1. Przestrzenie lokalnie wypukłe, przestrzenie dystrybucji
2. Teoria dystrybucji
3. odwzorowanie zwarte
4. Tw. Laxa - Milgrama
5. Algebry Banacha (tw. spektralne dla operatorów)

---

1. X - przestrzeń liniowa nad ciałem K - liczby rzeczywiste lub zespolone
2. X - przestrzeń topologiczna Hausdorffa

$\cdot \quad K \times X \to X$

$+ \quad X + X \to X$

$\left.\begin{array}{l}\cdot\\ +\end{array}\right\}$ są ciągłe

Każda topologia zgodna dla X jest wyznaczona przez bazę otoczeń 0: przez rodzinę zbiorów $U \in \mathcal{B}_0$, które spełniają:

1) $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{B}_0 \quad \forall_{\substack{\lambda \in K\\ |\lambda| \le 1}} \quad \lambda \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ ($K = \mathbb{R}$ $\mathcal{U}$ - zb. gwiaździste; $K = \mathbb{C}$ $\mathcal{U}$ - zb. zaokrąglone)

2) $\forall\, x \in X \quad \exists\, \lambda > 0$ t. że $\lambda x \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ jest pochłaniający)

3) $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{B} \quad \exists\, V \in \mathcal{B} \quad V + V \subset \mathcal{U}$

4) $\forall\, \mathcal{U}, V \in \mathcal{B} \quad \exists\, W \in \mathcal{B} \quad W \subset \mathcal{U} \cap V$

5) $\bigcap_{V \in \mathcal{B}} V = \{0\}$

$B_x = \{ x + V : V \in \mathcal{B}_0 \}$

$\mathcal{T} = \{ \mathcal{U} : \forall x \in \mathcal{U} \quad \exists\, V \in B_x : V \subset \mathcal{U} \}$

Ciągłość $+ \iff \forall_{x_0, y_0 \in X} \quad \forall\, \mathcal{U} \in B_{x_0 + y_0} \quad \exists\, V_1 \in B_{x_0},\ V_2 \in B_{y_0}$ t. że $V_1 + V_2 \subset \mathcal{U}$

$x_0 + y_0 + \mathcal{U}_0 \qquad \mathcal{U}_0 \in \mathcal{B}_0$

$V_0 + V_0 \in \mathcal{U}_0$

$x_0 + V_0 = V_1$

$y_0 + V_0 = V_2 \qquad V_1 + V_2 \subset x_0 + y_0 + V_0 \subset x_0 + y_0 + \mathcal{U}_0$

Podobnie pokazuje się ciągłość " $\cdot$ "
w drugą stronę: dlaczego istnieje taki system?

$\overline{\mathcal{B}}$ - baza otoczeń 0 t. że $\overline{\mathcal{B}}$ spełnia warunki 4, 5.

z ciągłości " $\cdot$ " $\forall\, \mathcal{U} \in \overline{\mathcal{B}} \quad \exists\, V$ t. że $K(0, \varepsilon) \times V \subset \mathcal{U}$

$\lambda K(0,\varepsilon) \subset K(0, \varepsilon)$
$|\lambda| \le 1$

stąd warunek 1)
$\lambda x \in \mathcal{U}$
$|\lambda| < \varepsilon$

Kiedy topologia jest metryzowalna: warunek konieczny gdy $\exists$ baza w punkcie ~~jest~~ przeliczalna. w tym wypadku okazuje się, że to wystarcza.

Twierdzenie 1: Przestrzeń liniowo topologiczna jest metryzowalna $\iff$ istnieje przeliczalna „baza" otoczeń 0.

Dowód: „$\Rightarrow$" istnieje ciąg U_n - otoczeń zera t. że $U_n \supset U_{n+1} + U_{n+1}$, U_n jest zaokrąglone i pochłaniające. $(U_0 = X)$

Definiujemy metrykę

$$d(0,x) = |||x||| := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}} : \exists x_i \in U_{n_i} \text{ t. że } \sum_i x_i = x \right\}$$

Pokażemy: $|||x+y||| \leq |||x||| + |||y|||$

$x = \sum x_i \quad x_i \in U_{n_i} \quad \sum \frac{1}{2^{n_i}} \leq \|x\| + \varepsilon$

$y = \sum y_i \quad y_i \in U_{m_i} \quad \sum \frac{1}{2^{m_j}} \leq \|y\| + \varepsilon$

$\sum \frac{1}{2^{n_i}} + \sum \frac{1}{2^{m_j}} \leq \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon$, ε- dowolne

Jeżeli $|t| \leq 1$, to $\|tx\| \leq \|x\|$

$x = \sum x_i \quad x_i \in U_{n_i}$

$tx = \sum tx_i \quad tx_i \in U_{n_i}$ (bo zb. zaokrąglone)

$x \in U_n \Rightarrow \|x\| \leq \frac{1}{2^n}$

Niech $\|x\| < \frac{1}{2^n}$, $x = \sum x_i \quad x_i \in U_{n_i} \Rightarrow \sum \frac{1}{2^{n_i}} < \frac{1}{2^n}$

Możemy założyć, że wszystkie U_{n_i} są różne, bo $x_i + x_j \in U_{n_i} + U_{n_i} \subset U_{n_i - 1}$

$x = \sum x_i$, $x_i \in U_{n_i}$ n_i - są różne

$\sum \frac{1}{2^{n_i}} < \frac{1}{2^n}$

$U_{n-1} \supset U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{m-2} + U_{m-1} + U_m$

$x \in U_{n-1}$

$x_n \in X \quad x_n \xrightarrow[\tau]{} 0 \iff |||x_n||| \to 0$

$d(x,y) = |||x-y|||$

$d(x,z) = |||x-z||| = |||x-y+y-z||| \leq |||x-y||| + |||y-z|||$

- - - -

X - przestrzeń liniowa

$|||\cdot||| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ t. że

$|||x+y||| \leq |||x||| + |||y|||$ dla $x,y \in X$

$|||tx||| \leq |||x|||$ dla $x \in X$, $|t| \leq 1$

$|||x||| = 0 \iff x = 0$

$\forall x \in X \quad \lim_{t \to 0} \|tx\| = 0$

(* zad)
Jeśli $|||x_n||| \to 0$
$t_n \to 0$, to
$\|x_n t_n\| \longrightarrow 0$

Zad 1 *
X- przestrzeń liniowa
$|||\cdot||| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$
spełnia 1° $|||x+y||| \leq |||x||| + |||y|||$ $x,y \in X$
2° $t_n \to 0$ $|||t_n x||| \to 0$ dla dow x
$\|x_n\| \to 0$ $\|tx_n\| \to 0$ dla dow. t

$\Rightarrow t_n \to 0, x_n \to 0 \quad \|t_n x_n\| \to 0$

$|||\cdot|||$ spełniające 1-5 nazywamy quasinormą

Def: quasinorma $|||\cdot|||$ jest p jednorodna jeśli $\forall \lambda \quad |||\lambda x||| = |\lambda|^p |||x|||$

Przestrzenie topologiczne liniowe X, w ~~których~~ z topologią wyznaczoną przez quasi normy nazywamy typu F^* (a które są zupełne F)

Przykłady: $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ $\quad L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f: \Omega \to K : \mathcal{F}\text{-mierzalne i } \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$

$|||f||| = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

$0 < p < 1$

$|||f||| = \int |f|^p d\mu$

$|||f+g||| \le |||f||| + |||g|||$

$L_0(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{f: \Omega \to K,\ f - \mathcal{F}\text{-mierzalna}\}$

$|||f||| = \int_\Omega \min\{1, |f|\} d\mu$

$\min\{1, |x+y|\} \le \min\{1, |x|\} + \min\{1, |y|\}$

$\{f : \mu(|f| > \varepsilon) \le \varepsilon\} = O_\varepsilon$ - baza otoczeń zera

...

X - liniowo topologiczna

$A \subset X$ nazwiemy ograniczonym $\overset{def}{\iff}$ $\forall u \in \mathcal{B}_0\ \exists_{\lambda \in K}$ t.że $A \subset \lambda K$

Jeśli X - p-jednorodna wówczas A - ograniczony $\iff \{|||x||| : x \in A\}$ ograniczony

Jeśli $K_X(0,r) = \{x : |||x||| \le r\}$

$x \in K_X(0,r) \Rightarrow |||\lambda x||| = |\lambda|^p |||x||| \le \lambda^p r$, gdy λ t.że $|\lambda|^p r \le \varepsilon$ $K_X(0,\varepsilon)$

Zad 2 * X - przestrzeń liniowa topologiczna. Wówczas topologia w X jest zadana przez normę p-jednorodną dla pewnego p wtedy i tylko wtedy gdy istnieje V- otoczenie 0 ograniczone. !

Def: X - przestrzeń liniowa $A \subset X$ nazywa się wypukłą jeśli

$\forall x, y \in A$ $\quad \forall \lambda \in [0,1]$ $\quad \lambda x + (1-\lambda)y \in A$

Def: X - nazywa się przestrzenią lokalnie wypukłą jeśli istnieje baza otoczeń 0 składająca się ze zbiorów wypukłych.

A jest pochłaniający, zaokrąglony

$\|x\|_A = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in A\}$

$\|\cdot\|_A$ spełnia 1) $\|x+y\|_A \le \|x\|_A + \|y\|_A$

2) $\|tx\|_A = |t|\,\|x\|_A$

$\|x\|_A < 1 \iff x \in A$

21.02.2011

X - przestrzeń liniowo topologiczna nad K

$A \subset X$ - wypukły $\overset{def}{=}$ $\forall x,y \in A$ $\quad [x,y] \subset A$ $\quad [x,y] = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta > 0 \quad \alpha + \beta = 1\}$

$\iff x_1, \dots, x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$ $\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ $\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$

A - dowolny $\mathrm{Conv}(A)$ - uwypuklenie $A = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad x_i \in A \}$

Fakty: 1. A wypukły, to $\bar{A}$ też wypukły

$A^\circ = (\mathrm{Int}\, A)$ - wypukłe

D: $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A+B}$ $x \in A^\circ$, $y \in A$ $(y, x]$ $ty + (1-t)x \in A^\circ$, $t > 0$, $t < 1$

$\overline{\lambda A} + \overline{(1-\lambda)B} \subset \overline{\lambda A + (1-\lambda)B}$

2. Jeśli $T: X \to Y$ przekształcenie liniowe

$T(A)$ - wypukły, jeśli A wypukły

$T^{-}(B)$ - wypukły, jeśli B wypukły

Analog tw. Hahna - Banacha:

X - przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$. $A \subset X$ - wypukły, $0 \notin A$. $S \subset X$, S - przestrzeń liniowa i $\varphi: S \to \mathbb{R}$ - liniowy t. że $\varphi(a) \geq 0$ dla $a \in A \cap S$

wówczas istnieje $\psi: X \to \mathbb{R}$ liniowy t. że $\psi|_S = \varphi$ oraz $\varphi(a) \geq 0$ dla $\in A$.

