

5.X.2011

Interpolacja klasyczna:

Przykład:

$$T: L_2 \rightarrow L_2$$

$$T: L_\infty \rightarrow BMO$$

$$T: (L_2, L_\infty)_\theta \rightarrow (L_2, BMO)_\theta$$

Twierdzenie Riesz o wypukłości, ale najpierw

Def: Niech (R, μ) , (S, ν) będą σ -skończonymi przestrzeniami miaralnymi, T -operatorem liniowym określonym na wszystkich funkcjach μ -prostych o wartościach ν -mierzalnych funkcji na S . Rozważmy $1 \leq p, q \leq \infty$. Jeśli istnieje stała $M > 0$ t.zc

$$\|Tf\|_{L^q(\nu)} \leq M \|f\|_{L^p(\mu)}$$

dla każdej funkcji μ -prostej na R . Wtedy mówimy, że T jest silnym operatorem (typu $p \rightarrow q$). Najmniejsza stała M spełniająca nierówność nazywamy $\checkmark$ normą (p, q) silnego typu „ T ”.

Zaczniemy od najprostszego przypadku dla operatora zadanego przez jądro

$$(Tf)(y) = \int_R f(x) A(x, y) d\mu(x) \quad (y \in S)$$

WAZNE: A - mierzalna i nieujemna

Twierdzenie:

Niech $1 \leq p_k, q_k \leq \infty$, $k = 1, 0$; $\theta \in [0, 1]$. Nadto

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Niech T będzie operatorem zadanym przez nieujemne jądro. Przyjmijmy, że T jest silnego typu (p_0, q_0) , (p_1, q_1) z normami M_0, M_1 .

Wtedy T jest silnego typu (p, q) z normą M_θ spełniającą nierówność: $M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Dowód:

wystarczy wykazać, że

$$\left| \int_S (Tf)g d\mu \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

dla funkcji prostych f, g t.z.e $\|f\|_{L^{p_0}(\mu)} \leq 1$ oraz

$$\|g\|_{L^{q_1}(\nu)} \leq 1 \quad \left(\text{gdzie } \frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = 1 \right)$$

Ponieważ T jest operatorem określonym przez jądro nieujemne, mamy

$$\left| \int_S (Tf)g d\mu \right| \leq \int_S T(|f|)|g| d\mu$$

Potoczmy

$$f_k = f^{p/p_k}, \quad g_k = g^{q'/q'_k}, \quad k=0,1$$

Zauważmy, że

$$\|f_k\|_{L_{p_k}} \leq \|f\|_{L_p}^{p/p_k} \leq 1, \quad \|g_k\|_{L_{q'_k}} \leq \|g\|_{L_{q'}}^{q'/q'_k} \leq 1$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int_S (Tf)g d\mu &= \int_S \int_R (Af_0 g_0)^{1-\theta} (Af_1 g_1)^\theta \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_S \int_R Af_0 g_0 d\mu d\nu \right)^{1-\theta} \left(\int_S \int_R Af_1 g_1 d\mu d\nu \right)^\theta \\ &= \left(\int_S T f_0 g_0 \right)^{1-\theta} \left(\int_S T f_1 g_1 \right)^\theta \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_S (Tf)g d\mu &\leq \left(\|Tf_0\|_{q_0} \|g_0\|_{q'_0} \right)^{1-\theta} \left(\|Tf_1\|_{q_1} \|g_1\|_{q'_1} \right)^\theta \leq \\ &\leq \left(M_0 \|f_0\|_{p_0} \|g_0\|_{q'_0} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \|f_1\|_{p_1} \|g_1\|_{q'_1} \right)^\theta \\ &\leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \end{aligned}$$



Przykład:

$$R=S=\mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad - \text{ to nie jest operator nieujemny}$$

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$\text{Jeżeli } p_0 = \infty, q_0 = 1; \quad p_1 = q_1 = 2; \quad M_0 = 2, \quad M_1 = 2^{1/2}$$

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad p = 4, \quad q = \frac{4}{3}$$

Gdyby twierdzenie zachodziło w tym przypadku dostalibyśmy

$$\|(x_1 + x_2, x_1 - x_2)\|_{4/3} \leq 2^{3/4} \|(x_1, x_2)\|_4 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Ale biorąc $x_1 = 1, x_2 = 2$ dostajemy

$$(3^{4/3} + 1)^{3/4} \leq 2^{3/4} (1 + 2^4)^{1/4}$$

$$3^{4/3} + 1 \leq 2 (17)^{1/4}$$

$$5.32... \leq 2 \cdot 2.03... = 4.06... \quad \downarrow$$

12.X.2011

$$p, q, p_k, q_k \quad \alpha_k = \frac{1}{p_k}; \quad \beta_k = \frac{1}{q_k}, \quad k=0,1; \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

wprowadzamy

$$\square = \{(\alpha, \beta): 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\} \quad \text{kwadrat jednostkowy}$$

$$\triangle = \{(\alpha, \beta): 0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1\} \quad \text{odcinek } \Delta \text{ w } \square.$$

Normę M operatora silnego typu (p, q) możemy powiązać z funkcją w punkcie (α, β) .

$\log M(\alpha, \beta)$ wypukła na $\square$.

$M(\alpha, \beta)$ - jest logarytmicznie wypukła nad $\square$.

Dalej zobaczymy, że $\triangle$ jest lepszy od $\square$.

Zacniemy od przypadku skończone wymiarowe.

Niech

$$A = \{a_{ij}\}_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n} \quad \text{macierz o współczynnikach } \mathbb{R} \text{ albo w } K$$

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$$

A definiuje formę dwuliniową

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

dodatkowo wprowadzamy

$$X_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i, \quad Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad \text{dla } j=1, \dots, n \quad \text{w szczególności } i=1, \dots, m$$

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^n X_j y_j = \sum_{i=1}^m x_i Y_i$$

Niech $1 \leq p, q \leq \infty$, zatem $(\alpha, \beta) \in \square$

Maks $M(\alpha, \beta)$ dwuliniowej formy A

$$M(\alpha, \beta) = \max \{ |A(\bar{x}, \bar{y})| : \|\bar{x}\|_p \leq 1, \|\bar{y}\|_{q'} \leq 1 \}$$

$M(\alpha, \beta)$ jest najmniejszą liczbą t.ż.

$$|A(\bar{x}, \bar{y})| \leq M(\alpha, \beta) \|\bar{x}\|_p \cdot \|\bar{y}\|_{q'}$$

jak również

$$|A(\bar{x}, \bar{y})| \leq \|\bar{X}\|_q \|\bar{y}\|_{q'} \quad (\text{Hölder})$$

$$|A(\bar{x}, \bar{y})| \leq \|\bar{x}\|_p \|\bar{Y}\|_{p'}$$

Lemat:

Maksimum $M = M(\alpha, \beta)$ formy dwuliniowej A danej przez

$$M = \max_{\|\bar{x}\|_p \leq 1} \|\bar{X}\|_q = \max_{\|\bar{y}\|_{q'} \leq 1} \|\bar{Y}\|_{p'}$$

