10. X. 2011

Nieliniowe ~~ze~~ zagadnienia eliptyczne:

Twierdzenia o wartościach własnych:

1) wiedza z algebry

$A \in \mathbb{R}^n$ - symetryczna, to istnieje baza w $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych A,

bardziej zaawansowana wiedza:

Tw (Perro - Frobenius): Przy założeniach j.w., jeśli A ma wyrazy dodatnie, to ma rzeczywiste, dodatnie wartości własne i odpowiadające jej wektory własne o wszystkich współrzędnych dodatnich

3) z analizy funkcjonalnej (teoria spektralna operatorów samosprzężonych)

Nieprecyzyjnie: Operator samosprzężony, zwarty określony na przestrzeni Hilberta H posiada pełen zapas funkcji własnych (t.zn wektory własne - rozwiązania $Ax = \lambda x$ tworzą układ zupełny w H, czyli liniowo gęsty).

To samo jeśli operator jest odwrotny do zwartego samosprzężonego (gęsto określony).

• wątek równaniowy:

Rozważmy operator eliptyczny w postaci dywergentnej:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} = -\operatorname{div}(\underbrace{A \nabla u}_{\in \mathbb{R}^n}) \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

$u : \Omega \to \mathbb{R}$

Ω - ograniczony, otwarty

$a_{ij} = a_{ji}$, np $a_{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega})$

+ warunek eliptyczności (jednostajna nas interesuje): $\exists \lambda_0 > 0$ t.że

$$\sum a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Przykład: $Lu = \Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(\underset{\overset{\shortparallel}{A}}{Id} \cdot \nabla u)$

Interesuje nas zagadnienie:

$$\begin{cases} +Lu = \lambda u & 1^\circ \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega & 2^\circ \end{cases}$$

nazwa:

1° zagadnienie własne

2° szukamy $u \in H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$ = domknięcie $C_0^\infty(\Omega)$ w $H^1(\Omega)$

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega), \ \forall\ i=1,\dots,n\}$

<u>Twierdzenie 1</u> (o wartościach własnych, symetrycznych operatorów eliptycznych):

(i) wszystkie wartości własne operatora L są rzeczywiste

(ii) wypiszmy każdą wartość własną tyle razy ile wynosi jej krotność, wówczas:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$$

$$\text{i} \quad \lambda_k \to \infty$$

(iii) Istnieje baza ortogonalna $\{w_k\}$ w przestrzeni $L^2(\Omega)$, w której $w_k \in H_0^1(\Omega)$ jest funkcją własną odpowiadającą λ_k.

$$Lw_k = \lambda_k w_k \quad \text{w } \Omega, \quad w_k \in H_0^1(\Omega)$$

<u>Uwagi:</u>

1. warunek $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ oznacza, że przestrzeń własna odpowiadająca pierwszej wartości własnej jest jednowymiarowa. (bo wypisujemy ~~krotność~~ wartości własne z krotnościami)

2. $\lambda_1 < \lambda_2$ oznacza, że λ_1 jest izolowana od pozostałych wartości własnych
$\lambda_k \to \infty$ oznacza, że przestrzeń $\{u \in H_0^1(\Omega) : Lu = \lambda_k u\}$ jest skończonego wymiaru $\forall_k$.

<u>Def:</u> λ_1 nazywamy główną wartością własną dla operatora L.

<u>Twierdzenie:</u> Niech w będzie wektorem odpowiadającym głównej wartości własnej operatora L. Wówczas w z dokładnością do pomnożenia przez stałą jest funkcją ściśle dodatnią.

<u>Uwaga:</u> To znaczy, że w spełnia ściśle zasadę minimum:

$$\min_{\overline{\Omega}} w = \min_{\partial\Omega} w = 0$$

tak czytamy warunek $w \in H_0^1(\Omega)$
(czytamy: $w \equiv 0$ na $\partial\Omega$)

Przestrzeń Sobolewa

$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \le m \}$

słaba pochodna

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(D^\alpha u, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega D^\alpha u \, \varphi \, dx.$$

dla $u \in C_0^\infty(\Omega)$

warunek $D^\alpha u \in L^p$ oznacza: $\exists v \in L^p(\Omega)$ t.że

$$(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int u D^\alpha \varphi \, dx = \int v \varphi \, dx.$$

Uwaga: Funkcji $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ t.że $u_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ można przypisać słabą dywergencję

$$(\operatorname{div}(u_1, \dots, u_m), \varphi) = \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_\Omega u_i \partial_i \varphi \, dx$$

$$\operatorname{div}(u_1, \dots, u_m) = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

w słabym sensie

Uwaga:

1) Dla Ω - ograniczonego o brzegu Lipschitzowskim

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega)$$

argument: nierówność Poincarego:

Dla $u \in C_0^\infty(\Omega)$ $\quad \|u\|_p \le C \|\nabla u\|_p \quad (*)$

Zatem dla $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$, ale nie spełnia $(*)$.

Def: Niech $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Operator

$$\Delta_p u = \underbrace{\operatorname{div}}_{\text{słaba dyw.}} (\underbrace{|\nabla u|^{p-2} \nabla u}_{\sim |\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}_{loc} \subseteq L^1_{loc}})$$

nazywamy operatorem p-Laplace'a ($p=2$: $\Delta_p u = \Delta u$)

Drabek „p-Laplacian mascotte in nonlinear analysis"

Interesuje nas zagadnienie

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda |v|^{p-2} v & (1^\circ) \\ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

nieliniowe zagadnienie własne

Uwaga: $p=2$: $-\Delta v = \lambda v$. Co z teorii liniowej przenosi się na (1)?

Definicja:

Powiemy, że $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \neq 0$ jest słabym rozwiązaniem (1), jeśli : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega |v|^{p-2} v \cdot \varphi$$

to jest słaba definicja dywergencji na φ.

Problem 1: Istnienie rozwiązań z możliwie najmniejszą wartością λ.

Uwaga: Jeśli v rozwiązuje (1), to $\lambda > 0$. Bierzemy

$v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$: $v_\varepsilon \to v$ w $W^{1,p}(\Omega)$

$(1^\circ, v)$: (Czytamy (2) na v_ε) :

$$\int_\Omega \underbrace{|\nabla v|^{p-2} \nabla v}_{\in L^{\frac{p}{p-1}}} \cdot \nabla v_\varepsilon = \lambda \int |v|^{p-2} v \cdot v_\varepsilon \, dx$$

$\varepsilon \to 0$

Interesuje nas funkcjonał: $p > 1$

$$I(v) = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p}{\int_\Omega |v|^p} \quad \text{- iloraz Rayley'a}$$

i pytamy o

$$\lambda_1 = \inf \{ I(v) : v \in W_0^{1,p}(\Omega), \, v \neq 0 \}.$$

Twierdzenie 2: Infimum dla ilorazu ~~Rdy~~ Rayley'a jest osiągane, tzn istnieje taka funkcja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$: $I(v) = \lambda_1$.

Dowód: Niech $\lambda_j \searrow \lambda_1$, λ_j t. że $\lambda_j = I(v_j)$, $v_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v_j \neq 0$.

Zauważmy : $I(tv) = I(v)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Można założyć, że $\int v_j^p = 1$.

w p.p. zastępujemy v_j przez $\frac{v_j}{(\int v_j^p)^{1/p}}$

stąd $I(v_j) = \int |\nabla v_j|^p \searrow \lambda_1$

$\parallel$

λ_j

stąd : $\{v_j\} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ - ograniczony

Twierdzenie: (Rellich - Kondraszow)

Dla Ω - ograniczonego z brzegiem lipschitzowskim : $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ jest zwarty. Tzn z każdego ciągu ograniczonego u w $W^{1,p}(\Omega)$ można wybrać podciąg silnie zbieżny w $L^p(\Omega)$.

Fragment z luką: z tw. Rellicha - Kondraszowa
$\{v_j\} \subseteq L^p(\Omega)$ - jest zwarty

Poprawka: $\bar{\Omega} \subseteq B(R)$ dla odpowiednio dużego R,

$$\tilde{v}_j := \begin{cases} v_j & w\ \Omega \\ 0 & w\ B(R)\setminus\Omega \end{cases}$$

$\{\tilde{v}_j\} \subseteq W^{1,p}(B(R))$ - ograniczony $\partial B(R)$ - Lipschitzowski

$\Rightarrow$ $\{\tilde{v}_j\}$ - zwarty w $W^{1,p}(B(R))$

$\Rightarrow$ $\{v_j\}$ - zwarty w $L^p(\Omega)$

Bierzemy podciąg $v_{j_k} \to v$ w $L^p(\Omega)$

$\nabla v_j^k \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ - ograniczony

$\exists\, u \in L^p(\Omega)$: podciąg $\nabla v_{j_{k_l}}$: $\nabla v_{j_{k_l}} \rightharpoonup h$ w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (słaba zbieżność)

$\Rightarrow h = \nabla v$

bo $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$: $\int v_{j_{k_l}} \varphi \to \int v\varphi$

$$-\int v_{j_{k_l}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int \frac{\partial v_{j_{k_l}}}{\partial x_i}\varphi \longrightarrow \int h_i \varphi \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} = h_i$$

$$\searrow -\int v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Stąd

$$\lambda_1 = \lim_{l\to\infty} \frac{\int |\nabla v_{j_{k_l}}|^p}{1 (= \int |v_{j_{k_l}}|^p)} \geqslant \liminf_{l\to\infty} \int |\nabla v_{j_{k_l}}|^p$$

$\nabla v_{j_{k_l}} \rightharpoonup \nabla v$ w L^p

$$\geqslant \int_\Omega |\nabla v|^p$$

półciągłość z normy

własność normy w L^p: Jeśli $h_j \rightharpoonup h$ w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, to

$$\liminf_{j\to\infty} \int |h_j|^p \geqslant \int |h|^p$$

$$\lambda_j \searrow \lambda_1 \geqslant I(v) \geqslant \lambda_1$$

$$\Rightarrow I(v) = \lambda_1$$

Fakt: Funkcja v realizuje infimum $I(v)$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia:

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda_1 v \\ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

λ_1 = najmniejsza λ: $\|w\|_p^p \leq \lambda \|\nabla w\|_p^p$ = najmniejsza stała w nierówności Poincare'go.

Dowód: Niech $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$: dla dowolnego $\varepsilon \in \mathbb{R}$ funkcja

$f(\varepsilon) := I(v + \varepsilon\varphi) \geq I(v)$

osiąga minimum dla $\varepsilon = 0$

z tw. Fermata : $f'(0) = 0$

Liczymy formalnie:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(v + \varepsilon\varphi) = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\int |\nabla v + \varepsilon \nabla \varphi|^p}{\int |v + \varepsilon\varphi|^p} \right)$$

[1] wykaż, że

$$f'(0) = \frac{p \cdot \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi - p \cdot I(v) \int |v|^{p-2} v \cdot \varphi}{\int |v|^p}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi = \lambda_1 \int |v|^{p-2} v \cdot \varphi$$

$$(-\Delta_p v, \varphi) = (\lambda_1 |v|^{p-2} v, \varphi) \quad \forall \varphi$$

$$(-\Delta_p v - \lambda_1 |v|^{p-2} v, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi$$

$\Rightarrow -\Delta_p v = \lambda_1 |v|^{p-2} v$ w słabym sensie.

Fakt: λ_1 jest najmniejszą wartością własną dla zagadnienia własnego

$$(1) \begin{cases} -\Delta_p w = \lambda |v|^{p-2} w \\ w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad w \not\equiv 0 \end{cases}$$

Dowód: Załóżmy przeciwnie. Istnieje w, które realizuje (1) z wartością $0 < \lambda < \lambda_1$. Z definicji słabego rozwiązania:

$$\int |\nabla w|^{p-2} \nabla w \cdot \nabla \varphi_n = \lambda \cdot \int |w|^{p-2} w \cdot \varphi_n$$

($|\nabla w|^{p-2}\nabla w \in L^{\frac{p}{p-1}}$, $\nabla\varphi_n \to \nabla w$; $|w|^{p-2}w \in L^{p/p-1}$, $\varphi_n \to w$ w L^p)

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wstawiamy $\varphi_n \to w$ w $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int |\nabla w|^p = \lambda \int |w|^p \Rightarrow I(w) = \lambda < \lambda_1 \quad \text{- sprzeczność} \quad \blacksquare$$

Na razie bez dowodu:

Twierdzenie 3: (Nierówność Harnacka)

Niech v będzie nieujemnym, słabym rozwiązaniem (1). Wówczas dla każdej kuli $B(x_0, R)$ t. że $B(x_0, 3R) \subseteq \Omega$ mamy:

$$\max_{x \in B(x_0,R)} v(x) \leq c \min_{x \in B(x_0,R)} v(x) \quad (H)$$

Fakt: Rozwiązania (1) są ciągłe wewnątrz obszaru

(2) Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem spójnym i $v \in C(\Omega)$, $v \geq 0$ spełnia (H), to albo $v > 0$ albo $v \equiv 0$ w Ω.

w szczególności ~~v((x_0))~~ / $\exists$ $v(x_0) = 0 \Rightarrow v \equiv 0$

{ rodzaj silnej zasady maksimum }

<u>Wniosek:</u> Rozwiązanie (1) dla $\lambda = \lambda_1$ jest stałego znaku (ściśle dodatnie lub ściśle ujemne).

<u>Fakt:</u> Jeśli $\partial\Omega$ jest gładki, Ω - ograniczony, to rozwiązania (1) są ciągłe aż do brzegu Ω dla $\lambda = \lambda_1$.

<u>Dowód wniosku:</u> v - spełnia (1) z $\lambda_1 \Rightarrow v$ - minimalizuje $I(\cdot)$, bo $\lambda_1 = I(v)$, $I(v) = I(|v|) \Rightarrow |v| \geq 0$ i minimalizuje I

$\Rightarrow |v|$ też spełnia zagadnienie własne z $\lambda_1 \Rightarrow |v|$ spełnia nierówność Harnacka, $|v| \in W_0^{1,p}$ i $|w| \not\equiv 0 \Rightarrow |v| > 0$

v nie osiągało 0. ∎

(3) Pokazać, że

$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow |v| \in W_0^{1,p}(\Omega)$

<u>Główne twierdzenie:</u>

<u>Twierdzenie:</u> Niech Ω będzie ograniczonym, otwartym, spójnym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje dodatnie słabe rozwiązanie (1) i jest ono wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez stałą. Rozwiązanie to odpowiada najmniejszej wartości własnej λ_1.

<u>Fakt:</u> (wiadomo) 1) λ_1 - izolowany od λ_2, tzn $\lambda_1 < \lambda_2$, ale co dla innych - nie wiadomo.

2) w teorii liniowej przestrzeń własna jest liniowo gęsta. W nieliniowej?

<u>Dowód (trochę szkic):</u>

<u>Krok 1:</u> Jeśli $\lambda > \lambda_1$, to nie istnieje dodatnie rozwiązanie dla wartości własnej λ. W szczególności każda dodatnia funkcja własna minimalizuje iloraz Rayleya, a funkcje własne odpowiadające $\lambda > \lambda_1$ muszą zmieniać znak.

<u>Krok 2:</u> Redukcja do przypadku: $\partial\Omega$ - gładki

<u>Fakt 2:</u> Niech Ω będzie obszarem ograniczonym, wtedy istnieje ciąg obszarów o gładkich brzegach: $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega$ t.że

$\Omega = \bigcup_j \Omega_j$ (POLECANE NA KRÓTKI REFERACIK)

Fakt: Niech $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots \subseteq \Omega$ t. że $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$.
wówczas

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_1(\Omega_j) = \lambda_1(\Omega)$$

$\uparrow$ minimum ilorazu Rayley'a dla Ω_j

Dowód: $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2)$

$$\lambda_1(\Omega_1) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int |\nabla\varphi|^p}{\int |\varphi|^p} = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)} I(\varphi) \geq$$

$$\geq \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega_2)} I(\varphi) = \lambda_1(\Omega_2)$$

Czyli $\{\lambda_1(\Omega_j)\}$ - maleje (nie rośnie)
i $\geq \lambda_1(\Omega)$

Stąd istnieje $\lambda = \lim_j \lambda_1(\Omega_j) \geq \lambda_1(\Omega)$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ t. że

$$I(\varphi) < \lambda_1(\Omega) + \varepsilon$$

$\Omega = \bigcup \Omega_j \Rightarrow \exists_j \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega_j$
w takim razie

$$\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega_j) \leq I(\varphi) < \lambda_1 + \varepsilon$$

Stąd:
$\lambda_1(\Omega_j) \to \lambda_1(\Omega)$ ■

Powrót do dowodu

Krok 3: Dodatnia funkcja własna jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez stałą.
(dowód dla $\partial\Omega$ - gładki). Faktycznie
Niech u_1, u_2 - dwie dodatnie funkcje własne $\Rightarrow$ one obie odpowiadają λ_1. Można założyć (zamieniamy u_i na

$\frac{u_i}{(\int |u_i|^p)^{1/p}}$), że $\int u_i^p = 1$.

Podstawiamy $v := (u_1^p + u_2^p)^{1/p}$ $\boxed{4}$ Pokazać $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$
$\Rightarrow \int v^p = 2$,

$$\lambda_1 = \frac{\int |\nabla u_i|^p}{1} \leq \frac{\int |\nabla v|^p}{2}$$

$(1 = \int |u_i|^p)$ $(2 = \int |v|^p)$

Liczymy formalnie ∇v.

$$\nabla v = \frac{1}{p}(u_1^p + u_2^p)^{1/p - 1} \cdot (p u_1^{p-1} \nabla u_1 + p u_2^{p-1} \nabla u_2) =$$

$$= v \cdot \left(\frac{u_1^p \nabla \log u_1 + u_2^p \nabla \log u_2}{u_1^p + u_2^p} \right) =$$

$$\boxed{\nabla \log u_i = \frac{1}{u_i} \nabla_i} \qquad = v \cdot \left(\underbrace{\frac{u_1^p}{u_1^p + u_2^p}}_{\theta_1} \nabla \log u_1 + \underbrace{\frac{u_2^p}{u_1^p + u_2^p}}_{\theta_2} \nabla \log u_2 \right)$$

Nierówność Jensena:

$$|\nabla v|^p = v|\theta_1 \nabla \log u_1 + \theta_2 \nabla \log u_2|^p \overset{\text{Jensen}}{\leq} |v|^p (\theta_1 |\nabla \log u_1|^p +$$

$$+ \theta_2 |\nabla \log u_2|^p) = |v|^p \left(\frac{|\nabla u_1|^p}{u_1^p + u_2^p} + \frac{|\nabla u_2|^p}{u_1^p + u_2^p} \right) =$$

$$= (u_1^p + u_2^p) \cdot \frac{1}{u_1^p + u_2^p} (|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p) = (|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p)$$

$$\lambda_1 \leq \frac{\int |\nabla v|^p}{\int v^p} \leq \frac{\int |\nabla u_1|^p + \int |\nabla u_2|^p}{2} = \frac{2\lambda_1}{2} = \lambda_1$$

$\Rightarrow$ równości na zbiorze pełnej miary.

$$\Rightarrow \frac{\int |\nabla v|^p}{\int |v|^p} = \lambda_1$$

$\boxed{5}$ Fakt: Dla $a, b \in \mathbb{R}^n$ $a, b \neq 0$, $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$

$\theta_1 + \theta_2 = 1$, $|\theta_1 a + \theta_2 b|^p = \theta_1 |a|^p + \theta_2 |b|^p$

$\Leftrightarrow$ $a = b$

$\Rightarrow$ na zbiorze pełnej miary:

$\nabla \log u_1 = \nabla \log u_2 \Rightarrow \nabla(\log u_1 - \log u_2) = 0$ p.w.

$\Rightarrow \nabla\left(\log \frac{u_1}{u_2}\right) = 0$ p.w. $\Rightarrow \nabla w = 0$ p.w.

$w \in L^1_{loc}$

Lemat Dubois - Raymond:

$\nabla w = 0 \Rightarrow w = \text{const}$ p.w.

$\log \frac{u_1}{u_2} = \text{const} \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = c \Rightarrow u_1 \neq u_2$ ∎

<u>Lemat A</u> (Dubois - Raymond)

Niech $w \in L^1(0,1)$, $w' = 0$ w słabym sensie. Wówczas $w = \text{const}$. p.w.

<u>Lemat B:</u> $w \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\underset{\uparrow \text{ w słabym sensie}}{\nabla w} = (0, \dots, 0)$

$\Rightarrow$ $w = \text{const}.$

Dowód lematu A: $w \in C^{\infty}(0,1)$ - jasne.

Ogólny przypadek - "wygładzamy" w.

Niech $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $\varphi \equiv 1$ w otoczeniu 0. + symetryczne. Bierzemy $\varepsilon_0 > 0$ - małe,

bierzemy $\eta \in C_0^{\infty}((\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0))$

$$\eta_\varepsilon := \eta * \varphi_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$0 = \int_0^1 w \cdot \eta_\varepsilon' \, d\tau = \int_{\mathbb{R}} \hat{w} \, (\eta' * \varphi_\varepsilon) \, d\tau =$$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$

$-(w, \eta_\varepsilon)$ $\qquad$ w przedłużone: 0 poza $(0,1)$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\hat{w} * \varphi_\varepsilon) \cdot \eta' = \int_{\varepsilon_0}^{1-\varepsilon_0} \underbrace{(\hat{w} * \varphi_\varepsilon)}_{\in C^{\infty}([\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0])} \cdot \eta' \, d\tau$$

ε - bardzo małe

$$= -\int_{\varepsilon_0}^{1-\varepsilon_0} \underbrace{(\hat{w} * \varphi_\varepsilon)'}_{= h} \cdot \eta \, d\tau$$

$\Rightarrow \quad \int h \cdot \eta = 0 \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}([\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0])$

$\Rightarrow \quad h = 0$ p.w. $\Rightarrow h = 0$ wszędzie

$$(\hat{w} * \varphi_\varepsilon)' = 0 \Rightarrow \hat{w} * \varphi_\varepsilon \equiv C_\varepsilon$$

Wybieramy $\varepsilon_k \to 0$ t.że $C_{\varepsilon_k} \to C$

$$\hat{w} * \varphi_{\varepsilon_k} = C_{\varepsilon_k}$$

$\qquad\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\qquad\hat{w} \qquad\qquad C \qquad$ na $[\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]$

$\Rightarrow \quad w = c$ na $[\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0] \subseteq (0,1)$

$\Rightarrow \quad w = \text{const}$ w $(0,1)$.