Dowód:

$\mathcal{L} = \{ (L, \phi) :$ L - liniowa podprzestrzeń X, $L > S$

$\phi: L \to \mathbb{R}$ $\phi|_S = \varphi$ $\}$, dla $a \in A \cap L \}$

wprowadzamy porządek

$(L_1, \phi_1) \prec (L_2, \phi_2) \overset{def}{=} L_1 \subset L_2 \quad \phi_2|_{L_1} = \phi_1$

Każdy łańcuch ma element maksymalny

$(L_i, \phi_i)_{i \in I}$: $(\bigcup L_i, \phi)$ $\phi(x) = \phi_i(x_i)$ jeśli $x \in L_i$

Bierzemy (L, ϕ) t. że $L \neq X$ t. że $\exists e \notin L$

$L + \mathbb{R}e = \mathrm{lin}\{L, e\} = L_1$

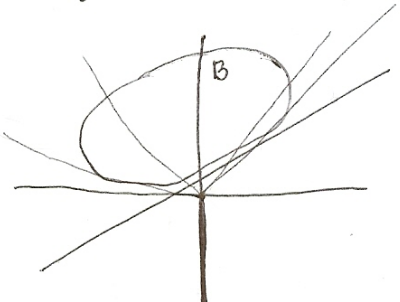
$\lambda e + x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in L$

Definiujemy $f: L_1 \to \mathbb{R}^2$, $f(\lambda e + x) = (\lambda, \phi(x))$

$A \cap L_1$ - wypukły

$f(A \cap L_1)$ - podzbiór wypukły $\mathbb{R}^2$, gdyż f - liniowe

$\mathbb{R}^- = \{(0, t) : t < 0\} \notin f(A \cap L_1) = B$



$\tilde{B} = \bigcup_{\varrho > 0} \varrho B$

- stożek wypukły

$\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2$ t. że $(\alpha_1 s \alpha_2 t) \geq 0$ $s, t \in B$

X- liniowa przestrzeń, A, B- wypukłe, $A \cap B = \emptyset$. Wówczas istnieje $f: X \to \mathbb{R}$ - funkcjonał liniowy, $\alpha \in \mathbb{R}$

$A \subset \{x : f(x) \leq \alpha\}$, $B \subset \{x : f(x) \geq \alpha\}$ i f - niezerowe.

Dowód: Bierzemy zbiór $A \setminus B$ - wypukły, $0 \notin A \setminus B$

L- jednowymiarowa, istnieje $\varphi: L \to \mathbb{R}$ t. że $\varphi(c) \geq 0$ $c \in A \setminus B$, $c \in L$

$\varphi \neq 0$

Wniosek: Istnieje $\varphi: X \to \mathbb{R}$ liniowy, $\varphi \neq 0$

$\varphi(x - y) \geq 0$ $x \in A$, $y \in B$

$\forall_{x \in A} \forall_{y \in B} \; \varphi(x) \geq \varphi(y) \iff \inf_{x \in A} \varphi(x) \geq \sup_{y \in B} \varphi(y)$.

Wniosek z tw: Jeśli A zawiera punkt wewnętrzny wówczas φ - ciągły

Uwaga: Jeśli $\varphi: X \to K$, U- zbiór otwarty $\subset X$, $\varphi(x) \neq \alpha$, $x \in U$, wówczas φ- ciągłe

$t + V \subset U$ dla pewnego $t \in U$, V- otoczenie zera

V- zaokrąglone otoczenie zera

$\varphi(t+v) \neq \alpha$, $v \in V$

$\forall_{v \in V} \; \varphi(v) \neq \alpha - \varphi(t)$, bo $|\varphi(v_0)| > |\alpha - \varphi(t)|$

$|c| < 1$

$\forall_{v \in V} \; |\varphi(v)| \leq |\alpha - \varphi(t)|$

$\varphi(cv_0) = c\varphi(v_0) = \alpha - \varphi(t)$

$\Uparrow$ sprzeczność

$|\varphi(u)| < \varepsilon$

$u \in V \dfrac{\varepsilon}{|\alpha - \varphi(t)|}$

$u = v \dfrac{\varepsilon}{|\alpha - \varphi(t)|}$

$\varphi(u) = \varphi(v) \dfrac{\varepsilon}{|\alpha - \varphi(t)|} < \varepsilon$

Wniosek: Jeśli A - otwarty, B- dowolny, A, B- wypukłe, $A \cap B = \emptyset$

$A \setminus B = \bigcup_{y \in B} A - y$ - otwarty. Wówczas istnieje

$f(x - y) \geq 0$ $x - y \in A \setminus B$

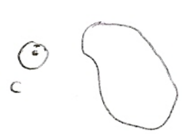
Wniosek: A- domknięty, B- zwarty, dalej to samo + X- lokalnie wypukła

Dowód: $A \setminus B$ - domknięty, $0 \notin A \setminus B$

$(x_\alpha - y_\alpha) \to z$

$y_\alpha \to b$ bo B- zw.

$x_\alpha \to z + b \in A$.



$f(c) \leq \alpha \leq f(a-b)$

$\alpha \geq 0$

Tw. Banacha - klasyczne:

X- przestrzeń liniowa, $p: X \to \mathbb{R}^+$ $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$,

$L \subset X$ $f: L \to \mathbb{R}$ $f(x) \leq p(x)$, $x \in L$ $\exists \bar{f}: X \to \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) \leq p(x)$

$\bar{f}|_L = f$.

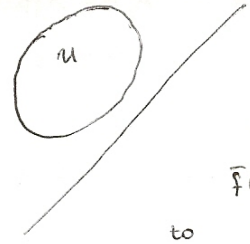
wyprowadzenie:

$A = \{x : f(x) = 1\}$

$U = \{x : p(x) < 1\}$

$0 \notin A \setminus U$

$\bar{f} \to$ rozszerza f



$f(x) = 1$

$\bar{f}(x) \geq 1 : x \in L$

to $\bar{f}(x) = \alpha f(x) : x \in L$

niedokończone.

wypukłe otoczenie 0, funkcjonał Minkowskiego

$p_U(x) = \inf \{t : \frac{1}{t} x \in U\}$

$f(x_0) = p_U(x_0)$

$f(x) \leq p_U(x)$

więc można odwrócić.

Niech X - lokalnie wypukła

$X^* = \{f : X \to K : f$ - liniowa, ciągła$\}$

X^* jest przestrzenią liniową nad K

Problem z topologią

Najsłabsza:

$A \subset X$, A - skończony

$W_A \; \{f \in X^* : |f(x)| < 1, \; x \in A\}$

- baza otoczeń, zbiór wypukły, zaokrąglony

$f^* \neq 0$, $|f^*(x)| > r$, $|f^*(\frac{x}{r})| > 1$, $A = \{\frac{x}{r}\}$

$W_A \supset W_B + W_B \; \dots$

Najsilniejsza

$\mathcal{A}$ - rodzina zbiorów t. że:

$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda A \in \mathcal{A}$

$\forall f \in X^*$ $f(A)$ - zbiór ograniczony

$\mathcal{A}$ - rodzina zbiorów ograniczonych.

<u>28.02. 2011</u>

<u>Twierdzenie:</u> Jeśli X - przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$, $A \subset X$ - wypukły, $0 \in A$ wówczas istnieje $f : X \to \mathbb{R}$ t. że f - nietrywialny; $f(a) \geq 0$ dla $a \in A$ (A - zawiera punkt algebraicznie wewnętrzny)

Def: $b \in A$ - algebraicznie wewnętrzny, $\forall L$ - prosta $\subset X$, $b \in L$, $L \cap A$ jest odcinkiem oraz b jest wewnątrz odcinka $L \cap A$

X - liniowa: wówczas te zbiory są wypukłe, symetryczne i pochłaniające

Wniosek: Jeśli A, B rozłączne, wypukłe w przestrzeni topologicznej liniowej X, jeden z nich zawiera punkt wewnętrzny wówczas istnieje funkcjonał nietrywialny t. że $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leq \inf\limits_{x \in B} f(x)$, $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf\limits_{x \in B} f(x)$

$H = \{x : f(x) = \alpha\}$

$\{x : f(x) \leq \alpha\}$

Wniosek: X - przestrzeń liniowa $p : X \to \mathbb{R}$ funkcjonał subaddytywny i dodatnio jednorodny (t.zn. $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$, $a, b \in X$ $p(\lambda a) = \lambda p(a)$, $\lambda \geq 0$ $a \in X$). wówczas istnieje $f : X \to \mathbb{R}$ liniowy t. że

$f(x) \leq p(x)$

Dowód: (jest na stronie pana)

$A = \{x : p(x) \leq 1\}$ $B = \{x : p(-x) \leq -1\}$

A, B - wypukłe, $A \cap B$ - rozłączne

$p(x) \leq 1$, $p(-x) < -1$ $0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) < 0$

0 - jest punktem algebraicznie wewnętrznym dla A

$f(a) < 1 \leq f(b)$ $a \in A$, $b \in B$

$p(a) \geq$ $\frac{a}{p(a) + r}$ $p\left(\frac{a}{p(a) + r}\right) = \frac{p(a)}{p(a) + r} < f\left(\frac{a}{p(a) + r}\right) \leq 1$

$f(a) \leq p(a) + r \Rightarrow f(a) \leq p(a)$

$p(a) < 0$

$p\left(\frac{a}{-p(a) - r}\right) = \frac{p(a)}{-p(a) - r} < -1$

$-p(a) > r > 0$

$\frac{-a}{-p(a) + r} \in B \Rightarrow f\left(\frac{-a}{-p(a) + r}\right) \geq 1$

$f(-a) \geq -p(a) - r$

$f(a) \leq p(a) + r$

Wniosek: X - przestrzeń liniowa, p - subaddytywny i dodatnio jednorodny, $S \subset X$, stożek wypukły, $h : S \to \mathbb{R}$ supaddytywny i dodatnio ~~określony~~ jednorodny na S (t.zn. $h(a+b) \geq h(a) + h(b)$, $h(\lambda a) = \lambda h(a)$, $\lambda \geq 0$, $a, b \in S$) istnieje funkcjonał liniowy $f : X \to \mathbb{R}$ t. że $f(x) \leq p(x)$ dla $x \in X$, $h(s) \leq f(s)$ dla $s \in S$.