Nadto, jeśli $\bar{x}, \bar{y}$ spełnia

$$|A(\bar{x}, \bar{y})| = M, \quad (\|\bar{x}\|_p \leq 1, \|\bar{y}\|_{q'} \leq 1), \quad \text{to} \quad |X_j| = M |y_j|^{q'-1}$$

$$|Y_i| = M |x_i|^{p-1}, \quad j=1, \dots, n, \quad i=1, \dots, m$$

Dowód: Niech $N = \max \{ \|\bar{X}\|_q : \|\bar{x}\|_p \leq 1 \}$, ponieważ

$$|A(\bar{x}, \bar{y})| \leq \|\bar{X}\|_q \|\bar{y}\|_{q'}, \quad M \leq N$$

z drugiej strony dla każdego $\bar{x} : \|\bar{x}\|_p \leq 1$

jestemy w stanie skonstruować $\bar{y} : \|\bar{y}\|_{q'} = 1$,

ale $|A(\bar{x}, \bar{y})| = \|\bar{X}\|_q$, zatem $\|\bar{X}\|_q \leq M$, $x \in L^p_{\mathbb{R}^m}$

$$N \leq M \Rightarrow N = M$$

$\bar{x}, \bar{y}$ maksymalizujące A leżą na sferze jednostkowej

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = M$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{X}_j y_j \Leftrightarrow |X_j|^q = c |y_j|^{q'}$$

$$|x_i|^p = d |Y_i|^{p'} \quad c, d \text{ niezależne od } i, j$$

$$A \sim X \sim Y \quad c = M^q, \quad d = M^{-p'}$$

Twierdzenie: (Riesz)

Maksimum $M(\alpha, \beta)$ dwuliniowej formy jest logarytmicznie wypukłe w danym trójkącie Δ kwadratu jednostkowego $\square$

$$M(\alpha, \beta) \leq M(\alpha_0, \beta_0)^{1-\theta} M(\alpha_1, \beta_1)^\theta$$

Dowód:

Zauważmy, że jeżeli f jest funkcją wypukłą na obszarze domkniętym wystarczy pokazać, że istnieje $\theta \in (0, 1)$ dla danego $[c, d] \subset I$

$$f((1-\theta)c + \theta d) \leq (1-\theta)f(c) + \theta f(d)$$

Niech (α_0, β_0) i (α_1, β_1) będą dowolnymi punktami z Δ oraz (α, β) będą ich kombinacją wypukłą

$$\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1, \quad \beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1$$

Chcemy pokazać, że

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 $M(\alpha, \beta)$ $M(\alpha_0, \beta_0)$ $M(\alpha_1, \beta_1)$

wybieramy $\bar{x}, \bar{y}$ t.ze $\|\bar{x}\|_p = 1, \|\bar{y}\|_{q'} = 1$ t.ze

$$|A(\bar{x}, \bar{y})| = M.$$

No mamy lematu wiemy

$$M \left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_0'} \right)^{1/p_0'} = \left(\sum_i |Y_i|^{p_0'} \right)^{1/p_0'} \leq M_0 \left(\sum_j |y_j|^{q_0'} \right)^{1/q_0'}$$

$|Y_i| = M |x_i|^{p-1}$

$$M \left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_1} \right)^{1/q_1} = \left(\sum_j |X_j|^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq M \left(\sum_i |x_i|^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

$$M \left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_0'} \right)^{\frac{(1-\theta)}{p_0'}} \left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_1} \right)^{\theta/q_1} \leq$$

$$M_0^{1-\theta} M_1^\theta \left(\sum_i |x_i|^{p_1} \right)^{\theta/p_1} \left(\sum_j |y_j|^{q_0'} \right)^{\frac{1-\theta}{q_0'}}$$

Znajdźmy

$$p_1 = \lambda(p-1)p_0' + (1-\lambda)p$$

$$q_0' = \mu(q'-1)q_1 + (1-\mu)q'$$

$\lambda, \mu \in [0, 1]$ - tego jeszcze nie wiemy

$$\lambda = \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \frac{p_1}{p_0'}$$

$$\mu = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{q_0'}{q_1}$$

$$\sum_i |x_i|^{p_1} \leq \left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_0'} \right)^\lambda \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1-\lambda} = \left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_0'} \right)^\lambda$$

$$\sum_j |y_j|^{q_0'} \leq \left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_1} \right)^\mu \left(\sum_j |y_j|^{q'} \right)^{1-\mu} = \left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_1} \right)^\mu$$

$$\frac{q_0'}{q_1} \leq \frac{1-\theta}{\theta} \leq \frac{p_0'}{p_1} \quad (*)$$

warunek $\lambda, \mu \in [0, 1]$

wiemy, że $(\alpha_k, \beta_k) \in \Delta$

$$\text{stąd wynika} \quad \begin{aligned} p_0 &\leq q_0 \\ p_1 &\leq q_1 \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{q_0'}{q_1} \leq \frac{p_0'}{p_1}$$

załóżmy, że jesteśmy w stanie dobrać taką θ , żeby (*)

czy ten dowód jest ok?

19. X. 2011

Tw. Riesz można uogólnić na przestrzenie wazone.

L^p, L^q z wagami

$$\bar{g} = (g_1, \dots, g_m); \quad \bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad g_i, \sigma_i > 0 \quad \forall i$$

$$\|\bar{x}\|_{L^p_{\bar{g}}} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p g_i \right)^{1/p}, \quad \|\bar{y}\|_{L^q_{\bar{\sigma}}} = \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \sigma_j \right)^{1/q}$$

$$M^*(\alpha, \beta) = \max \{ |A(\bar{x}, \bar{y})| : \|\bar{x}\|_{L^p_{\bar{g}}} \leq 1, \|\bar{y}\|_{L^q_{\bar{\sigma}}} \leq 1 \}$$

Twierdzenie:

Maksimum $M^*(\alpha, \beta)$ dla dowolnej formy dwuliniowej A , ułożone w normie wagowej jest logarytmicznie wypukłe w dowolnym Δ w Π .

Twierdzenie (Riesz o wypukłości)

Niech $1 \leq p_k \leq q_k \leq \infty$, $k=0,1$,

T - operator liniowy (p_k, q_k) z normą M_k .

Nadto $\theta \in [0, 1]$ p, q :

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Wtedy T jest silnego typu (p, q) z normą M_θ

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

Dowód: wystarczy pokazać, że

$$\left| \int_S (Tf)g d\nu \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

dla funkcji prostych f, g

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \|g\|_{L^{q'}(\nu)} = 1$$

Niech

$$f = \sum_{i=1}^m x_i \chi_{F_i}$$

F_i - rozłączne w $\mathbb{R}$ o mierze skończonej, $\mu(F_i) < \infty$

G_i - " - w S o mierze sk.

$$g = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{G_j}$$

Tak więc

$$\sum_{i=1}^m |x_i|^{p'} \mu(F_i) = \sum_{j=1}^n |y_j|^{q'} \nu(G_j) = 1$$

dla p, q' - skończone.

