przemienne, z jednościami
zwarty

$$\varphi(e) = 1 \quad \varphi_m(\varphi) = \varphi(m)$$

$$m \in K$$

$$m_1, m_2 \in K$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = e$$

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1$$

$$\varphi_1 + (1 - \varphi_1)$$

$$\varphi(\varphi) = \int \varphi(s) \mu(ds)$$

$$\|\mu\| = \|\varphi\|$$

$$\varphi(1) = 1$$

zad. $C(K) \xrightarrow{\text{homeo}} C(L) \xrightarrow{\text{def}} A: C(K) \rightarrow C(L) \text{ t. z. } \text{iloczyn}$
 $\downarrow \quad \swarrow$
zwarte $\xrightarrow{\text{zad}} K \xrightarrow{\text{homeo}} L$

$$T: C(K) \rightarrow C(L)$$

$$T^*: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

16.05.2011

A- przemienne C^* algebra

$$F: A \rightarrow C(\mathcal{M})$$

$x \in A$ - najmniejsza C^* algebra $\subset A$ zawierająca x

$$F: A \rightarrow C(\mathcal{M})$$

$$\downarrow i_x$$

$$C(K)$$

$$i_x: \mathcal{M} \rightarrow K$$

i_x - homeomorfizm top. "na"

$$m \in \mathcal{M} \quad m(x) \in \text{sp}(x)$$

$$i_x: \mathcal{M} \rightarrow \text{sp}(x)$$

$$i_x(m) = m(x)$$

$$K = \text{sp}(x)$$

$$\{m(x) : m \in \mathcal{M}\}$$

$$m_a \xrightarrow{w^*} m$$

$$m_a(x) \rightarrow m(x)$$

$$m_1(x) = m_2(x)$$

$$m_1(x^k) = m_2(x^k)$$

$$A = \{y \in A : m_1(y) = m_2(y)\}$$

C^* - podalgebra A

$$m_1(x^*) = m_1(x^*) = m_2(x^*) = \overline{m_2(x)} \quad m_1 = m_2$$

Rozważmy C^* algebrę z działaniami po współrzędnych. $l^\infty \simeq m(l^\infty)$.

Czym jest kompakt m ?

Zad. $m \in m(l^\infty) \Leftrightarrow m$ jest ultrafiltrem

m jest miarą addytywną określona na 2^N t.je $m=0$ lub 1 oraz $m(\{n\})=0$. wtedy rodzina $\{A \subset 2^N : m(A)=1\}$ jest ultrafiltrem.

Def. ultra filtr to rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ t.je :

$$1^\circ \forall A \in 2^N \quad A \in \mathcal{R} \text{ lub } A^c \in \mathcal{R}$$

$$2^\circ A \in \mathcal{R}, A \subset C \Rightarrow C \in \mathcal{R}$$

$$3^\circ A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$$

$$4^\circ \emptyset \notin \mathcal{R}$$

A - przestrzeń Banacha $\circ$ - mnożenie, które spełnia

$$x \cdot y - \text{ciągłe}$$

$$x_n \rightarrow x$$

$$x_n y \rightarrow xy$$

$$y x_n \rightarrow yx$$

$$\Rightarrow \text{istnieje stała } C \quad \|xy\| \leq C \|x\| \|y\|$$

$$\text{istnieje } \|\cdot\|' \quad \|x\| \leq \|x\|' \leq C \|x\|$$

$$\|xy\|' \leq \|x\|' \|y\|'$$

$$f_x: A \rightarrow A \quad f_x \in \mathcal{L}(A)$$

$$f_x(y) = xy$$

$$\|f_x(y)\| = \|xy\| \leq C \|y\| \quad \text{dla } \|x\| \leq 1$$

$$\|xy\| \leq C \|x\| \|y\|$$

$$\|x\|' = \frac{1}{C} \|x\|$$

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\|$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\frac{\|x\|}{\|e\|} \leq \|x\| \leq C \|x\|$$

$$\|xy\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \left\| \frac{xyz}{\|y\|} \right\| \|y\|$$

$$\|x\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \|xz\| \leq \sup_{\|z\| \leq 1} C \|x\|$$

$$\left\| \frac{yz}{\|y\|} \right\| \leq 1$$

$$\|e\| = 1$$

$$\|yz\| \leq \|y\|$$

Zad. A - przestrzeń Banacha z mnożeniem oraz

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

Istnieje wówczas algebra Banacha B z jednostką i izometryczny monomorfizmem $A \hookrightarrow B$

(λx) - odwracalny w $\tilde{A}$, gdy

$$(\lambda x) \cdot (\mu, y) = (1, 0)$$

$$(\lambda \cdot \mu, \lambda y + x\mu + xy) = (1, 0)$$

$$\lambda \mu = 1$$

$$\lambda y + x \frac{1}{\lambda} + xy = 0$$

$(0, x)$ - ideał obustronny