Źródła:

1. P. Lindquist „On the equation $\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$" 1990 (1992 - poprawiona)

2.

Tw o wartościach własnych symetrycznych operatorów symetrycznych 17. X. 2011
(w postaci dywergentnej)

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j}$$

$a^{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ - Lipschitzowski, $a^{ij} = a^{ji}$ - symetria

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

[$H_0^1(\Omega)$ - uzupełnienie $C_0^\infty(\Omega)$ w $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$]

Tw (o wartościach własnych symetrycznych operatorów eliptycznych):

(i) wszystkie wartości własne L są rzeczywiste

(ii) Jeśli wypiszemy każdą wartość własną tyle razy ile wynosi jej krotność, to:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{spektrum operatora}}}{\Sigma} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$$

$\Sigma : (L - \lambda Id)^{-1}$ nie istnieje

gdzie $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ oraz $\lim \lambda_k = \infty$

[nie może być $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots$ dla jednej wartości własnej wektorów własnych jest skończenie wiele]

(iii) Istnieje baza ortogonalna $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ przestrzeni $L^2(\Omega)$, t.że $w_k \in H_0^1(\Omega)$ jest funkcją własną odpowiadającą λ_k:

$$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k \\ w_k = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases} \iff w_k \in H_0^1(\Omega)$$

Dowód:

Krok 1: $S := L^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

Uwaga: $\{a^{ij}\}$ macierz ściśle eliptyczna

$$\forall \quad \sum a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \bar{\lambda}|\xi|^2, \quad \bar{\lambda} > 0$$

i pokazujemy, że S - jest operatorem zwartym. Robimy to tak $f \in L^2(\Omega)$

Rozważamy: (1) $\begin{cases} Lu = f & \text{w } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

L - zadaje symetryczną formę dwuliniową

$$A(u,v) := \text{"}(Lu, v)\text{"} = \sum_{i,j} \int_\Omega a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$u, v \in H_0^1(\Omega) = H$ - przestrzeń Hilberta

$f \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ f- wyznacza funkcjonał na H

$H \ni u \to \int f u \, dx$

<u>Tw (Laks, Milgram):</u> Załóżmy, że H- przestrzeń Hilberta, $A: H \times H \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem dwuliniowym, t.że dla pewnych $\alpha, \beta > 0$:

$|A(u,v)| \leq \alpha \|u\| \cdot \|v\|$ $\leftarrow$ ciągłość, $\forall u, v \in H$

$\beta \|u\|^2 \leq A(u,u)$ - koercytywność

wówczas dla dowolnego funkcjonału $f: H \to \mathbb{R}$

$\exists! u \in H: \quad A(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$

Mamy przekształcenie: $f \xrightarrow{\psi} u_f$ rozwiązanie (1) z funkcją f

<u>wiemy:</u> $\psi: L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ jest ciągłe

(liniowość + $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$)

dodatkowo :

$i: H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

operator zwarty, <u>zawsze</u>!

(Ω - ograniczony)

$u \mapsto \tilde{u} \in H_0^1(B(R))$

$B(R) \supseteq \Omega$

$$L^2(\Omega) \xrightarrow{\psi} H_0^1 \xrightarrow{i} L^2(\Omega)$$

ciągły zwarty

$\underbrace{i \circ \psi}_{\text{zwarty}}: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

Było: $Lu = f \qquad u = L^{-1} f = Sf$

<u>Krok 2:</u> S jest operatorem symetrycznym

<u>Krok 3:</u> S jest dodatnio określony: Dla $f \in L^2(\Omega)$:

$(Sf, f) \overset{?}{\geq} 0$

$(Sf, f) = (u, Lu) = (Lu, u) \geq 0$

u t.że $Lu = f$; bo L dodatnio określony, nawet $(Lu, u) \geq \beta \|u\|^2 \geq 0$

Krok 4: Stosujemy teorię symetrycznych operatorów zwartych

Tw. (o wektorach własnych, zwartych operatorów symetrycznych)
Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Załóżmy, że operator $S: H \to H$ jest zwarty, symetryczny. Wówczas istnieje przeliczalna baza ortonormalna przestrzeni H złożona z wektorów własnych operatora S. Ponadto jeśli S jest nieujemny, to wartości własne są ≥ 0.

[12] Podać przykład obszaru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, dla którego zanurzenie $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ nie jest zwarte (ograniczonego).
(Podpowiedź: okładka w starej wersji książki Mazyi)

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Przypomnienie: Najmniejszą liczbę $\lambda_1 > 0$ nazwiemy główną wartością własną operatora L (okaże się za chwilę, że $\lambda_1 > 0$ istnieje).

Tw. (charakteryzacja wariacyjna głównej wartości własnej)
(i) $\lambda_1 = \min \{ \underbrace{A(u,u)}: u \in H_0^1(\Omega): \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \}$

$$\left(L\{u,u\} = \int \Sigma\, a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right.$$

(ii) Minimum w powyższym wzorze jest osiągane dla pewnej funkcji w_1 dodatniej wewnątrz Ω t.że

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{w } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \qquad (w_1 \in H_0^1(\Omega))$$

(iii) Jeśli $u \in H_0^1(\Omega)$ jest dowolnym słabym rozwiązaniem

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$u \neq 0$, to u jest postaci $\varkappa w_1$ dla pewnego $\varkappa \neq 0$.

Uwaga: Zatem $\lambda_1 < \lambda_2$

Uwaga: $\lambda_1 = \min \dfrac{A(u,u)}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = R(u)$
$\uparrow$
iloraz Rayley'a

Dowód: Kroki
Krok 1: Niech $\{u_k\}$ - zbiór wektorów własnych dla $\{\lambda_k\}$ t.że $\|u_k\|^2_{L_2} = 1$; $\{u_k\}$ - baza ortonormalna w $L^2(\Omega)$

$A(u_k, u_k) = (Lu_k, u_k) = (\lambda_k u_k, u_k) = \lambda_k$

$A(u_k, u_l) = (Lu_k, u_l) = (\lambda_k u_k, u_l) = \lambda_k (u_k, u_l) = 0$ dla $k \neq l$

$k \neq l$

Krok 2: Dowolne $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ zapisujemy w bazie ortonormalnej:

$$u = \sum d_k w_k \quad , \quad \sum d_k^2 = 1 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Pokażemy, że zachodzi własności silniejsze:

1) układ $\left\{ \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}$ jest ortonormalny w $H_0^1(\Omega)$ z iloczynem skalarnym

$$((u,v)) = (Lu, v) = \int \sum a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$\left(L \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right) = \frac{1}{\lambda_k} \underbrace{(Lw_k, w_k)}_{\lambda_k} = 1$$

$$\left(\left(\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right)\right)$$

prostopadłość $\left(L \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{w_l}{\sqrt{\lambda_l}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}} \underbrace{(Lw_k, w_l)}_{1}$

0 dla $k \neq l$

$$\left(\left(\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{w_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right)\right) = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq l$$

2) $\left\{ \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}$ jest układem zupełnym (= liniowo gęstym) w $H_0^1(\Omega)$.

wystarczy sprawdzić rachunek:

$(Lw_k, u) = 0 \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0$,

bo jeśli istnieje $u \in (\overline{\text{span}\{w_k\}})^{\perp} \Rightarrow$

$u \neq 0$.

$\exists u \neq 0 : ((u, w_k)) = 0 \quad \forall k$.

Gdyby takie u istniało, to

$0 = (Lw_k, u) = (\lambda_k w_k, u) \Rightarrow (w_k, u) = 0 \quad \forall k$

$\uparrow$

tu jest standardowy iloczyn skalarny

w $L^2(\Omega)$

$\{w_k\}$ - baza w $L^2(\Omega)$

stąd $(u \neq 0$ w $L^2(\Omega))$ sprzeczność

$\Rightarrow$ $u = 0$ w $H_0^1(\Omega)$

z zupełności $\{ \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \}$ w $H_0^1(\Omega)$:

$u = \sum \mu_k \cdot \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ - ten szereg jest zb. w $H_0^1(\Omega)$

ale $u = \sum d_k w_k$ w $L^2(\Omega)$, $d_k = \frac{\mu_k}{\sqrt{\lambda_k}}$

Krok 3: Niech $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$

$$(Lu, u) = (\sum d_k \lambda_k w_k, \sum d_i w_i) = \sum d_k d_l \lambda_k \underbrace{(w_k, w_l)}_{\delta_{k,l}} = \sum d_k^2 \lambda_k \geq \sum d_k^2 \lambda_1 = \lambda_1$$

$\Rightarrow$ $(Lu, u) \geq \lambda_1$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$

Krok 4: Pokażujemy dla $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, u jest słabym rozwiązaniem:

$$(A) \begin{cases} Lu = \lambda_1 u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ u jest rozwiązaniem:

(B) $(Lu, u) = \lambda_1$

(A) $\Rightarrow$ (B) - oczywiste

(A), u

$$(Lu, u) = \underbrace{(\lambda_1 u, u)}_{\int \lambda_1 u^2}$$

(B) $\Rightarrow$ (A) : $u = \sum d_k w_k$ $\quad \sum d_k^2 = 1$

$\uparrow$ w $L^2(\Omega)$.

$$\sum d_k^2 \cdot \lambda_1 = \lambda_1 \underset{(B)}{=} (Lu, u) = (\sum d_k \lambda_k w_k, \sum d_l w_l) = \sum d_k d_l \lambda_k \underset{(w_k, w_l)}{\delta_{kl}} =$$

$= \sum d_k^2 \lambda_k \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_k$

$\sum d_k^2 \underbrace{(\lambda_k - \lambda_1)}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow d_k = 0$ jeśli $\lambda_k > \lambda_1$

Niech $(w_1, \dots, w_m)$ - wektory własne odpowiadające λ_1.

$$u = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(u, w_k)}_{d_k} \cdot w_k \qquad L w_i = \lambda_1 w_i d_k \qquad i = 1, \dots, m$$

stąd

$$Lu = \sum_{k=1}^{m} d_k L w_k = \sum_{k=1}^{m} d_k \lambda_1 w_k = \lambda_1 u,$$ czyli spełnia (A)

Krok 5: Pokazujemy: $u > 0$ lub $u < 0$ w Ω

Zakładamy $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$

Piszemy $u = u^+ - u^-$

$$u^+ = \max\{u, 0\} \in H_0^1(\Omega)$$

$$u^- = \max\{-u, 0\} \in H_0^1(\Omega)$$

$\boxed{3}$ Dokładnie uzasadnić

$u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$ (dla $u \in H_0^1(\Omega)$) oraz

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{p.w. dla } \{u > 0\} \\ 0 & \text{p.w w zbiorze } \{u \le 0\} \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{p.w. } \{u \ge 0\} \\ \nabla u & \text{p.w. } \{u \le 0\}. \end{cases}$$

$$(Lu^+, u^-) = \sum \int_\Omega a^{ij} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} \frac{\partial u^-}{\partial x_j} = 0$$

rozłączne nośniki

$$\lambda_1 = (Lu, u) = (L(\underbrace{u^+ - u^-}_{u}), \underbrace{u^+ - u^-}_{u})$$

Krok 4

$$= (Lu^+, u^+) - 2(Lu^+, u^-) + (Lu^-, u^-)$$

$$\ge \lambda_1 \underbrace{\|u^+\|^2_{L^2}}_{\alpha} + \lambda_1 \underbrace{\|u^-\|^2_{L^2}}_{\beta} = \lambda_1(\alpha + \beta) = \lambda_1$$

– wszędzie równości

$$A(u^+, u^+) = (Lu^+, u^+) = \lambda_1 \|u^+\|^2_{L^2}$$

$$A(u^-, u^-) = (Lu^-, u^-) = \lambda_1 \|u^-\|^2_{L^2}$$

u^-, u^+ – minimalizują $R(u)$ (lub jedno z nich jest 0)

$$\begin{cases} Lu^+ = \lambda_1 u^+ \\ u^+ = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} Lu^- = \lambda_1 u^- \\ u^- = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Rozważamy u^+ i pokazujemy $u^+ \in C^\infty(\bar\Omega)$

Argument: $\begin{cases} Lu = \lambda w \\ w \in L^2(\Omega) \end{cases} \Rightarrow w \in C^\infty(\bar\Omega)$

$$Lw = \underset{\underset{L^2(\Omega)}{\cap}}{(\lambda w)} \Rightarrow w \in H^1(\Omega)$$

Laks-Milgram

$\boxed{4}$ Pokazać;

$Lw \in H_*^k \Rightarrow w \in H^{k+1}(\Omega)$

$$Lw = \underset{\underset{H^1}{\cap}}{\lambda w} \Rightarrow w \in H^2 \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} Lw = L \frac{\partial}{\partial x_i} w + \text{zaburzenie}$$

$$\Rightarrow u \in \bigcap_k H^k(\Omega)$$

Dla obszaru o regularnym brzegu (np. Lipschitzowskim)

$$\bigcap_k H^k(\Omega) = C^\infty(\bar\Omega)$$

(+ Morrey'a)
Tw. Sobolewa: $p > n \Rightarrow W^{1,p} \subseteq Hol^\alpha$, $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$

$mp > n$

$\hookrightarrow H^\alpha \quad \alpha = \frac{1}{mp} - \frac{1}{n} \qquad W^{m,p} \subseteq Hol^\alpha$

$u^+ \in C^\infty(\bar\Omega)$

$Lu^+ = \lambda_1 u^+ \geq 0 \Rightarrow Lu^+ \geq 0.$

$\Rightarrow u^+$ - nadrozwiązanie dla $L \Rightarrow$ (mocna zasada maksimum dla nadrozwiązań liniowych zagadnień eliptycznych) $\Rightarrow$

albo $u^+ > 0$ w Ω albo $u^+ \equiv 0$

$u^- \equiv 0$, $u = u^+ > 0$ $\qquad$ $\Uparrow$ $u^- = u$, $u = u^- < 0$.

Krok 7: Jednokrotność λ_1

Niech $u, \tilde u$ - dwa słabe, nietrywialne rozwiązania

$\int \tilde u \cdot \int u \neq 0$

Istnieje $\varkappa \in \mathbb{R}$: $\int_\Omega \underbrace{(u - \varkappa \tilde u)}_{} = 0$

jest słabym rozwiązaniem zagadnienia własnego z λ_1

$\Rightarrow u - \varkappa \tilde{u} = 0$

24. X. 2011

Twierdzenie Gidas - Ni - Nirenberg

Zajmujemy się zagadnieniami

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & w \quad B(R) \\ u = 0 & na \quad \partial B(R) \\ u > 0 & w \quad B(R) \end{cases}$$

$u \in C^2(\overline{B(R)})$

Tw (Gidas, Ni, Nirenberg)

Jeśli $u \in C^2(\overline{B(R)})$ jest ściśle dodatnia i rozwiązuje (1) oraz $f \in C^1(\mathbb{R})$, to funkcja u jest radialnie symetryczna oraz $(u(x) = v(|x|))$ $\frac{\partial u}{\partial \nu_x}(x) < 0$ dla $0 < |x| < R$

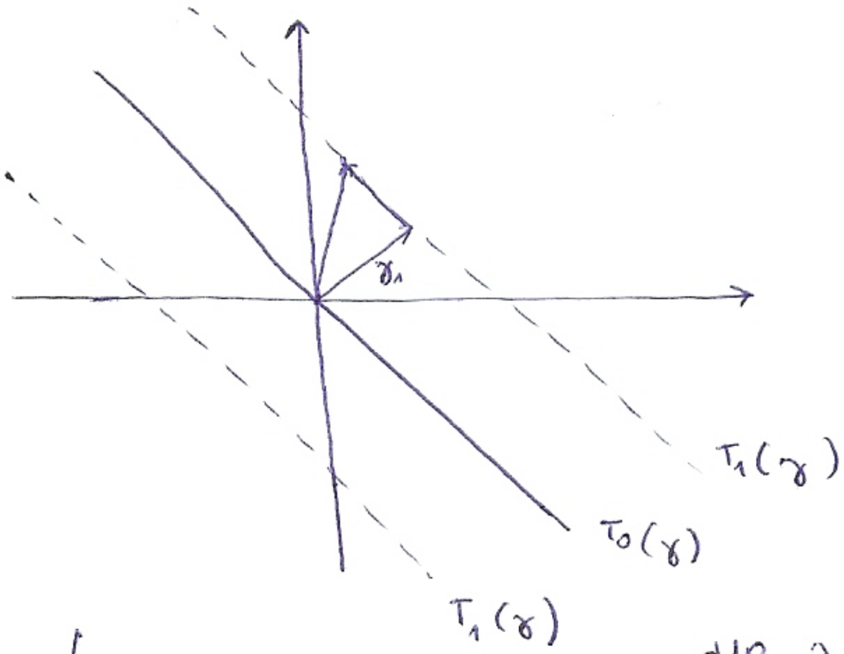
$\nu_x = \frac{x}{|x|}$

Oznaczenie: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - otwarty, spójny, ograniczony, $\partial\Omega \in C^\infty$, biorę $\gamma \in S^{n-1}$ i definiujemy

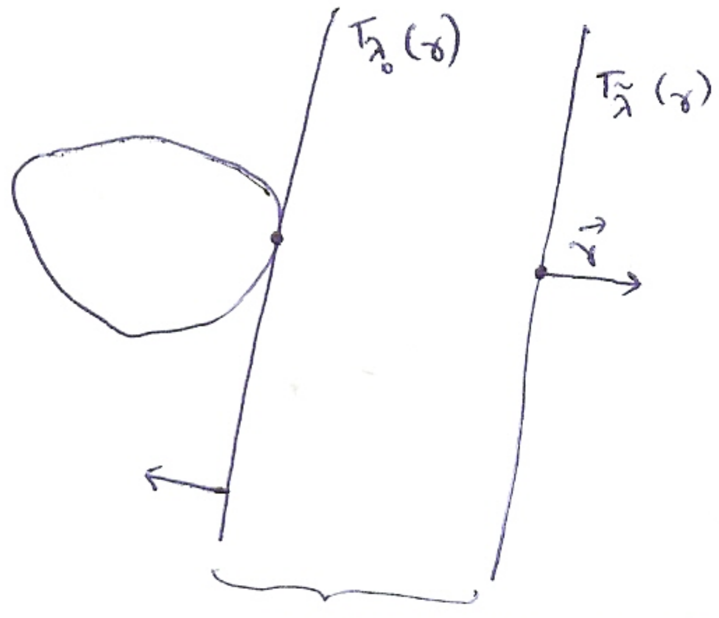
$T_\lambda(\gamma)$ = hiperpłaszczyzna zadana równością $\gamma \cdot x = \lambda$

$x = \lambda \cdot \gamma + \bar{x} \in T_0(\gamma)$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



dla $\lambda < 0$



całe Ω jest po przeciwnej stronie niż kierunek $\vec{\gamma}$

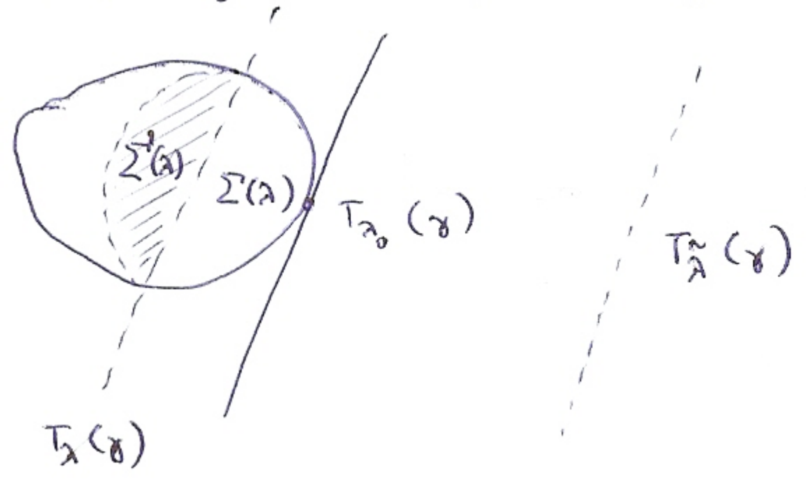
$T_{\lambda_0}(\gamma)$ - pierwsze zetknięcie z $\bar{\Omega}$:

przesuwamy $T_\lambda(\gamma)$, λ - się zmniejsza

dla $\lambda > \lambda_0$ Ω leży po lewej stronie $T_\lambda(\gamma)$

$= \sup\{T_\lambda(\gamma) \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset, \lambda < \tilde{\lambda}\}$.