Def: $S \subset X$ - stożek $\lambda S \subset S$ dla $\lambda \geq 0$

S - stożek jest wypukły $\equiv$ $S + S \subset S$

Dowód: $q(x) = \inf_{s \in S} p(x+s) - h(s)$

q jest subaddytywny i dodatnio jednorodny

$f(x) \le q(x)$ $\quad f(x) \le p(x+s) - h(s)$

$f(-s) \le -h(s) \iff h(s) \le f(s)$

$q(tx) = \inf_{s} q(tx+s) - h(s)$

$0 \le p(s) - h(s)$, $\varepsilon > 0$, x, y

$p(x+s) - h(s) \le q(x) + \varepsilon$

$p(y+t) - h(t) \le q(y) + \varepsilon$

$p(x+s) + p(y+t) - h(s) - h(t) \le q(x) + q(y) + 2\varepsilon \le p(x+y+s+t) - h(s+t)$

Wniosek: Jeżeli X - przestrzeń liniowa, $L \subset X$ - podprzestrzeń liniowa $h: L \to \mathbb{R}$ funkcjonał liniowy, p - dodatnio jednorodny, subaddytywny $h(l) \le p(l)$ dla $l \in L$ istnieje $f: X \to \mathbb{R}$ - funkcjonał liniowy t.że $f(l) = h(l)$, $f(x) \le p(x)$

Dowód: L jest stożkiem, h - dodatnio jednorodny i superaddytywny

$h(l) \le f(l)$ dla $l \in L$ $\quad f(x) \le p(x)$

$-h(l) \le -f(l) \Rightarrow h(l) = f(l)$

Twierdzenie (Mazura o nierównościach): X - przestrzeń liniowa, p - dodatnio jednorodny, subaddytywny na X $(\alpha_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ $(a_i)_{i \in I} \subset X$ wówczas istnieje $f: X \to \mathbb{R}$ - funkcjonał liniowy t.że $f(x) \le p(x)$ dla $x \in X$. $\alpha_i \le f(a_i)$ dla $i \in I$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}^+$ $K \subset I$ - skończone, $\sum_{i \in K} \lambda_i \alpha_i \le p\left(\sum_{i \in K} \lambda_i a_i\right)$

Dowód: Jeśli takie f istnieje

$$\sum_{i \in K} \lambda_i \alpha_i \le \sum_{i \in K} \lambda_i f(a_i) \le f\left(\sum_{i \in K} \lambda_i a_i\right) \le p\left(\sum_{i \in K} \lambda_i a_i\right)$$

$S =$ stożek wypukły generowany przez $(a_i)_{i \in I}$

$S = \left\{ \sum_{i \in K} \lambda_i a_i : (\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}^+, \# K < \infty \right\}$

$h(s) = \sup \left\{ \sum_{i \in K} \lambda_i \alpha_i : \sum_{i \in K} \lambda_i a_i = s, \# K < \infty \right\}$

h - dodatnio jednorodny, superaddytywny

$h(s) \le p(s)$, $\quad h(s) \le f(s)$

$h(\lambda s) = \sup \{ \lambda \{ \sum \frac{\lambda_i}{\lambda} \alpha_i : \sum \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i = s \}$, $\lambda > 0$

$h(0) = \sup \{ \sum \lambda_i \alpha_i : \sum \lambda_i a_i = 0 \}$

$0 \leq h(0)$ $\sum \lambda$

s_1 s_2 dobieramy $\varepsilon > 0$

$h(s_1) \leq \sum_{i \in K} \sigma_i \alpha_i + \varepsilon$, $\sum_{i \in K} \sigma_i a_i = s_1$

$h(s_2) \leq \sum_{i \in L} \theta_i \alpha_i + \varepsilon$ $\sum_{i \in L} \theta_i a_i = t$

$\lambda_i = \sigma_i \chi_K(i) + \theta_i \chi_L(i)$, $i \in I$

$\sum_{i \in K \cup L} \lambda_i a_i = s_1 + s_2$

$h(s) + h(t) \leq 2\varepsilon + h(s+t)$

$X \to Y$, $T: X \to Y$ - absolutnie sumujący , X, Y - przestrzenie Banacha ,

jeżeli istnieje stała C t.że dowolne $x_1, \ldots, x_n \in Y$

$$\sum_{i=1}^{n} \| T x_i \| \leq C \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} \sum_{i=1}^{n} | x'(x_i) |$$

A. Pietsch

$T: X \to Y$ jest absolutnie sumujący $\iff$ istnieje miara probabilistyczna

na $B(X^*)$ t.że $\| T x \| \leq C \int_{B(X^*)} | x^*(x) | \mu(dx^*)$

K- kompakt nietrywialny $C(K)$, $\varphi: C(K) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) \geq 0$ dla $f \geq 0$

$\varphi(1) = 1$ $\varphi'(x) = \int_K x(k) \mu(dk)$

$\varphi : C(B(X^*))$

$\| T x \| \leq \varphi(|x^*(x)|)$

$\varphi(1) \leq C$

$a_x \in B(X^*)$ $a_x(x^*) = |x^*(x)| = C(B(X^*))$

$a_x = \| T x \|$

$p(f(x)) = \sup_{x \in B(X^*)} f(x^*)$

$\sum \lambda_i \alpha_i \leq p(\sum \lambda_i a_i)$

$\sum_{x \in} \| T x \| \leq \sup_{x^* \in X} \sum | x^*(x) |$

X - przestrzeń liniowa , A wypukły $\subset X$, $a \notin A$ dla dowolnego funkcjonału

liniowego $f: X \to \mathbb{R}$, $f(a) \geq 0$ dla $a \in A$, f- zerowa

$X = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \neq 0$ co najwyżej dla skończonej ilości $i\}$

$A = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_{i_0} > 0$ gdzie

7.03.2011

X - przestrzeń liniowa

$\mathcal{U}$ - rodzina podzbiorów zaokrąglonych X jest bazą otoczeń 0 (w jakiejś topologii liniowej), jeśli:

1° $\forall_{U\in\mathcal{U}}$ U jest pochłaniające

2° $\forall_{U,V\in\mathcal{U}}$ $\exists_{W\in\mathcal{U}}$ t.że $U\cap V \supset W$

3° $\forall_{U\in\mathcal{U}}$ $\exists_{V\in\mathcal{U}}$ t.że $V+V\subset U$

4° $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \{0\}$

Wówczas topologia ta jest wyznaczona przez to, że $\{x+U : U\in\mathcal{U}\}$ jest bazą otoczeń $\{x\}$

X - przestrzeń liniowa, $\mathcal{U}$ - rodzina zbiorów zaokrąglonych, wypukłych w X jest bazą otoczeń 0 dla topologii liniowej lokalnie wypukłej, jeśli:

1° $\forall_{U\in\mathcal{U}}$ U - jest pochłaniający

2° $\forall_{U,V\in\mathcal{U}}$ $\exists_{W\in\mathcal{U}}$ $U\cap V\supset W$

$\frac{U}{2}+\frac{U}{2}\subset U$

3° dla każdego $U\in\mathcal{U}$ istnieje V t.że $2V\subset U$

4° $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \{0\}$

X - liniowo topologiczna, lokalnie wypukła $X' = \{f: X\to K,\ f$ - liniowe, ciągłe$\}$

X' - przestrzeń liniowa

$\mathcal{A}$ - rodzina podzbiorów X, $A\in\mathcal{A}$ $U_A = \{f : |f(a)|\leq 1$ dla $a\in A\} = A^P$

Własności polarów:

- $(A\cup B)^P = A^P \cup B^P$ • A^P - zbiór zaokrąglony i wypukły
- $(\lambda A)^P = \frac{1}{\lambda}A^P$
- $A\subset B \Rightarrow B^P\subset A^P$

$\left.\begin{array}{l} |tf(a)|\leq 1 \\ |f(a)|\leq \frac{1}{|t|}\end{array}\right\}$ każdy polar jest pochłaniający

1° $\Leftrightarrow$ A jest ograniczony

2° $\forall_{A,B\in\mathcal{A}}$ $\exists_{C\in\mathcal{A}}$ $A\cup B\subset C$

3° $\forall_{A\in\mathcal{A}}$ $\exists_C$ $2C\subset A$

4° $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ - jest totalna

Przykłady: 1° $\mathcal{A}$ - rodzina zbiorów skończonych, spełniają 1°-4°

X'_{w*} - słaba * topologia

2°. $\mathcal{A}$ - rodzina wszystkich podzbiorów. Mocna topologia

X'_m albo po prostu X'

X - z jakąś topologią, X' - przestrzeń sprzężona, weźmy ~~podzbiór~~ rodzinę $\mathcal{B}$ - podzbiorów X'

<u>Def:</u> $\forall B \in \mathcal{B}$ $\quad B^d = \{x \in X : |f(x)| \le 1$ dla $f \in B\}$

Te polary X' mają takie same własności jak polary X

(spełniają 1° - 4°)

3° $\forall x \quad |f(x)| \le \frac{1}{t}$

4° $\bigcup_{B \in \mathcal{B}}$ jest totalna

3. Rodzina skończonych podzbiorów X', to słaba topologia X_w

<u>Fakt:</u> $A \subset X$, X'

~~weźmy~~ $(A^p)^d \supset A$

$(A^p)^d = \overline{conv(\mathcal{Z}(A))}$, gdzie $\mathcal{Z}(A)$ to zaokrąglenie A

<u>Fakt:</u> $B \subset X'$

B^d - jest zaokrąglony, wypukły, domknięty w X

bo $\{x \in X : |f'(x)| \le 1$ dla $f' \in B\}$

$\bigcap_{f' \in B} \{x \in X : |f'(x)| \le 1\}$

czyli mamy pokazane zawieranie w jedną stronę $(A^p)^d \supset \overline{conv(\mathcal{Z}(A))}$

weźmy $C = \overline{conv(\mathcal{Z}(A))}$

$c \notin \overline{conv(\mathcal{Z}(A))}$

wówczas $\exists f \in X'$ t. że

$\forall x \quad |f(x)| \le 1$

$|f(c)| > 1$

?

$A^\circ = \{f : f(x) \le 1\}$, $0 \in A$

W $\mathbb{R}^n$ można policzyć polary niektórych figur (sympleks → sympleks, sześcian → ośmiościan, dwunastościan → dwudziestościan)

Tw. Caratheodory'ego → tw. Hellego, $\mathcal{U}_i$ - rodzina zbiorów wypukłych, przecięcie każdych n jest niepuste, to wszystkich niepuste.