Wprowadzamy wagi: $g_i = \mu(F_i)$, $g_j = \nu(G_j)$

$$\|\bar{x}\|_{L_p} = \|\bar{y}\|_{L_{q'}} = 1$$

$$\int_S (Tf)g d\nu = \sum_{i,j} x_i y_j \int_S (F \chi_{F_i}) \chi_{G_j} d\nu = A(\bar{x}, \bar{y})$$

$$a_{ij} = \int_S (F \chi_{F_i}) \chi_{G_j} d\nu$$

$$\left| \int_S (Tf)g d\nu \right| \leq M^* \leq (M_0^*)^{1-\theta} (M_1^*)^\theta$$

Pozostaje pokazać, że $M_k^* \leq M_k$ $k=0,1$

Bierzemy $\bar{w}, \bar{z}$ - dowolne wektory

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} w_i z_j \right| &= \left| \int_S T\left(\sum_i w_i \chi_{F_i}\right) \left(\sum_j z_j \chi_{G_j}\right) d\nu \right| \leq \\ &\leq \|T\left(\sum_i w_i \chi_{F_i}\right)\|_{L_k(\nu)} \left\| \sum_j z_j \chi_{G_j} \right\|_{L_{q'}(\nu)} \\ &\leq M_k \left\| \sum_i w_i \chi_{F_i} \right\|_{L_k(\mu)} \left\| \sum_j z_j \chi_{G_j} \right\|_{L_{q'}(\nu)} \\ &= M_k \|\bar{w}\|_{L_p} \|\bar{z}\|_{L_{q'}} \end{aligned}$$

Twierdzenie (Riesz-Thorin)

Lemat (Hadamarda o 3 liniach)

Niech F będzie ograniczoną funkcją uprządkowaną na Ω i analityczną w Ω , gdzie

$$\Omega = \{z = x+iy : 0 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}$$

Niech $M_\theta = \sup \{ |F(\theta + iy)| : y \in \mathbb{R} \}$, wtedy

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \text{ dla } \theta \in [0,1]$$

Dowód: Usiłujemy pokazać

$$|F(\theta + iy)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Rozważmy } \frac{F(z)}{M_0^{1-z} M_1^z} \rightarrow M_0 = M_1 = 1$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$

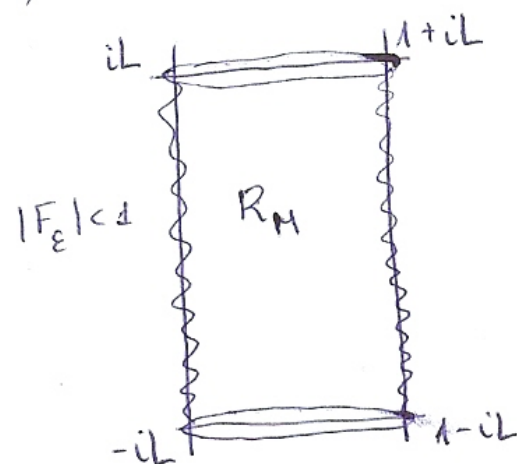
$$F_\varepsilon(z) = \frac{F(z)}{1+\varepsilon z}$$

$$\text{dla } z \in \partial\Omega \quad |F_\varepsilon(z)| \leq 1$$

$$|F_\varepsilon(z)| \leq \frac{|F(z)|}{\varepsilon|y|} \leq \frac{k}{\varepsilon|y|} \quad z = x+iy, z \in \Omega$$

stąd wystarczy pokazać

$$|F(z)| \leq 1, \quad z \in \Omega$$



$$|F_\varepsilon(z)| \leq \frac{K}{\varepsilon L} \leq 1 \quad \text{stąd}$$

$$|F_\varepsilon(z)| \leq 1$$

$$|F(z)| \leq 1 + \varepsilon|z|$$

$$\text{Przechodząc z } \varepsilon \rightarrow 0 \quad |F(z)| \leq 1$$

Twierdzenie: (Riesz - Thorina)

Niech $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $\theta \in (0, 1]$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

(a) przestrzeń zespolona

T- liniowy, silnego typu (p_0, q_0) oraz (p_1, q_1) z normami M_0, M_1 . wtedy

T- silnego typu (p, q) z normą M_θ

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

(b) przestrzeń rzeczywista

$$p_k \leq q_k \rightarrow \text{tw. Riesz}$$

$$p_k \sim q_k$$

$$M_\theta \leq 2 M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

Dowód: $z \in \mathbb{C}$ $\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$, $\beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}$

Z naszych założeń wynika, że $\alpha(\theta) = \frac{1}{p}$, $\beta(\theta) = \frac{1}{q}$

Nasze twierdzenie będzie udowodnione jeśli pokażemy, że

$$\left| \int_S (Tf)g d\gamma \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \quad f, g \text{ - proste} \quad \|f\|_{L^p(\mu)} = \|g\|_{L^q(\gamma)} = 1$$

$$f = \sum_{j=1}^J a_j \chi_{A_j} \quad ; \quad g = \sum_{k=1}^K b_k \chi_{B_k}$$

A_j - rozłączne w $\mathbb{R}$
 B_k - rozłączne w S

$$a_j, b_k \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{j=1}^J |a_j|^p \mu(A_j) = \sum_{k=1}^K |b_k|^{q'} \gamma(B_k) = 1$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$f_z = |f| e^{i \arg f \frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}}$$

$$g_z = |g| e^{i \arg g \frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}}$$

$$F(z) = \int_S (Tf_z) g_z d\gamma$$

Ponieważ

Pr. dm:

1. Krystian $\triangle$

2. Reszta myśli

$$F(z) = \int_S (Tfz) q_z d\bar{z}$$

$$f(z) = |f|^{\alpha(z)/\alpha(\theta)} e^{i \arg f}$$

By skończyć lemat o trzech produktach, $y \in \mathbb{R}$

$$|F(iy)| \leq M_0; |F(1+iy)| \leq M_1$$

Analityczność F jest oczywista, gdyż

$$F(z) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |a_j|^{\alpha(z)/\alpha(\theta)} |b_k|^{1-\beta(z)/1-\beta(\theta)} \int_S T \chi_{A_j} \chi_{B_k} e^{i \arg a_j + i \arg b_k} d\bar{z}$$

T jest silnego typu $(p_0, q_0) \times M_0$ dla przestrzeni zespolonej

$$|F(iy)| \leq \|Tf_{iy}\|_{L^{q_0}(\nu)} \|g_{iy}\|_{L^{q'_0}(\nu)} \leq M_0 \|f_{iy}\|_{L^{q_0}(\nu)} \|g_{iy}\|_{L^{q'_0}(\nu)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ale } \operatorname{Re} \alpha(iy) = \frac{1}{p}$$

zatem

$$\|f_{iy}\|_{L^{p_0}(\mu)}^p = \sum_{j=1}^J |a_j|^{\alpha(iy)/\alpha(\theta)} |_{p_0} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^J |a_j|^p \mu(A_j) = 1$$

