

1. Półgrupy operatorów

Klasa H będzie przestrzenią metryczną zupełną. Endomorfizm układu dynamicznego jest opisana rodziną przekształceń $S(t)$, t.z. 0 , odwzorowywujących H w siebie i spełniających warunki (zgrupowa z $S(t)$ t.z. 0 półgrupy):

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0$$

$$S(0) = Id_H \quad (\text{identyczności})$$

Jeśli φ jest stanem układu dynamicznego w chwili t , to $S(s)\varphi$ jest stanem tego układu w chwili $t+s$.

$$u(t) = S(t)u_0, \quad t \geq 0$$

wtedy

$$u(t+s) = S(s)u(t) = S(s)S(t)u_0$$

Półgrupa $\{S(t)\}$ t.z. 0 będzie określone przez rozwiązanie równania różniczkowego (zagadnienie początkowo-brzojne):

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u_0 \in H$$

(H będzie przestrzenią Hilberta)

Przykłady:

(1) Równanie różniczkowe zwyczajne $\dot{u} = ku$, $u(0) = u_0$, określa grupę operatorów $S(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $S(t)x = S(t)u_0 = e^{kt}u_0$, $t \in \mathbb{R}$. Operatory $S(t)$ są liniowe, odwrotne, $S(t)^{-1} = S(-t)$.

(2) Równanie $\dot{u} = u^2$ nie określa półgrupy, gdyż rozwiązanie nie są określone na całym półprostej dla $u_0 \neq 0$.

(3) Zagadnienie Cauchy'ego

$$\dot{u} = |u|^{1/2}, \quad u(0) = u_0$$

nie możemy złożyć z tym zagadnieniem półgrupy dwukładowej w przestrzeni fazowej warunków początkowych ze względu na brak jednoznaczności rozwiązań.

(4) Rozważmy zagadnienie $\dot{u} = 2|u|^{1/2}(1-u)$, $u(0) = u_0$ (cięż).

Zagadnienie opisanie za pomocą zagadnienia Cauchy'ego nazwiemy dysypatywnym (niezliniowa dysypatywność), jeśli rozwiązanie tego obrotowego są ograniczone.

Dla równanie postaci $\dot{u} = -F(u)$ warunkiem dysypatywności jest np.

$$F(u)u \geq c + \delta|u|^2$$

Mamy wtedy $\dot{u} = -F(u) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u^2 = -F(u)u \leq c - \delta u^2$
t.zn. dla $x(t) = u(t)^2$ nazwiemy nierówności różniczkowej

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2\delta x(t) \leq 2c, \quad x(0) = x_0 \geq 0$$

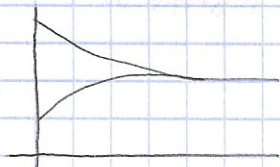
Stąd $x(t)$ jest funkcją ograniczoną dla $t \geq 0$, zatem $u(t)$ jest

funkcja ograniczona.

Mamy, dla $F(u) = -2|u|^{1/2}(1-u)$,

$$F(u)u = 2|u|^{1/2}(u-1)u = 2|u|^{5/2} - 2|u|^{3/2} \geq -C + C_1|u|^2$$

5) Nie zakładamy, że operatory $S(t)$ są bijekcjami



Wtedy nie możemy określić operatorów odwrotnych $S(t)^{-1}$.
W równaniach różniczkowych cząstkowych jest to sytuacja częsta, nieodwracalność jest związana z procesami fizycznymi, np. opisywanymi równaniem:

$$u_t - \Delta u + g(u) = f.$$

Będziemy zakładać, że

$S(t)$ jest ciągłym odwzorowaniem H w siebie $\forall t \geq 0$
(mniej istotna jest ciągłość względem t ; duża część teorii daje się prowadzić dla układów dynamicznych z czasem dyskretnym)

Dalej będziemy zakładać, że odwzorowanie $t \mapsto S(t)u$ jest ciągłe z $[0, \infty)$ w H dla $u \in H$.

Def: Dla $u_0 \in H$ orbitę (trajektorię) o początku w u_0 nazywamy zbiór:

$$\gamma^+(u_0) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)u_0$$

Analogicznie określamy trajektorię kończącą w u_0 , jeśli taka istnieje, oznaczamy ją przez $\gamma^-(u_0)$.

Wtedy zbiór $\gamma(u_0) = \gamma^+(u_0) \cup \gamma^-(u_0)$ jest kompletną trajektorią przechodzącą przez punkt u_0 .

Def: Dla $u_0 \in H$ (albo dla $B \subset H$) definiujemy zbiór $\omega(u_0)$ omega - granic (ω -granic) punktu u_0 jako:

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0}$$

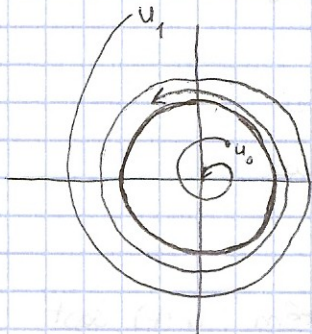
$\omega(u_0)$ jest zbiorem domkniętym, być może pustym.

$$\text{odpowiednio, } \omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B}$$

Przykłady:

1) Dla $\dot{u} = ku$, $u(0) = u_0$, $k > 0$, $\omega(u_0) = \emptyset$ dla $u_0 \neq 0$,
dla $k < 0$, $\omega(u_0) = \{0\}$

2)



$$\omega(u_1) = \text{okrąg}$$

$$\omega(u_0) = \{0\}$$



0,1 - pkt. stacjonarne

$$u_0 > 0, \text{ to } \omega(u_0) = \{1\}$$

$$u_0 \leq 0, \text{ to } \omega(u_0) = \{0\}$$

$$\omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = [0,1] = \omega(B) - \text{zwarty}$$

"główny" globalny atraktor

A powyższe wszystkie zbiory graniczne

- układ jest dysypatywny
- istnieje ograniczony zbiór pochłaniający, np. $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = B$
- mamy dwa punkty stacjonarne
- $[0,1]$ jest zbiorem niezmienniczym

4) w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ i w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych struktura zbiorów ω -granicznych może być bardzo skomplikowana, np. dla układu LORENZA, zbiór ω -graniczny dla dostatecznie dużej kuli o środku w 0 jest stałym atraktorem Lorenza

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = r x - y - x z$$

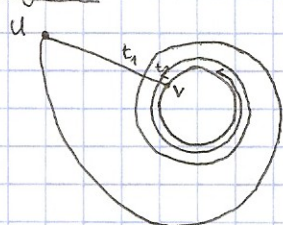
$$\frac{dz}{dt} = x y - b z, \quad \sigma, b, r > 0$$

Gleick: Chaos, Geniusz

Zbiór $\omega(u)$ możemy zdefiniować także następująco:

$$(\text{def}) \quad \omega(u) = \{v \in H : \text{istnieje ciąg } t_n \nearrow \infty \text{ t.je } S(t_n)u \rightarrow v \text{ } n \rightarrow \infty\}$$

Przykład:



$$S(t_n)u \rightarrow v$$

Podanie $\varphi \in \omega(B) \equiv$ istnieje ciąg $(\varphi_n) \subset B$ i ciąg czasów $t_n \nearrow \infty$ taki, że

$$S(t_n)\varphi_n \rightarrow \varphi, \quad n \rightarrow \infty$$

Lemat: Dla wszystkich $u \in H$ i $t \geq 0$ mamy:

(i) $\omega(S(t)u) = \omega(u)$ zbiór ~~graniczny~~ ω -graniczny jest taki sam dla wszystkich punktów na danej trajektorii

$$(ii) \quad S(t)\omega(u) \subset \omega(u)$$

(iii) Jeśli $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)u$ jest zbiorem prezwartym w H , to $S(t)\omega(u) = \omega(u) \neq \emptyset$, $\omega(u)$ - zwarty, $\text{dist}(S(t), \omega(u)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Dowód Lematu:

(i) $w(S(t)u) = w(u)$ - zbiór w -graniczny jest taki sam dla wszystkich punktów leżących na tej samej trajektorii

Niech $v \in w(u)$, wtedy istnieje ciąg $t_n \nearrow \infty$ taki, że $S(t_n)u \rightarrow v, n \rightarrow \infty$.
 Zatem $S(t_n)u = S(t_n - t)S(t)u \rightarrow v, n \rightarrow \infty, t_n - t \nearrow \infty$. Z definicji w -graniczności, $v \in S(t)u$. Jeśli $S(t_n)S(t)u \rightarrow v$, to $S(t_n + t)u \rightarrow v$,
 zatem $v \in w(S(t)u) \Rightarrow v \in w(u)$.

(ii) $S(t)w(u) \subset w(u)$ (zbiór w -graniczny punktu u jest dodatkowo niezmienniczy). Niech $v \in w(u)$. Chcemy pokazać, że $S(t)v \in w(u)$.
 Niech $S(t_n)u \rightarrow v$. Niech $T_n = t_n + t$.

$S(T_n)u = S(t_n + t)u = S(t)S(t_n)u \rightarrow S(t)v$ na podstawie ciągłości operatora $S(t)$.
 Stąd $S(t)v \in w(u)$ z def.

(iii) Połgrupa $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ jednostajnie zbiega, tzn. $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B$ prezwarty dla B ograniczonego i $t_0 = t_0(B)$, to $w(u)$ niepusty, zwarty, $S(t)w(u) = w(u)$ oraz $\text{dist}(S(t)u, w(u)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

$w(u) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u}$ - przecięcie rodziny zbiorów niepustych, zwartych, zstępujących, jest zbiorem zwartym, niepustym, tw. Cantora.

Pokażemy, że każdy element $v \in w(u)$ jest postaci $S(t)y$, dla pewnego $y \in w(u)$.

Niech $S(t_n)u \rightarrow v, T_n = t_n - t$. Rozważmy zbiór $\{S(T_n)u\}_{n=1}^{\infty}$. Jest to zbiór prezwarty. Zatem dla (τ_μ) , $S(\tau_\mu)u \rightarrow y \in w(u)$.

$$S(t)y = S(t) \lim_{\mu \rightarrow \infty} S(T_\mu)u \stackrel{\text{ciągłość}}{=} \lim_{\mu \rightarrow \infty} S(t)S(T_\mu)u = \lim_{\mu \rightarrow \infty} S(t)S(t_n - t)u = \\ = \lim_{\mu \rightarrow \infty} S(t_n)u = v$$

$\text{dist}(S(t)u, w(u)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy dla pewnego ciągu $t_n \nearrow \infty, \varepsilon > 0, \text{dist}(S(t_n)u, w(u)) \geq \varepsilon > 0$.

Istnieje więc $S(t_\mu)u \rightarrow v$ na podstawie zwartości, stąd $v \in w(u)$ i mamy sprzeczność.

Def: Punktem stałym (stacjonarnym, równowagą) nazywamy element $u_0 \in H$ t.ze $S(t)u_0 = u_0 \quad \forall t \geq 0$.

Zbiory niezmiennicze:

Def: Zbiór $X \subset H$ jest dodatnio niezmienniczy, jeżeli jest $S(t)X \supset X, t \geq 0$ oraz niezmienniczy, jeśli $S(t)X = X, t \geq 0$.

Przykłady: Punkt stacjonarny jest zbiorem niezmienniczym. Suma punktów stacjonarnych jest zb. niezmienniczym.

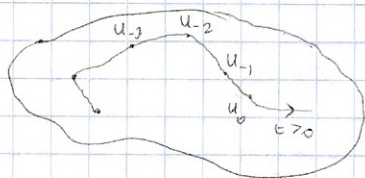
Orbita okresowa jest zbiorem niezmienniczym. Jeśli dla $u_0 \in H$ i pewnego $T > 0$ zachodzi $S(T)u_0 = u_0$, to $S(t)u_0$ istnieje dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ oraz $X_{u_0} = \{S(t)u_0, t \in \mathbb{R}\}$ jest zbiorem niezmienniczym.

• Każda kompletna trajektoria, czyli trajektoria określona dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ ($\gamma(u)$) jest zbiorem niezmienniczym.

• Jeśli operatory $S(t)$ są iniekcjami, X jest zbiorem niezmienniczym, $u_0 \in X$, to $S(t)u_0$ istnieje dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Stąd X rozkłada się na minimalne zbiory niezmiennicze postaci Xu_0 , $u_0 \in X$.