<u>Zad*</u>. wyprowadzić tę równoważność z dualności

<u>Zad**</u>. K - kostka, A - sympleks, B - kule

$\underline{|K||K^\circ| \le |A||A^\circ|} \le |B||B^\circ|$

problem otwarty

A - wypukły jest domknięty w $X_w \Leftrightarrow X_m$ $\quad \overline{conv A}^w = \overline{conv A}$

$X_i \xrightarrow[P_i]{} X$, topologia induktywna $\quad X_i \xleftarrow[P_i]{} X$ topologia produktywna

Def:

X - lokalnie wypukła

1. X nazywa się <u>przestrzenią Montela</u>, jeżeli dla każdego $A \subset X$, A - ograniczonego, domkniętego A - zwarty

$C^\infty(I)$, $C^\infty(\mathbb{R})$, $H(\Omega)$ - przestrzeń funkcji holomorficznych z naturalną top.

2. X nazywa się <u>przestrzenią Schwartza</u>, jeżeli $\forall$ $\mathcal{U}$ - wypukłego, zaokrąglonego otoczenia 0 $\exists$ $V \subset \mathcal{U}$ t. że $\hat{X}_V \xrightarrow{i} \hat{X}_{\mathcal{U}}$ jest zwarty

V - zaokrąglony, wypukły

$\hat{X}_V$ - X z normą P_V

$P_V(x) = \inf \{ t > 0 : \frac{1}{t} \in V \}$

$P_V(x+y) \leq P_V(x) + P_V(y)$ $\quad$ $(P_V(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$

$P_V(tx) = |t| P_V(x)$

$L = \{ x : P_V(x) = 0 \}$

$P_V(x)$ - norma na $X/_L$

Operator jest zwarty $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\mathcal{U}$ - otoczenia zera istnieje V t. że $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $S \subset X$ skończony $V \subset S + \varepsilon \mathcal{U}$

<u>Uwaga:</u> Schwartza $\Rightarrow$ Montela

Przestrzenie Montela są refleksywne

3. X nazywamy <u>przestrzenią nuklearną</u>, jeżeli $\forall \mathcal{U}$ istnieje $V \subset \mathcal{U}$ zaokrąglone, wypukłe otoczenie 0 $\hat{X}_V \xrightarrow{id} \hat{X}_{\mathcal{U}}$ jest odwzorowaniem nuklearnym

w $\mathcal{F}$: każdy szereg bezwarunkowo zbieżny jest bezwzględnie zbieżny

4. X - <u>hilbertowska</u>, jeżeli topologia zadana jest przez system pseudonorm hilbertowskich

Każda przestrzeń nuklearna jest hilbertowska

Dlaczego przestrzenie nuklearne są takie ważne?

<u>Przykład:</u> Jeżeli $X = \mathcal{D}$ $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{D}$ - przestrzeń funkcji próbnych

$\mathcal{D} = \{ f : f \in C_0^\infty(\overset{\mathbb{R}^d}{\mathcal{D}}) \}$

$f_n \longrightarrow f_0 \Leftrightarrow \exists K_n$ $\operatorname{supp} f_n \subset K$

$f_n^{(i)} \longrightarrow f^{(i)} \Rightarrow$ jednostajnie na K

$\mathcal{S} = \{ f : \mathbb{R}^d \to K : f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \int |D^k f| (1+x^2)^l dx < \infty \quad \forall k, l \}$

gdzie $k = (k_1, \dots, k_d)$

$D^k f = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}} f$

$\mathcal{S}$ jest też nuklearna

14.03.2011

Uwaga: kolokwium 28 marca na ćwiczeniach

Dystrybucje:

G - otwarty w $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{D}(G)$ - p-ń funkcji próbnych

$K \subset G$ - zwarty

$C^\infty(K) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \subset K \}$

$k \in \mathbb{Z}^d = (k_1, \dots, k_d)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $|k| = \sum_{i=1}^{d} k_i$

$f = D^k f(x) = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(x)$

$\|f\| = \sup_{x \in K} |D^{|k|} f(x)|$

$\|f\|_n = \sum_{|l| \leq n} |D^{|l|} f(x)|$

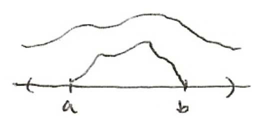
Def: Przestrzeń $\mathcal{B}_0$ (nie zapisałam, kiedyś dopiszę, bo nie jestem pewna)

Def: $\mathcal{D}(G) = \bigcup_{K, K \subset G} C^\infty_*(K)$ - p-ń liniowa

Topologia na $\mathcal{D}(G)$ jest najsilniejszą lokalnie wypukłą topologią przy której $i_{K,*} : C^\infty_*(K) \to \mathcal{D}(G)$ są ciągłe

Dystrybucje na G

Fakt: f - nośnik zwarty, g - klasy C^1 } określone na odcinku I



wówczas zachodzi $\int_I f' g \, dx = - \int_I f g' dx$

Podobnie $f \in \mathcal{D}(G)$, g - klasy C^1 wówczas $\int_G \frac{\partial f}{\partial x_1} g \, dx = - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_1} dx$

i ogólnie $f \in \mathcal{D}(G)$, G - otwarty w $\mathbb{R}^d$, $g \in C^{|k|}(G)$, to

$$\int_G D^k f g \, dx = (-1)^{|k|} \int_G f D^k g \, dx$$

Fakt: $h \in L_1^{loc}(G)$ - t.zn $\int_K |h(x)| dx < \infty$ dla dowolnego $K \subset G$, K - zwarty

wtedy $\int_G f h \, dx$ jest funkcjonałem liniowym ciągłym na $\mathcal{D}(G)$

Fakt: $D^k : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G)$ jest ciągłym liniowym operatorem

Uwaga: Jeżeli $T: X \to Y$, X, Y - liniowo topologiczne, T - ciągły, wówczas T^*

$T^* : Y^* \to X'$ jest ciągły oraz $(T^* y^*)(x) = y^*(Tx)$

$h \in \mathcal{D}'(G)$ $\quad (D^k)' : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G)$

$(D^k)'(h)$ - funkcjonał liniowy na $\mathcal{D}(G)$, to nazywamy k-tą pochodną h

ciągłe funkcjonały liniowe na $\mathcal{D}(G)$ nazywamy dystrybucjami

Jeśli $h \in C^{|k|}(G) \Rightarrow (D^k)'(h) = (-1)^{|k|} D^k h$

Przykład: $d = 1$

h - funkcja

$D^1 h = \delta_0$

$\int_{\mathbb{R}} h \varphi' dx = -\int D^1 h \varphi = -\varphi(0)$

$\int_0^{\infty} \varphi' dx = \int_0^M \varphi'(x) dx = \varphi(M) - \varphi(0) = -\varphi(0)$

Czy dystrybucje można mnożyć?

ogólnie to nie

$\varphi \in C^\infty(G)$

h - dystrybucja, to $\varphi \cdot h$ ma sens

$\varphi f \in \mathcal{D}(G)$, $f \in \mathcal{D}(G)$

$\varphi : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G)$

$\varphi' : \mathcal{D}'(G) \to \mathcal{D}'(G)$

$\int_D f(\varphi h) =$

Dystrybucje temperowane:

$G = \mathbb{R}^d$

Def: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}$ - przestrzeń Schwartza

$f \in \mathcal{S} \iff f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}^d$, $m \in \mathbb{N}$ $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(1+|x|^2)^m D^{|k|} f(x)| < \infty$.

Przykład: e^{-x^2}

$\mathcal{S}$ w odróżnieniu od $\mathcal{D}$ jest przestrzenią typu B_0

$\mathcal{F} f := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2xy} f(y) dy$ $\quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx$

$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle$

- $\mathcal{F}\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d \sigma^d} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \sigma^d e^{2xa} e^{-\frac{x^2}{2}\sigma^2}$
- $\mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \widehat{f * g} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \hat{f} \cdot \hat{g} = (\sqrt{2\pi})^d (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$
- $\mathcal{F}(D^k f) = (i)^{|k|} \, x^k \mathcal{F}(f)$ $\cancel{x^k \mathcal{F}(f)}$ $\cancel{\mathcal{F}(x^k f)}$, $f \in \mathcal{S}$
- $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ - ciągły operator, $\mathcal{F}\mathcal{F} = -\mathrm{Id}$

$\sum_{|k| \le n} a_k D^k f = g$

$\sum_{|k| \le n} a_k \mathcal{F}(D^k f) = \mathcal{F}(g)$

$\sum_{|k| \le n} a_k (-i)^k \mathcal{F}(x^k f) = \mathcal{F}(g)$

$\mathcal{F}\left(\left(\sum_{|k| \le n} a_k (-i)^k x^k\right) f\right) = \mathcal{F}(g)$

~~$w(-ix) f = g$ - dystrybucja~~ $w(-ix)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$

~~szukamy~~ f $\quad f = -\mathcal{F}\left(\frac{1}{w(-ix)} \mathcal{F}(g)\right)$, $g \in \mathcal{S}'$

$\frac{1}{w(-ix)}$ czy jest dystrybucją na $\mathcal{S}$,

czyli jeżeli mamy dystrybucję g, to czy istnieje dystrybucja h t.że zachodzi równość $hw = g$

1956 St. Łojasiewicz podał odpowiedź

Zastosowanie:

$$\Delta f = g \quad \text{na } \mathbb{R}^d$$

$$f = -\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{1}{-x^2}\right)\mathcal{F}(g)\right) = c_d\, \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2}\right) * g \qquad , \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2}\right) = c_d\, |x|^{2-d}$$

$$f = c_d \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} g(y)\,dy$$

21.03.2011

X - przestrzeń liniowo-topologiczna, lokalnie wypukła

Lemat:

Jeśli $U \subset X$ - wypukły, zaokrąglony, otwarty, to istnieje $\varphi: U \to \mathbb{R}^+$ ciągła i taka, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \notin U$, $\varphi(x) > 0$ dla $x \in U$.

Przestrzenie liniowo - topologiczne są $T_{3,5}$ ale nie muszą być T_4.

Dowód:

$p_V(x) = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in V\}$

$p_V : X \to \mathbb{R}$

czyli $p_V(x+y) \le p_V(x) + p_V(y)$

$(*)$ $|p_V(x) - p_V(y)| \le p_V(x-y)$

Jeśli $x \in V \Rightarrow p_V(x) < 1$ ($t = 1$ jest ok, a zbiór jest otw)

Jeśli $x \notin V \Rightarrow p_V(x) \ge 1$.