Podobnie

$$\|g_{iy}\|_{L^{q'_0}(\nu)}^{q'_0} = \sum_{k=1}^K \|b_k\|^{1-\beta(iy)/1-\beta(\theta)} |_{q'_0} \nu(B_k) = \sum_{k=1}^K |b_k|^{q'_0} \nu(B_k) = 1$$

Tak samo pokazuje się, że $|F(1+iy)| \leq M_1$

$$|F(\theta+iy)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

p, q - skończone. Reszta na egzaminie

b) rzeczywistość T - rzeczywisty (r, s) typu $\times N$

$$T'(t+iy) = Tf + iTy \quad N \leq N' \leq 2N$$

Twierdzenie (Nierówność Younga)

$$\text{Niech } 1 \leq p, q \leq \infty, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0, \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Jeśli $f \in L^p, g \in L^q$, to $f * g \in L^r$ nadto nierówność poniższa jest prawdziwa.

Dowód: $f \in L^1$

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

oczywiste

$$g \mapsto f * g \quad (1,1), (\infty, \infty)$$

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q \quad p \leq q, \quad 1 \leq 1, \infty \leq \infty$$

Nadto nierówności Höldera

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{q'} \|g\|_q \quad f \in L^{q'}, g \in L^q$$

$$f \mapsto f * g \quad (1, q) \quad 1 \leq q$$

$$(q', \infty) \quad q' \leq \infty$$

Biorąc $\theta = q/p'$

$$q/p' \leq 1 \quad q(1 - \frac{1}{p}) \leq 1 \quad q \leq 1 + \frac{q}{p}$$

$$1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q'} \quad ; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{\infty}$$

$$((1, q), (q', \infty))_\theta = (p, r)$$

Krótkie wyłączenie do transformaty Fouriera

$$f \in L_1(\mathbb{T}) \quad , \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

widzimy, że $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})| dt = \|f\|_{L^1} \cdot \frac{1}{2\pi}$

z drugiej strony

$$\bar{c} = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad , \quad \bar{c} \rightsquigarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} = f(e^{it})$$

$$|f(e^{int})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = \|\bar{c}\|_{\ell^1}$$

Przypadek

tw (a) Parseval. Jeśli $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{Z})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt$$

(b) $\bar{c} = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \in L^2(\mathbb{T})$: $\hat{f}(n) = c_n$

tw (H-Y)

a) $f \in L^p(\mathbb{T})$, to $f \in L^{p'}(\mathbb{Z})$ oraz $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$

b) $\bar{c} = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{Z})$, to $f: \hat{f} = \bar{c}$ oraz $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$, $\|f\|_{p'} \leq \|\bar{c}\|_{\ell^p}$

Zakładamy $1 \leq p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Dowod: a) $L_1 \rightarrow L^\infty$, $L_2 \rightarrow L^2$

Bierzemy $\theta = 2/p'$, $0 \leq \theta \leq 1$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} \quad , \quad \frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} : L^p \rightarrow L^{p'}$$

$$b) F_1: \tilde{c} \rightarrow f(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

$$L^1 \xrightarrow{F_2} L_\infty$$

$$L^2 \xrightarrow{F_2} L_2$$

$$\|f\|_{p'} \leq \|\tilde{c}\|_{L^p}$$

9. XI. 2011

Interpolacja dla operatorów wieloliniowych

$(f_1, f_2, \dots, f_n) \mapsto T(f_1, \dots, f_n)$ jest liniowy po każdym f_i

f_j - f. proste (R_j, μ_j) $j=1, \dots, n$

$T: \bigotimes_{j=1}^n R_j \rightarrow (S, \nu)$ jest silnego typu $(p_1, \dots, p_n, q)$

$$\|T(f_1, \dots, f_n)\|_{L^q(\nu)} \leq M \|f_1\|_{L^{p_1}(\mu_1)} \dots \|f_n\|_{L^{p_n}(\mu_n)}$$

Twierdzenie: Niech $1 \leq p_j, p_{1j} \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ oraz

$$\frac{1}{p_j} = \frac{1-\theta}{p_{0j}} + \frac{\theta}{p_{1j}} \quad (j=1, \dots, n); \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Niech T będzie (zeszłym) operatorem silnego typu $(p_1, p_2, \dots, p_n, q_0)$ tudzież $(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}, q_1)$ z normami odpowiednio M_0, M_1 . To T jest operatorem silnego typu $(p_1, \dots, p_n, q)$ z normą M t.ze $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Interpolacja operatorów zwartych

Przypomnijmy Mówimy, że $T: X \rightarrow Y$ operator liniowy na przestrzeni Banacha jest zwarty $\Leftrightarrow$ domknięcie obrazu kuli jednostkowej w X jest zwarte w Y . Jeśli obraz operatora jest skończonego wymiaru, to operator jest zwarty. Normowa granica operatorów zwartych jest zwarta.

Lemat: Niech (S, ν) będzie przestrzenią miary ze skończoną miarą $g_1, \dots, g_m \in L^\infty(S)$. wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdziemy skończone rozbicie $E_1, \dots, E_k$ o dodatniej mierze tak, że operator uśrednienia

$$E_g = \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\nu(E_k)} \int_{E_k} g d\nu \right) \chi_{E_k}$$

spełnia

$$\|E_{g_j} - g_j\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \quad j=1, \dots, m$$

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i położmy $N = \frac{2}{\varepsilon} \sup \{ \|g_j\|_{L^\infty} : j=1, \dots, m \}$

Dla każdego $j=1, \dots, m$ definiujemy $2N+1$ zbiór

$$\{x \in S : y - \frac{\varepsilon}{2} \leq \operatorname{Re} \{g_j(x)\} \leq (y+1) \frac{\varepsilon}{2}\}, y \in \mathbb{Z} \text{ oraz } |y| \leq N$$

$$E_1, \dots, E_k \quad k \leq (2N+1)^{2m}$$

ustalmy $j, y, x \in E_k$

†

$$|g_j(x) - g_j(y)| \leq |\operatorname{Re}(g_j(x) - g_j(y))| + |\operatorname{Im}(g_j(x) - g_j(y))| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) = \varepsilon$$

zatem

$$|\varepsilon_{g_j}(x) - g_j(x)| \leq \frac{1}{\nu(E_k)} \int_{E_k} |g_j(y) - g_j(x)| d\nu(y) \leq \varepsilon \quad x \in E_k$$

Tw (zwartość, interpolacja) Niech (R, μ) , (S, ν) będą ^q przestrzeniami

o skończonej mierze. Ponadto niech $1 \leq p_j, q_j \leq \infty$ $j=0,1$

oraz T operatorem liniowym t.ze

$$T: L^{p_0}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu) \text{ ograniczony}$$

$$T: L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_1}(\nu) \text{ zwarty}$$

Jeśli $\theta \in (0,1)$ oraz p, q spełnia równanie

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

wtedy

$$T: L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu) \text{ zwarty}$$

Dowód: (myślimy o Riesz - Thorinie)

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ chcemy skonstruować t.ze $T_\varepsilon: L^p \rightarrow L^q$ skończonego

$$\|T - T_\varepsilon\|_{B(L^p, L^q)} \leq \left\{ 2 \|T\|_{B(L^{p_0}, L^{q_0})} \right\}^{1-\theta} \varepsilon^\theta$$

Jak coś takiego będziemy mieli, to teraz

Z założenia wynika, że zbiór $V = \{Tf: \|f\|_{p_1} \leq 1\}$

ma zwarte domknięcie w L^{q_1} , tudzież ograniczonym.