• Jeśli X jest zbiorem niezmienniczym, to przez każdy punkt $u_0 \in X$ przechodzi kompletna trajektoria (być może jest ich wiele)



Zauważmy, że z niezmienniczości X , $S(1)X = X$.

Zatem, dla $u_0 \in X$ istnieje element u_{-1} t.z. $S(1)u_{-1} = u_0$.

Możemy określić ciąg punktów u_k , $k=1, 2, 3, \dots$, t.z.

$S(1)u_{k-1} = u_k$. Punkty k łączymy krzywymi:

$\{S(t)u_{k-1} : t \in [0, 1]\}$ - krzywa łącząca punkty u_{k-1} , u_k .

Suma tych krzywych tworzy trajektorie ujemne dla punktu u_0 .

Dla $t \in [-k-1, -k]$, $k=0, 1, 2, \dots$

$$S(t)u_0 = S(\underbrace{t+k+1}_{\geq 0})u_{-k-1}$$

Lemat: Jeśli półgrupa $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ jest jednostajnie zwarta wtedy $\omega(B)$ jest, dla B ograniczonego, niepustego, zbiorem zwartym, niezmienniczym i przyciągającym zbiór B .

$$\text{dist}(S(t)B, \omega(B)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Dowód: Podobny do dowodu lematu z poprzedniego wykładu.

Def: Mówimy, że zbiór A przyciąga jednostajnie zbiór B i piszemy

$$\text{dist}(S(t)B, A) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty$$

Jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $t_\varepsilon = t_\varepsilon(B)$ t.z.

$$S(t)B \subset O_\varepsilon(A), \quad t \geq t_\varepsilon$$

Jest to równoważne temu, że:

$$\text{dist}(S(t)B, A) = \sup_{x \in S(t)B} \inf_{y \in A} \text{dist}(x, y) \rightarrow 0$$

Zbiory pościągające i globalne atraktory:

Def: Globalnym atraktorem dla półgrupy $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ w H nazywamy zbiór $A \subset H$ t.z.:

(i) A jest zwarty w H

(ii) A jest niezmienniczy, t.zn. $S(t)A = A, \quad t \geq 0$

(iii) A przyciąga (jednostajnie) zbiory ograniczone

Def: Zbiór $B \subset H$ jest pochtanijący, jeśli dla każdego zbioru ograniczonego $B \subset H$, $S(t)B \subset B$ dla wszystkich $t \geq t_0(B)$

Uwaga: Jeśli istnieje globalny atraktor, to istnieje też ograniczony zbiór pochtanijący, czyli istnienie ograniczonego zbioru pochtanijącego jest warunkiem koniecznym istnienia globalnego atraktora.

Twierdzenie (o istnieniu globalnego atraktora):

Niech H będzie przestrzenią metryczną zupełną, a $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ półgrupa operatorów ciągłych w H . Jeżeli półgrupa ta jest jednostajnie zwarta oraz istnieje ograniczony zbiór pochtanijący, to istnieje globalny atraktor A w H , dla tej półgrupy. $A = \omega(B)$.

Jeśli H jest przestrzenią Banacha, to A jest zbiorem spójnym.

Dowód: $A = \omega(B)$ jest zbiorem niepustym, zwartym, niezmienniczym, gdy ω jest zbiorem ω -granicznym zbioru ograniczonego B , a półgrupa jest jednostajnie zwarta. Pokażemy, że A przyciąga zbiory ograniczone.

Niech B_0 - zbiór ograniczony. Istnieje t_0 takie, że dla $t \geq t_0$ $S(t)B_0 \subset B$ zatem

$$\omega(B_0) = \omega(S(t)B_0) \subset \omega(B) = A$$

Ponieważ $\omega(B_0)$ przyciąga zbiór B_0 , $\omega(B_0) \subset A$, to A przyciąga B_0 .

(c.w) Pokazać, że A jest spójny. ■

Warunek jednostajnej zwartości półgrupy nie jest warunkiem najtęższym koniecznym dla istnienia atraktora globalnego. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, wraz z warunkiem istnienia ograniczonego zbioru pochtanijącego jest warunek asymptotycznej zwartości.

Def: Półgrupa $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ jest asymptotycznie zwarta, gdy dla dowolnego ciągu ograniczonego $\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ i dowolnego ciągu $t_n \nearrow \infty$, zbiór $\{S(t_n)u_n : n = 0, 1, \dots\}$ jest prezwarty w H .

(c.w) Pokazać cotnienie A przy stałym warunku.

Nierówności Gronwalla:

1) Klasyczna nierówność Gronwalla. Niech $g, h, y, \frac{dy}{dt}$ - funkcje lokalnie całkowalne na prostej $[t_0, \infty)$ takie, że

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h \quad \text{dla } t \geq t_0$$

Wtedy dla $t \geq t_0$,

$$(*) \quad y(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right) \left[y(t_0) + \int_{t_0}^t h(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s g(\tau) d\tau\right) ds \right]$$

Dowód:

Mnożymy obie strony przez $\exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right)$. Wtedy

$$\frac{d}{dt} \left(y(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right) \right) \leq h(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right)$$

Całkując tę nierówność w przedziale $[t_0, t]$ dostajemy nierówność (*).

Klasyczna nierówność Gronwalla pozwala na oszacowanie funkcji $y(t)$ na każdym skończonym odcinku $[t_0, t]$.

Jeśli $g = -\alpha < 0$, $h = \beta > 0$, α, β - stałe, to z (*) mamy

$$y(t) \leq y(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) \leq y(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha}$$

2) Jednostajna nierówność Gronwalla. Niech g, h, y - funkcje dodatnie, lokalnie całkowalne na $[t_0, \infty)$, $\frac{dy}{dt}$ - lokalnie całkowalna.

Niech $\frac{dy}{dt} \leq gy + h$ dla $t \geq t_0$.

$$\text{oraz} \quad \int_t^{t+r} g(s) ds \leq a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s) ds \leq a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s) ds \leq a_3 \quad \text{dla } t \geq t_0$$

gdzie a_1, a_2, a_3 - stałe dodatnie, $r > 0$ - ustalone. Wtedy

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2 \right) \exp(a_1) \quad \text{dla } \forall t \geq t_0.$$

Zauważmy, że jednostajna nierówność Gronwalla pozwala na oszacowanie nierówności różniczkowej na nieskończonym przedziale $[t_0 + r, \infty)$.

Dowód: Założmy, że $t_0 \leq t \leq s \leq t+r$. Mnożymy nierówność różniczkową przez

$$\exp\left(-\int_t^s g(\tau) d\tau\right) \quad \text{i dostajemy}$$

$$\frac{d}{ds} \left(y(s) \exp\left(-\int_t^s g(\tau) d\tau\right) \right) \leq h(s) \exp\left(-\int_t^s g(\tau) d\tau\right) \leq h(s) \quad \forall s \geq t$$

Całkujemy w przedziale $[s, t+r]$, dostajemy

$$y(t+r) \leq y(s) \exp\left(\int_s^{t+r} g(\tau) d\tau\right) + \left(\int_s^{t+r} h(\tau) d\tau\right) \exp\left(\int_t^{t+r} g(\tau) d\tau\right)$$

Całkując tę nierówność względem s w przedziale $[t, t+r]$ dostajemy jednostajną nierówność Gronwalla.

Przykład zastosowania nierówności typu Gronwalla do badania dynamiki rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych.

$$(P) \begin{cases} u_t - d \Delta u + g(u) = 0 & \text{w } \Omega \times \mathbb{R}^+, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ ograniczony} \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{w } \Omega \end{cases}$$

$u = u(x, t)$ - funkcja skalarna, $g(s) = \sum_{j=0}^{2p-1} b_j s^j$, $b_{2p-1} > 0$, $d > 0$

Niech $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$. Mamy

Twierdzenie: (o istnieniu jednoznaczności)

Jeśli $u_0 \in H$, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (P) t.ż.

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{2p}(0, T; L^{2p}(\Omega)) \quad \forall T > 0$$

$$u \in C([0, \infty); H) \quad (\mathbb{R}_+, t \rightarrow u(t) \in H)$$

$$u \in C((0, T); V) \cap L^2((\eta, T); H^2(\Omega)), \quad \forall 0 < \eta < T$$

Odzworowanie $u_0 \rightarrow u(t)$ jest ciągłe w H dla $t > 0$. Jeżeli ponadto $u_0 \in V$, to

$$u \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \quad \forall T > 0$$

Dowód: odkładamy na później

Rozważmy prosty przykład:

$$\begin{cases} u_t - d \Delta u + u^3 - u = 0 \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Wykażemy istnienie globalnego atraktora, korzystając z jednostajnej nierówności Gronwalla

1) Pokażemy ograniczonąść rozwiązań w przestrzeni fazowej H i istnienie ograniczonego zbioru pochłaniającego w H .

2) Wykażemy jednostajną zwartość półgrupy $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $S(t)u_0 = u(t)$ - rozwiązanie zagadnienia (P_1) oraz istnienie ograniczonego zbioru pochłaniającego w V .

ad 1) Pierwsza nierówność energetyczna: oszacowanie a priori

Mnożymy obie strony równania przez u i całkujemy w Ω

$$\int_{\Omega} (u_t - d \Delta u + u^3 - u) u \, dx = 0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 \, dx + d \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right|^2 \, dx +$$

$$+ \int_{\Omega} (u^3 - u) \, dx \quad (\text{nie dbamy o kłopoty})$$

$$\text{Inaczej, } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + d \|u(t)\|^2 + \int_{\Omega} (u^3 - u) \, dx = 0, \text{ gdzie}$$

$$\|u\| = \sqrt{\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx}, \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 \, dx}$$

$|\cdot|$ - norma w H , $\|\cdot\|$ - norma w V (tu korzystamy z nierówności Poincarégo $|u| \leq c(\Omega) \|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ogr.)

Ponieważ $u^2 \leq \frac{u^4}{2} + \frac{1}{2}$, to $\int_{\Omega} (u^3 - u) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^4 dx - \frac{1}{2} |\Omega|$

i mamy:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + d \|u(t)\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^4 dx \leq \frac{1}{2} |\Omega| = c_0 \quad (E1)$$

Korzystając z nierówności Poincarégo mamy

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \lambda |u(t)|^2 \leq c_0, \quad \lambda > 0$$

$$\frac{1}{2} |u(T)|^2 + d \int_0^T \|u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u^4 dx dt \leq c_0 T + \frac{1}{2} |u(0)|^2$$

Klasyczna nierówność Gronwalla daje:

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 e^{-\lambda t} + \frac{c_1}{\lambda}$$

Każda trajektoria jest ograniczona w H , a np. kula $B(0, \varrho)$,

$\varrho = \frac{2c_1}{\lambda}$ jest ograniczona zbiorem pochłaniającym w H .

$S(t)B_0 \subset B(0, \varrho)$ dla $t \geq t_0(B_0)$, B_0 - zb. ograniczony

28.10.2010

2) Całkując (E1) względem t od t do $t+r$, $t \geq t_0$, mamy:

$$d \int_t^{t+r} \|u(t)\|^2 dt \leq c_0 r + |u(t)|^2 \leq c_0 r + \varrho^2 = a_3' = d a_3$$

dla $t \geq t_0$ oraz $u(0) \in B_0$. Oszacowanie to będzie potrzebne przy korzystaniu z jednostajnej nierówności Gronwall. Chcemy znaleźć nierówność różniczkową dla funkcji $t \mapsto \|u(t)\|^2$.
Mnożymy równanie przez $-\Delta u$ i całkujemy w Ω

$$-\int_{\Omega} (u_t - d\Delta u + u^3 - u) \Delta u dx = 0 \quad \text{Mamy kolejno (uwzględniając war. brzegowe)}$$

$$-\int_{\Omega} u_t \Delta u dx = \int_{\Omega} (\nabla u)_t (\nabla u) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2$$

$$-\int_{\Omega} u^3 \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla(u^3) \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} u^3 \nabla u \cdot n d\vec{\sigma}_2 = \int_{\Omega} 3u^2 |\nabla u|^2 dx$$

$$\int_{\Omega} u \Delta u dx = - \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx$$

Otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + d |\Delta u(t)|^2 + 3 \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx = \|u(t)\|^2$$

Na zbiorze $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, do którego należą rozwiązania dla $t > 0$, norma w $H^2(\Omega)$ jest równoważna normie zadanej przez $|\Delta u|$, gdyż

$$\begin{cases} -\Delta u = f \in L^2(\Omega), & \Omega \in C^2 \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{regularności równań eliptycznych})$$

i dalej,

$$\|u\| \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

Zatem mamy:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \left(\frac{d}{c} - 1\right) \|u(t)\|^2 \leq 0 \quad (E2)$$

Jeśli $\frac{d}{c} - 1 > 0$, to $\|u(t)\| \searrow 0$ wykładniczo szybko

i także $|u(t)| \searrow 0$ tak samo. (trywialna dynamika)

Jeśli $\frac{d}{c} - 1 = -\lambda_1 < 0$, to mamy $\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq 2\lambda_1 \|u(t)\|^2$, $\lambda_1 > 0$.