$x - y \in \varepsilon V$

$p(x-y) \le \varepsilon \overset{(*)}{\Rightarrow} |p(x) - p(y)| \le \varepsilon$, czyli ciągłe

$x \in y + \varepsilon V$

$\varphi(x) := \max\{1 - p_V(x), 0\}$

Twierdzenie (Schauder)

Jeśli X - lokalnie wypukła, $C \subset X$ - zbiór zwarty, wypukły $T: C \to C$ ciągłe. Wówczas T ma punkt stały (tj. istnieje $c \in C$ t.że $T(c) = c$).

Dowód:

Załóżmy przeciwnie. Załóżmy $Tx - x \neq 0$. $(T-I)(C)$ - zwarty, nie zawiera zera, a więc istnieje U zaokrąglony, wypukły, otwarty t.że

$\phi(x) - x \notin U$ dla $x \in C$

$x \in C$ istnieje V_x - otoczenie zera wypukłe, zaokrąglone, otwarte, t.że dla $y \in x + V_x$, $Ty - Tx \in U$.

$\bigcup_{x \in C} x + V_x$ stąd istnieje $S \subset C$, $\# S < \infty$ t.że $\bigcup_{s \in S} s + V_s \supset C$

$p_s(x) = \max\{1 - p_{V_s}(s-x), 0\}$

$\psi_s(x) = \dfrac{\varphi_s(x)}{\sum_{t\in S} \varphi_t(x)}$ - ciągłe na C, $\sum_{s\in S} \psi_s(x) = 1$

$R(x) = \sum_{s\in S} \psi_s(x)\cdot T_s$ ← przybliżenie skończenie wymiarowe

$R: C \to C$ ciągłe

$D = \operatorname{conv}\{T_s : s \in C\}$

$R: D \to D$, D homeomorficzne z kulą. Ma punkt stały z tw. Brouwera

$\exists\, c \in C$ t. że $Rc = c$

$\sum \psi_s(c)\, T_s = c$

$Tc - c = \sum_{s\in S} \psi_s(c)\,(T(c) - T(s)) \in \mathcal{U}$

Jeśli $\dim X > 1$ (jeśli $K = \mathbb{C}$)
$\dim X > 2$ (jeśli $K = \mathbb{R}$)

$\psi_s(c) \neq 0$, $c \in s + V_s \Rightarrow$
$\Rightarrow T(c) - T(s) \in \mathcal{U}$

□

Wniosek (tw. Łomonosowa)

Jeśli X - przestrzeń lokalnie wypukła, $T: X \to X$ pełnociągły, (tzn $\overline{T(U)}$ jest zwarte dla pewnego otoczenia 0) T - niezerowy, $\mathcal{A}$ - rodzina operatorów w $L(X,X)$, które komutują z T (tzn $AT = TA$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$). Wówczas istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza dla wszystkich A. (t.zn. istnieje $Y \subset X$, $Y \neq \{0\}$, $Y \neq X$, Y - domknięty t. że $AY \subset Y$ dla $A \in \mathcal{A}$)

Dowód:

Można założyć $\mathcal{A}$ - algebra operatorów $T \in \mathcal{A}$, $I \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}: \operatorname{Lin}(A_1, A_2, \dots, A_k : \quad A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}\}$

$A_1 \dots A_k T = T A_1 \dots A_k$

↑ po kolei przestawiamy

Załóżmy przeciwnie. Wtedy $\forall\, x \in X$, $x \neq 0$ $\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ jest gęsty w

$\{Ax : A \in \mathcal{A}\} = Y$ - przestrzeń liniowa

$\forall\, A \in \mathcal{A}$ zachodzi $AY \subseteq Y$

$A\overline{Y} \subseteq \overline{AY} \subseteq \overline{Y}$ - musi być X, więc Y gęsty w X

$\mathcal{U}$ - otoczenie zera w X t. że $\overline{T(U)}$

istnieje z $\quad K \doteq \overline{T(U+z)} = \overline{T(U)+T(z)} = \overline{T(U)} + T(z) \neq 0$.

$K = \overline{T(U+z)}$

$x \in K$ istnieje $A_x (T(x)) \in K$

$A_x(x)$, $x + V_x$, $A_x\, T(y) \in K$

dla $y \in x + V_x$

S - zbiór skończony, $S \subset K$, że $U(S+V_s) \supseteq K$

φ_s t. że $\varphi_s(x) = 0$ dla $x \notin S + V_s$

$\varphi_s(x) > 0$ dla $x \in S + V_s$

$$\psi_s(x) = \frac{\varphi_s}{\sum_{t \in S} \varphi_t(x)}$$

$R_x = \sum_{s \in S} \psi_s(x) \underbrace{A_s T(s)}_{\in K}$ $\quad R : K \to K$ ciągłe

$\in K$ - ten sam argument

a więc istnieje c : $Rc = c$

a więc $\exists\, A \in \mathcal{A}$: $A\,T(c) = c$

$W = \{x : TAx = x\}$ - pri liniowa domknięta

$\dim W < \infty$.

$TW \subset W$, bo $x \in W$, $Tx \in W \iff TAT\,x = Tx$, ale $ATx = x$ w W

Zatem $\exists$ wartość własna λ :

$Te = \lambda e$, $e \neq 0$

właściwie koniec, bo : $Y = \{z : Tz = \lambda z\}$ to przestrzeń niezmiennicza dla wszystkich A.

$\Rightarrow TAz = \lambda Az \Rightarrow Az \in Y$

$AY \subset Y$

X - przestrzeń Banacha
K - zbiór domknięty, wypukły, ograniczony

$T: K \to K$ przekształcenie nieoddalające, t.zn $\|Tx - Ty\| \leq \|x-y\|$
X jest jednostajnie wypukła, wówczas T ma punkt stały.

(Browder 1965)

<u>Def:</u> Przestrzeń jednostajnie wypukła $\iff$
$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists \delta$ t.że $\forall x,y \in X$ $\|x\|, \|y\| \leq 1$, $\|x-y\| \leq \varepsilon$, $1 - \|\frac{x+y}{2}\| \geq \delta$.

<u>Ciekawostka:</u> Przestrzenie jednostajnie wypukłe są refleksywne

<u>Dowód tw:</u> $(x_n) \subset X$, $y \in K$

$r(y, \{x_n\}) = \limsup\limits_{n\to\infty} \|y - x_n\|$

$r(\cdot, \{x_n\})$ - jest ciągła przy ustalonym y, wypukła

$r(y) - r(z) = \limsup \|y - x_n\|$

Definiujemy $R(K, \{x_n\}) = \inf\limits_{y\in K} r(y, \{x_n\})$

$C = \{y : r(y, \{x_n\}) = R$

$C_n = \{y \in K : r(y, \{x_n\}) \leq R + \frac{1}{n}\}$

C_n - niepusty, wypukły

$\bigcap C_n = C$

zbiory wypukłe, domknięte są słabo zwarte

C_n - zwarte w słabej topologii, więc przecięcie jest niepuste

jednostajna wypukłość $\iff$ $\|x\|, \|y\| \leq r$, $\|x-y\| \geq \varepsilon r$ $\|\frac{x+y}{2}\| \leq (1-\delta)r$

C - składa się z 1 punktu:
Gdyby tak nie było, to
$\limsup \|z - x_n\| = R$
$\limsup \|y - x_n\| = R$

$\|z - x_n\| \leq R'$ $\qquad \|\frac{z+y}{2} - x_n\| \leq (1-\delta)R'$
$\|y - x_n\| \leq R'$

$R \leq \limsup \|\frac{z+y}{2} - x_n\| \leq (1-\delta)R$
sprzeczność

$x_0 \in C$ ~~$Tx_0 \neq x_0$~~ bierzemy ciąg $x_n = T^n x$

~~$r(Tx_0, \{x_n\}) = \limsup_n Tx_0 - x_n$~~

$R = \limsup \|x_0 - T^n x\|$

Ponieważ T jest nieoddalający

$\limsup\limits_n \|Tx_0 - T^n x\| \leq \limsup\limits_n \|x_0 - T^n x\| = R$

Stąd $Tx_0 \in C$, ale C składa się z jednego punktu, więc
$x_0 = Tx_0$

Problem:

X - przestrzeń Banacha

K - zbiór domknięty, wypukły, słabo zwarty

Czy ma on własność punktu stałego dla nierozszerzającego odwzorowania w siebie

Odp: Nie (Alspach '70)

Problem otwarty: Czy jest to prawda w przestrzeniach refleksywnych.

K. Goebel „Teoria punktów stałych"

Ów kontrprzykład:

$$X = L_1([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$$

$$K = \{ f \in L_1([0,1], \mathcal{B}, \lambda) : 0 \le f \le 2 \quad \int f d\lambda = 1 \}$$ - wypukły, słabo zwarty, jedn. całkowalny ↙ dobre zad na kol.

$f_n \in K \quad f_n \to g \quad \psi \ge 0$

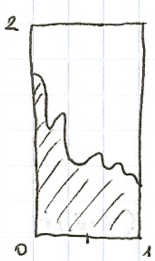
$\int \psi f_n d\lambda \to \int \psi g \quad \Rightarrow \quad g \ge 0 \qquad g \le 2$ bo $\int (f_n - 2)\psi \le 0$

$$\downarrow$$

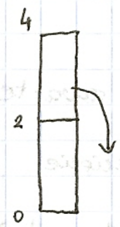
$$\int (g-2)\psi d\lambda \le 0 \qquad \psi \ge 0$$

Definiujemy przekształcenie (piekarza)

$$Tf = \begin{cases} 2f(2x) \wedge 2 & \text{dla } 0 < x < \frac{1}{2} \\ (2f(2x-1) - 2) \vee 0 & \text{dla } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$



ściskamy, wyciągamy odcinamy



$T = T_2 T_1 f$

$|T_1 f - T_1 g|_4 = |f - g|$

$Tf = f \qquad \left.\begin{matrix} f = 0 \\ f = 2 \end{matrix}\right\}$ niezm ale $\notin K$ (bo $\int f \ne 1$)

$\{t : f(t) = 2\} = \{ t \in [0, \frac{1}{2}] : 1 \le f(t) \le 2 \} \cup \{ t : \frac{1}{2} \le t < 1 : f(t) = 2 \}$

$$\{ t \in [0, \tfrac{1}{2}] : 1 \le f(t) \le 2 \} = 0$$

$\Rightarrow$ istniałby zbiór A, $|A| < \frac{1}{2}$, $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]$ mierzalny w sensie Lebesgue'a $A \subset [0,1]$ o własności:

$$\left| A \cap \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \right| = \frac{1}{2^{n+1}}$$

to jest sprzeczne z tw. Lebesgue'a o pkt gęstości

4.04.2011

X - liniowo - topologiczna

A - zbiór wypukły $\subset X$

Def: $x \in A$ nazywamy <u>punktem ekstremalnym</u> A (ozn $x \in Ext(A)$), jeśli x - nie jest postaci $x = \frac{a+b}{2}$ dla $a, b \in A$, $a \neq b$

<u>Przykłady</u>

$\mathbb{R}^n$

jest wielokątem $\Leftrightarrow \# \; Ext(A) < \infty$

brzeg dim $= \infty$

- B - kula jednostkowa w ℓ_1, ± 1 na i-tej współrzędnej

  $Ext(B) = \pm e_i$

  $\overline{conv(Ext(B))} = B$

- ℓ_p - $Ext(B) = \partial B$

- c_0 - brak punktów ekstremalnych kuli

  $x + \varepsilon e_k$

  $x - \varepsilon e_k$ przy $|x_k| < 1$

  $|x_k + \varepsilon| < 1$

  $|x_k - \varepsilon| < 1$

  $Ext(B) = \emptyset$

<u>Twierdzenie (Klein, Milman)</u>

Jeśli X - lokalnie wypukła, A - zwarty, wypukły. wówczas $Ext(A) \neq \emptyset$

oraz $\overline{conv(Ext(A))} = A$.