Dalej zmniejszamy i przesuwamy T_λ



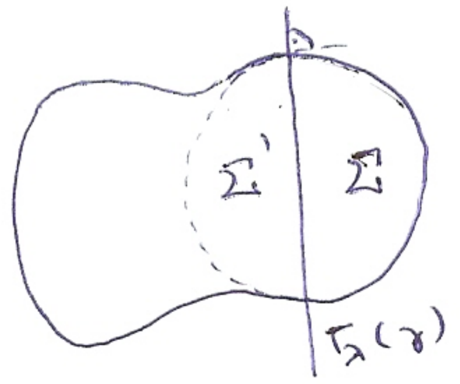
$\Sigma'(\lambda)$ = odbicie symetryczne $\Sigma(\lambda)$ względem $T_\lambda(\gamma)$

$\Sigma(\lambda) = \Omega \cap T_\lambda(\gamma)^+ = \Omega \cap \{x : x\gamma > \lambda\}$

Dalej przesuwając $T_\lambda(\gamma)$ (zmniejszamy λ). Zajdzie przynajmniej jedna z sytuacji:

a) odbicie $\Sigma'(\lambda)$ będzie wewnętrznie styczne do $\partial\Omega$ w pewnym punkcie $p \notin T_\lambda(\gamma)$

b) płaszczyzna $T_\lambda(\gamma)$ będzie prostopadła do pewnego wektora stycznego do $\partial\Omega$ w pewnym punkcie $Q \in \partial\Omega$



$\boxed{1}$ pokazać, że nie ma innych przypadków

METODA RUCHOMYCH PŁASZCZYZN

Ozn: $T_{\lambda_1}(\gamma)$ - ta płaszczyzna, która jako pierwsza osiągnie a) lub b)

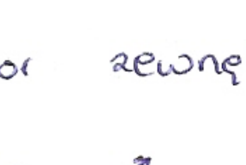
$\Sigma_{\lambda_1}(\lambda_1) \overset{ozn}{:=} \Sigma_\gamma$, $\Sigma'(\lambda_1) = \Sigma'_\gamma$

Trochę ogólniejsze zagadnienie

(2) $\Delta u + b_1(x) u_{x_1} + f(u) = 0$ w Ω $\quad -\Delta u = b_1(x) u_{x_1} + f(u)$

$b_1 \in C(\bar{\Omega})$, Ω - otwarty, spójny, ograniczony, $\partial\Omega \in C^\infty$, $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Dla $x \in \partial\Omega$, $\nu(x) := (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ = jednostkowy wektor zewnętrzny normalny.

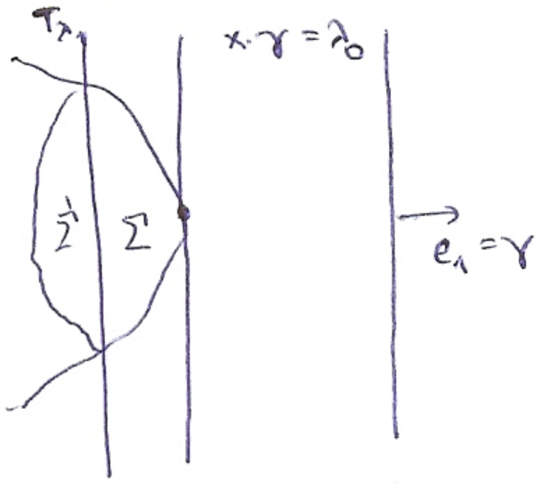


Niech $\gamma = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

Zał: $\max_{x \in \bar{\Omega}} (x_1) = \lambda_0$, $x_1 = x \cdot e_1$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

Upraszczamy notację
$T_\lambda = T_\lambda(e_1)$

T_{λ_1} = płaszczyzna ograniczona $= T_{\lambda_1}(e_1)$ (moment pierwszego ~~zetknięcia~~ dojście do sytuacji a) lub b))



$\Sigma := \Sigma_{\lambda_1}$ - lewy obszar ograniczony

Σ' = jego odbicie wzdłuż T_{λ_1}, oczywiście $\lambda_1 < \lambda_0$.

Zakładamy

$$(3) \begin{cases} u > 0 & w\ \Omega,\ u \in C^2(\overbrace{\Omega \cap \{x_1 > \lambda_1\}}^{\Sigma \cap \bar{\Omega}}) \\ u = 0 & na\ \partial\bar{\Omega} \cap \{x_1 > \lambda_1\} \end{cases}$$

$\Omega \ni x \to x^\lambda$ = odbicie symetryczne względem T_λ.

<u>Uwaga:</u> $(3') \Rightarrow (3)$

$$(3') \begin{cases} u \in C^2(\bar{\Omega}),\ u > 0 & w\ \Omega \\ u \equiv 0 & na\ \partial\Omega \end{cases}$$

<u>Twierdzenie 2:</u> Załóżmy, że u spełnia (2) i (3) oraz $b_1(x) \geq 0$ w $\Sigma \cup \Sigma'$. Wówczas dla każdego λ spełniającego warunek: $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ mamy:

$u_{x_1} < 0$; $u(x) < u(x^\lambda)$ dla $x \in \Sigma$

Uwaga: $\Sigma' \subseteq \Omega$.
Jeśli dodatkowo $u_{x_1}(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \Omega \cap T_{\lambda_1}$ to u musi być symetryczne względem T_{λ_1}, co więcej:

$$\Omega = \Sigma \cup \Sigma' \cup (\Omega \cap T_{\lambda_1})$$

<u>Uwaga:</u> Dostajemy warunek na symetrię obszaru!

Dowód tw 1:

Obserwacja 1: Jeśli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieujemna, to każde rozwiązanie (1) jest funkcją nieujemną

$-\Delta u = f(u) \geq 0$ superharmoniczna

$\Delta u \leq 0 \Rightarrow u$ jest podharmoniczna

$\Rightarrow u$ osiąga swoje minimum na $\partial\Omega$: minimum $= 0$.

$\boxed{2}$ Obserwacja 2: Operator „Δ" jest niezmienniczy ze względu ze względu na przekształcenia ortonormalne

Jeśli $A \in O(n)$: $AA^T = id$

$u_A(x) = u(Ax)$

$$A\Omega = \Omega$$
$$\parallel$$
$$\{Ax : x \in \Omega\}$$

u spełnia:

$$\begin{cases} \Delta u = g(u) \\ u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \Delta u_A = g(u_A) \\ u_A = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

$\boxed{1K}$ Czy $\Delta_p u = g(u) \Rightarrow \Delta_p u_A = g(u_A)$

$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$

Obserwacja 3: Zakładamy: $A\Omega = \Omega$

Funkcja u_A spełnia (1) : $\begin{cases} -\Delta v = f(v) \\ v = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases}$

o ile u spełnia (1)

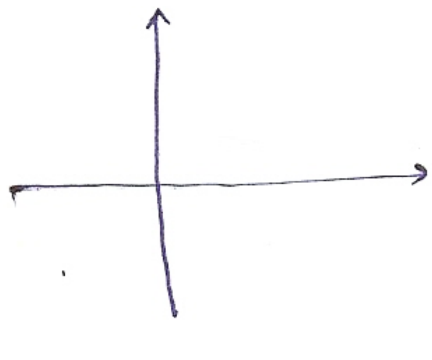
jest to przypadek (2) z $b_1 \equiv 0$.

z tw 2:

$0 > (u_A)_{x_1} = (Du(Ax), \underbrace{Ae_1}_{\text{obrót } e_1}) \Rightarrow Du(u) \cdot v < 0$

Uwaga: $\{Ax : A \in O(n)$

$y : \{y : \|y\| = \|x\|\}$

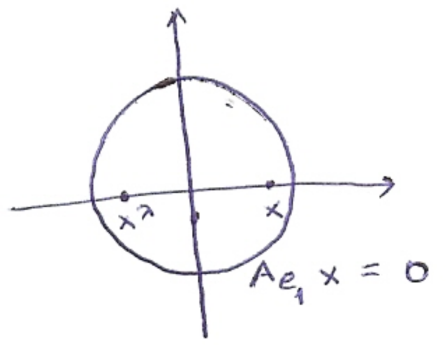


Teraz rozważamy $-A$ zamiast A

$$(-A)^T(-A) = Id$$

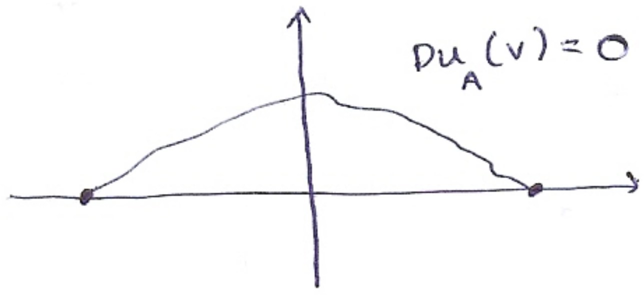
$\Rightarrow \quad Du(-Ax)(-v) < 0$

$Du(\tilde{y})\, v > 0$



$Du(x)v < 0$

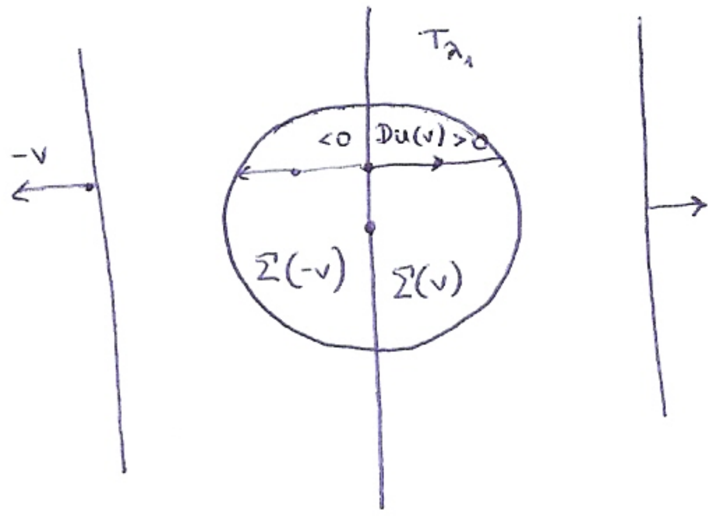
w tę stronę u - maleje



$Du(x^\lambda)(-v) < 0 \quad \overset{\text{Tw 2}}{\Rightarrow} \quad u_A(x) = u_A(x^\lambda)$

Tak jest $\forall A$

$\Rightarrow u$ jest radialnie symetryczne



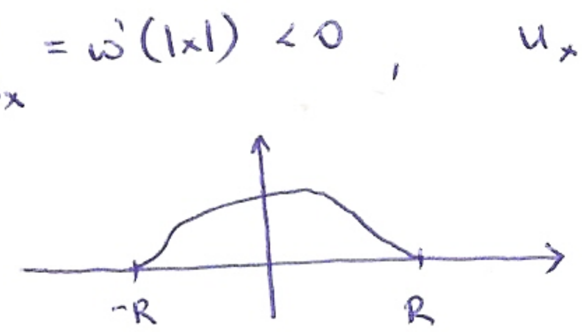
7. XI. 2011

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{w } B(R) \\ u = 0 & \text{na } \partial B(R) \end{cases}$$

Twierdzenie (Gidas, Ni, Nirenberg 1979)

Jeśli $u > 0$, $u \in C^1(\overline{B(R)})$, to $u(x) = w(|x|)$ i

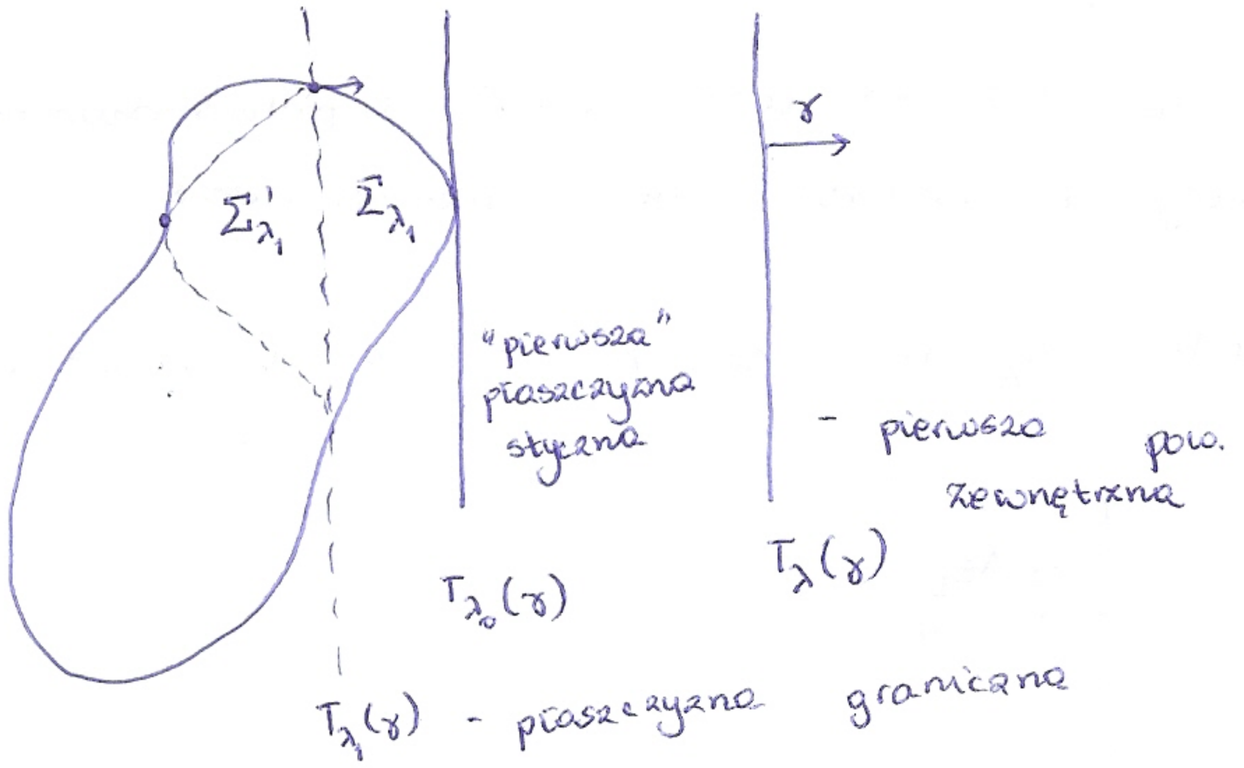
$\frac{\partial u}{\partial u_x} = w'(|x|) < 0$, $\quad u_x = \frac{x}{|x|}$



$\gamma \in S^{n-1}$

$T_\lambda(\gamma) = \{x : x \cdot \gamma = \lambda\}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω - ograniczony, $\partial\Omega \in C^\infty$



Przy dalszym przesuwaniu T_λ (zmniejszaniu λ) oraz odbijaniu Σ_λ względem T_λ (dostajemy Σ'_λ) dojdzie do przynajmniej jednej z sytuacji:

a) $\Sigma'(\lambda_1)$ jest styczna wewnętrznie do $\partial\Omega$ w jakimś punkcie $p \notin T_{\lambda_1}(\gamma)$

b) w jakimś $p \in \partial\Omega \cap T_{\lambda_1}(\gamma)$ płaszczyzna $T_{\lambda_1}(\gamma)$ jest prostopadła do jakiegoś $v \in T_p(\partial\Omega)$

zagadnienie pomocnicze

$$(2) \begin{cases} \Delta u + b_1(x) u_{x_1} + f(u) = 0 & \text{w } \Omega \\ b_1 \in C^1(\bar\Omega), \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$\gamma = e_1$, $\lambda_0 = \max_{\partial\Omega} x_1 = \langle x, e_1 \rangle$

$T_\lambda = T_\lambda(e_1)$, $\Sigma = \Sigma_{e_1}(\lambda_1)$ (dla $T_{\lambda_1}(e_1)$)

Σ' - odbicie symetryczne Σ względem T_{λ_1}

zakładamy:

$$(3) \begin{cases} u \in C^2(\bar\Omega) \\ u \equiv 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$$

<u>Twierdzenie 2:</u> Jeśli u spełnia (2) i (3) oraz $b_1(x) \geq 0$ w $\Sigma \cup \Sigma'$ wówczas $\forall \lambda: \lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ mamy $u_{x_1} < 0$.

Jeśli dodatkowo $u_{x_1}(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \Omega \cap T_{\lambda_1}$ to

- u jest symetryczne względem T_{λ_1}
- $\Omega = \Sigma \cup \Sigma' \cup (\Omega \cap T_\lambda)$

$u(x) < u(x^{*\lambda})$ dla $x \in \Sigma$

Dowód tw 1:

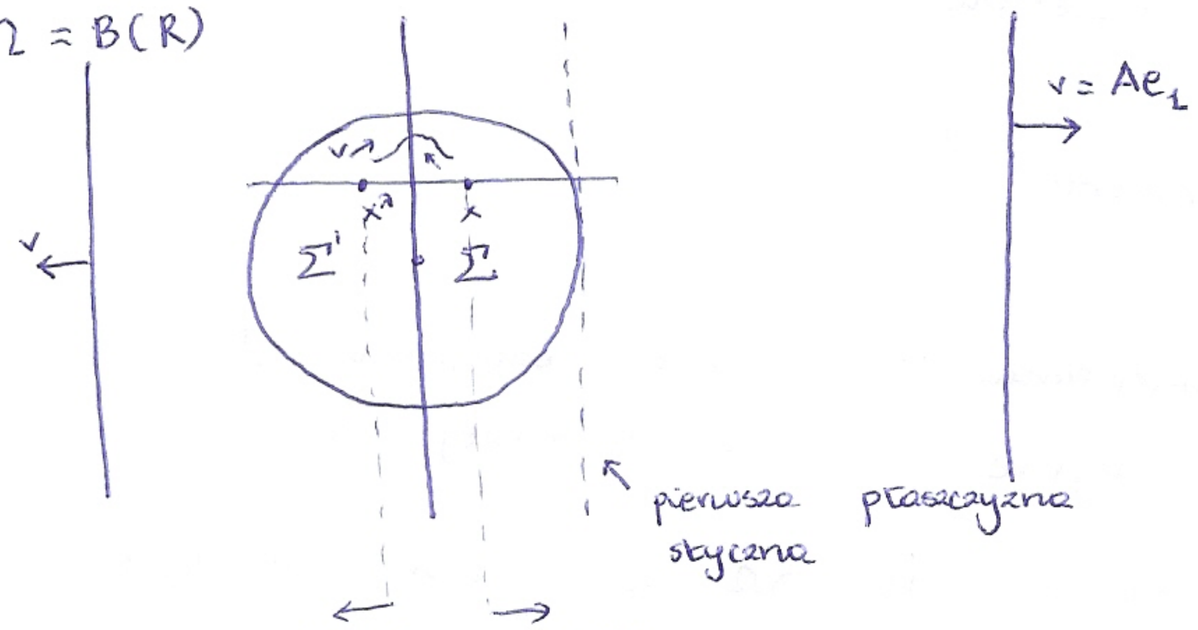
Obserwacja 1: Jeśli $f \geq 0$, $u \equiv 0$ na $\partial\Omega$ $\Rightarrow$ $u > 0$ w Ω (podharmoniczność)

obserwacja 2: Δ jest niezmienniczy ze względu na przekształcenie ortonormalne ($A^T A = id$)

niezmienniczość: dla $u_A(x) := u(Ax)$, u_A też spełnia (1) o ile $A\Omega = \Omega$

zastosowanie do tw 1

$\Omega = B(R)$



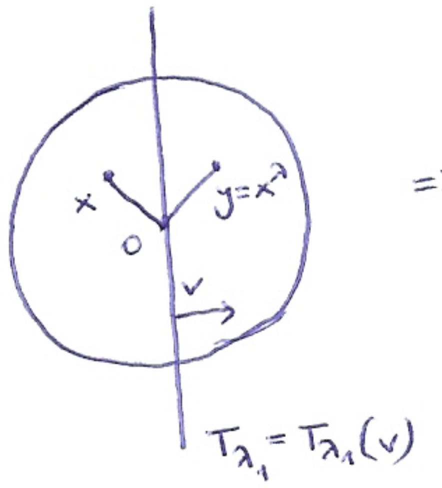
$\Sigma \leftrightarrow \Sigma'$ maleje maleje

$\frac{\partial u}{\partial(-v)}(x) < 0$ $\quad$ $\frac{\partial u}{\partial v}(x) < 0$

Rozważając $(-v)$ na T_{λ_1} $\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial(-v)} = 0$ - u - symetryczna względem T_{λ_1}

$\tilde{u} = u(Ax)$

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_1} = \frac{\partial u}{\partial v}$



$|x| = |y|$

$\Rightarrow$ u - symetryczne względem T_{λ_1} $\Rightarrow$

$x^\lambda = y$

$u(x^\lambda) = u(x)$
$\quad \shortparallel$
$u(y)$

$v = Ae_1$

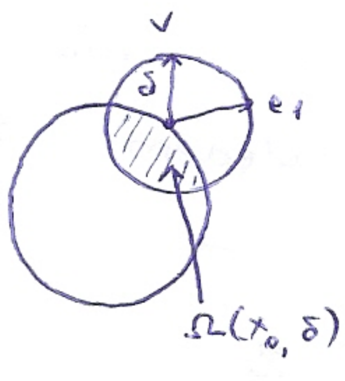
$\square$

Będziemy dowodzić tw 2

Lemat 1: Niech $x_0 \in \partial\Omega$, $v(x_0)$ = wektor normalny do $\partial\Omega$ w x_0 (zewnętrzny) $v(x_0) = (v_1(x_0), \dots, v_n(x_0))$, $v_1(x_0) > 0$. Jeśli u rozwiązuje (2), to

$\exists_{\delta > 0}$ t.że $u_{x_1} < 0$ w zbiorze:

$\Omega \cap B(x_0, \delta) = \Omega(x_0, \delta)$



Dowód: $u > 0$ wewnątrz

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{u(x_0 - tv) - u(x_0)}{-t} \leq 0$$

tak samo $\frac{\partial u}{\partial e_1}(x_0) \leq 0$.

Pokażemy, że nierówność jest ścisła.