Wprowadźmy $\{g_j: j=1, \dots, m\}$ ε' -sieć dla V . $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4 + \nu(S)}$

Jeśli $q_1 < \infty$, to $L^{q_1}(\nu)$ ma absolutnie ciągłą miarę

zatem $E \subset S$ oraz M t.ze

$$\|g_j \chi_E\|_{L^{q_1}} < \varepsilon' \quad j=1, \dots, m$$

$$\|g_j \chi_E\|_\infty \leq M \quad q_j = \infty \text{ to } E = S$$

Z lematu znajdziemy rozbić $E = E_1, \dots, E_k$ każdy o dodatnią miarę

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = E$$

$$\varepsilon_g = \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\nu(E_k)} \int_{E_k} g dx \right) \chi_{E_k} \text{ spełnia}$$

$$\|\varepsilon_{g_j} - g_j \chi_E\| < \varepsilon' \quad j=1, \dots, m$$

Niech g dowolnym elementem V . wtedy istnieje $j: 1 \leq j \leq m$ t.ze

$$\|g - g_j\|_{q_1} < \varepsilon' \text{ wtedy}$$

$$\| \varepsilon g - g \|_{L^{q_1}} \leq \| \varepsilon (g - g_j) \|_{q_1} + \| \varepsilon g_j - g_j \|_{q_1} + \| g_j - g \|_{q_1} \leq 2 \| g - g_j \|_{q_2} + \| \varepsilon g_j - g_j \|_{q_1}$$

$$\| \varepsilon g_j - g_j \|_{q_1} \leq \| g_j \chi_{E^c} \|_{q_1} + \gamma \| \varepsilon g_j - g_j \chi_E \|_{\infty} < \varepsilon' (1 + \gamma), \quad \text{gdzie } \gamma = 1, q_1 = \infty$$

$$\gamma = (\gamma(\varepsilon))^{1/q_1}, \quad q_1 < \infty.$$

zatem

$$\| \varepsilon g - g \|_{q_1} \leq \varepsilon' (3 + \gamma) \leq \varepsilon' (4 + \gamma(s)) = \varepsilon$$

Def: $T_\varepsilon = \varepsilon \circ T$ obraz skończonego wymiaru

$$\| T - T_\varepsilon \|_{B(L^{p_1}, L^{q_1})} = \sup_{\| f \|_{p_1} \leq 1} \| T f - \varepsilon T f \|_{q_1} = \sup_{g \in V} \| g - \varepsilon g \|_{q_1} \leq \varepsilon$$

$$\| T - T_\varepsilon \|_{B(L^p, L^q)} \leq \| T - T_\varepsilon \|_{B(L^{p_0}, L^{q_0})}^{1-\theta} \| T - T_\varepsilon \|_{B(L^{p_1}, L^{q_1})}^\theta$$

$$(2 \| T \|_{B(L^{p_0}, L^{q_0})})^{1-\theta} \varepsilon^\theta$$

Przestrzeń z wagami

R z dodatnią wagą w
 w - μ miierzalna na R . Definiujemy

$$L_w^p(\mu) = \{ f - \mu \text{-miierzalna} \mid f w \in L^p(\mu) \} \quad 0 < w(x) < \infty$$

$$\| f \|_w^p = \| f w \|_p^p = \begin{cases} \int_R |f|^p w^p d\mu & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_R |f w| & p = \infty \end{cases}$$

16. XI. 2011

zbiory miary zero są te same w $d\mu$ oraz w $w^p d\mu$

Lemat: Niech (R, μ) σ -skończona przestrzeń miierzalna.

Jeżeli $1 \leq p < \infty$, to μ -proste funkcje w $L_w^p(d\mu)$ są gęste $L_w^p(d\mu)$.

Dowód: Niech $d\lambda = w^p d\mu$, zatem $L_w^p(d\mu) = L^p(d\lambda)$, jeśli $A, \mu(A) < \infty$

oraz $\chi_A \in L^p(d\lambda)$, to $\lambda(A) < \infty$ jest λ -prosta.

Niech f λ -prosta. Chcemy pokazać, że f może być aproksymowana

w $L^p(d\mu)$ przez μ -proste $= f$.

Ponieważ f jest λ -prosta, to

$$f = \sum_{k=1}^K a_k \chi_{A_k}, \quad \text{gdzie } \chi_{A_k} \text{ jest skończone dla każdego } k.$$

Znajdziemy $R_N, N \in \mathbb{N}, R_N \subset R_{N+1} \subset R, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} R_N = R$

Kładziemy

$$f_N = f \chi_{R_N} = \sum_{k=1}^K a_k \chi_{A_k \cap R_N}, \quad \mu(R_N) < \infty$$

f_N μ -prosta, λ -prosta

Dostajemy

$$\|f - f_N\|_{L^p(d\lambda)}^p = \sum_{k=1}^K |a_k|^p \lambda(A_k \cap R_N^c) \rightarrow 0,$$

$$\text{bo } \lambda(A_k) < \infty, \quad A_k \cap R_N^c \rightarrow \emptyset, \quad N \rightarrow \infty$$

Lemat: Niech (R_μ) σ -skorzone, w_0, w_1 wagi dodatnie,

$1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$; $0 \leq \theta \leq 1$. Definiujemy p i w :

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}; \quad w = w_0^{1-\theta} w_1^\theta$$

$$\text{wtedy } L_{w_0}^{p_0} \cap L_{w_1}^{p_1} \subset L_w^p \subset L_{w_0}^{p_0} + L_{w_1}^{p_1}$$

$$(\|z\|_{A+B} = \inf \{ \|a\|_A + \|b\|_B : z = a+b, a \in A, b \in B \})$$

Dowód: Ograniczamy nasz dowód do przypadku $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$, $\theta \in (0,1)$

Pierwsze włączenie jest konsekwencją nierówności Höldera, gdyż

$$\int_R |f|^p w^p d\mu = \int_R |f|^{(1-\theta)p} w_0^{(1-\theta)p} |f|^\theta w_1^\theta d\mu \leq \left(\int_R |f w_0|^{p_0} d\mu \right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} \left(\int_R (|f| w_1)^{p_1} d\mu \right)^{\frac{\theta p}{p_1}}$$

Zatem dostajemy

$$\|f\|_{L_w^p(d\mu)} \leq \|f\|_{L_{w_0}^{p_0}(d\mu)}^{1-\theta} \|f\|_{L_{w_1}^{p_1}(d\mu)}^\theta$$

Drugie włączenie wymaga więcej pracy.