$\propto$ jednostajnej nierówności Gronwalla $\left(\int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \alpha_3\right)$

$$\|u(t+r)\|^2 \leq \frac{\alpha_3}{r} \exp(2\lambda_1 r) = g_1 \quad \text{dla } t \geq 0$$

dla $u_0 \in B_0$, dla $t \geq t_0$ $|u(t)| \leq g$

Zatem, dla $t \geq t_0 + r$ $S(t)B_0$ leży w kuli w przestrzeni V $B_V(0, g_1)$.

Ponieważ ograniczone zbiory w V są prezwarte w H , to

$$\bigcup_{s > t+r} S(s)B_0 \subset B_V(0, g_1)$$

jest zbiorem prezwartym w H . Oznacza to jednostajną zwartość półgrupy $\{S(t)\}$.

Wnioskujemy, że rozważamy układ dynamiczny ma globalny atraktor A .

Nyższa regularność atraktora:

Pokażemy, że globalny atraktor dla rozważanego równania reakcji-dyfuzji jest ograniczony w przestrzeni $L^\infty(\Omega)$, tzn. istnieje stała M t.ze

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \leq M \quad \text{dla dowolnego } u \in A$$

Będą nam potrzebne własności funkcji u_+, u_- .

Dla $u \in L^2(\Omega)$ określamy część dodatnią u_+ funkcji u

$$u_+(x) = \begin{cases} u(x), & u(x) > 0 \\ 0, & u(x) \leq 0 \end{cases}$$

i podobnie, część ujemną

$$u_-(x) = \begin{cases} u(x), & u(x) < 0 \\ 0, & u(x) \geq 0 \end{cases}$$

Jeśli $u \in L^2(\Omega)$, to $u_+, u_- \in L^2(\Omega)$ oraz $|u_+| \leq |u|$, $|u_-| \leq |u|$ (normy w $L^2(\Omega)$)

Lemat: Niech $u \in H^1(\Omega)$. Wtedy również $u_+, u_- \in H^1(\Omega)$ oraz

$$\|u_+\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \|u_-\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Mamy przy tym

$$Du_+(x) = \begin{cases} Du(x), & u(x) > 0 \\ 0, & u(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$Du_-(x) = \begin{cases} -Du(x), & u(x) < 0 \\ 0, & u(x) \geq 0 \end{cases}$$

Pokażemy najpierw, że istnieje stała $M > 0$ taka, że $(u-M)_+ = 0$, skąd $u \leq M$. Mnożymy równanie różniczkowe przez $(u-M)_+$ i całkujemy w Ω :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(x,t)-M)_+^2 dx + d \int_{\Omega} |\nabla(u-M)_+|^2 dx = \int_{\Omega} (u-u^3)(u-M)_+ dx$$

$$u_t (u-M)_+ = (u-M)_t (u-M)_+ = ((u-M)_+)_t (u-M)_+$$

~~skąd~~ $u=0$ na $\partial\Omega$, $(u-M)_+ = 0$ na $\partial\Omega$

$$\int_{\Omega} -d \Delta u (u-M)_+ dx = 0 \Rightarrow (u-M)_+ = 0 \text{ w } \Omega, \quad u \leq M \quad \forall M > 0.$$

Niech M będzie takie, że $u-u^3 \leq 0$ dla $u \geq M$. wtedy

$$\int_{\Omega} (u-u^3)(u-M)_+ dx \leq 0$$

Ponieważ $u=0$ na $\partial\Omega$, to także $(u-M)_+ = 0$ na $\partial\Omega$, stąd

$(u-M)_+ \in H_0^1(\Omega)$. Mamy zatem nierówność Poincarégo

$$\int_{\Omega} (u(x,t)-M)_+^2 dx \leq c_0^2 \int_{\Omega} |\nabla(u-M)_+|^2 dx$$

skąd

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(x,t)-M)_+^2 dx + \frac{2d}{c_0} \int_{\Omega} (u(x,t)-M)_+^2 dx \leq 0$$

zatem

$$\int_{\Omega} (u(x,t))_+^2 dx \leq e^{-ct} \int_{\Omega} (u(x,0)-M)_+^2 dx \quad c = \frac{2d}{c_0} > 0, \quad t > 0$$

Niech $u = u(x) \in A$. Z niezmienniczości A , dla każdej liczby naturalnej n istnieje $u_n \in A$ t.ze $S(n)u_n = u$. Mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u(x)-M)_+^2 dx &= \int_{\Omega} (u_n(x,n)-M)_+^2 dx \leq ce^{-cn} \int_{\Omega} (u_n(x)-M)_+^2 dx \leq \\ &\leq ce^{-cn} \cdot C(M, A), \text{ gdzie } A \text{ jest zbiorem ograniczonym w } H. \end{aligned}$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Stąd wnioskujemy, że

$$\int_{\Omega} (u(x)-M)_+^2 dx = 0, \text{ a stąd, że } (u(x)-M)_+^2 = 0 \text{ i dalej, że}$$

$$(u-M)_+ = 0 \Rightarrow u \leq M, \quad u \in A,$$

Pokazaliśmy, że istnieje stała $M > 0$, że $u(x) \leq M$ p.w. dla $u \in A$.

Podobnie, przeprowadzając to rozumowanie z funkcją $(u-M)_-$ dostajemy, że $u(x) \geq -M \Rightarrow \|u\|_{\infty} \leq M$.

4.11.2010

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u^3 - u = 0 & \text{w } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}, \Omega \text{-ogr w } \mathbb{R}^n \text{ klasy } C^L$$

Pokazaliśmy, że (przy założeniu istnienia rozwiązania i jednoznaczności) istnienie globalnego atraktora A w H^1 spełniającego warunki: A jest ograniczonym zbiorem w V i w $L^\infty(\Omega)$.

Pokażemy teraz, że A jest ograniczonym zbiorem w $H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$. Przy założeniu, że Ω jest klasy C^∞ metoda, którą zastosujemy pozwala pokazać, że A jest ograniczonym zbiorem w $H^k(\Omega)$ dla dowolnego $k \geq 1$ i w konsekwencji $A \subseteq C^\infty(\bar{\Omega})$.

Wykorzystamy fakt, że A jest ograniczonym zbiorem w $L^\infty(\Omega)$ do pokazania, że A jest ograniczonym zbiorem w $H^2(\Omega)$. Idea jest taka: zapiszemy równanie w postaci:

$$- \Delta u = u^2 - u^3 - u_t \quad u = u(x, t)$$

Jeśli pokażemy, że prawa strona jest w przestrzeni $L^2(\Omega)$, to z zagadnieniem

$$\begin{cases} - \Delta u = f \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \Omega \in C^2 \end{cases}$$

wynika, że $u \in H^2(\Omega)$, $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Pokażemy, że ograniczenie prawej strony w $L^2(\Omega)$ jest jednostajne ze względu na t .

wiemy, że $u - u^3 \in L^2(\Omega)$, z tego, że $u \in L^\infty(\Omega)$, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$.

(Inaczej, $u \in V$, $\|u\| \leq C_1$ (jednostajnie względem t). Dla $n=3$ mamy: $\|f\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^2(\Omega)}$.)

Przeprowadzamy oszacowania a priori, ten zakładamy, że rachunki formalne dają się uzasadnić. Określamy $f(u) = u - u^3$. Chcemy pokazać, że $u_t(\cdot, t)$ jest ograniczone w $L^2(\Omega)$ jednostajnie ze względu na t .

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u^3 - u = 0 & \text{w } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

1) Mnożymy równanie różniczkowe przez u_t i całkujemy w Ω . Dodajemy

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = \int_{\Omega} f(u) u_t dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u) dx,$$

gdzie $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$

Całkujemy obie strony w przedziale $(0, t)$:

$$\int_0^t \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{d}{2} \|u(t)\|^2 = \frac{d}{2} \|u(0)\|^2 + \int_{\Omega} F(u(t)) dx - \int_{\Omega} F(u(0)) dx$$

nasz cel to pokazać, że $\int_0^t \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq K$ dla $u \in A$

Wiemy, że $\|u(0)\|^2$ jest ograniczone przez c_1 . Dalej mamy

$$\left| \int_{\Omega} F(u(x,t)) dx - \int_{\Omega} F(u(x,0)) dx \right| \quad (*)$$

dla $u, v \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} F(u(x)) dx - \int_{\Omega} F(v(x)) dx \right| &\leq \int_{\Omega} \left| \int_{v(x)}^{u(x)} f(s) ds \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \sup_{s \in [v(x), u(x)]} |f(s)| |u(x) - v(x)| dx \leq \sup_{w \in \mathcal{A}} |f(w)| \int_{\Omega} |u(x) - v(x)| dx \leq \\ &\leq \|f\|_{\infty} \cdot |\Omega|^{1/2} \|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2(c_1, |\Omega|, f) \end{aligned}$$

$$(*) \leq K_1, \text{ w sumie } \int_0^t \|u_t(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq K \quad (**)$$

2) Różniczkujemy równanie względem t i mnożymy przez $t u_t$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t - \Delta(u_t) = f'(u) u_t \quad | \cdot t^2 u_t$$

i całkujemy w Ω . Dostajemy

$$(t^2 u_t, \partial_t u_t) = t^2 (u_t, \Delta(u_t)) + t^2 (u_t, f'(u) u_t)$$

$$\text{Stąd } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|t u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - t \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^2 d \|u_t\|^2 \leq t^2 L \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Całkujemy tę nierówność w przedziale $(0, t)$

$$\frac{1}{2} \|t u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t t^2 d \|u_t\|^2 dt \leq \int_0^t (t + L t^2) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \|0 \cdot u_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \|t u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \|t u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|0 \cdot u_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Położymy $t=1$ i skorzystamy z oszacowania $(**)$. Dostajemy

$$\|u_t(1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2(1+L)K$$

Skorzystamy z tego, że $u \in \mathcal{A}$. u leży na pewnej trajektorii $\gamma(u)$.
Zatem, dla pewnego $v \in \mathcal{A}$, $u = \sigma(1) v$. $u(x, t) = v(x, 1)$.
Stąd wynika, że

$$\|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2(1+L)K \quad \text{dla każdego } t \geq 0$$

Do pokazywania coraz wyższych regularności rozwiązań

1) mnożymy równanie przez $\varphi = D_x^k D_t^l u$

2) otrzymujemy nierówności różniczkowe dla $|u|, |\nabla u|, |\nabla u_t|, |u_t|, |D_x^m D_t^n u|$

Całkujemy w obszarze Ω , uzyskujemy oszacowania jednostajne względem czasu na te wielkości $|D_x^m D_t^n u|$ oraz oszacowania

$$\int_0^t |D_x^s D_t^s u| dt \quad \text{na pewne wyższe pochodne}$$

2) Różniczkujemy równanie różniczkowe $D_x^m D_t^n$ i robimy to w punkcie pierwszym.

W końcu, pokazaliśmy że u jest ograniczone w $H^2(\Omega)$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|f(u) - u_t\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \cdot 2(1+\lambda)K \quad K(C_1, C_2, M)$$

Rozwiązanie uogólnione Propozycja (?)

$$\int_0^t \int_{\Omega} (u_t - d \Delta u + u^3 - u) \varphi \, dx \, dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T))$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} [u \cdot u_t + d \nabla u \cdot \nabla \varphi + (u^3 - u) \varphi] \, dx \, dt = \int_{\Omega} u(x, 0) \varphi(x, 0) \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T))$$

$$u \in L^1(\Omega \times (0, T)), u \in L^3(\Omega \times (0, T))$$

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

Pokażemy, że $S(t)$ są iniekcjami na abstrakcyjne, tzn. że układ dynamiczny ograniczony do A jest pełnym układem dynamicznym ($S(t)$ jest grupą). Mamy zatem klasyczny układ dynamiczny na przestrzeni metrycznej zwartej.