Rozważmy dwie sytuacje:

a) $f(0) \geq 0$

b) $f(0) < 0$

a) (2) => (4):

$$\Delta u + b_1 u_{x_1} + \underbrace{f(u) - f(0)}_{c_1(x)\cdot u(x)} \leq 0$$

$$f(u) - f(0) = \frac{f(u) - f(0)}{u(x)} \cdot u(x)$$

$$\frac{f(s) - f(0)}{s} = \frac{1}{s}\int_0^s f'(\tau)\,d\tau = \int_0^1 f'(s\tau')\,d\tau'$$

$$c_1(x) = \int_0^1 f'(u(x)\cdot\tau')\,d\tau'$$

$c_1(x)$ - ciągła

Tw (wariant lematu Hopfa)

Niech $Lu := -\sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_i b_i(x)\cdot u_{x_i}(x) + c(x)\cdot u \geq 0$

symetryczna $\{a_{ij}\}$
ściśle eliptyczna

$a_{ij}, b_{ij} \in C(\bar\Omega)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$

Jeśli dodatkowo założymy, że $u(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \partial\Omega$

$u \geq 0$ w $\bar\Omega$. wówczas jeśli $u \not\equiv 0$, to $\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) < 0$

v = wektor normalny zewnętrzny w x_0.

Stosujemy do

$$-\Delta u - b_1 u_{x_1} - c_1(x)\cdot u \geq 0$$

Stąd $\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) < 0$ => w otoczeniu też

Ale my chcemy $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ (zamiast v)

wiemy, że $u \equiv 0$ na $\partial\Omega$ => $\nabla u \perp$ do poziomic u w $x_0 = \partial\Omega$, czyli

$\nabla u \perp T_{x_0}\partial\Omega$

$v \perp T_{x_0}\partial\Omega$ => $v \parallel \nabla u$

$e_1 = \alpha \cdot v + \underbrace{\beta w}_{\in v^{\perp}}$

$$\partial_{e_1} u = \partial_{\alpha v} u + \partial_{\beta w} u = \underbrace{\underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{\partial_v u}_{<0}}_{<0} + \underbrace{\beta \partial_w u}_{=0} < 0$$

bo to jest pochodna w kierunku stycznym do $\partial\Omega$, $u \equiv 0$ na $\partial\Omega$.

$\Rightarrow u_{x_1} < 0$ w pewnym otoczeniu x_0. Koniec a).

b) $f(0) < 0$

Jeśli $u_{x_1}(x_0) < 0$ – teza zachodzi.

Jeśli $u_{x_1}(x_0) \geq 0$ $\Rightarrow$ $u_{x_1}(x_0) = 0$.

$\Rightarrow \nabla u(x_0) = 0$, bo jeśli $\nabla u(x_0) = \gamma v$, $\gamma \neq 0$

$$0 = (\nabla u(x_0), \underbrace{e_1}_{\alpha v + \beta w}) = \alpha (\nabla u(x_0), v) + \underbrace{\beta(\nabla u(x_0), w)}_{=0} = \alpha\gamma \neq 0$$

$w \in T_{x_0}(\partial\Omega)$

$$\Delta u(x_0) + b_1(x) \cdot \underbrace{\nabla u(x_0)}_{=0} + f(u(x_0)) = 0$$

$\Delta u(x_0) = -f(0) > 0$ $\qquad u(x_0) = 0$ (bo $x_0 \in \partial\Omega$)

x_0 – punkt krytyczny dla u.

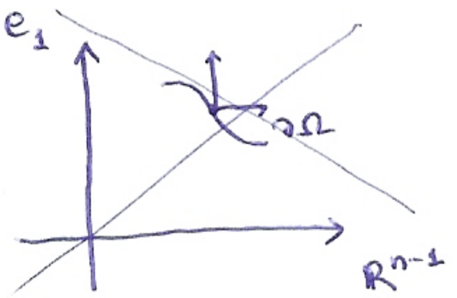
$\Delta u(x_0) > 0 \Rightarrow u$ – nadharmoniczna w okolicach x_0 i nie jest stale $= 0$.

Pokażemy: $u_{x_1 x_1} > 0$

Definiujemy parametryzację $\partial\Omega$ w okolicach x_0 – przedstawiając $\partial\Omega$ w okolicach x_0 jako parametryzację pewnej funkcji $\eta \in C^1$.

Mamy:

$$\partial\Omega = \{ (\eta(x'), x') : x' \in V \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \}$$



– kąt ostry, bo $v_1 > 0$

$\langle v, e_1 \rangle = v_1$

$x \in \mathbb{R}^n$

$F(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ $\qquad (\nabla F(x_0), w) = 0$ (~~parametryzacja~~ poziomica F jest brzeg)

$F \equiv 0$ na $\partial\Omega$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0) = (\nabla F(x_0), e_1) = (\nabla F(x_0), \alpha v + \beta w) = \alpha (\nabla F(x_0), v) = t\alpha \neq 0$$

$\boxed{!}$ wiadomo $\nabla F(x_0) = tv$ dla pewnego $t \neq 0$ ($\partial\Omega \in C^1$). Czy jest prawdą: $t = 1$?

z twierdzenia o funkcji uwikłanej : istnieje

$\eta, V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta : V \to \mathbb{R}$: $F(\eta(x'), x') \equiv 0$. Rozważamy przekształcenie

$V \ni x' \to T(x') = u_{x_1}(\eta(x'), x') \leq 0$

ale x'

$T(y_0) = 0$ (bo $u_{x_1}(x_0) = 0$)

T ma w $y_0 \in V$ swoje maksimum

$\Rightarrow \nabla T(y_0) = 0$.

a) $\forall i \in \{2, \dots, n\}$ $\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\eta(x'), x')\right)\Big|_{x'=y_0} = 0$

$x' = (x_2, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_1}(x_0) = 0$$

b) $u(\eta(x'), x') \equiv 0$ na V

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\eta(x')x') = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(\eta(x')x')\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\eta(x')x')\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\eta(x'), x') \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial u}{\partial x_j}(\eta(x'), x')\right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}(\eta(x'), x') \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial u}{\partial x_1}(\dots) \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j}(\dots) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\dots)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}(\eta(x'), x')\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x_1 \partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_0) \quad (=0)$$

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(w(\eta(x'), x') = \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

$x = (x_2, \dots, x_n)$, $i \in \{2, \dots, n\}$

$w = w(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$w = \frac{\partial u}{\partial x_1}$

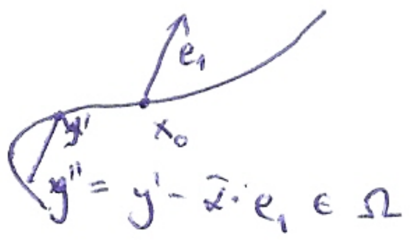
$$\Delta u(x_0) = \cancel{\frac{\partial u}{\partial x_1^2}(x_0)} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} |\nabla \eta|^2 + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_0) + \underbrace{2 \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j}(x_0) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}}_{a)\ -2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} |\nabla \eta|^2} = 0$$

czyli $\quad 0 = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_0) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} |\nabla \eta^2|$

$$\underbrace{\underset{-f(0)}{\overset{\|}{\Delta u(x_0)}}}_{>0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0)\underbrace{\left(1 + |\nabla \eta|^2\right)}_{>0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) > 0$$

więc też w otoczeniu x_0, bo $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Do pokazania: $u_{x_1} < 0$ w otoczeniu x_0 w Ω.



Zakładamy

$y'' = y' - \bar{\alpha} e_1 \in \Omega$ ($\bar{\alpha}$ - małe)

$h(\tau) = u_{x_1}(y - \tau e_1)$

$$u_{x_1}(y'') - u_{x_1}(y') = h(\bar{\alpha}) - h(0) = \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{d}{d\tau} h(\tau)\, d\tau = \int_0^{\bar{\alpha}} (\nabla u_{x_1}(y' - \tau e_1), -e_1)\, d\tau =$$

$$= -\int_0^{\bar{\alpha}} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(y' - \tau e_1)}_{>0}\, d\tau = I < 0 \quad \text{o ile} \quad \bar{\alpha} > 0$$

$\Rightarrow u_{x_1} < 0$ $B(x_0, \delta) \cap \Omega$ dla pewnego $\delta > 0$ □

$\boxed{2}$ Niech $u(x) = \dfrac{(1 - |x|^{\alpha})}{c + |x|^{\beta}}$, $c > 0$, $|x| \leq 1$

1) Znajdź funkcję f t. że $-\Delta u(x) = f(u(x))$ w $B(1)$

2) Określ warunki na $\alpha, \beta \in [0, \infty)$, aby $u \in C^2(\overline{B(1)})$ oraz $f \in C^1(\mathbb{R})$

$\boxed{3}$ Niech

$$w(x) = \begin{cases} (1 - |x|^2)^p, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Sprawdź, że

a) $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$

b) $\Delta w = f(w)$, dla f postaci $f(w) = \alpha_p w^{1 - \frac{2}{p}} + \beta_p w^{1 - \frac{1}{p}}$

c) f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$

d) $f \notin C^1$

e) Funkcja

$u(x) := w(x) + w(x - x_0)$ $x_0 \in S^{n-1}(3)$

spełnia równanie

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{w } B(5) \\ u = 0 & \text{na } \partial B(5) \end{cases}$$

i nie jest radialnie symetryczne

Lemat 2: 14. XI. 2011

Niech u spełnia (2) i (3) oraz załóżmy, dla pewnego $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ mamy

$u_{x_1} \leq 0$ i $u(x) \leq u(x^\lambda)$ dla $u(x) \neq u(x^\lambda)$.

Wówczas

$u(x) < u(x^\lambda)$ w $\Sigma(\lambda)$ oraz $u_{x_1}(x) < 0$ w $\Omega \cap T_\lambda$

Dowód:

Na zbiorze $\Sigma'(\lambda)$ rozważamy funkcję

$v(x) := u(x^\lambda)$ $\quad (x^\lambda \in \Sigma(\lambda))$

v spełnia: $\Delta v(x) = \Delta u(x^\lambda)$ – niezm „Δ" ze względu na odbicie

$$v_{x_1}(x) = \frac{d}{dx_1}\Big(u \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symetria}}}{S_{T_\lambda}}(x_1, \dots, x_n)\Big) = £$$

$$£ = \frac{d}{dx_1}\big(u(-x_1 + a_\lambda, x_2, \dots, x_n)\big) = -\frac{du}{dx_1}(\underbrace{-x_1 + a_\lambda, x_2, \dots, x_n}_{x^\lambda}) = \frac{-du}{dx_1}(x^\lambda)$$

$$\overset{a}{(*)} \quad \underbrace{\Delta v(x)}_{\Delta u(x^\lambda)} - b(x^\lambda)\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + f(v(x)) = 0$$

$$\cancel{(b)} \quad v_{x_1} \geq 0 \qquad v_{x_1}(x) = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)}_{\leq 0} \quad \text{z zał. lematu}$$

$$(b) \quad \Delta u(x) + b_1(x)u_{x_1}(x) + f(u(x)) = 0$$

(a) – (b):

$$\Delta(v-u)(x) + b_1(x)(v-u)_{x_1}(x) + f(v(x)) - f(u(x)) =$$

$$= b_1(x^\lambda)\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) - f(v(x)) + b_1(x)u_{x_1}(x) + f(u(x)) + b_1(x)v_{x_1}(x)$$

$$- b_1(x)u_{x_1}(x) + f(v(x)) - f(u(x)) =$$

$$= \underbrace{(b_1(x^\lambda) + b_1(x))}_{\geq 0}\underbrace{v_{x_1}(x)}_{\geq 0} \geq 0$$

Definiujemy

$w := v - u$ dla $x \in \Sigma'$

mamy $w(x) = u(x^\lambda) - u(x) \leq 0$ $\qquad y := x^\lambda,\ x = y^\lambda,\ x \in \Sigma',\ y \in \Sigma$

$\qquad u(y) - u(y^\lambda)$, $y \in \Sigma$

$w : \Sigma' \to \mathbb{R}$, $w \leq 0$ i spełnia

$$\Delta w(x) + b_1(x)w_{x_1}(x) + \underbrace{c(x) \cdot w}_{\frac{f(v(x)) - f(u(x))}{v(x) - u(x)}\cdot(v(x) - u(x))} \geq 0$$

$\boxed{!}$ wyraź wzorem całkowym $c(x)$ i pokaż, że $c \in C(\bar{\Omega})$

$-\Delta w - b_1(x) w_{x_1} + (-c(x)) \cdot w \leq 0$

Lemat (zasada maks): Jeśli

$Lu := \sum_{i,j} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_i b^i(x) u_{x_i} + c(x) \cdot u \leq 0$

$a^{ij}, b_i, c \in C(\bar{\Omega})$, $\{a^{ij}(x)\}$ - macierz jednostkowo ~~symetryczna~~ eliptyczna

oraz $u \leq 0$ w $\bar{\Omega}$ oraz u osiąga największą wartość w punkcie wewnętrznym Ω, to $u = \text{const}$

Wniosek (dla w): $w < 0$ w $\Sigma'(\lambda)$

$\Rightarrow u(x^\lambda) - u(x) < 0$ w $\Sigma'(\lambda)$ (bo inaczej $u(x^\lambda) \equiv u(x)$)

$u(y) - u(y^\lambda) < 0$ w $\Sigma(\lambda)$

Nierówność dla pochodnej: $h := -w$ spełnia:

$Lh \geq 0$ (bo $Lw \leq 0$), $h \geq 0$ w Σ'

$h(x^0) = 0$ dla pewnego $x^0 \in \partial\Sigma'(\lambda)$

Lemat (typu Hopfa):

Niech $0 \leq u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $u(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \partial\Omega$, Ω - otwarty, ograniczony, spełnia warunek kuli wewnętrznej w $x_0 \in \partial\Omega$ z kulą B ($x_0 \in \partial B$, $B \subseteq \Omega$)

Niech ponadto $Lu \ngeq 0$ w Ω, $u \not\equiv 0$ w B. Wówczas $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, ν - wektor normalny w x_0, zewnętrzny.

Stąd

$\frac{\partial}{\partial \nu}(u(x) - u(x^\lambda)) < 0$

w x^0: $x = x^\lambda$

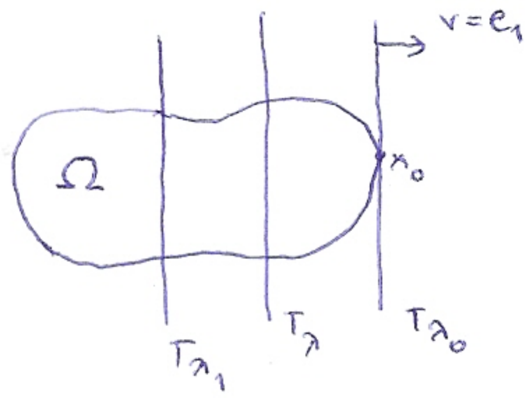
$\nu = e_1$ $\quad \frac{\partial}{\partial x_1}(u(x) - u(x^\lambda)) < 0$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^\lambda) < 0$

$u_{x_1}(x_0) < 0$ dla $x_0 \in T_\lambda \in \Omega$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) < 0$ $\quad x_0 \in T_\lambda$.

Dowód tw 2:



$\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$

z lematu 1:

$u_{x_1} < 0$ w małym otoczeniu, x_0 - punkt styczności, więc

w $\Sigma(\lambda)$ dla λ bliskich λ_0 też.

Chcemy pokazać

(4): $\forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$, $u_{x_1}(x) < 0$, $u(x) < u(x^\lambda)$ dla $x \in \Sigma(\lambda)$

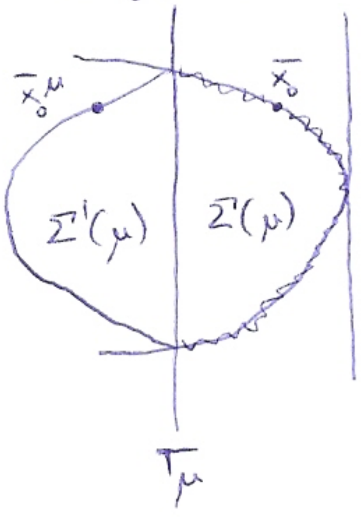
Przypuśćmy przeciwnie, że (4) nie zachodzi: w otoczeniu λ_0 (4) jest spełniona.

$\exists\ \lambda_0 > \mu > \lambda_1$ t. że:

$u_{x_1} \leq 0$ i $u(x) \leq u(x^\mu)$

i nie zachodzą obie nierówności ostre: a jest spełnione dla $\lambda > \mu$.

Pokażemy, że to jest niemożliwe.



Jeśli $\bar{x}_0 \in \partial\Sigma(\mu) - T_\mu$, to $\bar{x}_0^\mu \in \Omega$, bo $\mu > \lambda_1$

To daje: $0 = u(\bar{x}_0) < u(\bar{x}_0^\mu) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $u(x) \not\equiv u(x^\mu)$

bo $u > 0$ w Ω

Są spełnione założenia lematu 2.

i u nie jest symetryczne $\xRightarrow{\text{lem 2}}$

$u(x) < u(x^\mu)$ w $\Sigma(\mu)$

$u_{x_1} < 0$ w $\Sigma(\mu)$.

stąd (4).

To dowodzi pierwszej części tw. 2. Dowodzimy drugą część.

z ciągłości

$u_{x_1}(x) \leq 0$, $u(x) \leq u(x^{\lambda_1})$ w $\Sigma(\lambda_1)$ $\boxed{2}$ Przemyśleć ten fragment.

Przypuśćmy, że $u_{x_1}(x_0) = 0$ dla pewnego punktu $x_0 \in \Omega \cap T_{\lambda_1}$.

z lematu 2: $u(x) = u(x^\lambda)$.

stąd $\forall x \in \underbrace{\partial\Omega \cap \bar{\Sigma}}_{\Gamma}$

$u(x^\lambda) \equiv 0$

$S_{\lambda_1}(\Gamma) \subseteq \partial\Omega$

stąd $\Omega = \Sigma \cup \Sigma' \cup (\Omega \cap T_{\lambda_1})$

zostaje dowód: $b_1 \equiv 0$.

Teraz dowodzimy: $b_1(x_0) = 0 \Rightarrow b_1 \equiv 0$. z zał. $b_1 \geq 0$. Przypuśćmy przeciwnie.

$b_1(x) > 0$ dla pewnego $x \in \Omega$. wystarczy $x \in \Sigma(\lambda_1)$.

wyjściowe równanie

$$\Delta u(z) + b_1(z) u_{x_1}(z) + f(u(z)) = 0$$

$$\parallel$$

$$\Delta u(z^{\lambda_1}) + b_1(z^{\lambda_1}) u_{x_1}(z^{\lambda_1}) + f(u(z^{\lambda_1})) = 0$$

bo $u(z) = u(z^{\lambda_1})$, $u = u \circ S_{\lambda_1}$ - symetria

$$\underbrace{b_1(z)}_{>0}\underbrace{u_{x_1}(x)}_{<0} = \underbrace{b_1(z^{\lambda_1})}_{\geq 0}\underbrace{u_{x_1}(z^{\lambda_1})}_{>0}$$

lewa < 0

$u_{x_1}(x^{\lambda}) > 0$

prawa > 0 sprzeczność

(3) Ω - ograniczony, otwarty, $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $p \geq 2$.
wówczas funkcja

$w = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ jest lokalnie całkowalna i zachodzi wzór

$\operatorname{div} w = \nabla(|\nabla u|^{p-2}) \cdot \nabla u + |\nabla u|^{p-2} \cdot \Delta u$ w sensie klasycznym i słabym.

21. XI. 2011

Twierdzenie (Gidas, Ni, Nirenberg, 1979):

$u \in C^2(\bar{\Omega})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{w } B(R) \\ u \equiv 0 & \text{na } \partial B(R) \end{cases} \quad \text{i } u > 0 \implies u(x) = v(|x|)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_x} < 0 \quad \text{w } B(R), \quad n_x = \frac{x}{|x|}$$

Uogólnienia:

(1) Tw (Gidas, Ni, Nirenberg, 1979)

$$\begin{cases} F(x, u, \nabla u, \nabla^{(2)} u) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \ u > 0 \\ u \in C^2(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

\+ założenia na symetrię Ω + warunki

$\implies$ u - niezmiennicze ze względu na pewne symetrie. Nie obejmowało:

$$-\Delta_p u = f(u)$$

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

(2) wersje na $\mathbb{R}^n$ zamiast ograniczonego Ω rozpatruje się warianty (1) (np na $\mathbb{R}^n$) np. z warunkiem typu $\lim_{x \to \infty} u(x) = 0$

ten. $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ u jest postaci $u(x) = v(|x - x_0|)$

(G, N, N, 1981)

Przypadek interesujący w równaniu pola: $\Delta u - u + u^p = 0$, $p > 1$, $\Omega = \mathbb{R}^n$

③ Uogólnienia z $\Delta_p u$ zamiast Δ:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{w } \Omega \\ u \equiv 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Ω - ograniczony z regularnym brzegiem lub $\Omega = \mathbb{R}^n$

Metoda ruchomych płaszczyzn: Damascelli, Pacella, Ramaswamy (1999)

Niezależnie: Metoda symetryzacji Steinera: Brock, 1997 (habilitacja)

<u>Wniosek:</u> Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - otwarty, ograniczony, spójny, $0 < u \in C^2(\bar{\Omega})$ rozwiązuje:

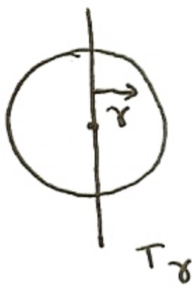
$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{w } \Omega \\ u \equiv 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

$f \in C^1(\mathbb{R})$. Wówczas zbiór punktów krytycznych dla u leży w zbiorze:

$$V = \bigcup_{\gamma \in S^{n-1}} \underbrace{\Omega - \Sigma_\gamma}_{\text{powierzchnie odcięte przez płaszczyzny graniczne}}$$

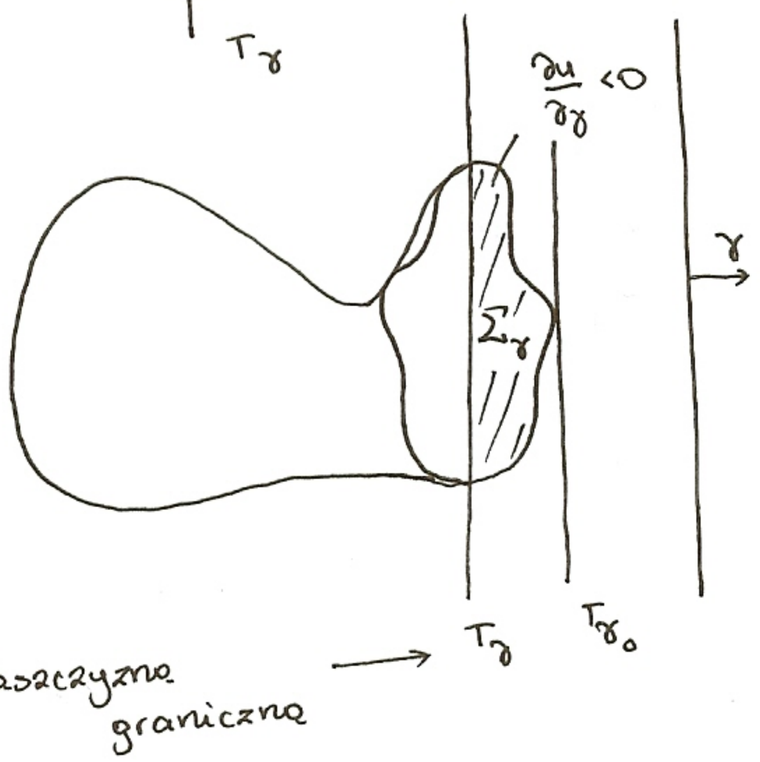
niezależnym od f.