Rozkładamy $f \in L_w^p$ na dwie składowe

$$E = \{x \in R : |f w_0|^{p_0} < |f w_1|^{p_1}\}$$

$$\text{Wkładamy } g = f \chi_E, \quad h = f \chi_{E^c}, \quad f = g + h$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_R |g w_0|^{p_0} d\mu &= \int_E |f w_0|^{p_0} d\mu = \int_E |f w_0|^{p_0(1-\eta)} |f w_0|^{p_0 \eta} d\mu \leq \\ &\leq \int_E |f w_0|^{p_0(1-\eta)} |f w_1|^{p_1 \eta} d\mu \leq \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \eta : p = (1-\eta)p_0 + \eta p_1$$

$$\text{wtedy też mamy } w^p = w_0^{(1-\eta)p_0} w_1^{\eta p_1}$$

oraz

do domu

Tak samo dla h

$$\begin{aligned} \int_R |h w_1|^{p_1} d\mu &= \int_{E^c} |f w_1|^{p_1} d\mu = \int_{E^c} |f w_1|^{p_1 \eta} |f w_1|^{p_1(1-\eta)} d\mu \leq \\ &\leq \int_{E^c} |f w_1|^{p_1 \eta} |f w_0|^{p_0(1-\eta)} d\mu \leq \int_R |f w|^{p_1 \eta} d\mu \end{aligned}$$

$$\|f\|_{L_{w_0}^{p_0} + L_{w_1}^{p_1}} \leq \|g\|_{L_{w_0}^{p_0}} + \|h\|_{L_{w_1}^{p_1}} \leq \|f\|_{L_w^p}^{p/p_0} + \|f\|_{L_w^p}^{p/p_1}$$

Kładziemy Af zamiast f

$$\|f\|_{L_{w_0}^{p_0} + L_{w_1}^{p_1}} \leq \lambda^{\frac{p}{p_0}-1} \|f\|_{L_w^p}^{p/p_0} + \lambda^{\frac{p}{p_1}-1} \|f\|_{L_w^p}^{p/p_1}$$

Zatem dostajemy

$$\lambda = \left[\frac{1-\theta}{\theta} \right]^{\frac{\theta(1-\theta)}{\theta-2}} \|f\|_{L_w^p}^{-1} \|f\|_{L_{w_0}^{p_0} + L_{w_1}^{p_1}} \leq \left\{ \left[\frac{1-\theta}{\theta} \right]^{\theta} + \left[\frac{\theta}{1-\theta} \right]^{1-\theta} \right\} \|f\|_{L_w^p}$$

Twierdzenie (Stein):

Niech (R, μ) oraz (S, ν) - σ -skorzone, miaralne przestrzenie.

Niech T operator liniowy określony na μ -prostych funkcjach w R i wartościach w ν -miaralnych funkcjach w S . Przypuścimy, że μ_i, ν_i są dodatnimi wagami na R i S , nadto $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$ oraz

$$\|(Tf)\nu_i\|_{q_i} \leq M \|f\mu_i\|_{p_i} \quad i=0,1$$

dla μ -prostych funkcji

Niech $0 \leq \theta \leq 1$ oraz

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

$$u = u_0^{1-\theta} u_1^{\theta}, \quad v = v_0^{1-\theta} v_1^{\theta}$$

wtedy dla $p < \infty$ operator T posiada jednoznaczne rozszerzenie na liniowy operator ograniczony z L_u^p w L_v^q oraz spełniona jest nierówność

$$\|(Tf)v\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|fu\|_p$$

Dowód: p_0, p_1 skorzone, $\theta \in (0,1)$. Z założenia wiemy, że

$$\|Th\|_{L_{v_0}^{q_0} + L_{v_1}^{q_1}} \leq C \|h\|_{L_{u_0}^{p_0} + L_{u_1}^{p_1}}$$

Bierzemy $f \in L_u^p$ taki, że $\|fu\|_p = 1$

$$\left| \int_S (Tf)q v dv \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

$g \in L_{q'}^{q'}, \quad \|g\|_{L_{q'}} = 1$

v_0, v_1, f, g - proste

$$\text{Kładziemy } \alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}$$

Definiujemy H_z na płaszczyźnie $\bar{\Omega} = \{z = x+iy : x \in [0,1]\}$

$$H_z = (u_0^{-1} |f_u|^{x(z)/x(\theta)})^{1-z} (u_1^{-1} |f_u|^{x(z)/x(\theta)})^z e^{i \arg(f_k)}$$

$$= \frac{(|f_k|^{x(z)/x(\theta)} e^{i \arg f_k})}{u_0^{1-z} u_1^z}$$

Kładziemy $u_x = u_0^{1-x} u_1^x$ oraz $p_x = \frac{1}{x(x)}$

widzimy, że

$$\int_R |H_z u_x|^{p_x} d\mu = \int_R |f_u|^{x(x)p_x/x(\theta)} d\mu = \int_R |f_u|^p d\mu = 1$$

Zatem

$$H_{x+iy} \in L_{u_x}^{p_x} \subset L_{u_0}^{p_0} + L_{u_1}^{p_1} \quad \text{w szczególności}$$

$$TH_z \text{ jest dobrze określone } L_{v_0}^{q_0} + L_{v_1}^{q_1}, \quad z \in \bar{\Omega}$$

$$F(z) = \int_S (TH_z) |g|^{1-\beta(z)} e^{i \arg g} v_0^{1-z} v_1^z dv$$

23.XI.2011

$$\|(Tf)v_i\|_{q_i} \leq M_i \|f u_i\|_{p_i} \Rightarrow \|(Tf)v\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f u\|_p$$

$$F(z) = \int_S T(H_z) |g|^{1-\beta(z)} e^{i \arg g} v_0^{1-z} v_1^z dz$$

$$|F(\theta)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta - \text{tego się nie da zrobić, bo } F \text{ nie jest analityczna}$$