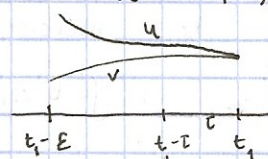
Nemytski, Stepanov 1934

18.11.2010

Jednoznaczność w tył dla równania ewolucyjnego

$$\frac{du}{dt} + N(u(t)) = 0$$

$$u(t_1 - \tau) = v(t_1 - \tau) \\ S(\tau)u(t_1 - \tau) = S(\tau)v(t_1 - \tau)$$



Załóżmy, że $u_t + N(u) = v_t + N(v) = 0$ dla $t_1 - \epsilon < t < t_1$

oraz, że $u(t_1) = v(t_1)$

Czy prawdziwe jest, że $u(t) = v(t)$ na całym odcinku $(t_1 - \epsilon, t_1)$?

W języku półgrupy $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ pytanie wygląda tak: czy z tego, że

$$\text{dla } \tau \in (0, \epsilon) \quad S(\tau)u(t_1 - \tau) = S(\tau)v(t_1 - \tau)$$

$$\text{wynika, że } u(t_1 - \tau) = v(t_1 - \tau)$$

Jest to pytanie o iniektywność operatorów $S(\tau)$. Jeśli dla wszystkich $\tau \in (0, \infty)$ ($\epsilon = \infty$) mamy

$$u(t_1 - \tau) = v(t_1 - \tau)$$

to operatory $S(t)$ są wzajemnie odwzajemniające dla wszystkich $t > 0$.

Ogólne twierdzenie:

Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ - przestrzeń Hilberta, A - operator liniowy, dodatnio określony, samosprężony, nieograniczony w H , z dziedziną $D(A) \subset H$. Oznaczamy przez V dziedzinę $D(A^{1/2})$, wyposażoną w normę

$$\|v\| = |A^{1/2} v| \quad \forall v \in D(A^{1/2}) \\ = (v, Av)^{1/2} \quad \forall v \in D(A)$$

Przykład $Au = -\Delta u$, $H = L^2(\Omega)$, Ω - ograniczony, $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$

Zakładamy, że funkcja $w \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$ spełnia równanie

$$w_t(t) + Aw(t) = h(t, w(t)) \quad t \in (0, T)$$

gdzie h jest funkcją z $(0, T) \times V \rightarrow H$ t.z.e

$$\|h(t, w(t))\| \leq k(t) \|w(t)\| \quad \text{dla} \quad p.w. \quad t \in (0, T), \quad k \in L^2(0, T)$$

Oznaczmy przez $\Lambda(t)$ wielkość $\Lambda(t) = \frac{\|w(t)\|^2}{|w(t)|^2}$

Lemat: Przy powyższych założeniach

$$\Lambda' \leq 2k^2\Lambda \quad \text{dla} \quad t \in (0, T)$$

stąd $\Lambda(t) \leq \Lambda(0) \exp(2 \int_0^t k^2(\tau) d\tau), \quad t \in (0, T)$

Dowód:

Różniczkując, mamy,

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{((w', w))}{|w|^2} - \frac{\|w\|^2}{|w|^4} (w', w) = \frac{1}{|w|^2} (w', Aw - \Lambda w) = \frac{1}{|w|^2} (h - Aw, Aw - \Lambda w) =$$

$$\frac{1}{|w|^2} (h - (Aw - \Lambda w), Aw - \Lambda w) =$$

$$(\text{gdyż } (Aw - \Lambda w, \Lambda w) = \Lambda(Aw - \Lambda w, w) = \Lambda(\|w\|^2 - \Lambda|w|^2) = 0)$$

$$= -\frac{|Aw - \Lambda w|^2}{2|w|^2} + \frac{1}{2} \frac{|h|^2}{|w|^2} \leq -\frac{|Aw - \Lambda w|^2}{|w|^2} + \frac{1}{2} k^2 \Lambda$$

Zatem

$$\frac{d\Lambda}{dt} + \frac{|Aw - \Lambda w|^2}{|w|^2} \leq k^2 \Lambda$$

Twierdzenie Przy powyższych założeniach, jeśli $w(T) = 0$, to $w(t) = 0$ dla wszystkich $t \in (0, T)$

Dowód: Założmy przeciwnie, że $|w(t_0)| \neq 0$ dla pewnego $t_0 \in [0, T)$. Wtedy z ciągłości funkcji $t \rightarrow |w(t)|$, $|w(t)| \neq 0$ na pewnym odcinku $(t_0, t_0 + \varepsilon)$.

$$(w \in C([0, T]; H), \text{ bo (tak jak było na seminarium) } w_t + Aw = h \in H \\ w \in L^2(0, T; H), w_t \in L^1(0, T; H) \Rightarrow w \in C([0, T]; H))$$

Oznaczmy przez $t_1 \leq T$ największy czas, taki że $|w(t)| \neq 0$ dla $[t_0, t_1)$. Wtedy $|w(t_1)| = 0$.

Na odcinku $[t_0, t_1)$ funkcja $t \rightarrow \log \frac{1}{|w(t)|}$ jest dobrze określona.

Mamy, $\frac{d}{dt} \log \frac{1}{|w(t)|} = \frac{d}{dt} (-\frac{1}{2} \log |w|^2) = -\frac{(w', w)}{|w|^2} = -\frac{(h - Aw, w)}{|w|^2} = \Lambda - \frac{(h, w)}{|w|^2} \leq$

$$\leq \Lambda + k\Lambda^{1/2}$$

Zatem $\frac{d}{dt} \log \frac{1}{|w(t)|} \leq 2\Lambda + k^2, \quad k\Lambda^{1/2} \leq k^2 + \Lambda$

Całkujemy w przedziale (t_0, t) , $t \in (t_0, t_1)$

$$\log \frac{1}{|w(t)|} \leq \log \frac{1}{|w(t_0)|} + \int_{t_0}^t (2\Lambda(\tau) + k^2(s)) ds$$

stąd wynika, że $\log \frac{1}{|w(t_1)|}$ jest ograniczony. Sprzeczność z tym, że $|w(t_1)| = 0$.

Równanie reakcji-dyfuzji. Injektywność na atraktorze

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u - u^3 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Twierdzenie: Równanie reakcji - dyfuzji ma własność iniektywności na atraktorze.

Jeśli $u(T) = v(T)$ dla pewnego $T > 0$ i dwóch trajektorii $u(t), v(t)$, to $u(t) = v(t)$ na $[0, T]$.

Dowód: Niech $w = u - v$. Wtedy

$$\frac{dw}{dt} + Aw = h = (u - v) + (u - v)(u^2 + uv + v^2)$$



Na $\mathcal{A}$ mamy, $u \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$, $\mathcal{A}$ jest ograniczonym zbiorem w V i w $H^2(\Omega)$, $D(A) = V \cap H^2(\Omega)$. (bo $u, v \in L^\infty(\Omega)$, $|u|_\infty, |v|_\infty \leq M$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |h(x, t)|^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega} (u - v)^2 dx + 2 \int_{\Omega} (u - v)^2 (v^2 + uv + u^2) dx \leq 2c_0 \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v)^2 dx + 2c(\mathcal{A}) \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v)^2 dx \\ &\equiv c_1 \|u - v\|^2 = c_1 \|w\|^2 \end{aligned}$$

c_1 zależy od c_0, M stąd $\|w\|^2 \leq c_1 \|w\|^2$

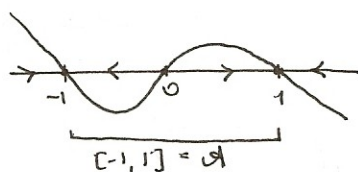
Twierdzenie: ograniczenie półgrupy $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ do atraktora, $S(t): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ daje pełny układ dynamiczny.

$(\mathcal{A}, \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}})$

z normą indukowaną z H .

$$\dot{u} = u - u^3$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow u(t) \rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$



Funkcjonał Lapunowa

Def: Funkcjonałem Lapunowa na zbiorze $\mathcal{A}$ nazywamy funkcjonal

$\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, który jest

(i) ciągły na $\mathcal{A}$ (w topologii H , $\mathcal{A} \subset H$)

(ii) nierosnący na trajektoriach, ($t \rightarrow \Phi(u(t))$ - jest nierosnąca),

Ponadto

(iii) jeśli $\Phi(u(t)) = \Phi(u_0)$ dla pewnego $t > 0$, to u_0 jest punktem stałym

Lemat: Funkcjonał

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 + F(u(x, t)) \right) dx,$$

gdzie $F(u) = \int_0^u f(\sigma) d\sigma$, jest funkcjonalą Lyapunowa dla równania

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad (\text{potem będziemy rozważali przykład } f(u) = u - u^3)$$

Dowód: Mamy

$$\frac{d\Phi}{dt}(u(t)) = - \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx \leq 0.$$

Zatem, $\Phi(u(t))$ maleje wzdłuż trajektorii. Jeśli $\Phi(u(t)) = \Phi(u(0))$, to $u(t) = u(0)$ dla $t \in (0, T)$.

Ciągłość Φ na $\mathcal{A}$. Mamy

$$\|u\|^2 = (u, u) = (u, Au) \leq |u| \cdot |Au| \leq |u| \cdot \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq M_2 |u|$$

$$\left| \int_{\Omega} (F(u) - F(v)) dx \right| \leq \int_{\Omega} \left| \int_{v(x)}^{u(x)} f(s) ds \right| dx \leq \|f\|_{\infty} \int_{\Omega} |u(x) - v(x)| dx \leq \|f\|_{\infty} |\Omega|^{1/2} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}$$

25.11.2010

Istnienie funkcyjonu Lyapunowa pozwala powiedzieć więcej o dynamice rozwiązań.

Rozważamy układ dynamiczny $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ na przestrzeni metrycznej zupełnej, spójnej H . Niech E oznacza zbiór punktów stacjonarnych: $E = \{u \in H : S(t) = u \ \forall t \geq 0\}$. E może być zbiorem dyskretnym bądź nie. Niech $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ będzie jednostajnie zwarte (asymptotycznie zwarte).

Lemat: Niech $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ma funkcję Lyapunowa Φ na zbiorze pochlaniającym, dodatnio niezmienniczym. Wtedy dla każdego $u_0 \in H$, zbiór ω -graniczny $\omega(u_0) \subset E$ lub $\omega(u_0) \in E$ jeśli E jest dyskretny.

Dowód: Wiemy, że zbiór $\omega(u_0)$ jest niepusty, zwarty niezmienniczy. Weźmy $u_0 \in H$. Wtedy $\Phi(S(t)u_0)$ dla $t \geq t_0$ jest dobrze określone oraz

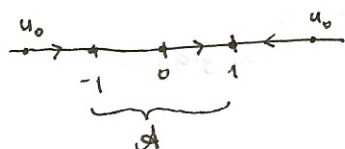
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(S(t)u_0) = \inf_{t \geq t_0} \Phi(S(t)u_0) \stackrel{?}{=} \Phi|_{\omega(u_0)}$$

Niech $v \in \omega(u_0)$. Wtedy istnieje ciąg $t_n \rightarrow \infty$, t.z. $S(t_n)u_0 \rightarrow v$. Stąd $\Phi(S(t_n)u_0) \rightarrow \Phi(v)$ z ciągłości Φ .

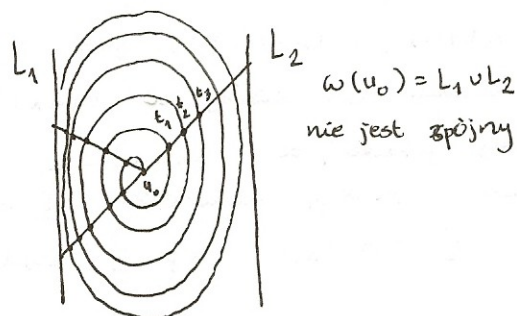
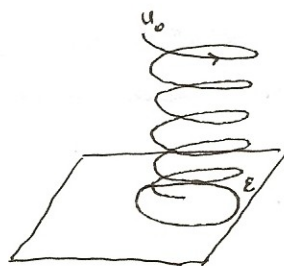
Jeśli $\bar{v} \in \omega(u_0)$, to podobnie $\Phi(S(t_n)u_0) \rightarrow \Phi(\bar{v})$, ale istnieje granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(S(t)u_0)$, stąd $\Phi(v) = \Phi(\bar{v})$. Zatem Φ jest stała na $\omega(u_0)$ i równa tej granicy.