Ilustracja dla kuli



$\Omega = B(0, R)$

punkty krytyczne leżą w 0.



<u>Przykład:</u> Rozpatrzmy

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0 & \text{w } B(R) \\ u = 0 & \text{na } \partial B(R) \end{cases}$$

$0 < u \in C^2(\overline{B(R)})$, $f(\lambda) = \lambda^p \in C^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ u - radialnie symetryczne, $u(x) = v(|x|)$

Zapisujemy Δ w wersji symetrycznej

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + \frac{(n-1)}{|x|} v'(|x|)$$

v - spełnia równanie:

$$\begin{cases} v''(r) + \frac{(n-1)}{r} v'(r) + v^p(r) = 0 & \text{na } (0,R) \\ v(R) = 0, \quad v'(0) = 0 \\ v'(r) < 0, \quad v > 0 & \text{w } (0,R) \end{cases}$$

<u>Stwierdzenie:</u> Niech u, v będą dodatnimi rozwiązaniami zagadnienia:

$$\begin{cases} w''(r) + \frac{(n-1)}{r} w'(r) + w^p(r) = 0 \\ w'(0) = 0 & 0 < r < R \\ w(0) > 0 \end{cases}$$

Definiujemy $\lambda := \left(\frac{u(0)}{v(0)}\right)^{\frac{p-1}{2}}$

Wówczas $u(r) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} v(\lambda r)$ dla $0 < r < R$

Dlaczego stąd wynika jednoznaczność (w (2))

Jeśli $u(R) = v(R) = 0$ równocześnie:

$0 = u(R) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} v(\lambda R) > 0$ - sprzeczność

przy założeniu: $\lambda \in (0,1)$ (można tak założyć)

□

<u>Dowód Stwierdzenia:</u> Funkcja $w(r) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} v(\lambda r)$ też spełnia (3).

Pokazuje się:

a) rozwiązania (3) są analityczne

b) patrząc na równanie pokazuje się, że wszystkie współczynniki w rozwinięciu względem 0 jednoznacznie są wyznaczone przez $u(0)$.

$$w''(r) + \underbrace{\frac{(n-1)}{r} w'(r)} + w^p(r) = 0$$

$$w''(r) \xrightarrow{r \to 0} w''(0)$$

$$(n-1)\frac{w'(r) - w'(0)}{r} \to (n-1) w''(0)$$

$$w^p(r) \to w^p(0)$$

$$n w''(0) + w^p(0) = 0$$

$\boxed{!!}$ Obliczyć powoli $w^{(3)}(0)$, $w^{(4)}(0)$.

<u>ZASADY PORÓWNAWCZE</u>

A) Interesuje nas zagadnienie:

$$-\Delta u \leq -\Delta v \quad \text{w } \Omega$$
$$u \leq v \quad \text{na } \partial\Omega$$
$$u, v \in C^2(\bar{\Omega})$$

Stąd wynika: $u \leq v$ na Ω, nawet $u < v$ w Ω, poza $u \equiv v$.

Dowód:

$-\Delta(u-v) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(u-v) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad u-v$

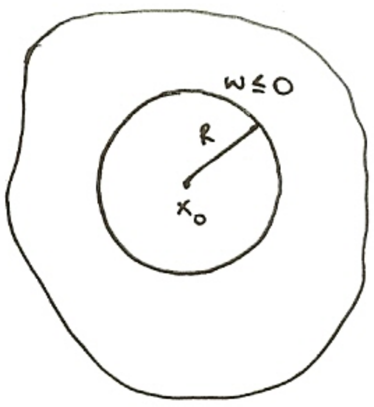
suphermoniczna $=$ podharmoniczna

wypukła $=$ podafiniczna

Stąd $u-v$ przyjmuje maximum na $\partial\Omega$ (≤ 0)

$$\sup_{\Omega}(u-v) \le \sup_{\partial\Omega}(u-v) \le 0$$

Silne zasady porównawcze : $\Rightarrow$ $u-v<0$ w Ω



$w := u-v$

$w \le 0$ na $\partial B(x_0, R)$

harmoniczna

(stałe $=0$)

$\Rightarrow$ $w \equiv 0$ lub $w<0$ w $B(x_0, R)$

B) Zastępujemy w zagadnieniu Δ przez Δ_p

Twierdzenie (słabe zasady maksimum, Aziezieh, 2003)

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem $1<p<\infty$. Jeśli $u,v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ spełniają

$$-\Delta_p u + \vec{b}(x)\cdot\nabla u \le -\Delta_p v + \vec{b}(x)\nabla v$$

w słabym sensie

(t.zn.

$$(3) \quad \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int \vec{b}\cdot\nabla u\cdot\varphi \le \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla v\cdot\varphi$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \varphi \ge 0$)

Oraz : $\vec{b} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ i $(\operatorname{div}\vec{b} \le 0$ dla $p \ne 2)$

i $u \le v$ na $\partial\Omega$

wówczas $u \le v$ w Ω

Dowód: $\boxed{2}$ $p=2$ Gilberg, Trudinger. Dowodzimy przypadek $p \ne 2$

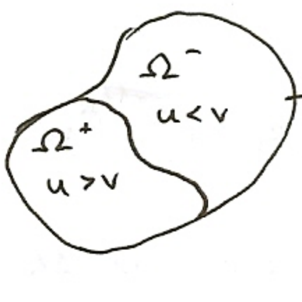
z (3): $\forall \varphi \ge 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\,\nabla(u-v)\varphi \le 0$$

Nierówność się zachowuje dla $\varphi \ge 0$, $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$

Bierzemy : $\varphi := (u-v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

bo $u \le v$ na $\partial\Omega$



$(u-v)^+=0$ bo $u \le v$

$\boxed{3}$ Pokazać, że $\varphi^2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Wstawiamy to φ:

$$\underbrace{\int_{\Omega\cap\{u\geq v\}} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla(u-v))}_{B} + \underbrace{\int_{\Omega\cap\{u\geq v\}} \vec{b}\cdot\nabla(u-v)\cdot(u-v)}_{A} = B + A$$

$A \geq 0$

$$A = \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla\varphi^2 = -\frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{\operatorname{div}\vec{b}}_{\leq 0}\cdot\varphi^2 \geq 0$$

$B = B + 0 \leq B + A \leq 0$

Stąd $B \leq 0$

$\boxed{4}$ Lemat: Istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ zależne tylko od p, n t. że

$\forall\, \eta, \eta' \in \mathbb{R}^n \;:\; |\eta| + |\eta'| > 0$

$$\left| |\eta|^{p-2}\eta - |\eta'|^{p-2}\eta' \right| \leq c_1 (|\eta| + |\eta'|)^{p-2} |\eta - \eta'|$$

$$(|\eta|^{p-2}\eta - |\eta'|^{p-2}\eta')(\eta - \eta') \geq c_2 (|\eta| + |\eta'|)^{p-2} |\eta - \eta'|^2$$

Damascelli, Pacella, 1998 (podpowiedź do 2?)

$$c_2 \int_{\{u\geq v\}\cap\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla u - \nabla v|^2 \leq B \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$\nabla u = \nabla v$ p.w.

$\Omega^+ \neq 0$ $\qquad u - v \equiv const$ w Ω^+

$\Rightarrow u - v \equiv 0$ na $\partial\Omega^+$ $\qquad u - v \leq 0$

~~Tw~~ Wniosek: Jeśli $\Omega^+ \neq 0 \Rightarrow u - v \equiv 0$ w Ω^+

w Ω^- : $u < v$

w Ω^+ : $u \equiv v$

$\Rightarrow u \leq v$

28. XI. 2011

Tw 1: Załóżmy, że $u \in L^1(\Omega)$ oraz

a) $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$ w $D'(\Omega)$

b) $u \geq 0$ p.w. w Ω

c) $\Delta u \leq \beta(u)$ p.w. w $\{x\in\Omega : 0 < u(x) < a\}$, gdzie $a > 0$, $\beta: [0, a] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, niemalejąca, $\beta(0) = 0$

d) Zachodzi

$\exists s > 0\ \beta(s) = 0$ lub $\displaystyle\int_0^{a/2} (\beta(s)s)^{-1/2}\, ds = \infty$, gdy $\beta(s) > 0 \quad \forall\, s > 0$

Teza: wówczas albo $u \equiv 0$ p.w w Ω albo $u > 0$ w Ω.

Wniosek: $u=0$ na zbiorze miary dodatniej $\Omega \Rightarrow u \equiv 0$ p.w.

Dowód wniosku: Załóżmy $u=0$ na Ω_1, $|\Omega_1|>0$, $\exists$ K-zw, $K \subseteq \Omega_1$, $|K|>0$ (regularność miary Lebesgue'a). Na tym zbiorze K $u>0$, ale $K \subset \Omega_1$ sprzeczność

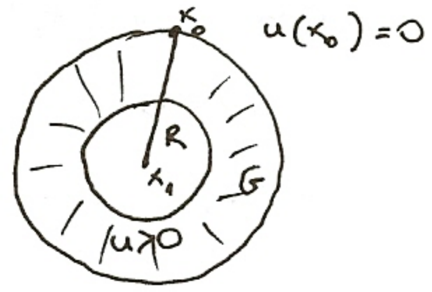
Dowód: Dowodzimy twierdzenie przy założeniu: $u \in C^1(\bar{\Omega})$ i $0 \le u < a$ w Ω.

Załóżmy, że $u \not\equiv 0$: $\exists x_1 \in \Omega$: kula $B = B_R(x_1)$: t. że $\bar{B} \subseteq \Omega$ i dla pewnego $x_0 \in \partial B$: $u(x_0)=0$.

Idea:

$N = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ - domknięty podzbiór Ω

Rozważamy $x_1 \in \Omega$: $u(x_1)>0$, $\operatorname{dist}(x_1, N) \le \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$



$R = \sup\{r>0 : B(x_1, r) \subseteq \Omega \setminus N\}$

$B = B(x_1, R)$ ma żądaną własność

$G = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{R}{2} < |x - x_1| < R\} \subseteq \Omega$

wiemy: $u>0$ w G

$V_1 = \inf\{u(x) : |x-x_1| = \frac{R}{2}\}$

Konstruujemy podrozwiązanie dla: $\Delta w - \beta(w) = 0$ tzn funkcję $\hat{u}$: $\Delta\hat{u} - \beta(\hat{u}) \ge 0$ w G.

Lemat: $\forall K_1, K_2, r_1, V_1$ $\forall \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłej, niemalejącej, $\beta(0)=0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie klasy C^2 $V = v(\underset{\text{argument}}{r}, \underbrace{K_1, K_2, r_1, V_1}_{\text{parametry}})$ t. że

v spełnia (2) $\begin{cases} v'' = K_1 v' + K_2 \beta(v) \\ v(0)=0, \quad v(r_1) = V_1 \end{cases}$ w $(0, r_1)$

t. że $v, v', v'' \ge 0$. Jeśli $\int_0^1 (j(s))^{-1/2} ds = \infty$, $j(s) := \int_0^s \beta(\tau) d\tau$

$w \xmapsto{T} v = v_w$ $\quad \begin{cases} v'' = K_1 v' + K_2 \beta(w) \\ v(0) = 0, \quad v(r_1) = V_1 \end{cases}$

$w(0)=0$

$w(r_1)=V_1$

Potem pokazujemy, że T ma punkt stały

1 a) wykaż istnienie dokładnie jednej funkcji spełniającej (2), klasy C^2 (bez założenia na znak)

b) wykaż, że jeśli istnieje funkcja klasy C^2 spełniająca ten warunek, to $v \ge 0$.

Dowód lemat (reszta): $(v' \ge 0, v'' \ge 0$ + dodatkowa część$)$

$w(r) = e^{-K_1 r} v'(r)$, $w' = -K_1 e^{-K_1 r} v'(r) + e^{-K_1 r} v''(r) = e^{-K_1 r} \underbrace{(-K_1 v' + v'')}_{K_2 \beta(v) \ge 0}$

$\Rightarrow$ w - rosnąca

$v'(0) \leq e^{-K_1 r} v'(r) \qquad \forall\, 0 \leq r \leq r_1$

Ale $v(0) = 0$, $v \geq 0 \Rightarrow v'(0) \geq 0$

$\Rightarrow v'(r) \geq 0$. Bierzemy r_0 - największe takie r, że $v(r) = 0$

Pokażemy: $r_0 = 0$, $v'(0) > 0$

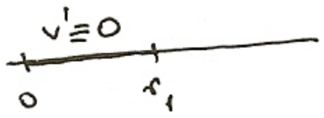
$r_0 < r_1$, bo $v \not\equiv 0$, v jest „1-1" na $[r_0, r_1]$

$v' = w e^{K_1 r}$ - niemalejąca

$\uparrow$ niemalejąca, rosnąca

$v(s) = \int_{r_0}^{s} \underbrace{v'(\tau)}_{\geq 0}\, d\tau$. Gdyby $v'(r_1) = 0$ dla pewnego $r_1 > r_0$

$\Rightarrow v' \equiv 0$



To by oznaczało: $v \equiv 0$ na $[0, r_1]$ - sprzeczność z def r_0.

Uwaga - bardzo sprytne:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{v'(r)}{(j(v(r)))^{1/2}}\, dr \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zamiana} \\ \text{zmiennych}}}{=} \int_0^{v_1} (j(s))^{-1/2}\, ds \overset{\substack{\text{załóżmy, że} \\ \downarrow}}{=} \infty$$

$\boxed{2}$ Pokazać, że warunki:

$$\int_0^1 (j(s))^{-1/2} ds = \infty \iff \int_0^1 \frac{1}{(s\beta(s))^{1/2}}\, ds = \infty$$ przy założeniach tw 1.

Podstawiamy: $w = (v')^2$

$$(K_2 j(v))' = K_2 \beta(v) v' = (v'' - K_1 v') v'$$

korzystamy z

$$(*) \quad \underbrace{2K_2 e^{-K_1 r} (j(v))'}_{L} = \underbrace{\left(e^{-2K_1 r} w\right)'}_{P}$$

Załóżmy, że $v'(r_0) = 0$ $\qquad (v \in C^2)$

Całkujemy $(*)$ od r_0 do r:

$$L \leq 2K_2 e^{-2K_1 r_0} (j(v(r)))'$$

$$\int_{r_0}^{r} P = \int_{r_0}^{r} L \leq \int_{r_0}^{r} 2K_2 e^{-2K_1 r_0} (j(v(r)))'$$

$$e^{-2K_1 r_1} w(r) \leq e^{-2K_1 r} w(r) \leq 2K_2 e^{-2K_1 r} j(v(r))$$

$$(j(v(r)))^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{2K_2}} e^{-K_1(r_1 - r_0)} v'(r)$$

$$\frac{v'(r)}{(j(v(r)))^{1/2}} \leq \underbrace{\sqrt{2K_2}\; e^{K_1(r_1-r_0)}}_{C}$$

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{v'(r)}{(j(v(r)))^{1/2}}\,dr \leq C\int_{r_0}^{r_1} 1\,dr < \infty$$ - sprzeczność z zał $\int = \infty$

Nie może $v'(r_0) = 0 \Rightarrow v'(r_0) > 0 \Rightarrow r_0 = 0$, $v'(0) > 0$

$\Rightarrow v'$ - rosnąca

$$v' = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{rosnąca}}}{w}\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{rosnąca (niemalejąca)}}}{e^{K_1 r}}$$ $\Rightarrow v'$ - niemalejąca $\Rightarrow v'' \geq 0$.

Wracamy do dowodu Tw 1:

$v(\cdot\,; K_1, 1, \underset{\substack{\shortparallel\\ r_1}}{R/2}, V_1)$ - z lematu 1

$\hat{u}(x) = v(R - |x-x_1|; K_1, 1, R/2, V_1)$

$x \in G = \{R/2 < |x-x_1| < R\}$

$\boxed{3}$ Sprawdź: wybierając $K_1 \geq \frac{2(n-1)}{R}$ $\hat{u}$ spełnia: $\Delta\hat{u} \geq \beta(\hat{u})$ w G.

$\boxed{4}$ Wykaż, że zachodzi nierówność Kato:

$\Delta w^+ \geq \operatorname{sign}_0^+ w \cdot \Delta w$ w słabym sensie ($w \in L^1_{loc}$)

t.zn $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$

$$-\int \nabla w^+ \nabla\varphi\,dx \geq \int p(w)\,\varphi\,dx,$$

gdzie $s^+ = \max(s, 0)$

$$\operatorname{sign}_0^+(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}$$

$\Delta(\hat{u}-u)^+ \geq \operatorname{sgn}_0(\hat{u}-u)\,\Delta(\hat{u}-u) \geq \operatorname{sgn}_0(\hat{u}-u)(\beta(\hat{u}) - \beta(u)) \geq 0$ (w słabym sensie)

$(\hat{u}-u)^+ \leq 0$ na ∂G

$\Rightarrow (\hat{u}-u)^+ \leq 0$ w G (zasada maksimum)

$\Rightarrow \hat{u}-u \leq 0$ w G: $\hat{u} \leq u$ w G ale: $v'(0) > 0$

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[u(x_0 + h(x_1-x_0)) - u(x_0)\right] \geq \liminf_{h\to 0} \frac{\hat{u}(\overbrace{x_0 + h(x_1-x_0)}^{x_h}) - \overbrace{\hat{u}(x_0)}^{0}}{h} =$$

$$= \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[v(R - (x_h - x_0)) - \underbrace{v(0)}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}\right] = \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(v(h|x_h - x_1|) - v(0)\right] = v'(0)\cdot R > 0$$

$\hat{u}(x) = v(R - |x-x_1|)$, $\hat{u}(x_h) = v(\underbrace{R - |x_h - x_1|}_{h(|x_1-x_0|)})$

Wzięliśmy $x_0 \in \Omega : u(x_0) = 0$ $(\text{+}u \geq 0)$, czyli u ma minimum w Ω, $\nabla u(x_0) = 0$ - sprzeczność z $(**)$. Nie istnieje takie $x_0 \in \Omega : u(x_0)=0$, $u(x_0) > 0$ w Ω.

5. XII. 2012

Def: Powiemy, że SMP (Strong Maximum Principle) zachodzi dla danego równania cząstkowego, jeśli każde nieujemne i nietrywialne rozwiązanie zagadnienia w Ω jest ściśle dodatnie wewnątrz Ω.

(1) $\quad -\Delta u + \beta(u(x)) = f(x)$ w Ω

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - obszar, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niemalejąca, $\beta(0) = 0$

Twierdzenie (Vazquez 1984): Załóżmy: $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ spełnia

(a) $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$

(b) $u \geq 0$ p.w. w Ω

(c) $\Delta u \leq \beta(u)$ p.w. w $\{x \in \Omega : 0 < u(x) < a\}$,

gdzie $a > 0$, $\beta : [0,a] \to \mathbb{R}$ - ciągła, niemalejąca, $\beta(0) = 0$

(d) zachodzi

$(\exists_{s>0}\ \beta(s) = 0)$ lub $\left(\int_0^{a/2} (\beta(s) s)^{-1/2} ds = \infty, \text{ gdy } \beta(s) > 0 \ \forall s > 0 \right)$

wówczas albo $u \equiv 0$ w Ω, albo $u > 0$ w sensie $\forall K \subseteq \Omega$ zwartego $\exists\ c = c(K) > 0$ $u \geq c$ p.w na K.