<u>Dowód:</u> A - wyp, zw

$x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$

$x^*(x_0) = \sup_{x \in A} x^*(x)$

$A_0 = \{ x \in A : \bar{x}(x) = \bar{x}(x_0) \}$ - wyp $\subset A$

A_0 jest <u>licem</u> A

$x \in A_0$, $x = \frac{a+b}{2}$, $a, b \in A$

$x^*(x) = x^*(x_0) = \frac{x^*(a) + x^*(b)}{2} = x^*(a) = x^*$

Jeśli $A_0 \subset A$: $Ext(A_0) \subset Ext(A)$

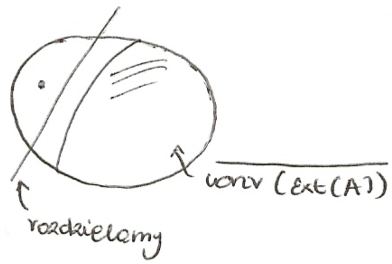
$A \Rightarrow$ istnieje lico $A_0 \subset A$, które jest istotnie mniejsze od A

$A_0 \subset A$ wypukły, domknięty nazywa się licem dla A jeśli dla $x \in A_0$, $\alpha, \beta \in A$, $x = \frac{\alpha a + \beta b}{2} \Rightarrow a, b \in A_0$

A_i - lica dla A

$\bigcap_{i \in I} A_i$ - też lico ... (do skończenia)

$\overline{\text{conv}(\text{Ext}(A))} \subset A$



$x^*(a) > \sup_b x^*(b)$

$A_0 = \{x : x^*(x) = \sup_{a \in A} x^*(a)\}$

$\uparrow$

lico rozłączne

$A_0 \cap \overline{\text{conv}(\text{Ext}(A))} = \emptyset$

$\uparrow$

tu istnieje najmniejsze lico (jednopkt - z konstr) ■

<u>Twierdzenie Choquet'a:</u>

X - LConvVT, $A \subset X$ wypukły, zwarty

X^* - zawiera przeliczalny ciąg totalny dla X

(tzn. istnieje $x_n^* \in X^*$ t. że $x_n^*(x) = 0$ dla $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$)

wówczas $\text{Ext}(A)$ jest borelowski oraz dla dowolnego $a \in A$ istnieje miara probabilistyczna μ na A,

$\mu(\text{Ext}(A)) = 1$ i taka, że

$$a = \int_{\text{Ext}(A)} x \, \mu(dx).$$

<u>Dowód:</u> $(A, \mathcal{B}(A), \mu)$ całka Riemanna, Y - liniowo-topologiczna, lokalnie wypukła

$f : A \to Y$

$\int_A f(x) \mu(dx) = a \in Y$, jeśli $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{U}_0 \ \exists\, V \in \mathcal{U}_0$

jeśli tylko $P = \{(A_i)_{i \in I}\}$ - rozbicie A na skończoną ilość zbiorów borelowskich

$(x_i)_{i \in I}$, $x_i \in A_i$

takie $x_i - A_i \in V$ wówczas $\sum_{i \in I} f(x_i) \mu(A_i) - a \in \mathcal{U}$

<u>Twierdzenie:</u>

A - zwarty, $f : A \to Y$ ciągła $\Rightarrow f$ całkowalna w sensie Riemanna

<u>Dowód:</u> $(A_i)_{i \in I}$ - rozbicie, $(x_i)_{i \in I}$

$(B_j)_{j \in J}$ - podrozbicie $(A_i)_{i \in I}$, $(x_j)_{j \in J}$

$$\sum_{i \in I} f(x_i) \mu(x_i) - \sum_{j \in J} f(x_j) \mu(B_j) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (f(x_i) - f(x_j)) \mu(B_j) \in \mathcal{U}$$

$B_j \subset A_i$ $\qquad$ $\uparrow$ wypukła kombinacja elementów

$f(x) - f(y) \in \mathcal{U}$ (jedn. ciągłość)
$\Uparrow$
$x - y \in V$

Mając dwa podziały możemy znaleźć 3-ci zawarty w obu

Dowiedliśmy - 2 bliskie podziały, to niewiele się różnią - warunek Cauchy'ego.

$f: A \xrightarrow[\text{na}]{} B$, B - zwarty

ciąg Cauchy'ego w zwartym $a_{\mathcal{P}(x_i)} - a_{\mathcal{Q}(y_i)} \in \mathcal{U}$

A - zwarty, wypukły, x_n^* - ciąg totalny dla X,
WLOG $|x_n^*(x)| \le 1/n$ dla $x \in A$

$\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)|^2}$ wówczas $\|\cdot\|: A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ciągła, dobrze określona

bo $\sum_{n=1}^{N} |x_n^*(x)|^2$ - ciągła, szereg zb. jednostajnie

$d(x,y) = \|x-y\|$ - metryka na A
$\hookrightarrow$ równoważna metryce z A

$x \in A$, $K_d(x, \varepsilon)$
V - otw 0, $y \in x+V$, $y \in K_d(x, \varepsilon)$ $\nwarrow$ będziemy używać tej metryki!
$x - y \in V \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon$

Mamy tę samą topologię:
$f: A \to B$ - wypukły, zwarty

$\mathcal{U}$ $\exists_\delta$ $D_d(A-A) < \delta$ $\sum f(x_i)\mu(A_i) - a \in \mathcal{U}$
$\uparrow$
średnica

Do dowodu tw
1) Ext(A) - borelowski w A
2) $\forall a \in A$ $\exists \mu$ - miara probabilistyczna na Ext(A) t. że

$$\int_{Ext(A)} x\,\mu(dx) = a$$

1) Łatwiej $Ext(A)^c$ - borelowskie
$x \notin Ext(A)$, $x = \frac{a+b}{2}$ dla pewnych a, b, $a \neq b$

$A - Ext(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$: $C_k = \{x : x = \frac{a+b}{2}, \|a-b\| \geq \frac{1}{k}, a, b \in A\}$

C_k - domknięty, bo $s: A \times A \longrightarrow A$ $s(a,b) = \frac{a+b}{2}$

$C_k = \{ (a,b) \in A \times A,\ \|a-b\| \geq \frac{1}{k})$

domkn. w zwartym

Ext (A) - zbiór G_δ w A

przeliczalne przecięcie otw.

2) idea

$\mathcal{P}_a = \{ \mu$ - miary probabilistyczne na A t.że $a = \int_A x \mu(dx) \}$

$\mathcal{P}_a$ - wypukły w zb. wszystkich miar

$\mathcal{M}(A) = C(A)^*$ - miary ze znakiem

topologia słabo *

Miary prob $\Rightarrow$ zwarty, wypukły

Szkic:

$\|x\|^2$ - ciągła, $\int \|x\|^2 \mu(dx)$

$$\int \|x\|^2 \mu_a(dx) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}_a} \int \|x\|^2 \mu(dx)$$

11.04.2011

K- zbiór wypukły, Ext(K) - punkty ekstremalne dla K

Tw. Choquet'a

Jeśli K- zwarty, wypukły w lokalnie wypukłej przestrzeni X wówczas Ext (K) jest podzbiorem borelowskim K dla dowolnego $a \in K$ istnieje μ_a - miara na K t.że

$$\mu_a(Ext(K)) = 1 = \mu_a(K), \quad a = \int_K x \mu_a(dx)$$

dowód znajduje się w internecie na stronie pana.

Def: X - przestrzeń Banacha ma własność K.M (Kreina - Milmana), jeżeli każdy zbiór domknięty, ograniczony, wypukły ~~ma chociaż~~ K $Ext(K) \neq \emptyset$.

Uwaga: Każda przestrzeń refleksywna ma tę własność

Def: X ma własność Radona-Nikodyma jeżeli każdy domknięty, ograniczony, wypukły jest piętkowaty (t.zn. dla dowolnego ε istnieje $f \in X^*$ t.że zbiór $K_f = \{x : f(x) \geq 1, x \in K\}$ jest niepusty $D(K_f) \leq \varepsilon$

Definicje:

1) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jest całkowicie-monotoniczna jeśli $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$

2) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jest całkowicie-rosnąca, jeśli $\forall n, x \quad f^{(n)}(x) \geq 0$

3) G - grupa przemienna $f: G \to \mathbb{C}^1$ nazywa się dodatnio określona jeśli dla dowolnych $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ $(f(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$ - nieujemnie określona

jeśli dla dowolnych $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^1$ $\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$

Twierdzenie:

Bernstein: $f: [0,1] \to \mathbb{R}^+$ jest funkcją ~~tworzącą~~ całkowicie rosnącą i $f(1) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy jest funkcją tworzącą pewnego ciągu (a_n): $a_n \geq 0$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$

Laplace: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jest funkcją całkowicie monotoniczną wtedy i tylko wtedy gdy jest transformatą Laplace'a miary skończonej, nieujemnej na $\mathbb{R}^+$ $(\mathcal{L}\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-xy} \mu(dy)$

Bochner: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^1$ jest dodatnio określona, ciągła i $f(0) = 1$ wtw f jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu probabilistycznego na $\mathbb{R}$

Stjelties: ciąg (a_n) - jest ciągiem momentów pewnej miary skończonej, nieujemnej na $\mathbb{R}$ $\iff$ + określoną $\mathbb{N}$ tan $(a_{i+j})_{i,j=1}^{n}$ dodatnio określony