Niech teraz $v \in \omega(u_0)$ i $S(t)v$, $t \geq 0$ jest trajekcją w $\omega(u_0)$. Ale z powyższego $\Phi(v) = \Phi(S(t)v)$. Z definicji funkcji Φ , v jest punktem stacjonarnym. Stąd $\omega(u_0) \subset E$.

Jeżeli E jest zbiorem dyskretnym, to $\omega(u_0)$ jako zbiór spójny spełnia $\omega(u_0) \in E$, t.zn. jest punktem stacjonarnym.



$$\begin{aligned} \dot{u} &= u - u^3 \\ [-1, 1] &= \omega \\ \{-1, 0, 1\} &= E \end{aligned}$$



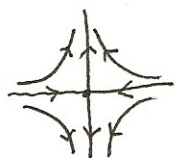
$\omega(u_0) = L_1 \cap L_2$
nie jest spójny

Def: rozmiarowości niestabilnej $\mathcal{M}_+(X)$ zbioru niezmienniczego X .

$u_* \in \mathcal{M}_+(X) \equiv u_*$ należy do pełnej trajektorii $\gamma(u_*) = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{S(t)u_* : t \in \mathbb{R}\}$

u_* jest przyciągany do X , gdy $t \rightarrow -\infty$.

~~$\text{dist}(S(t)u_*, X) \rightarrow 0$~~ , gdy $t \rightarrow -\infty$.



Lemat: Rozmiarowości niestabilna zbioru X jest zbiorem niezmienniczym, t.zn. $S(t)\mathcal{M}_+(X) = \mathcal{M}_+(X)$ dla $t > 0$.

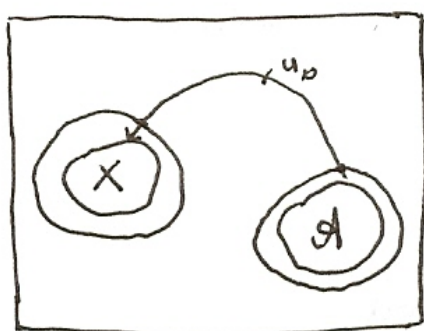
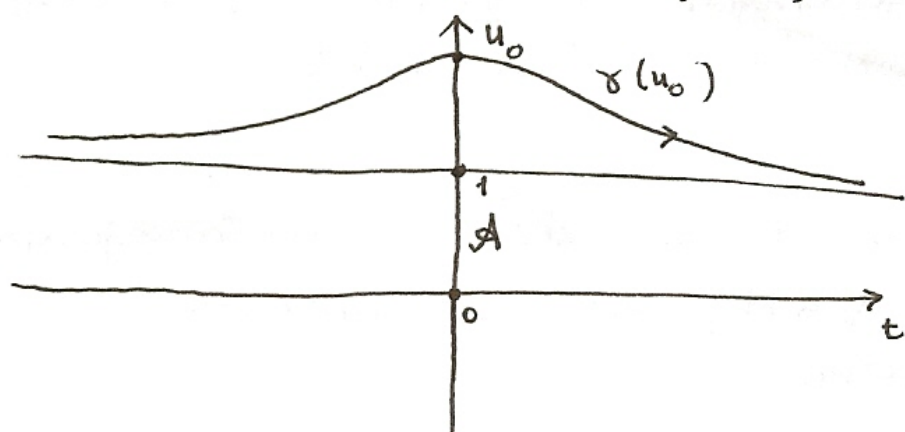
Dowód: Niech $u_* \in \mathcal{M}_+(X)$. Wtedy $\gamma(u_*) \subset \mathcal{M}_+(X)$. Zatem

$\mathcal{M}_+(X) = \bigcup_{u_* \in \mathcal{M}_+(X)} \gamma(u_*) \subset \mathcal{M}_+(X)$. Skąd $\mathcal{M}_+(X)$ jest zbiorem niezmienniczym, jako suma zbiorów niezmienniczych.

Lemat: Niech A będzie globalnym atraktorem. Wtedy dla danego zbioru zwartego niezmienniczego X mamy $M_+(X) \subset A$ oraz $M_+(A) = A$.

Dowód: Niech X - zwarty zbiór niezmienniczy. Wtedy $X \subset A$. Niech $u_* \in M_+(X)$, tzn. $\text{dist}(S(t)u_*, X) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$.

Skąd $\gamma(u_*)$ jest zbiorem ograniczonym, niezmienniczym, zatem $\gamma(u_*) \subset A$. W końcu $u_* \in \gamma(u_*) \subset A$.



w szczególności $M_+(A) \subset A$.

Pokażemy, że $A \subset M_+(A)$. Niech

$u_* \in A$. Chcemy pokazać, że

$u_* \in M_+(A)$ czyli, że

$\text{dist}(S(t)u_*, A) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$. Ale

$\gamma(u_*) \subset A$. Stąd $\text{dist}(\gamma(u_*), A) = 0$

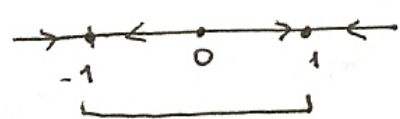
i mamy $u_* \in M_+(A)$.

Tw: Niech $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ma funkcję Lapunowa Φ określoną na A . Wtedy

$$A = M_+(\mathcal{E}),$$

gdzie $\mathcal{E}$ - zbiór punktów stacjonarnych. Jeśli $\mathcal{E}$ jest zbiorem dyskretnym, to

$$A = M_+(\mathcal{E}) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} M_+(z).$$



Dowód: Mamy $\mathcal{E} \subset A$. Stąd $M_+(\mathcal{E}) \subset M_+(A) = A$ z poprzedniego lematu. Pokażemy, że $A \subset M_+(\mathcal{E})$. Niech $u_* \in A$. Chcemy

pokazać, że $u_* \in M_+(\mathcal{E})$, tzn.

$\text{dist}(S(t)u_*, \mathcal{E}) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow -\infty$. Wiemy, że

$\text{dist}(S(t)u_*, \alpha(u_*)) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow -\infty$, gdzie $\alpha(u_*)$ jest zbiorem α -granicznym dla punktu u_* . Wiemy, że $\alpha(u_*)$ jest zbiorem niezmienniczym.

Wystarczy pokazać, że $\alpha(u_*) \subset \mathcal{E}$.

Rozważamy funkcję Lapunowa Φ na A . Mamy

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(S(t)u_*) = \sup_{t \leq 0} \Phi(S(t)u_*) = \Phi|_{\alpha(u_*)},$$

gdzie $v \in \alpha(u_*) \Leftrightarrow \exists t_n \rightarrow -\infty, S(t_n)u_* \rightarrow v$. Zatem

$\Phi(S(t_n)u_*) \rightarrow \Phi(v)$, $n \rightarrow \infty$, z ciągłości Φ , z istnienia granicy górnej

dla Φ , Φ jest stała na $\alpha(u_*)$. $\Phi(S(t)v) = \Phi(v)$, $v \in \alpha(u_*)$ z własności Φ , $v \in \mathcal{E}$.

Hydrodynamika, wyprowadzenie równań

Ruch układu: to ciągłe odzwierciedlenie w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ - współrzędne. Założymy, że cząsteczka P porusza się wraz z płynem zajmowaną w chwili $t=0$ pozycję $X = (X_1, X_2, X_3)$. Wtedy w chwili t pozycja tej cząstki jest $x = x(X, t)$. Zakładamy, że transformacja jest ciągła, odwracalna, różniczkowalna wraz z odwrotną.

W mechanice ośrodków ciągłych stan układu w położeniu x i w chwili t jest wyrażony przez funkcję (zmienną np. hydrodynamiczną)

$$\rho = \rho(x, t) \quad - \text{gęstość ośrodka}$$

$$p = p(x, t) \quad - \text{ciśnienie}$$

$$v = v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t)) \quad - \text{prędkość}$$

$$\Theta = \Theta(x, t) \quad - \text{temperatura}$$

Funkcje te można też zapisać w zmiennych (X, t) . Ogólnie

$$f(x, t) = f(x(X, t), t) = F(X, t)$$

Prędkością v w chwili t cząsteczki, która w chwili $t=0$ była w punkcie X nazywamy wielkość

$$v(x, t) = V(X, t) = \frac{d}{dt} x(X, t), \quad X - \text{parametr.}$$

Jeśli znamy prędkość $v(x, t)$, to możemy znaleźć transformację $x = x(X, t)$ rozwiązując układ

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(X, t) = v(x(X, t), t) \\ x(X, 0) = X \end{cases}$$

oznaczamy

$$\frac{D}{Dt} f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla f(x, t)$$

dla funkcji skalarnej f . Korzystając z definicji prędkości:

$$\frac{d}{dt} F(X, t) = \frac{D}{Dt} f(x, t), \quad x = x(X, t)$$

operator $\frac{D}{Dt}$ nazywamy pochođną materialną.

Twierdzenie o transporcie: Mamy

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla f(x, t) + f(x, t) \operatorname{div} v(x, t) \right\} dx = \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \cdot v) \right\} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Dowód: } \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} F(X, t) J(X, t) dX = \int_{\Omega(0)} \left\{ \frac{d}{dt} F(X, t) J(X, t) + F(X, t) \frac{d}{dt} J(X, t) \right\} dX = \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} F(X, t) J(X, t) dX = \int_{\Omega(t)} \frac{Df}{Dt}(x, t) dx \quad \text{z równości w ramce}$$

Aby przekształcić I_2 korzystamy z tożsamości Eulera.

$$\frac{d}{dt} J(X, t) = \operatorname{div}(v(x(X, t), t)) J(X, t)$$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$I_2 = \int_{\Omega(0)} F(X, t) \operatorname{div}(x(X, t), t) J(X, t) dX = \int_{\Omega(t)} f(x, t) \operatorname{div}(x, t) dx \quad \square$$

Płyn nazywamy nieściśliwym, jeśli $\operatorname{vol} \Omega(t) = \operatorname{vol} \Omega(0)$ dla $t > 0$. Podstawiając $f=1$ i dowolnego elementu płynu $\Omega(0)$ mamy:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol} \Omega(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dx = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} v(x, t) dx = 0$$

Płyn jest nieściśliwy $\equiv \boxed{\operatorname{div} v(x, t) = 0}$

Równanie ciągłości (prawo zachowania masy). Masa w dojeści materialnej $\Omega(t)$ nie zmienia się w czasie. Wyrazamy to w postaci:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx = 0, \quad \rho(x, t) - \text{gęstość płynu.}$$

Z równania transportu wynika $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0}$ - równanie ciągłości.

Jeśli gęstość jest stała, to $\operatorname{div} v(x, t) = 0$ w całej przestrzeni.

Dynamika Prawo Newtona $F = m \cdot a$ - Prawo zachowania pędu.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho v dx = \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\partial \Omega(t)} t_n dS$$

Zmiana pędu dojeści materialnej $\Omega(t)$

siły masowe działające na $\Omega(t)$

siły naprężenia działające na $\Omega(t)$ poprzez brzeg.

t_n - siła na jednostkę powierzchni działająca na $\partial \Omega(t)$ z zewnątrz.



Zasada Cauchy'ego: $t_n = t_n(x, t, n)$, n - wektor normalny zewnętrzny do bręgu, tzn. naprężenie t_n na jednostkę powierzchni zależy od położenia i orientacji elementu powierzchni (i od niczego więcej).

Korzystając z zasady Cauchy'ego i prawa zachowania pędu pokazuje się, że

$$t_n(x, t, n) = n(x, t) T(x, t), \quad \text{gdzie}$$

$$T(x, t) = \{ T_{ij}(x, t) \}_{i,j=1,2,3} - \text{macierz zwana tensorem naprężenia.}$$

Niech prawo zachowania pędu można zapisać w postaci:

1) z prawa zachowania masy i równanie transportu mamy

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho v dx = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{Dv}{Dt} dx$$

Zatem, mamy

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{Dv}{Dt} dx = \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} T dx$$

Zatem, z dowolności $\Omega(t)$ mamy $\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f + \operatorname{div} T}$ - równanie Cauchy'ego.