Dowód (przypomnienie schematu):

I krok: $0 \leq u < a$ w Ω, $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \not\equiv 0$

Etapy: 1) $\exists\, x_1 \in \Omega$ i kula $B = B(x_1, R) \subseteq \Omega$ t. że

1° $\bar{B} \subseteq \Omega$

2° $0 < u < a$ w B

3° $\exists\, x_0 \in \partial B$: $u(x_0) = 0$

2) Rozważamy pierścień $G = \{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{R}{2} < |x - x_0| < R \} \subseteq \Omega$, $\bar{G} \subseteq \Omega$

$v_1 = \inf \{ u(x) : |x - x_1| = \frac{R}{2} \}$

$0 < v_1 < a$

Konstruujemy funkcję radialną (zależną od $|x - x_1|$) $\hat{u}$ t. że $\Delta \hat{u} \geq \beta(\hat{u})$ - metoda Benilana - Brezisa - Crandala, 1975

3) $\begin{cases} \Delta(\hat{u} - u)^+ \geq 0 \\ (\hat{u} - u)^+ \leq 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$ (narzędzie: nierówność Kato: $\Delta w^+ \geq \mathrm{sign}^+_0 w \cdot \Delta w$

$(\hat{u} - u)^+ \leq 0 \implies \hat{u} \leq u$ w G

Porównujemy u z $\hat{u}$ $\quad (u(x_0) = \hat{u}(x_0) = 0)$

$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$ - niemożliwe, bo $\nabla u(x_0) = 0$ $\quad$ ($u \geq 0$ i $u(x_0) = 0$ - minimum)

- sprzeczność z założeniem : $x_0 \in \Omega$, $u(x_0) = 0$, czyli $u > 0$ w Ω.

Krok II: Pozbywamy się założenia : $u \in C^1(\Omega)$

(4) $u \in W^{1,1}(0,1)^n \Rightarrow$ dla p.w. $t \in (0,1)$ funkcja $v_t(x'): (0,1)^{n-1} \to \mathbb{R}$,

$v_t(x') = u(x', t) \in W^{1,1}((0,1)^{n-1})$ $\quad$ (twierdzenie Nikodskiego)

Własność zastępująca ACL - charakteryzację : Załóżmy $u \in W^{1,1}(B(x_0, R))$ i rozważmy

$$f_r = u|_{\partial B(x_0, r)} \qquad 0 < r < R$$

sfera $n-1$ wymiarowa

w sensie operatora śladu

Wówczas dla p.w. $r \in (0, R)$: $f_r \in W^{1,1}(\partial B(x_0, r))$

Przestrzeń Sobolewa na rozmaitości zwartej M

$$\mathbb{R}^N \supseteq M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$\{V_i, \varphi_i\}_{i=1,\dots,k}$ - skończony atlas

$\varphi_i \in C^\infty(V_i, U_i)$ - dyfeomorfizm

$U_i \subseteq \mathbb{R}^N$

$f \in W^{1,p}(M) \iff \forall_i$ dla $\tilde{f}_i := \varphi_i^{-1} \circ f : U_i \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_i \in W^{1,p}(U_i)$

Z założenia : $u \not\equiv 0$

Bierzemy takie r, że $f_r \not\equiv 0$ i rozwiązujemy zagadnienie Dirichleta:

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta v + \beta(v) = 0 & \text{w } B_r(x_0) = \Omega_1 \\ v = \min\{g, \frac{a_\varepsilon}{2}\} & \text{na } \partial\Omega_1 \end{cases}$$

Twierdzenie: Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (2) i to rozwiązanie jest klasy $C^1(\Omega_1)$

Idea dowodu: $\tilde{\beta}(x) = \int_0^x \beta(s)\,ds$, $\tilde{\beta}(0) = 0$, $\tilde{\beta} \geq 0$

$\tilde{\beta}$ - wypukła, bo β - niemalejąca

$I(v) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \tilde{\beta}(v))\,dx$ - funkcjonał (ściśle) wypukły

$v \in W^{1,2}_g(\Omega_1) = \{u \in W^{1,2}(\Omega_1) : Tru|_{\partial\Omega_1} = g\} = F + W_0^{1,2}(\Omega)$, gdzie F - dowolna funkcja z $W^{1,2}(\Omega)$: $F|_{\partial\Omega_1} = g$.

$\Rightarrow$ I ma dokładnie jedno minimum

(*) to minimum spełnia równanie Eulera - Lagrange'a (2):

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I(u + t\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$$

+ teoria regularności dla funkcjonałów wypukłych odpowiedniej klasy.

Wracamy do głównego dowodu. Stąd $v \in C^1(\Omega_1)$

$0 \leq v \leq \frac{a}{2}$ ($0 \leq v$ bo zastąpienie $I(v)$ przez $I(v^+)$ może tylko zmniejszyć energię I - warunki brzegowe pozostają)

$\Delta v = \beta(v)$, $\beta \geqslant 0$ dla nieujemnych argumentów

na $\partial\Omega_1$: $v \leq \frac{a}{2} \Rightarrow v \leq \frac{a}{2}$ w Ω_1 (zasada maksimum dla funkcji subharmonicznych)

$\Delta u \leq \beta(u)$ z założenia

$\Delta v = \beta(v)$ z konstrukcji

(1) $\Delta (v-u)^+ \geqslant \underbrace{\operatorname{sign}_0^+ (v-u)}_{A} \, \underbrace{\Delta(v-u)}_{\geqslant \underbrace{\beta(v)-\beta(u)}_{B}} \geqslant 0$

(2) $v-u \leq 0$ na $\partial\Omega_1$ $\qquad A \cdot B \geqslant 0$

$(v-u)^+ \leq 0$ w Ω_1

$\Rightarrow v-u \leq 0$ w Ω_1 $\quad \Big| \Rightarrow v \leq u$ w Ω_1

<u>Z Kroku 1:</u> mamy $v \in C^1(\Omega_1)$, $v \geqslant 0$ w Ω_1, $v \not\equiv 0$

$\Delta v \geqslant \beta(v)$ (bo Tv na $\partial\Omega_1 \not\equiv 0$)

$\Rightarrow v > 0$ w Ω_1

$\Rightarrow 0 < v \leq u$ w $\Omega_1 \Rightarrow u > 0$ p.w. w Ω_1

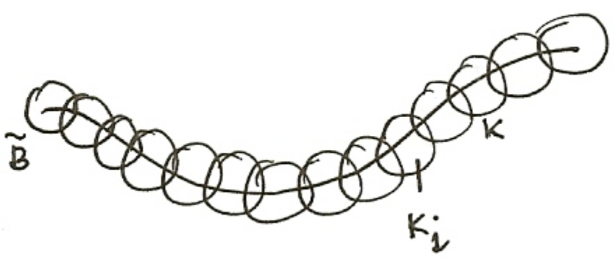
Ω_1 = kulka (pewna) w Ω t. że $u|_{\partial\Omega_1} \not\equiv 0$

Ten wniosek ($u>0$) pracuje dla dowolnej kulki $\tilde{B} \subseteq \Omega$, $\tilde{B} \subseteq \Omega$ t. że $u|_{\partial\tilde{B}} \not\equiv 0$.

Zatem pracuje dla każdej kulki B_1: $B_1 \cap B \neq \phi \Rightarrow u > 0$ w $\tilde{B} \cup B_1$

Stąd $u \geqslant C_K$ na dowolnym zbiorze zwartym $K \subseteq \Omega$.

Ω - spójny



K - zwarty $\subseteq \Omega$

$K \subseteq K_1 \cup \ldots \cup K_N$

- skończone pokrycie kulkami

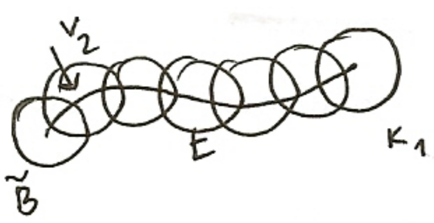
Pokażemy: $u \geqslant C_1 > 0$ na K_1. Łuk t pokrywamy skończonym łańcuchem kulek: $B_1 = \tilde{B}_1, B_2, \ldots, B_M = K_1$, $B_i \cap B_{i+1} \neq \phi$

na $\tilde{B}$: $u \geqslant v_1 > 0$

↑

ciągła

więc $u \geqslant C_1 = \inf_{\tilde{B}} v$



Na B_2 : $u \geq v_2 > 0 \implies u \geq c_2$ na B_2, $c_2 = \min\limits_{B_2} v_2 > 0$

ciągła, konstruowalna przy pomocy zagadnienia Dirichleta

$u \geq c_3$ na B_3, ..., $u \geq c_M > 0$ na $B_M = K_1$.

$u \geq c_M = d_1$ na K_1

Te same argumenty : $u \geq d_i > 0$ na K, $u \geq \min\{d_1, \dots, d_N\} > 0$ na K

<u>Def:</u> Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ spełnia warunek kuli wewnętrznej w x_0, jeśli istnieje kula $B = B_R(x_1) \subseteq \Omega$ t.że $\bar{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$

<u>Przypomnienie</u>: Niech $u: \Omega \to \mathbb{R}$ będzie mierzalna

$A \subseteq \Omega$ - mierzalny

$$\operatorname*{ess\,inf}_A u = \sup_{|B|=0} \inf_{A \setminus B} u$$

$$\operatorname*{ess\,lim\,inf}_{x \to x_0} u(x) = \lim_{r \to 0} \operatorname*{ess\,inf}_{B(x_0,r) \cap D} u \qquad u: D \to \mathbb{R}$$

<u>Twierdzenie 2:</u> Załóżmy, że spełnione są założenia Tw. 1

$x_0 \in \partial\Omega$, spełniony jest warunek kuli wewnętrznej w x_0. Niech

B będzie kulą z warunku kuli wewnętrznej

$\hat{\nu}$ - wektorem normalnym wewnętrznym w x_0.

Wówczas istnieje $\gamma > 0$ t. że

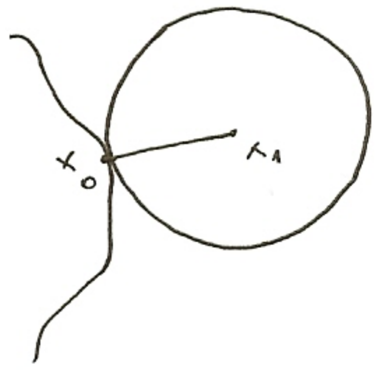
$$\operatorname*{ess\,inf}_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} \frac{u(x)}{(x-x_0)\cdot\nu} \geq \gamma > 0$$

$\cdot$ - iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{R}^n$

w szczególności gdy $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ i $u(x_0) = 0$:

$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq \gamma$.

<u>D-d:</u>



Próbujemy powtórzyć konstrukcję z kroku 1, tw. 1

$G = \{x: \frac{R}{2} < |x - x_0| < R\}$

W założeniu: $u \in W^{1,1}_{loc}$

$x_0 \in \partial\Omega$ nie Ω, tym razem mamy tylko

$u \in W^{1,1}_{loc}(G)$, $\hat{u}$ - konstrukcja jak poprzednio

Mamy : $\Delta(\hat{u} - u) \geq 0$ w G

$u \geq \hat{u}$ na ∂G,

ale $u - \hat{u} \in L^1_{loc}(G)$ nie $L^1(G)$

Omija się ten problem tak:

zastępujemy x_1 przez : $x_1^\varepsilon = x_1 + \varepsilon\nu$

Stosujemy tę samą konstrukcję, co w kroku 1 (d-d Tw. 1) na przesuniętym pierścieniu:

$\boxed{2}$ $$u(x) \geqslant \hat{u}(x - \varepsilon x_1) = v(R - |x - x_1 - \varepsilon v|, K_1, 1, \tfrac{R}{2}, v_1)$$

p.w. w G

$\varepsilon \to 0$: $u(x) \geqslant \hat{u}(x)$ p.w. w G

$\boxed{3}$ Dokończyć dowód (zakładając $\boxed{2}$ zachodzi). Wzorując się na dowodzie tw 1 (krok 1), korzysta się z $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} > 0$.

12. XII. 2011

Zagadnienie Lindquista:

$$(1) \qquad -\Delta_p v = \lambda |v|^{p-2} v, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$1 < p < \infty$

(było z pominięciem niektórych faktów)

Twierdzenie (Lindquist '92): Jeśli Ω jest otwarty, ograniczony, spójny, to istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie (1) dla $\lambda = \lambda_1$:

$$\lambda_1 = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int |\nabla v|^p}{\int |v|^p}$$

Rozwiązanie to jest jednoznaczne z dokładnością do mnożenia przez stałą i ma reprezentanta, który jest funkcją ściśle dodatnią wewnątrz Ω.

Twierdzenie: Jeśli $\lambda > \lambda_1$ to nie istnieje dodatnie (ani ujemne) rozwiązanie v dla (1) z wartością własną λ. W szczególności funkcja własna v musi zmieniać znak

Dowód:

Tw. (o aproksymacji): Istnieje ciąg obszarów $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega$

$\bigcup_j \Omega_j = \Omega$ t. że

$\lambda_1(\Omega_j) \searrow \lambda_1(\Omega)$

$\partial \Omega_j \in C^\infty$

Krok 1: Istnieje obszar Ω^* o gładkim brzegu t. że $\Omega^* \subseteq \Omega$

$\lambda_1 < \lambda_1^* := \lambda_1(\Omega^*) < \lambda$

Dalej dowodzimy twierdzenie przez zaprzeczenie. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje funkcja, która rozwiązuje (1): $v > 0$

Krok 2: Niech v_1^* - odpowiadająca λ_1^* funkcja własna dla (1) na Ω^*:

$$(1^*)\begin{cases} -\Delta_p v_1^* = \lambda_1^* |v_1^*|^{p-2} v_1 \\ v_1^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*) \end{cases}$$

Wiadomo (bo $\partial\Omega^*$ - gładki) : v_1^* - ciągła aż do brzegu.

$v_1^* > 0$ w Ω^*

$v_1^* \in C(\bar{\Omega}^*)$, $v_1^* = 0$ na $\partial\Omega^*$

$v_1^* > 0$ w Ω^*

Definiujemy

$$v^* = v_1^* \cdot \min_{\Omega^*} v \left(\max_{\Omega^*} v_1^* \right)^{-1}$$

Wtedy : $v^* \in C(\bar{\Omega}^*)$, $v^* = 0$ na $\partial\Omega^*$, $v^* > 0$ w Ω^*, $v^* \leq v$ w $\bar{\Omega}^*$

Krok 3: Definiujemy

$$\varkappa := \left(\frac{\lambda_1^*}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p-1}} \in (0,1) \qquad \text{bo } \lambda_1 < \lambda$$

Pokazujemy:

(2) $v^* \leq \varkappa^j v$ w Ω^* $\forall_j$

Gdy $j \to \infty$ dostajemy : $0 < v^* \leq 0$ w Ω^*

- sprzeczność. Pozostaje udowodnić (2)

Dowód (2): (indukcja względem j)

$j = 0$: Krok 2.

$j \Rightarrow j+1$. Załóżmy (2) dla $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pokażemy (2) dla $j+1$.

$$\underbrace{\int_{\Omega^*} |\nabla v^*|^{p-2} \nabla v^* \nabla \varphi \, dx}_{(-\Delta_p v^*, \varphi)} = \underbrace{\lambda_1^* \int_{\Omega^*} |v^*|^{p-1} \varphi \, dx}_{(\lambda_1^* |v_1^*|^{p-1}, \varphi)}$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega^*)$ dokładamy : $\varphi \geq 0$

zał. indukcyjne

$$\underset{a)}{\leq} \lambda \int (\varkappa^{j+1} v)^{p-1} \varphi \, dx = \text{£}$$

$$\lambda(\varkappa^{j+1})^{p-1} \doteq \lambda (\varkappa^j)^{p-1} \frac{\lambda_1^*}{\lambda} = \lambda_1^* (\varkappa^j)^{p-1}$$

$$(v^*)^{p-1} \leq (\varkappa^j v)^{p-1} \quad / \lambda_1^*$$

a) $\lambda_1^* (v^*)^{p-1} \leq \lambda_1^* (\varkappa^j v)^{p-1}$

$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega^* \subseteq \Omega$

$$\pounds = -\int_{\Omega^*} \Delta_p(\varkappa^{j+1} v)\cdot \varphi \, dx$$

$$\varphi := \max\{0, \underbrace{v^* - \varkappa^{j+1} v}\}$$

jeśli ≤ 0, to $\varphi = 0$

jeśli > 0, to $\varphi = v^* - \varkappa^{j+1} v$

na $\partial\Omega^*$: $\varphi = 0$

„Rutynowy argument gęstościowy" można testować równość na $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\nabla\varphi = \begin{cases} 0, & \text{gdy } v^* - \varkappa^{j+1} v \leq 0 \\ \nabla v^* - \nabla(\varkappa^{j+1} v), & \text{gdy } v^* - \varkappa^{j+1} v \geq 0 \end{cases}$$

$$(\Delta_p w, \varphi) = (\operatorname{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w)\cdot\varphi = -\int (|\nabla w|^{p-2}\nabla w, \nabla\varphi)$$

$\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Dostajemy:

$$\int_{\Omega^* \cap \{v^* \geq \varkappa^{j+1} v\}} \langle |\nabla v^*|^{p-2}\nabla v^*, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konkretne}}}{\nabla\varphi}\rangle \leq \int_{\Omega^* \cap \{\varkappa^{j+1} v \leq v^*\}} |\nabla\varkappa^{j+1} v|^{p-2}\nabla(\varkappa^{j+1} v), \nabla\varphi\rangle$$

$$\int_{\Omega^* \cap \{v^* \geq \varkappa^{j+1} v\}} |\nabla v^*|^{p-2}\nabla v^* - |\nabla\varkappa^{j+1} v|^{p-2}\nabla(\varkappa^{j+1} v), \nabla v^* - \nabla\varkappa^{j+1} v\rangle \leq 0$$

$a(x) = \nabla v^*$, $b(x) = \nabla(\varkappa^{j+1} v)$

$$\int_{\Omega^* \cap \{v^* \geq \varkappa^{j+1} v\}} \langle |a(x)|^{p-2} a(x) - |b(x)|^{p-2} b(x), a(x) - b(x)\rangle \leq 0$$

Wiemy

$\langle |a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b, a - b\rangle \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n$

i mamy „=" $\Leftrightarrow$ $a = b$

Stąd $v^* = \varkappa^{j+1} v$ tam gdzie $v^* \geq \varkappa^{j+1} v$

dla p.w. x $a(x) = b(x)$

$\Rightarrow \nabla(v - \varkappa^{j+1} v) = 0 \Rightarrow v^* - \varkappa^{j+1} v = C$

na $v^* \geq \varkappa^{j+1} v$ na brzegu tego zbioru też $\Rightarrow C = 0$

$v^* \leq \varkappa^{j+1} v$ - to kończy dowód kroku 3. $\square$

Będzie teraz Pani referować pracę: Kohl, Lindquist, ... 2011 preprint

$A(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla w)$, A_i zadane dla $i = 1, \ldots, n$

$A_i(x,\xi)$ - funkcja Caratheodory'ego:

$x \mapsto A_i(x,\xi)$ - mierzalna $\forall \xi$

$\xi \mapsto A_i(x,\xi)$ - ciągłe dla p.w. x

$A(x,\xi) = (A_1(x,\xi), \dots, A_n(x,\xi))$

$A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Def:

1) Operator $A(w)$ jest monotoniczny, jeśli:

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^1 - \xi_i^2)(A_i(x,\xi^1) - A_i(x,\xi^2))$$

dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n$

$0 \le \langle \xi^1 - \xi^2, A(x,\xi^1) - A(x,\xi^2)\rangle$

2) operator $A(w)$ jest właściwy - α - monotoniczny $(\alpha > 0)$

(proper α- monotonic) jeśli

(*) $0 \le \| A(x,\xi^1) - A(x,\xi^2)\|^\alpha \le K(\langle \xi^1 - \xi^2, A(x,\xi^1) - A(x,\xi^2)\rangle)^{\alpha-1}$

$\|\cdot\|$ - standardowa norma w $\mathbb{R}^n$

Uwaga: właściwa α - mondotoniczność $\Rightarrow$ monotoniczność

(*) dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{1}$ sprawdź i znajdź α

1) $1 < p < \infty$ $\quad \Delta_p w = \operatorname{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w)$, $\alpha = p$

2) $1 \le p \le 2$ $\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)$, $\alpha = p$

3) operator średniej krzywizny

$$M(w) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\right), \quad \alpha = 1$$

Uwaga: $\xi_2 = 0$ w (*) $\Rightarrow$ $\|\underbrace{A(x,\xi)}_{a}\|^\alpha \le K \langle \xi\, A(x,\xi)\rangle^{\alpha-1}$

$\|a\|^\alpha \le K|\xi|^{\alpha-1}\|a\|^{\alpha-1} \Rightarrow \|a\| \le K|\xi|^{\alpha-1}$

$\Rightarrow |A(x,\xi)| \le K|\xi|^{\alpha-1}$ - oszacowanie wzrostu

$\boxed{2}$ wykaż lemat: (stosuje się do $\boxed{1}$)

Lemat: Niech $n \in \mathbb{N}$, $1 < \alpha \le 2$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

zachodzą:

(a) $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i|a|^{\alpha-2} - b_i|b|^{\alpha-2})^2\right)^{\alpha/2} \le K\left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)(a_i|a|^{\alpha-2} - b_i|b|^{\alpha-2})\right\}^{\alpha-1}$

dla K- niezależnej od a, b

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(a_i|a_i|^{\alpha-2}-b_i|b_i|^{\alpha-2}\big)^2\Big)^{\alpha/2} \le K\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\big(a_i|a_i|^{\alpha-2}-b_i|b_i|^{\alpha-2}\big)\Big)^{\alpha-1}$$

Kurta, Diff

19.XII.2011 Kawohl, Kurta, 2011, Comm. Pure Appl. Anal.

Rozpatrywane operatory

$$A(w)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left(A_i(x,\nabla w)\right)$$

$$\bar{A}(x,\xi)\sim\bar{A}(x,\nabla w)=\underbrace{(A_1(x,\nabla w),\ldots,A_n(x,\nabla w))}_{\text{liczymy dywergencję}}$$

$w:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Dla $i=1,\ldots,n$

$A_i(x,\xi)$ - Carathéodory'ego

$x\mapsto A_i(x,\xi)$ - mierzalna

$\xi\mapsto A_i(x,\xi)$ - ciągłe dla p.w. x

Def: Operator $A(\cdot)$ jest

(1) monotoniczny, jeśli dla p.w. $x\in\mathbb{R}^n$, $\forall\,\xi_1,\xi_2$

$$\langle\underbrace{\bar{A}(x,\xi^1)-\bar{A}(x,\xi^2)}_{\in\mathbb{R}^n},\underbrace{\xi^1-\xi^2}_{\in\mathbb{R}^n}\rangle\geq 0$$

Gdy będzie oczywiste, że mówimy o funkcji $\bar{A}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ będziemy stosować uproszczone oznaczenie A zamiast $\bar{A}$.