18.04.2011

$T = \{x \in \mathbb{C}^1 : |x| = 1\}$

$\mathbb{Z}$ - całkowite

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^1$ jest nieujemnie określone i $f(0) = 1$ $\iff$ istnieje $\nu \in \mathcal{P}(T)$ - - miary probabilistyczne na T, takie, że

$f(n) = \int_T z^n \nu(dz)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$

- - - - -

$K = \{f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^1 \text{ j.w.}\}$ $|f(n)| \leq 1$ $s(\mathbb{Z}) = X$

$Ext(K)$

$$f_1(n) = f(n) + \frac{f(n+1) + f(n-1)}{2} \qquad g_1(n) = f(n) + \frac{f(n+1) - f(n-1)}{2i}$$

$$f_2(n) = f(n) - \frac{f(n+1) + f(n-1)}{2} \qquad g_2(n) = f(n) - \frac{f(n+1) - f(n-1)}{2i}$$

f_1, f_2 - dodatnio określone

$$f(n) \cdot (f(1) + f(-1)) = f(n+1) + f(n-1)$$

$$f(n)(f(1) - f(-1)) = f(n+1) - f(n-1)$$

czyli $f(n) = z_0^n$, $z_0 = f(1)$

$$f(n) = \int_T z^n \delta_{z_0}(dz)$$

$\phi: K \to T$

$\phi: Ext(K) \to T$

$k \in Ext(K)$

$a \in K$ $\phi(a) = a(1)$

to na mocy tw. Chocquet'a istnieje μ na K (o nośniku w $Ext(K)$) t. że

$$f = \int_K$$

Twierdzenie Bochnera:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^1$ ciągła, nieujemnie określona i $f(0) = 1$ $\iff$ ~~iai~~ istnieje $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t. że $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \mu(dy)$

$f(n)$ - nieujemnie określona

$$f(n) = \int_T z^n \mu(dz) = \int_{[-\pi,\pi)} e^{itn} \nu(dt)$$

$$\phi: [-\pi, \pi) \to T$$

f - nieujemnie określone na $\mathbb{R}$

$a(n) = f(\frac{n}{k})$ - ciąg nieujemnie określony na $\mathbb{Z}$

$$f(\tfrac{n}{k}) = \int_{[-\pi,\pi)} e^{int} \bar{\mu}_k(dt) = \int_{[-k\pi, k\pi)} e^{i\frac{n}{k}t} \mu_k(dt)$$

$$[-\pi, \pi) \to [-k\pi, k\pi)$$

czyli mamy ciąg miar μ_k t. że

- ma nośnik $[-k\pi, k\pi)$
- $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \mu_k(dt)$ dla $x \in \mathbb{Z}/k$

$\mu_k \xrightarrow[sc]{} \nu$ wtedy i tylko wtedy gdy $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_M \; \mu_k(\{x: |x| > M\}) < \varepsilon$

ε istnieje δ $\quad |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

$K \qquad L = [K\delta] \qquad \frac{L}{K} \le \delta < \frac{L+1}{K}$

$$\left| \frac{1}{2L+1} \sum_{k=-L}^{L} (1 - f(\tfrac{k}{K})) \right| = \frac{1}{2L+1} \sum_{k=-L}^{L} \left(1 - \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{k}{K}t} \mu_k(dt)\right) = 1 - \frac{1}{2L+1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-L}^{L} e^{i\frac{k}{K}t} \mu_k(dt) =$$

$\left|\frac{k}{K}\right| \le \frac{L}{K}$ małe duże

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(1 + \frac{1}{2})\frac{t}{K}}{\sin \frac{t}{K}\frac{1}{2}}\right) \mu_k(dt)$$

$$1 - \frac{\sin(L + \frac{1}{2})\frac{t}{k}}{(2L+1)\sin\frac{t}{2k}} \quad \frac{t}{k} \quad \frac{2k}{t} \ge 1 - \frac{2k}{t}\frac{\pi}{2}\frac{1}{(2L+1)}$$

jo

$$\varepsilon > \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{1}{(2L+1)}\frac{2k}{t}\frac{\pi}{2}\right) \mu_k(dt) \ge \frac{1}{2}\mu\{|t| > \frac{k\pi}{L+\frac{1}{2}}\} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{2}\mu_k(\{|t| > \frac{2\pi}{\delta}\})$$

$f: \mathbb{R}^{++} \to \mathbb{R}$ jest całkowicie monotoniczna (tzn $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{++})$
$\mathbb{R}^{++} = \{x : x > 0\}$ $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ $n = 0, 1, \dots$)

i $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \iff f(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \mu(dy)$ dla pewnej $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{++})$

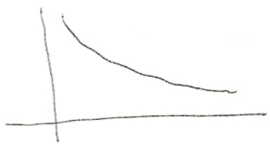
$f_y = e^{-xy}$

$\Rightarrow$

$X = C^\infty(\mathbb{R}^{++})$ $\|f\|_n = \sup_{[\frac{1}{n}, n]} |f^{(n)}(x)|$

$K =$ f- całk. monot. $\lim_{x \to 0} f(x) \leq 1$ $f \leq c$

$f \geq 0$
$f' \leq 0$
$f'' > 0$



Jak pokazywać te punkty ekstremalne?

Robimy tak jak poprzednio $f \in Ext(K)$

$f_1(x) = f(x)(1 - f(y)) + f(x+y)$

$f_2(x) = f(x)(1 + f(y)) - f(x+y)$

$f_1 + f_2 = f \Rightarrow f(x+y) = f(x) f(y) \Rightarrow f(x) = e^{-\lambda x}$ dla pewnego λ

9.05.2011

Algebry Banacha:

$K = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

A - algebra nad $K \overset{def}{=}$ A - przestrzeń liniowa nad K i w A określone jest $\circ : A \times A \to A$, zwane mnożeniem i które spełnia dla dowolnych $x, y, z \in K$

1. $x(yz) = (xy)z$ - łączność $\qquad (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$ dla $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha \in K$
2. $(x+y)z = (xz) + (yz)$
   $z(x+y) = (zx) + (zy)$

Jeśli $xy = yx$ dla dowolnych $x, y \in \mathcal{A}$ to $\mathcal{A}$ nazywamy przemienną algebrą. Jeżeli $e \in A$ ma własności $ex = xe = x$ dla dowolnego $x \in \mathcal{A}$, to e nazywamy jednością i wtedy mówimy, że $\mathcal{A}$ jest algebrą z jednością e.

x nazywa się lewostronnie odwracalne, jeżeli istnieje y t. że $yx = e$
x nazywa się prawostronnie odwracalne, jeżeli istnieje y t. że $xy = e$

odwracalny $\iff$ istnieje (dokładnie 1) y t. że $xy = yx = e$

$y = x^{-1}$

$\mathcal{A}$ jest algebrą topologiczną nad K jeżeli jest algebrą nad K i prócz tego jest przestrzenią topologiczną względem której jest ona liniowo - topologiczna oraz · jest ciągła na x, y -

I przykład

K - przestrzeń topologiczna $C(K)$

D $\quad C(D)$, $A(D)$ · holomorficzne, ciągłe na brzegu

Algebry Banacha nad K - Algebra nad K, która jest przestrzenią Banacha oraz · spełnia

$\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ dla dowolnych $x, y \in \mathcal{A}$

jeśli e jest jednością dla A wówczas zakładamy, że $\|e\| = 1$.

<u>Def:</u> $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, $\varphi : \mathcal{U} \to A$ nazywa się analityczną jeśli

$\forall z_0 \in \mathcal{U} \quad \exists (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset A$ t. że $\frac{1}{r} := \limsup \|a_n\|^{1/n} < \infty$ i

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{dla dowolnego} \quad z \in \mathcal{U} \cap K(z_0, r)$$

<u>Przykład:</u>

$$(\underset{\substack{\| \\ e}}{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \|x\| < 1$$

$$(e - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)(e - x) = e$$

$$\|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x^0 = e$$

- - -

x - ustalony element w Algebrze Banacha z jednością nad $\mathbb{C}$

$sp(x) = \sigma(x) = \{ z : ze - x$ jest nieodwracalny $\}$ - spektrum

$\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$: $R(z, x) : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to A$ $\quad R(z, x) = (ze - x)^{-1}$ - rezolwenta

<u>Twierdzenie:</u> $\sigma(x)$ jest zbiorem zwartym niepustym

$R(\cdot, x) : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to A$ jest funkcją analityczną.

<u>Dowód:</u>

$\sigma(x) \subset K(0, \|x\|)$

$|z| > r = \dfrac{1}{\lim \|x^n\|^{\frac{1}{n}}}$ $\qquad |x|_{sp} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \|x^n\|^{1/n}$

$(ze - x)^{-1} = z^{-1} \left(e - \frac{x}{z}\right)^{-1} = z^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^n \right)$ $\qquad \limsup \|x^n\|^{1/n} \left(\frac{1}{|z|}\right) < 1$

$\| z(e - \frac{x}{z})^{-1} \| \leq$

czyli pokazaliśmy $sp(x) \subset K(0, \|x\|_{sp})$

$R(z_0, x) = (z_0 e - x)^{-1}$

$(z_0 e - x)^{-1} = ((z - z_0)e + z_0 e - x)^{-1} = [(z_0 e - x)(e + (z_0 - z) R(z_0, x))]^{-1}$

$\cancel{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - z_0)^n R^{n+1}(z_0, x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z_0 - z)^n R^n(z_0, x) \right) R(z_0 x)$$

$|z - z_0| \| R(z_0, x) \|$ $\quad z \in K(z_0, r)$ $\quad r = \frac{1}{\|R(z_0, x)\|}$

Jeżeli $|z| > \|x\|$ to wówczas $\|R(z, x)\| < \frac{1}{|z| - \|x\|}$

<u>Wniosek:</u> Jedynym ciałem Banacha jest $A = \mathbb{C}$.

<u>Dowód:</u> $\nexists\ z \in \mathbb{C}$ $\cancel{sp(x)}$

$(ze - x)^{-1}$: istnieje $z \in sp(x)$

$x = ze$

<u>Def:</u> $I \subset A$ nazywamy <u>ideałem</u> jeśli X – podprzestrzeń liniowa t. że $xy \in I$ jeśli tylko x lub $y \in I$.