Od postaci tensoru T zależy konkretny model hydrodynamiczny.

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \sum_{j=1}^3 T_{ji,j}, \quad i=1,2,3$$

Klasyczna hydrodynamika

$$T_{ij} = (-p + \lambda v_{k,k}) \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})$$

λ, μ - stałe dodatnie - Tensor jest symetryczny (lepkości)

Wstawiając tensor do równania Cauchy'ego dostajemy równania hydrodynamiki klasycznej.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} v$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} v + \mu \Delta v + \rho f$$

Jesli zalozymy, ze $\rho = \text{const}$, to dostajemy

$$\text{div } v = 0$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta v + f, \quad \frac{\mu}{\rho} = \nu > 0 \quad \text{lepkość.}$$

Jesli $\mu = 0$, to dostajemy równanie Eulera.

9.12.2010

Mody determinujące. Analiza wymiarowa (fenomenologia) wskazuje, że przepływ turbulentny można opisać za pomocą skończonej liczby stopni swobody.

Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f & \text{w } \Omega \times (0, \infty) \\ \text{div } u = 0 & \text{w } \Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \\ u = 0 & \text{na } \partial \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla q = g \\ \text{div } v = 0 \\ v(0) = v_0 \\ v = 0 & \text{na } \partial \Omega \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ograniczony o gładkim brzegu

Założmy, że

$$(A1) \quad \int_{\Omega} |f(x,t) - g(x,t)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty.$$

(czyli f, g mają takie samo asymptotyczne zachowanie, gdy $t \rightarrow +\infty$.)

$$f, g \in L^\infty(0, \infty; H), \quad H = \overline{\{v \in C_0^\infty(\Omega) : \text{div } v = 0\}}^{L_2(\Omega)}$$

Rozwiązanie powyższych zagadnień można przedstawić w postaci

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{u}_i(t) w_i(x), \quad v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}_i(t) w_i(x).$$

gdzie,

$$A w_i = \lambda_i w_i, \quad w_i \in C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad 0 < \lambda_1 < \dots < \infty, \quad A = P(-\nu \Delta), \quad P: L^2(\Omega) \rightarrow H \quad \text{- nut operator Stokesa ortogonalny.}$$

Def: Pierwsze m modów (harmonik) $\hat{u}_k, k=1, \dots, m$ nazywamy determinującymi, jeśli warunki (A1) oraz

$$\int_{\Omega} |P_m u(x,t) - P_m v(x,t)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty.$$

Implikuje, że $\int_{\Omega} |u(x,t) - v(x,t)|^2 dx \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$.

$$\text{Niech } F = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |f(x,t)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Liczba Grashofa:

$$G = \frac{F}{\lambda_1 \nu^2} \quad (\text{bezwymiarowy parametr})$$

W 1983 roku Foias oszacował liczbę harmonik determinujących w zależności od liczby Grashofa.

m jest rzędu $G(1 + \log G)^{1/2}$ dla okresłych warunków brzegowych

m jest rzędu G (ulepszenie oszacowania 1983)

m jest rzędu G^2 (dla jednorodnych warunków brzegowych)

Uwaga: Oszacowanie wymiaru atraktora

$$\dim(A) \leq G \quad (G^2) \quad \text{jednorodne warunki brzegowe}$$

$$\dim(A) \leq G^{2/3} (1 + \log G)^{1/3} \quad (G) \quad \text{okresłe war. brzegowe}$$

Lemat: (Uogólniony lemat Gronwalla)

Niech $\alpha(t), \beta(t)$ - funkcje rzeczywiste lokalnie całkowalne na $[0, \infty)$ takie, że dla pewnego $T > 0$:

$$(1) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha(\tau) d\tau > 0$$

$$(2) \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha^-(\tau) d\tau < \infty, \quad \alpha^-(\tau) = \max\{-\alpha(\tau), 0\}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \beta^+(\tau) d\tau = 0$$

Załóżmy, że $\xi(t)$ jest funkcją absolutnie ujętą, nieujemną na $[0, \infty)$ taką, że

$$\frac{d\xi}{dt} + \alpha(t)\xi \leq \beta(t) \quad \text{p.w. na } (0, \infty)$$

wtedy, $\xi(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow +\infty$

Dowód: będzie jako referat na ćwiczeniach

w naszym przypadku $\xi(t) = |Q_m(u(t) - v(t))|^2$, $Q_m = I - P_m$.

Twierdzenie: Niech $m \in \mathbb{N}$ spełnia warunek $m \geq cG^2$, gdzie G jest liczbą Grashofa oraz c jest stałą zależną tylko od kształtu obszaru Ω .

wtedy pierwsze m harmonik determinuje w powyższym sensie 2 wymiarowy przepływ Naviera-Stokes'a z jednorodnymi warunkami brzegowymi.

Dowód: Niech $w = u - v$ wtedy

$$\frac{dw}{dt} + \nabla A w + B(w, u) + B(v, w) = f(t) - g(t)$$

$$B(w, u) = P(w \nabla) u$$

Biorąc iloczyn skalarny w H z $Q_m w$ dostajemy

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Q_m w(t)|^2 + \nu \|Q_m w(t)\|^2 + b(w, u, Q_m w) + b(v, w, Q_m w) = (f - g, Q_m w)$$

gdzie $b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx$.

Szacujemy teraz wyrazy nieliniowe:

$b(w, u, Q_m w) = b(P_m w, u, Q_m w) + b(Q_m w, u, Q_m w)$, gdzie

$|b(P_m w, u, Q_m w)| \leq C_1 |P_m w|^{1/2} \|P_m w\|^{1/2} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|Q_m w\|$, gdyż

$|b(P_m w, u, Q_m w)| = |b(P_m w, Q_m w, u)|$, oraz $|v|_4 \leq C_1 |v|^{1/2} \|u\|^{1/2}$ (nier. Ladyżeniskiej)

$|b(Q_m w, u, Q_m w)| \leq C_1 |Q_m w| \cdot \|Q_m w\| \cdot \|u\| \leq \frac{C_1^2}{2\nu} |Q_m w|^2 \|u\|^2 + \frac{\nu}{2} \|Q_m w\|^2$

$|b(v, w, Q_m w)| = b(v, P_m w, Q_m w) + b(v, Q_m w, Q_m w) = b(v, P_m w, Q_m w)$,

gdzie $|b(v, P_m w, Q_m w)| \leq C_1 |v|^{1/2} \|v\|^{1/2} \|Q_m w\| \cdot |P_m w|^{1/2} \|P_m w\|^{1/2}$

Prawa strona: $(f(t) - g(t), Q_m w) \leq |f(t) - g(t)| |Q_m w|$

2. powyższych oszacowań mamy

$$(*) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Q_m w|^2 + \frac{\nu}{2} \|Q_m w\|^2 - \frac{C_1^2}{2\nu} \|u\|^2 |Q_m w|^2 \leq C_1 |P_m w|^{1/2} \|P_m w\|^{1/2} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|Q_m w\| + C_1 |v|^{1/2} \|v\|^{1/2} |P_m w|^{1/2} \|P_m w\|^{1/2} \|Q_m w\| + |f(t) - g(t)| |Q_m w|$$

Rozwiązania $u(t), v(t)$ są ograniczone w przestrzeni H i V dla $t > t_0 > 0$, dla pewnego $t_0 > 0$.

Korzystamy teraz z nierówności: $\lambda_{m+1} |Q_m u|^2 \leq \|Q_m u\|^2$

Dostajemy $\frac{d\xi}{dt} + \alpha(t)\xi(t) \leq \beta(t)$, gdzie

$$\xi(t) = |Q_m w(t)|^2, \quad \alpha(t) = \nu \lambda_{m+1} - \frac{c_1^2}{\nu} \|u(t)\|^2, \quad \lambda_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$$

$$\beta(t) = \text{prawa strona nierówności } (*)$$

Potrzebujemy jeszcze:

(i) znaleźć ograniczenie na rozwiązanie $u(t)$ w zależności od liczby Grashofa

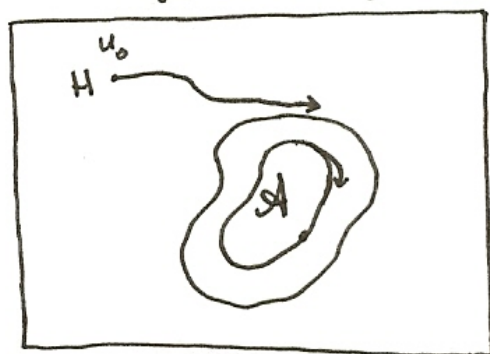
(ii) wyrazić λ_{m+1} w postaci zależności od m , w zależności od geometrii obszaru.

Mamy $\beta(t) \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow \infty$, stąd odpowiednie średnia też zbiega do 0.

16.12.2010

Metody Nady (harmoniki) determinujące (problem clości swobody danego układu dynamicznego).

Niektóre układy dynamiczne nieskończenie wymiarowe w istocie sprowadzają się do układów określenie wymiarowych.



liczba stopni swobody $\sim$ wymiar (Hausdorffa) atraktora

$$\dim(A) < \infty$$

< wielkości fizyczne

$$n=2$$

$\sim$ harmoniki determinujące $m > c_1 G^2$

$$G = \frac{F}{\lambda_1 \nu^2}, \quad F = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

Rozważamy zagadnienie

$$\begin{cases} u_t + \nu \Delta u + Bu = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t + \nu \Delta v + Bv = g(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$(A1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t) - g(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad f, g \in L^\infty(0, \infty; H)$$

$$(\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q_m f(t) - Q_m g(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ dla pewnego } m, \text{ które trzeba wyznaczyć})$$

$$(A2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|P_m u(t) - P_m v(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad u = P_m u + Q_m u, \quad P_m u(x, t) = \sum_{k=1}^m \hat{u}_k(t) w_k(x)$$

Istnieje taka liczba $m \in \mathbb{N}$, że jeśli (A1) i (A2), to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q_m u(t) - Q_m v(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad [\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0]$$

Tyle tytułem przypomnienia. Powracamy do dowodu:

$$\lambda_{m+1} \sim c(m)$$

Sprawdzamy warunki lematu

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\nu \lambda_{m+1} - \frac{c_1^2}{\nu} \|u(\tau)\|^2) d\tau < \infty$$

$$t \mapsto \|u(t)\| \leq M_1 \quad t > t_0$$

$$\lambda_m \nearrow +\infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

wybieramy tak m , żeby

$$\nu \lambda_{m+1} - \frac{c_1^2}{\nu} \|u(\tau)\|^2 \geq 0$$

wtedy część ujemna $\equiv 0$

Aby pokazać, że $\xi(t) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$, gdy $m \geq c G^2$, pokażemy, że dla T dostatecznie dużych i m takich, że

$$\lambda_m > \frac{2c_1^2 F}{\nu^4 \lambda_1}$$

spełniony jest warunek (1) (a także (2)) lematu

$$\text{Mamy } L \equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\nu \lambda_{m+1} - \frac{c_1^2}{\nu} \|u(\tau)\|^2) d\tau \geq \nu \lambda_{m+1} - \frac{c_1^2}{\nu} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau \equiv P$$

Pokażemy dla dużych m , $P > 0$.