(2) jest właściwie α-monotoniczny (proper α-monotonic), jeśli dla p.w. $x\in\mathbb{R}^n$, $\forall\,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^n$

$$\|A(x,\xi_1)-A(x,\xi_2)\|^{\alpha}\le\varkappa\langle A(x,\xi_1)-A(x,\xi_2),\xi_1-\xi_2\rangle$$

ze stałą $\varkappa$ niezależną od x,ξ_1,ξ_2

Uwaga: (2) $\Rightarrow$ $\|A(x,\xi)\|^{\alpha}\le\varkappa\,\underbrace{|\xi\cdot A(x,\xi)|^{\alpha-1}}_{\|\xi\|^{\alpha-1}\|A(x,\xi)\|^{\alpha-1}}$

$\Rightarrow\ \|A(x,\xi)\|\le\varkappa\,\|\xi\|^{\alpha-1}$

(1) $A(u)+|u|^{q-1}u\le A(v)+|v|^{q-1}v$

(2) $-A(u)+|u|^{q-1}u\le -A(v)+|v|^{q-1}v$

Def:

(1) jest spełnione w słabym sensie, jeśli zachodzi

$\forall \varphi \geq 0, \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} A(x,\nabla u)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\varphi \leq -\int_{\mathbb{R}^n} A(x,\nabla v)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q-1}v\cdot\varphi\, dx$$

Równoważnie

$$(1') \quad \int_{\mathbb{R}^n} A(x,\nabla u)\nabla\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\cdot\varphi \geq \int_{\mathbb{R}^n} A(x,\nabla v)\nabla\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q-1}v\varphi$$

Analogicznie formułujemy nierówność w słabym sensie dla (2')

O parze (u,v) zakładamy: $u,v \in W^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Taką parę nazywamy słabym rozwiązaniem wewnętrznym dla (1) (entire weak solutions)

Dla (2) zakłada się: $\alpha \geq 1$, $q > 0$, $u,v \in W^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Uwaga: Argument gęstościowy: zamiast $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ w (1) wystarczy założyć $\varphi \in W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ma zwarty nośnik, $\varphi \geq 0$

Dowód: Bierzemy takie φ, rozważamy $\psi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ - standardowa regularyzacja. Wiemy, że $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ni \psi_\varepsilon * \varphi \geq 0$,

$\psi_\varepsilon * \varphi \xrightarrow[\text{słabo } *]{} \varphi$ w $W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ t.zn $\int g\,\psi_\varepsilon * \varphi \to \int g\varphi \quad \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Tw 1: Niech $n \geq 1$, $\alpha \in [1,2]$, $\alpha \geq n$, $q > 0$. Załóżmy, że operator $A(w)$ jest α-monotoniczny i (u,v) jest słabym rozwiązaniem wewnętrznym (1) na $\mathbb{R}^n$, t.że $u(x) \geq v(x)$. Wówczas $u(x) \equiv v(x)$ p.w.

To jest tw. typu Liouville'a

Niech $v \equiv 0$, $Aw = \Delta w$ $\quad (A_i(x,\xi) = \xi_i)$

zamiast (1): $\Delta u \leq 0$, $u \geq 0$

Tw. Jeśli u przyjmuje 0 gdzieś wewnątrz $\mathbb{R}^n$, to $u \equiv 0$

Dowód: Można wstawić do słabej nierówności $\varphi \in W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi$ – zwarty.

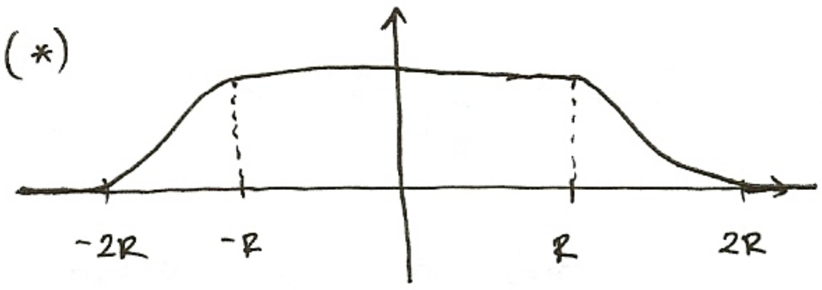
Krok 0: Definiujemy $w := u - v \geq 0$,

$\varphi(x) := (w+\varepsilon)^{-\vartheta}\xi^{\vartheta}$, $\vartheta \geq \alpha - 1$, $s \geq \alpha$

$\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\xi \geq 0$

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| \leq R \\ 0 & \text{dla } |x| \geq 2R \end{cases}$$

(*)



$0 \leq \xi \leq 1$

$|\nabla \xi| \leq \frac{C}{R}$

Krok 1: Nierówności typu Caccioppoli: $\forall \xi \geq 0$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\xi \subseteq B(2R)$

$$L = \int_{B(R)} C_1 |\nabla\xi|^\alpha (w+\varepsilon)^{\alpha-1-\vartheta}\xi^{s-\alpha}\,dx \geq \frac{\vartheta}{2}\int_{B(R)} (\nabla w, A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v))(w+\varepsilon)^{-\vartheta-1}\xi^s\,dx$$

$$+ \int_{B(R)} (|u|^{q-1}v - |v|^{q-1}v)(w+\varepsilon)^{-\vartheta}\xi^s\,dx = P$$

Krok 2: Wstawiamy ξ jak w (*)

$|\nabla\xi| \leq \frac{C_0}{R}$

$L \leq C_\varepsilon R^{n-\alpha}\varepsilon^{\alpha-1-\vartheta}$

Prawo ≥ 0

$$C_\varepsilon R^{n-\alpha}\xi^{\alpha-1-\vartheta} \geq \int_{B(\frac{R}{2})} \langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla w), \nabla u - \nabla v\rangle (w+\varepsilon)^{-\vartheta-1}\,dx +$$

$$+ \int_{B(\frac{R}{2})} (|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)(w+\varepsilon)^{-\vartheta-1}\,dx$$

Krok 3: zał $\alpha > n$, $R \to \infty$

Lewa $\to 0$

$\Rightarrow |u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v = 0$, $u \geq v$, $\Rightarrow u \equiv v$ p.w.

Krok 4: Przypadek krytyczny: $\alpha = n$

$R \to \infty \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla u - \nabla v\rangle}_{a(x),\ a \geq 0} (w+\varepsilon)^{-\vartheta-1} < \infty$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)(w+\varepsilon)^{-\nu}}_{b(x),\ b\geq 0} dx < \infty \quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} b = 0 \qquad \begin{array}{l} b\equiv 0 \ \text{p.w.} \\ u\equiv v \ \text{p.w.}\end{array}$$

Dla dowolnego $R_k \to \infty$

$$\int_{B(R_k)-B(\frac{R_k}{2})} a(x)\,dx \to 0, \quad k\to\infty$$

Szczegółowe rachunki (zostawiamy $\alpha = n = 1$)

$$\int_{B(R/2)} b(x) \leq \text{const} \left(\int_{B(R)\setminus B(R/2)} a(x)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha-1-\nu}{\alpha}} R^{\frac{n-\alpha}{\alpha}}, \quad n=\alpha$$

$n=2=\alpha$ nie wiem czy trzeba założyć $n\in\{1,2\}$

__Uwaga:__ Dla $v\equiv 0$: Mitidieri, Pohozh 1997

(3) $\quad -\Delta_p u \geq C u^{q-1}$

$u\geq 0$

Charakteryzacja par (p,q): $(3) \Rightarrow u\equiv 0$

__Twierdzenie__ (Nikolskiego) - z zadań domowych:

Niech $u\in W^{1,n}((0,1)^n)$, wówczas dla p.w. $t\in(0,1)$

$$u|_{\{t\}\times(0,1)^{n-1}} : \underset{(0,1)^{n-1}}{x' \cap} \longmapsto u(t,x') \in W^{1,1}(Q'), \quad Q'=(0,1)^{n-1}$$

__Dowód:__ (u - dowolne)

$v_t(x) := u(t,x)$

1° Istnieje zbiór $A_1 \subset (0,1)$: $|A_1| = 1$ t. że dla każdego $t\in A_1$:

$$\int_{(0,1)^{n-1}} |v_t(x')|\,dx' < \infty$$

$$\int_0^1 \left(\int_{(0,1)^{n-1}} (u(t,x'))dx'\right)dt < \infty$$

2° Sprawdzamy warunek ACL charakteryzacji:

dla $t\in A_1$ i $\underset{Q'}{v_t(x')}$ (wiem, że jest całkowalna)

Wiemy: dla p.w. $(t, x_3, x_4, \dots, x_n)\in(0,1)^{n-1}$

= dla wszystkich $(t, x_3,\dots,x_n)\in B \subseteq (0,1)^{n-1}$, $|B| = 1$.

$x_2 \longmapsto u(t, x_2, x_3, \dots, x_n) \in A(0,1)$

ACL - charakteryzacja dla funkcji u - określonej na $Q = (0,1)^n$

$$1 = \int_{(0,1)^{n-1}} \chi_B \, dx = \int_0^1 \Big(\int_{\{(x_3,\dots,x_n) : (t, x_3, \dots, x_n) \in B\}} 1 \, dx'' \Big) dt = 0$$

$\underbrace{(x_3,\dots,x_n)}_{x'' \in Q^{n-2}}$

$\|$

$$1 = \int_0^1 \Big(\int_{(0,1)^{n-2}} \chi_B \, dx' \Big) dt$$

$x' = (x_1, \dots, x_n)$

Istnieje zbiór A_2 t.że

$|A_2(t)| = 1$ i dla p.w. $x'' = (x_3, \dots, x_n) \in Q^{n-2}$: $(t, x'') \in B$

$|B| = 1$

$\forall t \in A_2$ $(|A_2| = 1)$

Dla p.w. prostych $\| e_2$: $L_{x''}$

$v_t|_{L_{x''}} \in AC$

Tak samo postępujemy z $e_3, e_4, \dots, e_n$ zamiast e_2

Istnieją zbiory $A_3, \dots, A_n \subseteq (0,1)$, $|A_i| = 1$

$\forall t \in A_i$ i dla p.w. prostych $\| e_i$: L

$v_t|_L \in AC$

$A = A_1 \cap \dots \cap A_n$ dla $t \in A$, $v_t \in L^1(Q')$

$|A| = 1$ i dla dowolnej osi Q_i i p.w. prostych $\| e_i$

$v_t|_L \in AC$

Teraz wystarczy sprawdzić, że

$$\int_{Q'} \sum_{i=2}^{n} \Big| \frac{\partial v_t}{\partial x_i} \Big| dx' < \infty$$

pochodna klasyczna

$v_t = v_t(x_2, \dots, x_n)$

$$\underbrace{\int_0^1 \int_{Q'} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big| dx' dt}_{F(t)} < \infty$$

$\int_0^1 F(t) dt < \infty$, $F \geq 0$ dla p.w. t

$\exists \quad B_2 \subseteq (0,1)$

$|B_2| = 1$:

$\forall_t \in B_1$: $\quad \int_{Q'} \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_2} (x_2, \dots, x_n) \right| dx_2 \dots dx_n < \infty$

Analogicznie postępujemy

$\exists \; B_3, \dots, B_n \;, \; |B_i| = 1$ t.że

$\forall t \in B_i \quad \int_{Q'} \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_i} (x') \right| dx' < \infty$

$\tilde{A} = A \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ - zbiór pełnej miary w $(0, 1)$.

$\forall \; t \in \tilde{A}$ mamy

1° spełniona jest ACL - charakteryzacja (dla dowolnej wybranej osi e_k dla p.w. prostych $l \parallel e_k$

2° $v_t \in L^1(Q')$

3° $\int |\nabla v_t| dx' < \infty$

$\Big\}$ tw. o ACL - charakteryzacji $v_t \in W^{1,1}(Q')$

2.01.2012

Rozważamy:

$A(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}A_i(x,\nabla\omega)$, $\omega:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$A_i(x,\xi)$ - Caratheodory'ego , $A=(A_1,\dots,A_n)$

DEF: A jest:

(1) monotoniczny - $\langle A(x,\xi_1)-A(x,\xi_2),\xi_1-\xi_2\rangle\geq 0$

dla p.w. $x\in\mathbb{R}^n$, $\forall_{\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^n}$

(2) właściwie α-monotoniczny

$\|A(x,\xi_1)-A(x,\xi_2)\|^{\alpha}\leq K\langle A(x,\xi_1)-A(x,\xi_2),\xi_1-\xi_2\rangle^{\alpha-1}$, $\alpha>0$

Interesują nas dwa zagadnienia

(1) $A(u)+|u|^{q-1}u\leq A(v)+|v|^{q-1}v$

(2) $-A(u)+|u|^{q-1}u\leq -A(v)+|v|^{q-1}v$

UWAGA: W 1998 r. Pohozhajew + Mifidieri scharakteryzowali wszystkie pary (p,q), $1<p,q<\infty$ t, że nie istnieją rozwiązania nieujemne zagadnienia $-A_p u\geq c\,u^{q-1}$

tu: $A_p=\Delta_p$

$\Delta_p u=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$

1° W przestrzeniach Orlicza - problem otwarty postawiony w 1998 r.

2° Problem otwarty również dla układów równań i dla równań z dynamiką: $u_t-A(u)\geq\phi(u)$

3° Inne otwarte problemy dotyczą zagadnień $-\Delta_p u\geq c(x)\,\phi(u)$

$\uparrow$ f-cja $\uparrow$ np. $|u|^{p-1}$

DEF| Parę (u,v) t, że $u,v\in W^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)\cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy słabym rozwiązaniem wewnętrznym (SRW)

- dla zagadnienia (1) zakładamy, że A silnie α-monotoniczny

TW| Niech $n\geq 1$, $\alpha\in[1,2]$ (ale moim, t.j. p. Kałamajskiej zdaniem wystarczy $\alpha\geq 1$), $\alpha\geq n$,

Zał, że A jest silnie α-monotoniczny zaś (u,v) - (SRW) (1) na $\mathbb{R}^n$ t, że $u\geq v$.

Wówczas $u\equiv v$.

UWAGA: (1) jest spełnione w słabym sensie z parą (u,v) jeśli:

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$

(1') $$-\int_{\mathbb{R}^n} A(x,\nabla u)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\cdot\varphi \leq -\int_{\mathbb{R}^n} A(x,\nabla v)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^n}|v|^{q-1}v\,\varphi$$

ale jako, że A jest α-monotoniczny $|A(x,\xi)| \leq K|\xi|^{\alpha-1}$

jako f-cje testujące można brać $\varphi \in W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$ o zw. nośniku (argument gęstościowy)

Dowód Tw: z Uwagi możemy (1') testować $\varphi \in W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, φ ma zwarty nośnik. Mamy zatem

(1'') $$\int \langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla\varphi\rangle \geq \int (|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)\varphi$$

Definiujemy: $w := u - v \geq 0$, $w \in W^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$

(x) $\varphi := (w+\varepsilon)^{-\nu}\xi^s$, $s \geq \alpha$, $\nu > 0$ dobieramy

$\xi \geq 0$ $\xi = \begin{cases} 1 & \text{na } B(R) \\ 0 & \text{poza } B(2R)\end{cases}$ $|\nabla\xi| \leq \frac{C}{R}$

$0 \leq \varphi \leq 1$

KROK 1

Nierówność C.... poli:

$$\int_{B(R)\setminus B(\frac{R}{2})} c_1|\nabla\xi|^\alpha (w+\varepsilon)^{\alpha-1-\nu}\xi^{s-\alpha}\,dx \geq$$

$$\geq \frac{\nu}{2}\int_{B(R)} \langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w\rangle\cdot(w+\varepsilon)^{-\nu-1}\xi^s\,dx +$$

$$\int_{B(R)} (|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)(w+\varepsilon)^{-\nu}\xi^s\,dx$$

w tym miejscu postać ξ nie ma znaczenia: ważne, że $\xi \in C_0^\infty$ i $\operatorname{supp}\xi \subseteq B(R)$

inaczej:

$$\int(|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)(w+\varepsilon)^{-\nu}\xi^s\,dx + \frac{\nu}{2}\int\langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w\rangle (w+\varepsilon)^{-\nu-1}\xi^s\,dx \leq$$

$$\leq c_1\int|\nabla\xi|^\alpha(w+\varepsilon)^{\alpha-1-\nu}\xi^{s-\alpha}\,dx$$

wstawiamy φ jak w (x) do (1''):

$$\nabla\varphi = -\nu(w+\varepsilon)^{-\nu-1}\nabla w\,\xi^s + s(w+\varepsilon)^{-\nu}\xi^{s-1}\nabla\xi$$

Lewa w (1''):

$$L = -\nu\int\langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w\rangle(w+\varepsilon)^{-\nu-1}\xi^s + s\int\langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla\xi\rangle\cdot$$
$$\cdot(w+\varepsilon)^{-\nu}\xi^{s-1}$$

$$=: \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

Prawa w $(1'')$:

$P = \int (|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)(\omega+\varepsilon)^{-\nu}\xi^s\,dx$

$I \leq 0$ $\quad (-\nu \cdot \text{coś} \geq 0$ z powodu monotoniczności$)$

siła α - monoton.

$|II| \leq s\int |A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v)| \cdot |\nabla \xi| \cdot (\omega+\varepsilon)^{-\nu}\xi^{s-1}\,dx \leq$

$\leq \int s K^{\frac{1}{\alpha}} \langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w\rangle^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} |\nabla \xi| (\omega+\varepsilon)^{-\nu}\xi^{s-1} =: \overline{X}$

Rozważamy dwa przypadki a) $\alpha > 1$
b) $\alpha = 1$

a) stos. nier. Younga: $ab \leq \varrho\, a^{\frac{p}{p-1}} + \varrho^{1-p} b^p \quad \forall \varrho > 0,\ a,b \geq 0$

$p := \alpha > 1$

$a := (\omega+\varepsilon)^{(1+\nu)(\frac{1}{\alpha}-1)}\xi^{s(1-\frac{1}{\alpha})} \cdot \overline{X}$

$b := \frac{\text{co pod całką}}{a} = sK^{\frac{1}{\alpha}} |\nabla \xi| \cdot \xi^{\frac{s}{\alpha}-1} \cdot (\omega+\varepsilon)^{\frac{\alpha-1-\nu}{\alpha}}$

$\varrho := \frac{\nu}{2}, \quad \nu > \alpha - 1 \Rightarrow \nu > 0$

$\varrho\, a^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\nu}{2}\langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w\rangle (\omega+\varepsilon)^{-\nu-1}\xi^s$

$\varrho^{1-\alpha} b^\alpha = c_1 |\nabla \xi|^\alpha (\omega+\varepsilon)^{\alpha-1-\nu}\xi^{s-\alpha}$

$$|II| \leq \underbrace{\frac{\nu}{2}\int \langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w\rangle (\omega+\varepsilon)^{-\nu-1}\xi^s\,dx}_{-\frac{I}{2}} + \underbrace{c_1 \int |\nabla \xi|^\alpha (\omega+\varepsilon)^{\alpha-1-\nu}\xi^{s-\alpha}\,dx}_{=:Y}$$

$P \leq I + II \leq I + |II| \leq \frac{I}{2} + Y$

$P - \frac{I}{2} \leq Y \quad \leftarrow$ a to jest to co chcemy

b) $\alpha = 1$ i $\alpha \geq n \Rightarrow \alpha = n = 1 \Rightarrow \nabla u = u'$

$|II| = |s\int (A(x,u') - A(x,v')) \cdot \xi' (\omega+\varepsilon)^{-\nu}\xi^{s-1}\,dx| \leq$

$\leq \int \underbrace{|A(x,u') - A(x,v')|}_{\leq K \text{ (}\alpha\text{-monot. dla } \alpha=1)} \cdot |\xi'| (\omega+\varepsilon)^{-\nu}\xi^{s-1}\,dx \leq$

$\leq \underbrace{c_1 \int |\xi'| (\omega+\varepsilon)^{-\nu}\xi^{s-1}\,dx}_{Y}$ (znów $\alpha = 1$ $|\xi'| = |\xi'|^\alpha$)

stąd $P \leq I + II \leq I + |II| \leq I + Y \Rightarrow P - \frac{I}{2} \leq P - I \leq Y$ (bo $I \leq 0$)

czyli koniec dowodu.