$H_z -$

Znajdujemy ciąg funkcji prostych $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty, \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$

$$0 \leq \phi_n \nearrow u_0^{-1} |f_n|^{x(0)/x(\theta)}$$

$$0 \leq \psi_n \nearrow u_1^{-1} |f_n|^{x(1)/x(\theta)}$$

$$\{H_n\}_z = \phi_n^{1-z} \psi_n^z e^{i \arg(f_n)}$$

$$F_n(z) = \int_S T(H_n)_z |g|^{1-\beta(z)} e^{i \arg g} v_0^{1-z} v_1^z dz$$

F_n jest analityczna

$$|F_n(iy)| \leq \|T(H_n)iy v_0\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|\phi_n u_0\|_{p_0} \leq M_0 \|(f_n)^{\frac{x(0)}{x(\theta)}}\|_{p_0} = M_0$$

$$|F_n(1+iy)| \leq M_1 \quad |F_n(x+iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x$$

$$F_n(\theta) \rightarrow F(\theta) \quad n \rightarrow \infty$$

$$|H_n|_\theta \rightarrow |H_\theta|, \quad H_\theta \in L_u^p$$

$$(H_n)_\theta \rightarrow H_\theta \quad \text{w } L_u^p, L_{u_0}^{p_0} + L_{u_1}^{p_1}$$

$$T(H_n)_\theta \rightarrow T(H_0) \quad \omega \quad L_{V_0}^{q_0} + L_{V_1}^{q_1}$$

$$|F_n(\theta) - F(\theta)| \leq \int_S |T(H_n)_\theta - H_\theta| |g| v d\gamma$$

$$\leq C \|T[(H_n)_\theta - H_\theta]\|_{L_{V_0}^{q_0} + L_{V_1}^{q_1}} \rightarrow 0$$

$$H_{x+iy} \in L_{u_x}^{p_x}$$

Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza

Zdefiniujmy operator A na $L_1(0,1)$

$$(Af)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \quad 0 < t < 1$$

$$A: L^p \rightarrow L^p \quad \text{dla} \quad 1 < p < \infty$$

Funkcja przedstawienia niezmiennicza

$$f^*(t) = \sup \{ \lambda : \mu_f(\lambda) > \lambda \} = m_{\mu_f}(t)$$

$$\mu_f(\lambda) = \mu \{ x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \lambda \}$$

Kilka uwag o f^*

f - funkcja prosta

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x)$$

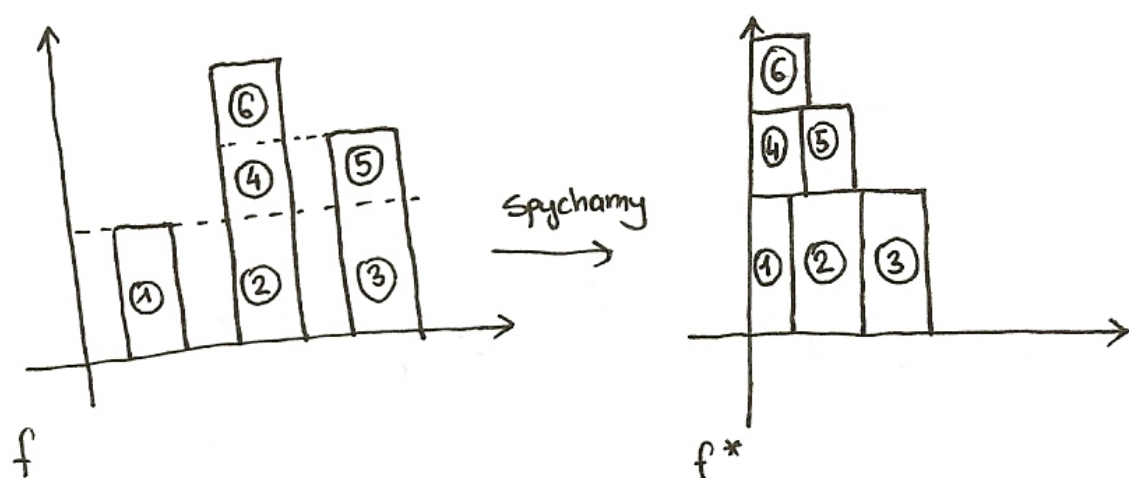
$a_1 > \dots > a_n > 0$, E_j - parami rozłączne

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j]}(\lambda)$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\text{gdzie} \quad m_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i) \quad a_{n+1} = 0$$

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j]}(t) \quad , \quad m_0 = 0$$



Def: Niech (R, μ) σ -skorzone, $0 < p, q \leq \infty$

Przestrzeń Lorentza $L^{p,q} = L^{p,q}(R, \mu)$

$f \in M_0(R, \mu)$ - mierzalne, p.w. skończone

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left\{ \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} & 0 < q < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} \left\{ t^{1/p} f^*(t) \right\} & q = \infty \end{cases}$$

$$\|f\|_{p,p} = \|f\|_p$$

$L^{\infty,q}$ dla $q < \infty$ składa się z funkcji zerowej

Stwierdzenie: Niech $0 < p \leq \infty$ oraz $0 < q \leq r \leq \infty$ wtedy

$$\|f\|_{p,r} \leq C \|f\|_{p,q} \quad \text{dla } f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu)$$

$$C \sim q, r, p, \quad L^{p,q} \subset L^{p,r}$$

Dowód: $p < \infty, q < r$

$$t^{1/p} f^*(t) = \left\{ \frac{p}{q} \int_0^t \left[s^{1/p} f^*(s) \right]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q} \leq \left\{ \frac{p}{q} \int_0^t \left[s^{1/p} f^*(s) \right]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q} \\ \leq \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q} \|f\|_{p,q}$$

$$\|f\|_{p,\infty} \leq \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q} \|f\|_{p,q} \quad r = \infty$$

$$r < \infty \\ \|f\|_{p,r} = \left\{ \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^{r-q+q} \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} \leq \|f\|_{p,\infty}^{1-q/r} \|f\|_{p,q}^{q/r}$$

Stwierdzenie: $f \in \mathcal{M}_0, 0 < p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt$$

$$p = \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \inf \{ \lambda : \mu_f(\lambda) = 0 \} = f^*(0)$$

Dowód: $p < \infty$

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$$

$$\int |f|^p d\mu = \sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(E_j) = \sum_{j=1}^n a_j^p m([m_{j-1}, m_j]) = \int_0^\infty f^{*p} dm$$

$$(|f|^p)^* = |f^*|^p$$

$$p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = p \sum_{j=1}^n m_j \int_{a_{j+1}}^{a_j} \lambda^{p-1} d\lambda = \sum_{j=1}^n (a_j^p - a_{j+1}^p) m_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j^p \mu(E_j) = \int |f|^p d\mu$$

$$\|f\|_{p,p} = \|f\|_p \quad \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^p \frac{dt}{t} = \int_0^\infty f^{*p} dt = \sum_{j=1}^n a_j^p \mu(E_j) = \int |f|^p d\mu$$

Funkcja maksymalna:

$$f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu) \quad f^{**}$$

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

Stwierdzenie:

f^{**} nieujemna, malejąca, ciągła na $(0, \infty)$

$$f^{**} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-p.w.}$$

$$f^* \leq f^{**}$$

$$|g| \leq |f| \quad \mu\text{-p.w.} \quad \text{to} \quad g^{**} \leq f^{**}$$

$$(af)^{**} = |a| f^{**}; \quad |f_n| \nearrow |f| \quad \text{to} \quad f_n^{**} \nearrow f^{**}$$

Def: $1 < p \leq \infty; 0 < q \leq \infty, f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu)$

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left\{ \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} & 0 < q < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} \{ t^{1/p} f^{**}(t) \} & q = \infty \end{cases} \quad L_{1,\infty} + L_{\infty,\infty}$$