Z równania N-S (pierwsze równanie energetyczne

$$\frac{1}{2} |u(t+T)|^2 + \nu \int_t^{t+T} \|u(\tau)\|^2 d\tau = \frac{1}{2} |u(t)|^2 + \int_t^{t+T} (f(s), u(s)) ds$$

$$\text{oraz } \int_t^{t+T} (f(s), u(s)) ds \leq \int_t^{t+T} |f(s)| \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|u(s)\| ds \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_t^{t+T} \|u(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\nu\lambda_1} \|f\|_{L^\infty(t, t+T; H)}^2 \cdot T$$

$$\text{stąd } \frac{\sqrt{2}}{2} \int_t^{t+T} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2} |u(t)|^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1} \|f\|_{L^\infty(t, t+T; H)}^2 \cdot T$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{T} \frac{1}{\nu} |u(t)|^2 + \frac{1}{\nu^2\lambda_1} \|f\|_{L^\infty(t, t+T; H)}^2$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq 2 \frac{1}{\nu^2\lambda_1} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)}^2 \text{ dla dużych } T, \text{ gdyż } |u(t)| \leq M_0 \text{ dla } t \geq t_0.$$

$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq 2 \frac{1}{\nu^2\lambda_1} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)}^2$$

$$L \geq \nu \lambda_{m+1} - \frac{2c_1^2}{\nu^2\lambda_1} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)}^2 > 0 \quad m?$$

$$\text{wiemy, że } F^2 \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)}^2$$

$$\nu \lambda_{m+1} - \frac{2c_1^2}{\nu^2\lambda_1} F^2 > 0$$

$$\lambda_{m+1} - \frac{2c_1^2}{\nu^4\lambda_1} F^2 > 0$$

Wartości własne dla operatora Stokes'a w ogr. obszarze w $\mathbb{R}^2$, asymptotyka, gdy $m \rightarrow \infty$
 $\lambda_m \sim c_1 \lambda_1 m$

$$m+1 > 2c_1^2 G^2$$

czego się nauczymy?

weźmy równanie liniowe

$$u_t + \nu A u = f \quad |u, \hat{u}_m(t) w_m(x)$$

$$\frac{d|\hat{u}_m(t)|^2}{dt} + \nu \lambda_m (\hat{u}_m(t))^2 = f_m(t) \cdot \hat{u}_m(t)$$

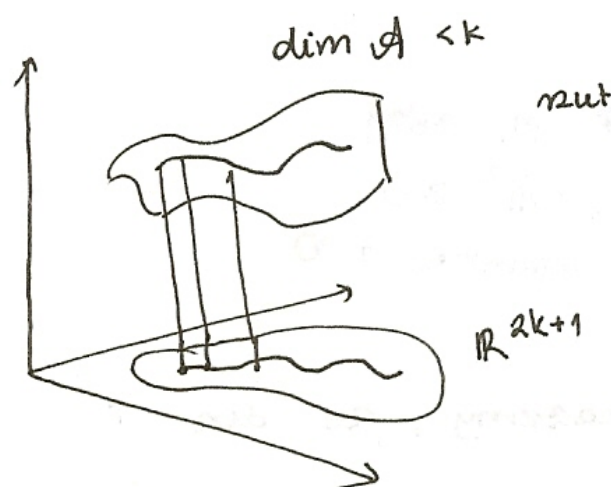
Harmoniki ewoluują niezależnie

Energia m-tej harmoniki

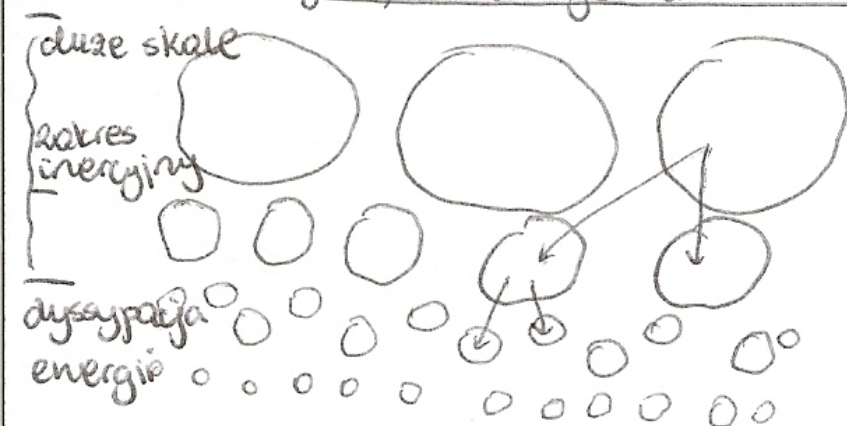
$$u_t + \nu A u + B(u, u) = f \quad - \text{równanie nieliniowe}$$

$B(u, u, \hat{u}_m(t) w_m(x))$ - energia kinetyczna zależy od tego wyrazu.

E.K. zależy od poprzednich harmonik
 danej harmoniki



w drugą stronę Hölderowski,
 nie wiadomo czy ugię

Transport energii i turbulencje:Fenomenologia, Kolmogorow 1941

$$\begin{cases} u_t + \nabla A u + B(u, u) = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ograniczony $u|_{\partial\Omega} = 0$ lub $\Omega = [0, L]^n$ ($n=2,3$), rozważmy u nos $n=2$
warunki okresowe na brzegu $\int_{\Omega} u(x, t) dx = 0, t \geq 0$
 $\int_{\Omega} f(x, t) dx = 0$

Energia kinetyczna $e(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2$ z równania N-S

$$\frac{d}{dt} e(u) = - \underbrace{\nabla((u, u)) - ((u \cdot \nabla) u, u)}_{=0} + (f, u) = - \nabla \|u\|^2 + (f, u)$$

Bilans energii w przepływie nie zależy od wyrazu nieliniowego.
Zbadamy dokładniej zagadnienie transportu energii kinetycznej w płynie.
Wciemy, że

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k(t) w_k(x)$$

$A w_k = \lambda_k w_k$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$, układ $\{w_k\}$ ortogonalny. wtedy

$$e(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{u}_k(t)|^2$$

Załóżmy, że $u = y + z$, gdzie $y(x, t) = \sum_{k=1}^m \hat{u}_k w_k$, $z(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \hat{u}_k w_k$

y - składająca odpowiadająca dużym skalom

z - składająca odpowiadająca małym skalom

skala liniowa $\approx$ długość fali $L_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$, $\alpha_k = \sqrt{\lambda_k}$ - częstość fali

$$w_k(x) = \sin(kx)$$

$$\partial_{xx}^2 w_k(x) = -k^2 \sin(kx), \quad \lambda_k = k^2, \quad \sqrt{\lambda_k} = k, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} = L_k = \frac{1}{k} - \text{długość.}$$

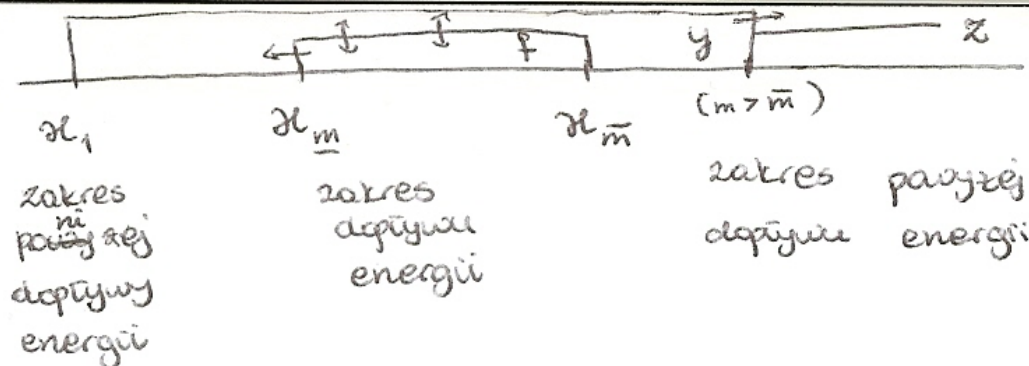
Mozemy zapisać

$$e(u) = e(y) + e(z)$$

Teraz w bilansie energii kinetycznej składających y i z wyraz nieliniowy nie redukuje się i odpowiada za rozproszenie energii w różnych skalach.

Załóżmy, że $f = \sum_{k=m}^{\bar{m}} \hat{f}_k w_k$, $1 \leq m \leq \bar{m} < \infty$.

Mozemy powiedzieć, że energia jest dostarczana do płynu w zakresie częstości fal $[\alpha_m, \alpha_{\bar{m}}]$. w przypadku $\Omega = [0, L]^n$, f jest wielomianem trygonometrycznym. Podzielmy częstości na trzy części:



$$x_k = \sqrt{x_k}$$

$$u = y + z$$

Niech $P_m: u \rightarrow y$, $Q_m: u \rightarrow z$, P_m - rzuty ortogonalne
zakładamy, że $m \geq \bar{m}$ czyli, energia jest dostarczana w zakresie dużych
skal

$$\frac{du}{dt} + \nabla A u + B(u, u) = f$$

$$\frac{dy}{dt} + \nabla A y + P_m B(y+z, y+z) = P_m f \quad (A P_m = P_m A)$$

$$\frac{dz}{dt} + \nabla A z + Q_m B(y+z, y+z) = 0$$

Równania energii

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y\|^2 + \nabla \|y\|^2 + b(y+z, y+z, y) = (f, y)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|^2 + \nabla \|z\|^2 + b(y+z, y+z, z) = 0$$

$$E(y) = \text{entropia} = |\text{rot} y|^2$$

$$\frac{d}{dt} e(y) + \nabla E(y) = \Phi_z(y) + (f, y)$$

$$\frac{d}{dt} e(z) + \nabla E(z) = \Phi_y(z)$$

$$\Phi_z(y) = -b(z, z, y) + b(y, y, z)$$

$$\Phi_y(z) = -b(y, y, z) + b(z, z, y)$$

Zauważmy, że $\Phi_z(y) + \Phi_y(z) = 0$

$\Phi_z(y)$ = ilość energii kinetycznej (na jednostkę czasu) przeniesionej z małych skal długości (z) do dużych skal długości (y),

podobnie $\Phi_y(z)$.

Pokażemy, że „średnio, po czasie i przestrzeni, $\Phi_y(z) \geq 0$ ”.

Jeśli siły działają w zakresie małych skal, to energia jest „średnio brzoza” przekazywana do dużych skal.

$$\Phi_y(z) = \frac{1}{2} (B(y, y, z) - (-B(z, z, y))) = e_{x_m}^{\rightarrow}(u) - e_{x_m}^{\leftarrow}(u),$$

gdzie $e_{x_m}^{\rightarrow}(u)$ to wpływ energii w małe skale z wywołany przez siły inercyjne $B(y, y)$ związane z dużymi ~~skalami~~ skalami, $e_{x_m}^{\leftarrow}(u)$ to wpływ energii w duże skale (y) wywołany przez siły inercyjne $B(z, z)$ związane z małymi skalami.

Zatem „średnio”, $e_{x_m}^{\rightarrow}(u) \geq e_{x_m}^{\leftarrow}(u)$

Aby to pokazać, wykorzystamy względem t równanie

$$\frac{d}{dt} e(z) + \nabla E(z) = \Phi_y(z)$$

$$\text{Mamy } e(z(T)) + \nabla \int_0^T E(z(\tau)) d\tau = \int_0^T \Phi_y(z)(z(\tau)) d\tau + e(z(0))$$

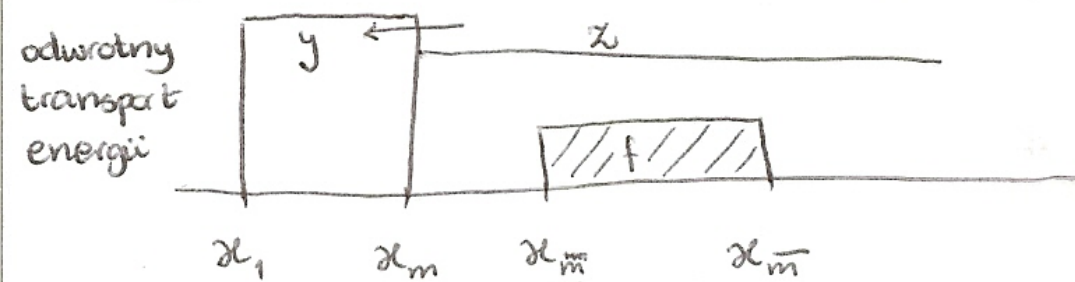
wtedy, że funkcja $[0, \infty) \ni t \rightarrow e(u(t))$ jest ograniczona. Dzielimy obie strony równania przez T i zbliżamy z T do ∞ . Zakładając, że istnieje granica, mamy:

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(x(\tau)) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\Phi}_y(z) d\tau$$

zatem mamy

$$\frac{1}{|\Omega|} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\Phi}_y(z) d\tau \geq 0 \quad (*) \quad \text{ozn: } \langle \cdot \rangle \geq 0$$

zauważmy teraz, że $1 \leq m \leq \underline{m}$, $\underline{m} > 1$

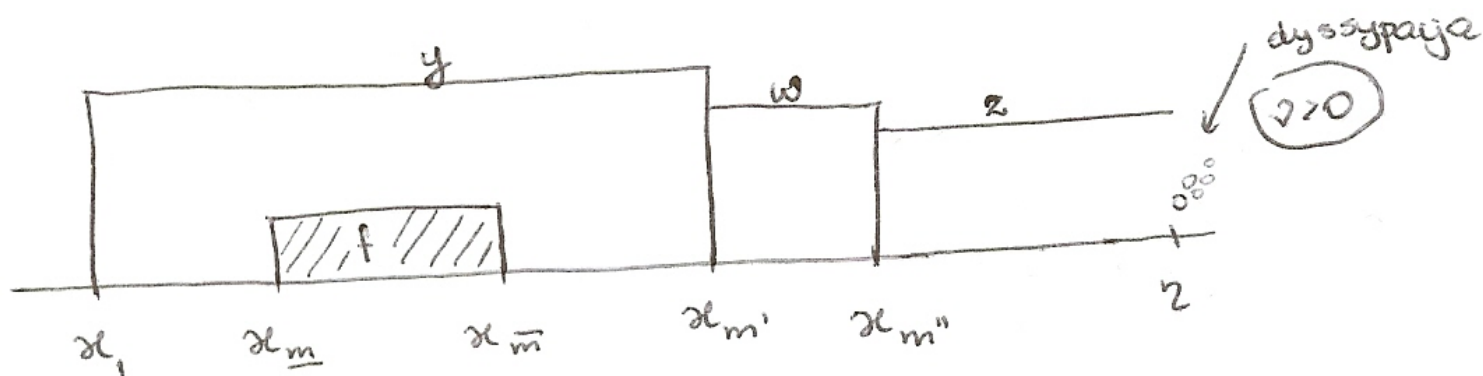


Teraz mamy $P_{mf} = 0$

$$\frac{dE}{dt} e(y) + \nabla E(y) = \bar{\Phi}_z(y)$$

$$\langle \bar{\Phi}_z(y) \rangle = \nabla \langle E(y) \rangle \geq 0$$

Prosta kaskada energii



$u = y + w + z$. Dla w mamy

$$\boxed{\frac{d}{dt} e(w) + \nabla E(w) = \bar{\Phi}_y(w+z) - \bar{\Phi}_{y+w}(z)}$$

$$(\equiv \xi - b(y+w+z, y+w+z, w))$$

$$\bar{\Phi}_y(w+z) = -b(y, y, w+z) + b(w+z, w+z, y)$$

wcześniej pokazaliśmy, że $\bar{\Phi}_y(w+z)$ reprezentuje energię kinetyczną transportowaną do zakresu $(w+z)$

zatem $\bar{\Phi}_y(w+z) - \bar{\Phi}_{y+w}(z)$ to ilość energii (na jednostkę czasu, transportowanej do części widma o częstotliwościach (w))

$$m' \geq \bar{m}, \quad \langle \bar{\Phi}_y(w+z) \rangle = \nabla \langle E(w+z) \rangle = \nabla \langle E(w) \rangle + \nabla \langle E(z) \rangle \geq 0$$

$$\langle \bar{\Phi}_{y+w}(z) \rangle = \nabla \langle E(z) \rangle \geq 0, \quad \text{zatem}$$

z powyższych równości (relacji i równania $\square$) dostajemy

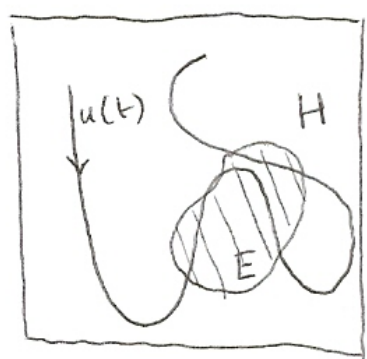
$$\langle \bar{\Phi}_{y+w}(z) \rangle = \langle \bar{\Phi}_y(w+z) \rangle - \nabla \langle E(w) \rangle$$

Średni transport energii do harmonik odpowiadających części widma $\geq x_{m''}$ jest równy średniemu transportowi energii do harmonik odpowiadających części widma $\geq x_{m'}$ wówczas energia stracona w efekcie lepkiej dysypacji w zakresie części widma $[x_{m'}, x_{m''}]$

Teoria Kolmogorowa mówi, że $\langle E(w) \rangle \approx 0$ w tzw. inercyjnym zakresie widma.

Dynamiczne równanie Naviera-Stokes'a, atraktory i miary niezmiennicze.

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}u + B(u, u) = f \in H, \\ u(0) = u_0 \in H, \quad u(t) = S(t)u_0 \end{cases} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$



$$\text{Prob}\{u(t) \in E\} = \mu_t(E)$$

$$= \text{Prob}\{S(t)u_0 \in E\}$$

$$= \text{Prob}\{u_0 \in S(t)^{-1}E\}$$

$$= \mu_0(S(t)^{-1}E)$$

$$\mu_t(E) = \mu_0(S(t)^{-1}E)$$

$$\mu_t = \mu_0 \quad \forall t, \quad \mu = \mu_0$$

$\mu(E) = \mu(S(t)^{-1}E)$ miara niezmiennicza opisująca układ w równowadze statystycznej.

Pytanie: istnienie i konstrukcja miar niezmienniczych

$$\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(S(t)u_0) dt = \int_H \varphi(u) d\mu(u) \right) \quad \mu(A) = 1$$

Twierdzenie: Dla każdego $u_0 \in H$ (i ustalonego operatora $\lim_{T \rightarrow \infty}$) istnieje miara borelowska μ w przestrzeni fazowej H taka, że

$$(*) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(S(t)u_0) dt = \int_H \varphi(u) d\mu(u) \quad \text{dla każdej funkcji } \varphi \text{ ciągłej na } H, \varphi \in C(H).$$

μ jest miarą probabilistyczną, niezmienniczą względem $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

μ ma nośnik zawarty w globalnym atraktorze A .

Def: $\lim_{T \rightarrow \infty}$ - uogólniona granica Banacha; funkcjonal liniowy na przestrzeni funkcji ograniczonych na $[0, \infty)$, $B([0, \infty))$.

$$\psi \in B([0, \infty)), \quad \psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.j.}:$$

$$\bullet \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(T) \geq 0 \quad \text{dla } \psi \geq 0$$

$$\bullet \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(T) \quad \text{jeśli granica po prawej stronie istnieje}$$

Takie funkcjonały istnieją, być może jest ich wiele, zatem we wzorze (*) musimy ustalić jeden z nich.

Istnienie $\lim_{T \rightarrow \infty}$: Weźmy $G_0 = \{\psi \in B([0, \infty)) : \text{istnieje } \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(T)\}$. Wtedy $\lim_{T \rightarrow \infty}$ jest funkcjonalem liniowym na podprzestrzeni $G_0 \subset B([0, \infty))$.

Korzystając z tw. Hahna-Banacha możemy rozszerzyć ten funkcjonal liniowy do funkcjonału liniowego " $\lim_{T \rightarrow \infty}$ " określonego na całej przestrzeni.

$$\text{Niech } \Delta_0(\psi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(T). \text{ Mamy } \Delta_0(\psi) \leq p(\psi) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \psi(T) \text{ na } G_0.$$

$$\text{Ponadto } p(\psi + \varphi) \leq p(\psi) + p(\varphi), \quad p(\alpha\psi) = \alpha p(\psi), \quad \alpha \geq 0 \text{ dla } \psi, \varphi \in B([0, \infty)).$$

$$\text{Z tw. Hahna-Banacha mamy: funkcjonal } \Delta = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{ spełnia } \Delta(\psi) \leq p(\psi) \quad \forall \psi \in B([0, \infty)), \quad |\lim_{T \rightarrow \infty} \psi(T)| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sup |\psi(T)|, \quad \psi \in B([0, \infty))$$

Żałujemy, że miara w (*) istnieje. Będziemy badać jej własności.

1) μ jest miarą probabilistyczną, $\mu(H) = 1$

weźmy $\varphi \equiv 1$ na H . wtedy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} 1 = \int_H d\mu(u) = \mu(H) = 1.$$

2) Miara μ jest miarą niezmienniczą ze względu na $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, tzn

$$\mu(E) = \mu(S(t)^{-1}E), \quad E \subset H \text{ mierzalny względem } \mu. \quad (**)$$

My pokażemy, że dla $\forall \varphi \in C(H)$, $\int \varphi(S(t)u) d\mu(u) = \int \varphi(u) d\mu(u)$, $t \geq 0$

Funkcje $C(H)$ są gęste w $L^1_\mu(H)$ z własności miary μ (regularności).

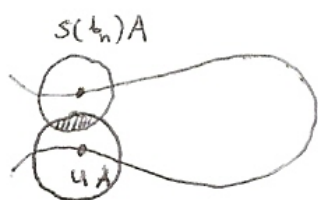
Zatem $(**)$ możemy uogólnić, do zbioru $L^1_\mu(H)$. Weźmy

$$\varphi = \chi_E. \text{ Wstawiając do } (**) \text{ otrzymujemy } \mu(E) = \mu(S(t)^{-1}E)$$

$$\begin{aligned} \text{Mamy } \int_H \varphi(S(t)u) d\mu(u) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(S(t+\tau)u_0) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \varphi(S(t)u_0) d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(S(t)u_0) d\tau + \underbrace{\frac{1}{T} \int_T^{\tau+T} \varphi(S(t)u_0) d\tau}_{\downarrow \gamma_+(u_0) \text{ - zwarty}} - \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{\tau} \varphi(S(t)u_0) d\tau}_{\downarrow 0} \right\} = \\ &= \int_H \varphi(u) d\mu(u) + \dots \end{aligned}$$

Lemat: Nośnik miary niezmienniczej zawiera tylko punkty niebledzące.

Punkt u jest niebledzący jeśli dla danego obciążenia A tego punktu istnieje ciąg czasów $t_n \rightarrow \infty$ taki, że $S(t_n)A \cap A \neq \emptyset$.



Zbiór punktów niebledzących jest domknięty i niezmienniczy.

David: Nemytski, Stepanow „Qualitative theory of differential equations” (1949)

- o dynamice topologicznej, pan Tomasz by lubił.

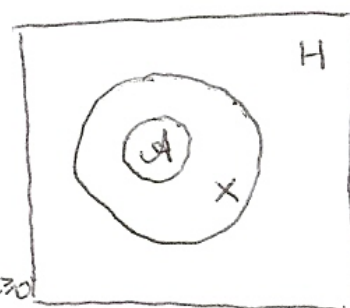
i jest też w „Navier - Stokes equations and turbulence” E. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam.

Wniosek: Nośnik naszej miary μ jest zawarty w globalnym atraktorze A .

David istnienia miary μ :

1) Dla każdego $u_0 \in H$, $\varphi \in C(H)$ istnieje granica

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(S(t)u_0) dt = L(\varphi)$$



wiemy, że istnieje zbiór pochłaniający zwarty X dla $\{S(t)\}_{t \geq 0}$

Zatem $\gamma_+(u_0)$ jest zb. zwartym $\varphi(\gamma_+(u_0))$ ograniczona

$$\text{Zatem } T \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(S(t)u_0) dt \in B([0, \infty))$$

2) $L(\varphi)$ zależy tylko od wartości funkcji φ na X , tzn. jeśli $\varphi, \bar{\varphi} \in C(H)$

$$\text{i } \varphi = \bar{\varphi} \text{ na } X, \text{ to } L(\varphi) = L(\bar{\varphi}).$$

David: Niech $S(t)u_0 \in X$ dla $t \geq T_0$. Wtedy

$$L(\varphi) - L(\bar{\varphi}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{ \varphi(S(t)u_0) - \bar{\varphi}(S(t)u_0) \} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T_0} \{ \dots \} dt = 0.$$

$$\text{Mamy } L(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(S(t)u_0) dt = G(\varphi|_X) = G(\varphi) = *$$

$\varphi \in C(X)$, X - zwarty

Każda $\varphi \in C(X)$ jest obcięciem $\varphi \in C(H)$ do X , $\varphi = \varphi|_X$ (tw. Tietze'go).

Riesz-Kolmogorov

$$* = \int_X \varphi(u) d\mu(u) = \int_H \varphi(u) d\bar{\mu}(u) = \int_H \varphi(u) d\bar{\mu}(u) = \int_H \varphi(u) d\bar{\mu}(u)$$

$$(\bar{\mu}(E) = \mu(E \cap X), \bar{\mu}(H \setminus X) = 0)$$

μ - niezmiennicze $\Rightarrow$ wystarczy całkować po A $\frac{1}{\mu(A)} \int_A \varphi(u) d\mu(u)$.