<u>Stw:</u> Jeśli I jest ideałem, to $\bar{I}$ też jest ideałem

bo $a_n \to a$ $\quad a_n \in I$ $\quad x a_n \to xa$

<u>Stw:</u> I - domknięty ideał, to A/I jest algebrą Banacha z jednością (o ile A było z jednością)

Norma ilorazowa: $\|\hat{x}\| = \inf\limits_{y \in \hat{x}} \|y\| = \inf\limits_{y \in I} \|x + y\|$

<u>Def:</u> I nazywa się ideałem maksymalnym, jeżeli jest $I \subsetneq A$ dla dowolnego J ideału $\subsetneq A$ $\quad I \subset J \Rightarrow I = J$

<u>Fakt:</u> Dowolny ideał właściwy jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym.

Ideał maksymalny jest domknięty

Jeśli I - maksymalny, to A/I - jest ciałem

(A - przemienna)

A jest ciałem $\Leftrightarrow$ A nie zawiera ideału właściwego

$\Rightarrow$

A nie jest ciałem $\exists\ x \neq 0$, x - nieodwracalny $\quad Ax = A \quad ax = e$

A jest przemienna, I - maksymalny $\Leftrightarrow$ A/I - ciałem

$I \subsetneq J$ $\qquad \varphi : A \to \mathbb{C}$

I - ideałem maksymalnym $\Leftrightarrow$ istnieje $\varphi \in A^*$, multiplikatywny t. że
$I = \{x : \varphi(x) = 0\}$

$\mathcal{M}$ - zbiór ideałów maksymalnych właściwych $\equiv \{\varphi \in A^*$, multiplikatywnych, $\varphi(e) = 1\}$

Transformata Gelfanda:

$\hat{x} \in C(\mathcal{M})$ $\qquad \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$

$\{\hat{x}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{M}\} = \sigma(x)$

$\widehat{\alpha x + \beta y} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y}$

$\widehat{xy} = \hat{x}\hat{y}$

$z \in \sigma(x)$

$(ze - x)$ nieodwracalny

$\Updownarrow$

$ze - x$ zawiera się w pewnym ideale maksymalnym

$\Updownarrow$

$ze - x \in \operatorname{Ker}\varphi$ dla pewnego $\varphi \in \mathcal{M}$

$\varphi(x) = z$

16.05.2011

A - algebra Banacha nad $\mathbb{C}$ z 1

$* : A \to A$ (x^*) nazywa się inwolucją jeśli ma własności

1) $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$

2) $(xy)^* = y^* x^*$ $\qquad \forall x, y \in A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

3) $(x^*)^* = x$

Przykłady:

1) Algebra funkcyjna $C(K)$ $\quad K$ - kompakt

$f^*(k) = \overline{f(k)}$

2) Algebra splotowa, G - grupa topologiczna lokalnie zwarta

$\mathcal{M}(G)$ - miary regularne o wartościach w $\mathbb{C}$ $\quad \|\mu\| = |\mu|(G)$

$$|\mu(a)| = \sup_{\substack{A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(G) \\ \cup A_i = A \\ A_i \cap A_j = \perp}} \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)|$$

$$\mu * \nu(A) = \iint_{G \times G} I_A(x+y)\,\mu(dx)\,\nu(dy)$$

$\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\,\|\nu\|$

$\mu^*(A) = \overline{\mu(-A)}$

3) Algebra operatorów $L(H, H)$ - H - hilberta, $T \in L(H, H)$

T^* $\quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$

Def: $x \in \mathcal{A}$ nazywamy hermitowskim, gdy $x^* = x$

$x \in \mathcal{A}$ nazywamy unitarnym $\quad x^* = x^{-1}$, $xx^* = e$, $x^*x = e$

$x \in \mathcal{A}$ nazywamy normalnym, gdy $xx^* = x^*x$

$\mathcal{A}$ nazywamy algebrą Banacha inwolutywną, jeśli $\|x^*\| = \|x\|$ dla dowolnego x.

<u>Stwierdzenie:</u> $x = h_1 + ih_2$ $\quad h_1, h_2$ - hermitowskie

$$x = \frac{x+x^*}{2} + i\frac{x-x^*}{2i}$$

$$h_1^* = h_1^*$$

$$\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)^* = \frac{x^*-x}{-2i} = h_2$$

<u>Def:</u> $\mathcal{A}$ nazywa się C^*- algebrą jeżeli jest Algebrą Banacha z inwolucją i jednością, która spełnia:

$\|xx^*\| = \|x\|^2$ dla dowolnego $x \in \mathcal{A}$

$\|x\|^2 \leq \|xx^*\|$ $\qquad \|e\| = 1$

$\|x\|^2 \leq \|xx^*\| \leq \|x\|\,\|x^*\|$

$\|x\| \leq \|x^*\|$

$\Rightarrow \|x\| = \|x^*\|$

<u>Stwierdzenie:</u> Jeśli x- normalny to $\|x^2\| = \|x\|^2$

$\|(xx^*)\cdot(xx^*)^*\| = \|xx^*\|^2 = \|x\|^4$ $\qquad \|x^2\cdot(x^2)^*\|$ $\qquad \|x^2\|^2$

$\|x\|_{sp} = \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x\|$

$\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$

<u>Wniosek:</u> A - C^*- algebra $x \in A$ normalny, to $\|x\|_{sp} = \|x\|$

<u>Stwierdzenie:</u> Jeśli x- unitarny to $sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda\mathbb{1} - x)^{-1}$ - nie istnieje$\}$
$\subset \{z : |z| = 1\} =: \mathbb{T}$.

Jeśli x- hermitowski, to $sp(x) \subset \mathbb{R}$

<u>Dowód:</u>

$\mathbb{1} = xx^*$

$1 = \|\mathbb{1}\| = \|xx^*\| = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$ $\qquad \|x\| = 1, \quad \|x^{-1}\| = 1$

$sp(x) \subset K(0, \|x\|_{sp}) = \{z : |z| \leq 1\}$

$sp(x^{-1}) = \frac{1}{sp(x)}$ $\qquad \frac{1}{\lambda} \in sp(x^{-1}) \Leftrightarrow \lambda \in sp(x)$

$(\lambda\mathbb{1} - x)^{-1} = -\lambda x^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} - x^{-1}\right)^{-1}$

$sp(x^{-1}) \subset \{z : |z| \leq 1\}$

dowód 2: $x \in \mathcal{A}$ $\qquad e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

$e^{x+y} = e^x e^y$ jeśli $x\cdot y = y \cdot x$

$$e^x e^y = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{n\geq 0}\frac{y^n}{n!} = \sum_{n,m\geq 0}\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n+m=k}\frac{k!\,x^n y^m}{n!\,m!} = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x^n y^{k-n} =$$

$$= (x+y)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} = x$$

Jeśli $x \in \mathcal{A}$, to $(e^x)^* = e^{x^*}$

Jeśli x - hermitowski $t \in R$, to e^{itx} - unitarny

$(e^{itx})^* = e^{(itx)^*} = e^{-itx}$

$e^{itx}(e^{itx})^* = e^{itx} e^{-itx} = e^{0I} = 1$

$sp(e^{itx}) \subset \{z : |z| = 1\}$

$\int_0^\infty \|e^{tx}\| dt < \infty$

$\boxed{x \int_0^\infty e^{tx} dt = -1}$

$x_\varepsilon \int_0^\infty e^{tx} dt$

$\shortparallel$

$\int_0^\infty \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} e^{tx} \, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty (e^{(t+\varepsilon)x} - e^{tx}) \, dt = \frac{1}{\varepsilon} (\int_\varepsilon^\infty e^{tx} dt - \int_0^\infty e^{tx} dt)$

$x_\varepsilon \int_0^\infty e^{tx} dt = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon e^{tx} \, dt \rightarrow -1$,

czyli

$x \int_0^\infty e^{tx} dt = -1$

$e^{\alpha 1} = e^{\alpha} 1$

$\|e^{-(\lambda 1 + ix)t}\| \leq \|e^{-\lambda 1 t}\| \cdot \|e^{-ixt}\| \leq e^{-\lambda t}$

$\lambda > 0$

$\int_0^\infty \|e^{-(\lambda 1 + ix)t}\| dt < \infty$

$(-\lambda 1 + itx)^{-1}$ - istnieje!

$\lambda \neq 0$, $\lambda \in R$ $\lambda + itx$ posiada

$\alpha \neq 0$
$\alpha i \in sp(x)$

$(\alpha i$

Wniosek: Jeżeli x - normalny, $\varphi \in \mathfrak{M}$ - spekt $\mathcal{A}$

$spect(\mathcal{A}) = \{ \varphi \in A^* : \varphi$ - multiplikatywny, $\varphi(1) = 1 \}$

$= \mathfrak{M}$ - z słabą $*$ topologią jest zwarty (z tw. Tichonowa)

$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$

$\varphi(x + x^*)$ - rzeczywiste

$\varphi(\frac{x - x^*}{i})$ - rzeczywiste

$x + x^*$ - hermitowski

h - hermitowski $\varphi \in \mathfrak{M}(A) \Rightarrow \varphi(h) \in R$

$\frac{x - x^*}{i}$ - hermitowski

B - algebra Banacha przemienna z jednością $m \in \mathfrak{M}(B)$

$x \in B$ $m(x) \in sp(x)$ $\{ m(x) : m \in \mathfrak{M} \} = sp(x)$

B - C^* - algebra generowana przez e, x, x^*

$m \in \mathfrak{M}(A) \Rightarrow m \in \mathfrak{M}(B)$

$\mathcal{A}$ - algebra Banacha z jednością $\mathfrak{M} = \text{spect}(\mathcal{A})$

$\mathcal{F}: \mathcal{A} \to C(\mathfrak{M})$ $\mathcal{F}(xy) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y)$

$\mathcal{F}(x)(m) = m(x)$ $\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{F}(x) + \beta\mathcal{F}(y)$

$\|\mathcal{F}(x)\|_{C(\mathfrak{M})} \leq \|x\|$ $\mathcal{A}$ - przemienna

$x^k = 0$ $m(x)^k$ $\|\mathcal{F}(x)\|_{C(\mathfrak{M})} = \|x\|_{sp}$

$m(x) = 0$

$\|x\|_{sp} = 0 \iff x$ - quasi-nilpotentny

<u>Wniosek (główny):</u>

Jeśli $\mathcal{A}$ - C^* algebra z jednością, przemienna, wówczas transformata Gelfanda $\mathcal{F}$ jest izometrią A na $C(\mathfrak{M})$.

$\|\mathcal{F}(x)\|_{C(\mathfrak{M})} = \|x\|_{sp} = \|x\|$

x - norma $m(x^*) = \overline{m(x)}$

$\mathcal{F}(x^*) = \overline{\mathcal{F}(x)}$