KROK 2: Oszacowania:

$$C_3 R^{n-\alpha} \varepsilon^{\alpha-1-\nu} \geq \int_{B(\frac{R}{2})} \langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla u - \nabla v \rangle (\omega+\varepsilon)^{-\nu-1} dx +$$

$$+ \int_{B(\frac{R}{2})} (|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)(\omega+\varepsilon)^{-\nu}$$

KROK 3: $\alpha > n$, $R \to \infty$

KROK 4: $\alpha = n$ (przyp. krytyczny)

Oznaczamy: $a(x) = \langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w \rangle (\omega+\varepsilon)^{-\nu-1}$

$b(x) = (|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v)(\omega+\varepsilon)^{-\nu}$

z KROKU 2: $a, b \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Aby zakończyć dowód stosujemy:

$$(*) \quad \int_{B(\frac{R}{2})} b(x) \leq c \left(\int_{B(R)\setminus B(\frac{R}{2})} a(x) \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \varepsilon^{\frac{\alpha-1-\nu}{\alpha}} R^{\frac{n-\alpha}{\alpha}}$$

Dowód $(*)$:

Mamy oszacowanie z KROKU 1: $P \leq I + II$

$$|II| \leq \int_{B(R)} s K^{\frac{1}{\alpha}} \underbrace{\langle A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v), \nabla w \rangle}_{Z}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} |\nabla \xi| (\omega+\varepsilon)^{-\nu} \underbrace{\xi^{s-1}}_{\leq 1} dx$$

$$P \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } I \leq 0}}{\leq} |II| \leq \text{const.} \int \underbrace{Z^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} (\omega+\varepsilon)^{(-\nu-1)\frac{\alpha-1}{\alpha}}}_{\in L^{\alpha'}} \cdot \underbrace{(\omega+\varepsilon)^{\frac{\alpha-1-\nu}{\alpha}} |\nabla \xi|}_{\in L^{\alpha}}$$

dla $\alpha \geq 1$

$$P \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hölder}}}{\leq} C_n \left(\int_{\{|\nabla\xi| \neq 0\}} Z (\omega+\varepsilon)^{-\nu-1} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \underbrace{\left(\int_{\{|\nabla\xi| \neq 0\}} |\nabla\xi|^{\alpha} (\omega+\varepsilon)^{\alpha-1-\nu} \right)^{\frac{1}{\alpha}}}_{\leq C \cdot R^{\frac{n-\alpha}{\alpha}} \varepsilon^{\frac{\alpha-1-\nu}{\alpha}}}$$

i już!

9.01.2012

Zagadnienie

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x)\cdot\nabla u + f(x,u) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = \varphi & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, ograniczony podzbiór, $\partial\Omega \in C^1$

(i) • $A(x) = \{a^{ij}(x)\}_{i,j=1,\dots,n}$ $\quad a_{ij}(x) \in C(\bar{\Omega})$

- macierz jednostajnie eliptyczna:

$$0 < \lambda \le \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$$

• $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $b_j \in L^\infty(\bar{\Omega})$

• $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$

(ii) $x \mapsto f(x,u)$ - ciągła na $\bar{\Omega}$, $u \mapsto f(x,u)$ - mierzalna

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t^\alpha} = h(x) \quad \text{dla pewnego } \alpha \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$$

- zbieżność jednostajna na $\bar{\Omega}$ $(h \in C(\bar{\Omega}))$, $h > 0$ w $\bar{\Omega}$

<u>Twierdzenie</u> (istnienie): Przy powyższych założeniach istnieje dodatnie rozwiązanie (1) w klasie $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

<u>Uwaga:</u> Nie ma informacji o tym jak duży jest zbiór rozwiązań

<u>Informacja o dowodzie:</u> (źródło) Ambrosetti, Rabinovitz, Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications, JFA 14 (1973).

<u>Twierdzenie 2:</u> (Gidas, Spruck, 1981)

Niech $n > 2$, $u \in C^2(\Omega)$ będzie dodatnim rozwiązaniem (1) i spełnione są (i) i (ii). Wówczas istnieje stała $C = C(A, b, \alpha, h) > 0$ t. że $u(x) \le C$, C nie zależy od u rozwiązującego (1).

<u>Uwaga:</u> 1) $\varphi \equiv 0$ jest interpretowany jako nieliniowe zagadnienie membrany

2) Przykładowa funkcja f spełniająca (ii):

$$f(x) = h(x)u^\alpha + g(x,u), \quad \sup_x \left|\frac{g(x,u)}{u^\alpha}\right| \xrightarrow{u\to\infty} 0$$

<u>Dowód tw 2:</u>

<u>Krok 1:</u>

<u>Twierdzenie 3:</u> (Gidas, Spruck, 1981; Pohozhajew-Mitidieri 1998 przyp. $\alpha = \frac{N+2}{N-2}$, $N > 2$)

Niech $u \ge 0$, $u \in C^2$ będzie rozwiązaniem:

$$-\Delta u = u^\alpha \quad \text{w } \mathbb{R}^N, \; N > 2$$

$\alpha \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right]$. Wówczas $u \equiv 0$.

Twierdzenie 4: Niech $\alpha \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$, $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_n \geq 0\}$, $u \in C^2_+(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\})$ będzie nieujemnym rozwiązaniem:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^\alpha & \text{w } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{na } \{x_N = 0\} = \partial \mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

Wówczas $u \equiv 0$.

Krok 3: Redukcja dowodu Tw. 2 do twierdzeń 3 i 4.

Przypuśćmy, że teza Tw. 2 jest fałszywa. Wówczas istnieje ciąg rozwiązań $\{u^k(x)\}$ oraz zbiór punktów $P_k \in \bar{\Omega}$ t. że:

$$M_k := \sup_{x \in \Omega} u^k(x) = u^k(P_k) \to \infty, \quad k \to \infty$$

Można założyć, że (wybieramy podciąg), że $P_k \to P \in \bar{\Omega}$. Rozważamy dwa przypadki:

A) $P \in \Omega$

B) $P \in \partial\Omega$

Przypadek A: Dowód redukuje się do tw. 3

Niech $d = \frac{\operatorname{dist}(P, \partial\Omega)}{2}$, $B_R(a)$ = kula o promieniu R i środku a.

$\{\lambda_k\}$ - ciąg liczb dodatnich

$y := \frac{x - P_k}{\lambda_k}$ - ciąg przekształceń afinicznych

Funkcja przeskalowana: $v^k(y) = \lambda_k^{\frac{2}{\alpha-1}} u^k(x)$

t.zn:

$$v^k(y) = v^k\left(\frac{x - P_k}{\lambda_k}\right) = \lambda_k^{\frac{2}{\alpha-1}} u^k(x)$$

Dobieramy λ_k tak, aby:

$$\lambda_k^{\frac{2}{\alpha-1}} M_k = 1, \quad \lambda_k := \left(\frac{1}{M_k}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}$$

$\lambda_k \to 0$

$V_k(y)$ jest dobrze zdefiniowana dla $y \in B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)$: $|y| < \frac{d}{\lambda_k}$

$x = \underbrace{\lambda_k \cdot y}_{|\ | < d} + P_k \sim P$. Można założyć: $P_k \in B(P, d)$ $\forall k$.

Zauważmy, że:

a) $$\sup_{y \in B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)} v^k(y) = \sup_{x \in B(d, P_k)} \lambda_k^{\frac{2}{\alpha-1}} u^k(x) = \lambda_k^{\frac{2}{\alpha-1}} u^k(P_k) = 1 = v^k(0)$$

b) $v^k(y)$ spełnia równanie na $B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)$:

$$\boxed{1} \quad \operatorname{div}(A^k(y) \nabla v^k(y)) + \lambda_k \cdot \overbrace{b^k(y)}^{\text{wektor}} \cdot \nabla v^k(y) + \underbrace{\lambda_k^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} f(\lambda_k y + P_k, \lambda_k^{-\frac{2}{\alpha-1}} v_k(y))}_{(*)}$$

$A^k(y) := \{a_{ij}^k(y)\}_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$

$a_{ij}^k(y) := a_{ij}(x) = a_{ij}(\lambda_k y + P_k)$

$b^k(y) = (b_1^k(y), \dots, b_n^k(y))$, $b_j(x) = b_j(\lambda_k y + P_k) =: b_j^k(y)$

[2] $(*) \sim h(\lambda_k y + P_k) \cdot V_k^\alpha(y)$ dla dużych k.

$a_{ij}^k(y) \xrightarrow{k\to\infty} a_{ij}(P)$

$b_j^k(y) \xrightarrow{k\to\infty} b_j(P)$

$h(\lambda_k y + P_k) \to h(P)$

Niech $R > 0$, dla dostatecznie dużych j mamy

$B_R(0) \subseteq B_{\frac{d}{\lambda_j}}(0)$

Lemat 1: Niech $R>0$ - dowolne. Istnieje podciąg $\{k_j\}$, $k_j \to \infty$ oraz funkcja v t.że

$v^{k_j} \to v$ w $W^{2,p}(B_R(0)) \cap C^{1,\beta}(B_R(0))$ dla pewnego $p>n$.

Ponadto $v(0) = 1$ (bo $v^k(0) = 1$)

Informacja o dowodzie (teoria eliptycznej regularności)

Oszacowania na współczynniki dają

$\sup_k \|v^k\|_{W^{2,p}(B_R(0))} < \infty$

Metoda zwartościowa - można wybrać podciąg

$v^{k_j} \to v$ w $W^{2,p}(B_R(0))$ tw. R-K : funkcje zbiegają silnie w L^p

+ tw. o zanurzaniu

$W^{2,p}(B_R(0)) \hookrightarrow C^{1,\beta}(B_R(0))$, β- zależny od n, p $\left(\frac{1}{\beta} = \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)$.

c) Funkcja v jest dobrze zdefiniowana na całym $\mathbb{R}^n$ i

$v^{k_j} \to v$ w $W^{2,p} \cap C^{1,\beta}$, $p>n$.

Istotne : ~~Rozważamy~~ Funkcję v można rozszerzyć na $\mathbb{R}^n$ i dla ciągu $\{k_j\}$ dobranego do $R=1$ mamy

$v^{k_j} \to \tilde{v}$ w $W^{2,p} \cap C^{1,\beta}$ na $B(R)$ $\forall R>0$, $\tilde{v} = v$ na $B(1)$

Niech $R' > 1$ i rozważamy $\{v^{k_j}\}$ na $B(R')$, $\{k_j\}$- dobrany j.w.

z tej samej procedury wynika, że $\exists \{k_{j_l}\}$ t.że

$v^{k_{j_l}} \to \tilde{v}$ w $W^{2,p}(B_R(0)) \cap C^{1,\beta}(B_{R'})$

była już zbieżność na mniejszej kulce $B_1(0)$.

$\Rightarrow \tilde{v} = v$ na $B_1(0)$

$\tilde{v}$ jest przedłużeniem v.

Stosujemy metodę przekątniową: dla pewnego podciągu $\{k_j\}$ $:= \{l(j)\}$. mamy zbieżność

$$v^{l(j)} \longrightarrow v \quad w \quad B_r(0) \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

d) v spełnia równanie:

$$(2) \begin{cases} a^{ij}(p) \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + h(p) v^\alpha(y) = 0 \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

graniczne współczynniki.

$\boxed{3}$ Po zastosowaniu konforemnej zamiany zmiennych (liniowe, ortonormalne)

(2) sprowadza się do

$$(2') \quad \Delta u + h(p) u^\alpha = 0$$

Po zastąpieniu $u \mapsto \tilde{u} = t \cdot u$ i dla odpowiedniego $t > 0$:

$(2') \Leftrightarrow (2'')$

$$(2'') \quad \Delta \tilde{u} + \tilde{u}^\alpha = 0 \quad w \quad \mathbb{R}^N$$

Stąd z tw. 3 $\Rightarrow \tilde{u} \equiv 0$, ale $\tilde{u}(0) > 0$

$\Rightarrow$ sprzeczność.

■

16.01.2012

Teoria eliptycznej regularności

Niech $\{P_j\}_{j=1,\dots,N}$ - pewna podrodzina operatorów różniczkowych

o gładkich (na razie) współczynnikach

$$P_j f = \sum_{i=1}^{k} P_{j,i} f_i \qquad P_{j,i}\, g = \sum_{\alpha, |\alpha| \le m} a_{\alpha,j,i}(x) D^\alpha g(x)$$

$f = (f_1, \dots, f_k)$

$j = 1, \dots, N$

Ozn: P^m - część główna operatora - część związana z pochodnymi najwyższego rzędu

P_j^0 - część operator związana z pochodnymi niższego rzędu niż m

$$P_j = P_j^m \perp P_j^0$$

Np $k = 1$ $\quad P_k u = \underbrace{\Delta u}_{P^m} + \underbrace{\partial_i u + u}_{P^0}$

$$P(x, \xi) = \underbrace{\cancel{|\xi|}^2}_{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} + \xi_1 + 1 \qquad P^m(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

Def: Powiemy, że operatory $\{P_j\}$ są jednorodne rzędu m, jeśli $P_j^0 = 0 \quad \forall j$

Ozn: $P_{j,i}(x,\xi)$ - odpowiednie wielomiany charakterystyczne operatorów $P_{j,i}$:

$$P_{j,i}(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha,j,i}(x)\xi^\alpha \quad , \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \quad , \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n \quad , \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

Uwaga: Jeśli nie zapisujemy x, tzn że nzal od x.

Niech: $1 \le r, p \le \infty$. Definiujemy

$$W_{r,p}^{\{P_j\}}(\Omega) = \{ f \in L^r(\Omega) : P_j f \in L^p(\Omega) \text{ dla } j = 1, \dots, n \}.$$

Przykład: $P = (\nabla u)$, $P_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, P_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$

$k = 1$

$$W_{p,p}^{\{P_j\}}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$$

Def: $L_p^{\{P_j\}}(\Omega) = \{ f \in L^1_{loc}(\Omega) : P_j f \in L^p(\Omega) \text{ dla } j = 1, \dots, N \}$

Twierdzenie (eliptyczna regularność):

Niech Ω będzie obszarem ograniczonym z własnością stożka $1 < p < \infty$, oraz $\{P_j\}$ będzie rodziną operatorów różniczkowych działających na funkcjach wektorowych $f = (f_1, \dots, f_k)$ t.że

(i) współczynniki dla $\{P_j^m\}$ są ciągłe w $\bar{\Omega}$

współczynniki dla $\{P_j^0\}$ są ograniczone w Ω

(ii) macierz $\{P_{j,i}^m(x,\xi)\}_{i=1,\dots,k}$ jest rzędu k dla dowolnego:

- $\xi \neq (0,\dots,0)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, gdy $x \in \Omega$
- $\xi \neq (0,\dots,0)$, $\xi \in \mathbb{C}^n$, gdy $x \in \partial\Omega$.

Wówczas istnieje stała C t.że dla dowolnego $f \in W_{p,p}^{\{P_j\}}(\Omega)$ zachodzi oszacowanie:

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le C \left(\|f\|_p + \sum_{j=1}^N \|P_j f\|_p \right)$$

{ nierówność koercytywna }

Uwaga: Stąd wynika, że $W^{m,p}(\Omega) = W_{p,p}^{\{P_j\}}(\Omega)$ i normy na tych przestrzeniach są równoważne (nierówność w drugą stronę zachodzi zawsze)

Warunki eliptyczności:

Mamy $P = \{P_j\}_{j=1,\dots,N}$ i rozważamy $\{P_j^m\}$ i $\{P_j^0\}$

i $P_j^m(x,\xi)$ - symbole części głównej

Def: Operator $P = \{P_j\}_{j=1,\dots,N}$ spełnia warunek eliptyczności typu $\ell(k)$ (C_i) $i=1,2$ jeśli macierz $\{P_{j,i}^m(x,\xi)\}_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,k}}$ jest rzędu k dla dowolnego $\xi \in \mathbb{C}^n$ t. że:

(C_1) $\xi \neq (0,\dots,0)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

(C_2) $\xi \neq (0,\dots,0)$, $\xi \in \mathbb{C}^n$

Uwaga: $(C_1) \Rightarrow (C_2)$

Przykład: 1) $k=1$, $Pf = \Delta f$ (funkcja skalarna, jeden operator)

$P(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ - niezal od x

$P(x,i\xi) = \sum_{i=1}^{n} (i\xi_i)^2 = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$

ma rząd 1, gdy $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\xi \neq (0,\dots,0)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, ale nie dla wszystkich $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi \neq (0,\dots,0)$

$n=2$, $\xi = (1,i)$, $P(x,i\xi) = -(1^2 + (i)^2) = 0$

zachodzi (C_1), ale nie (C_2): $(C_1) \not\Rightarrow (C_2)$

Inne przykłady: 1) $k=n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1,\dots,f_n)$

$\nabla f = (\nabla f_1, \dots, \nabla f_n) \in \mathbb{R}^n_n$

wypisane pionowo $\nabla f_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Coś jest nie tak z tym przykładem

$Pf = \{P_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \left(\frac{\nabla f + (\nabla f)^+}{2} \right)$ część symetryczna operatora gradientu

spełnia C_2

2) $Pf = (D^\alpha f)_{|\alpha|=m}$ $k=1$

$P(x,\xi) = (\xi^\alpha)_{|\alpha|=m}$ - spełnia C_2

Uwaga: w przypadku skalarnym $(k=1)$ warunek C_2 oznacza, że wielomiany $P_1(x, i\xi), \dots, P_\nu(x, i\xi)$ nie mają wspólnych nietrywialnych zer zespolonych.

Sytuacje, gdy P_j mają stałe współczynniki i są jednorodne rzędu m

Krok 1: Reprezentacje całkowe i nierówności dla operatorów o stałych współczynnikach.

Tw (Burienkov 1974) Niech Ω będzie obszarem gwiaździstym względem kuli B (t.zn. $w \in C_0^\infty(B)$, $\int_B w = 1$ $\forall y \in \Omega$ $\forall x \in B$ $[y, x] \subseteq \Omega$)

wówczas zachodzi następująca reprezentacja całkowa

$$f(x) = P_w^{m-1} f(x) + \sum_{\alpha, |\alpha|=m} \int_\Omega K_\alpha(x,y) D^\alpha f(y)\, dy$$

$$P_w^{m-1} f(x) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{\beta, |\beta|<m} D_y^\beta \Big(\frac{(y-x)^\beta w(y)}{\beta!} \Big) \Big\} f(y)\, dy$$

$$= \sum_{\alpha, |\alpha|<m} \int_\Omega \varphi_\alpha(y) f(y)\, dy \cdot x^\alpha$$ - projekcja na wielomiany rzędu $< m$, bo $f = P_w^{m-1} f$, gdy f jest wielomianem rzędu $\leq m-1$

$$K_\alpha(x,y) = \frac{(-1)^m m!}{\alpha!} \frac{(y-x)^\alpha}{|y-x|^n} \int_{|x-y|}^\infty w\Big(x + t\frac{y-x}{|y-x|}\Big) t^{n-1}\, dt$$

$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

$(y-x)^\alpha = (y_1 - x_1)^{\alpha_1} \dots (y_n - x_n)^{\alpha_n}$ $\quad \dfrac{1}{|x-y|^{n-m}}$, bo $|\alpha| = m$

$\leq |y-x|^{|\alpha|}$

Uwaga: Każdy obszar z własnością stożka jest skończoną sumą obszarów gwiaździstych względem kuli -

$\boxed{2}$ wystarczy otrzymać nierówności dla obszarów gwiaździstych względem kuli

Twierdzenie: Ω - jak poprzednio, jeśli $\{P_j\}$ są jednorodne rzędu m, mają stałe współczynniki i spełniają (C_2) wówczas zachodzi reprezentacja całkowa:

$$f(x) = P_w f + \sum_{i=1}^N \int_\Omega K_j(x,y) P_j f(y)\, dy$$ - wektor!

$R = \{u : P_j u = 0$ dla $j = 1, \dots, N\}$

$$K_j = \begin{pmatrix} K_{j,1} \\ \vdots \\ K_{j,k} \end{pmatrix}$$

$$f_i(x) = (P_i f)_i = \sum_i \int_\Omega K_{j,i}(x,y)\, P_j f(y)$$

$K_j(x,y) \in C^\infty(\Omega \times \Omega \setminus \{x = y\})$

$$K_j \sim \frac{1}{|x-y|^{n-m}}$$

$$(P_n f)_i = \sum \left(\int_\Omega \tilde{\varphi}_{\alpha,i}(y) f(y)\, dy \right) x^\alpha \quad , \quad \tilde{\varphi}_{\alpha,i} \in C_0^\infty(B)$$

Agnieszka Kałamajska Coll. Math.

<u>Tw:</u> Jeśli $\{P_j\}$ spełniają (C_1) wówczas

$\exists\, K_{j,i} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$K_{j,i} \sim \frac{1}{|x|^{n-m}}$ t.że $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} (K_j * P_j \varphi)(y)$

$$\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} K_{j,i}(x-y)\, P_j \varphi(y)\, dy \quad ; \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix}$$

<u>Przykład:</u> $k = 1$, $P = \Delta$; $n \geq 3$

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C_n}{|x-y|^{n-2}}\, \Delta\varphi(y)\, dy$$

$\frac{C_n}{|x-y|^{n-2}} = \Gamma(x-y)$, Γ - rozwiązanie podstawowe dla operatora Laplace'a

<u>Wniosek:</u> Niech $1 < p < \infty$, $P \subset \{P_j\}_{j=1,\dots,N}$, P- jednorodny rzędu m

i) Jeśli P spełnia (C_2) , Ω - ma własność stożka, to

$\forall\, u \in W_{P,p}^{\{P_i\}}(\Omega)$:

$$\|\nabla^m u\|_p \leq C \left(\|u\|_p + \sum_j \|P_j u\|_p \right)$$

ii) Jeśli P spełnia (C_1) , to

$\|\nabla^m u\|_p \leq C \left(\sum_j \|P_j u\|_p \right)$ $\forall\, u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$: $P_j u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $j = 1, \dots, N$

$\nabla^m K_j(x,y) = \underbrace{(D^\alpha K_j(x,y))_{\alpha, |\alpha| = m}}$ - duży wektor

warunek typu Calderone'a - Zygmunta

$u \mapsto \int K(x,y) u(y)\, dy$ daje operator $L^p \to L^p$

$$\|\nabla^m \varphi\|_p \leq \sum_j \sum_{\alpha, |\alpha|=m} \underbrace{\left\| \int D^\alpha K_j(x,y)\, P_j \varphi(y)\, dy \right\|_p}_{\leq L \|P_j \varphi\|_p} + C \sum_j \|P_j K\|_p$$

<u>Przykład:</u> Nierówność Korna : $1 < p < \infty$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

1) $\|\nabla u\|_p \leq C \, \|(\nabla u)_{sym}\|_p$

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{= A_{sym}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{= A_{antysym}}$$

2) $\|\nabla^{(2)} u\|_p \leq C \|\Delta u\|_p \qquad 1 < p < \infty$