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \in X(\mathbb{R}^n) \quad L_{p,\infty} \quad L_{1,\infty}(\mathbb{R}) \ni \frac{1}{|x|}$$

Lemat: Jeśli $1 < p \leq \infty$ oraz $1 \leq q \leq \infty$, to $\|f\|_{p,q} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq p' \|f\|_{p,q}$
dla wszystkich $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu)$ $p' = \frac{p}{p-1}$, w szczególności $L^{p,q}$ składa się ze wszystkich f ze skończoną normą $\|f\|_{(p,q)}$

Dowód: w jedną stronę jest Trivial, gdyż

$$f^* \leq f^{**} \quad f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \geq f^*(t) \frac{1}{t} \int_0^t dt = f^*(t)$$

w drugą stronę potrzebujemy nierówności Hardy'ego

$$\left\{ \int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty (t^\lambda \psi(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

$$-\infty < \lambda < 1 \quad 1 \leq q \leq \infty$$

$$\psi(s) = s^{-\frac{\lambda}{q'}} s^{\frac{\lambda}{q}} \psi(s)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds &\leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{-\lambda} ds \right)^{1/q'} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{\frac{2\lambda}{q}} \psi(s)^q ds \right)^{1/q} = \\ &= (1-\lambda)^{-1/q'} t^{-\lambda/q'} t^{-1/q} \left(\int_0^t s^{\lambda(q-1)} \psi(s)^q ds \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Zatem

$$\int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \leq (1-\lambda)^{1-q} \int_0^\infty t^{\lambda-2} \int_0^t s^{\lambda(q-1)} \psi(s)^q ds dt =$$

$$= (1-\lambda)^{1-q} \int_0^\infty s^{\lambda(q-1)} \psi(s)^q \underbrace{\left(\int_s^\infty t^{\lambda-2} dt \right)}_I ds =$$

$$= (1-\lambda)^{-q} \int_0^\infty s^{\lambda q-1} \psi(s)^q ds = (1-\lambda)^{-q} \int_0^\infty [t^\lambda \psi(t)]^q \frac{dt}{t}$$

$$I = (\lambda-1)^{-1} t^{\lambda-1} \Big|_s^{+\infty} = (1-\lambda)^{-1} s^{\lambda-1}$$

Prawdziwe jest następujące stwierdzenie

$$(L^{p,q}(R, \mu))^* = L^{p',q'}(R, \mu)$$

tw. Luxemburga o reprezentacji (bez dowodu)

Wspólny słaby typ (p_0, q_0, p_1, q_1)

Niech $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$; $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$

Niech

$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

$$\sigma = \left[\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0} \right), \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1} \right) \right]$$

Operator Calderona S_σ zdefiniowany jest

$$(S_\sigma f)(t) = t^{-1/q_0} \int_0^{t^m} s^{1/q_0} f(s) \frac{ds}{s} + t^{-1/q_1} \int_{t^m}^\infty s^{1/p_1} f(s) \frac{ds}{s}$$

Mówimy, że T jest wspólnego, słabego typu $(p_0, q_0; p_1, q_1)$

$$(Tf)^*(t) \leq M S_\sigma(f^*)(t), \quad t > 0, \quad t \in (0, \infty)$$

dla wszystkich f , które mają skończoną prawą stronę.

Minimum wśród M określa normę wspólnego, słabego typu

(p_0, q_0, p_1, q_1) operatora T .

Słaby typ (p, q) :

Niech $T: L^{p,1}(R, \mu) \rightarrow L^{q,\infty}(S, \nu)$

Mówimy, że T jest słabego typu (p, q) , jeśli

$\exists M > 0 \quad \|Tf\|_{q,\infty} \leq M \|f\|_{p,1} \quad f \in L_{p,1}$. Najmniejsze takie M , to norma T .

Zauważmy, że $(Tf)^*(t) \leq M t^{-1/q} \|f\|_{p,1} \quad t > 0$

$$\nu(|Tf| > \lambda) \leq (M \lambda^{-1} \|f\|_{p,1})^q, \quad \lambda > 0$$

(Definicja zwykła: $\nu(|Tf| > \lambda) \leq (M \lambda^{-1} \|f\|_p)^q$)

Lemat: Przypuśćmy $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$

wtedy

$$t^{\frac{1}{p_1}} S_{\sigma}(f^*)(t) \leq \int_0^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s}$$

dla wszystkich $f \in L^{p_1, 1}(\mathbb{R}^+)$. W szczególności S_{σ} jest słabego

typu (p_0, q_0) oraz (p_1, q_1)

14. XII. 2011

Dowód: z definicji

$$t^{\frac{1}{q_0}} S_{\sigma}(f^*)(t) = \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} + t^{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s},$$

gdzie $p_0 < p_1$

$$t^{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}} = (t^m)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \leq s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \quad \text{dla } s \geq t^m$$

$i = 0$

$$(S_{\sigma}(f))^* \leq S_{\sigma}(f^*)$$

$$(Tf)^*(t) \leq Mt^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{p, 1}$$

Stwierdzenie: Niech f nieujemna funkcja na $(0, \infty)$

$$(S_{\sigma}f)(t) \leq \max \left\{ \left(\frac{u}{t} \right)^{\frac{1}{q_0}}, \left(\frac{u}{t} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right\} (S_{\sigma}f)(u) \quad t, u > 0$$

W szczególności $S_{\sigma}f$ jest malejąca dla $t > 0$, to

$$(S_{\sigma}f)(t) = (S_{\sigma}f)^*(t) \leq S_{\sigma}(f^*)(t)$$

Dowód:

$$(S_{\sigma}(f))(t) = \int_0^{\infty} f(s) \min \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_0}}}{t^{\frac{1}{q_0}}}, \frac{s^{\frac{1}{p_1}}}{t^{\frac{1}{q_1}}} \right\} \frac{ds}{s}$$

$$(S_{\sigma}f)(t) = t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f(s) \frac{ds}{s} + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f(s) \frac{ds}{s}$$

$$\min_{j=0,1} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}}}{t^{\frac{1}{q_j}}} \right\} \leq \min_{j=0,1} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}}}{u^{\frac{1}{q_j}}} \right\} \max_{j=0,1} \left\{ \frac{u}{t} \right\}^{\frac{1}{q_j}}$$

Biorąc jądro postaci: $K_t(s) = \frac{1}{s} \min_{j=0,1} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}}}{t^{\frac{1}{q_j}}} \right\} = \min \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}-1}}{t^{\frac{1}{q_j}}} \right\}$

$$(S_{\sigma}f)(t) = \underbrace{\int_0^{\infty} f(s) K_t(s) ds}_{\text{czyli pozostaje to pokazać}} \leq \int_0^{\infty} f^*(s) K_t(s) ds = S_{\sigma}(f^*)(t)$$

czyli pozostaje to pokazać

Twierdzenie: (Hardy - Littlewood)

Jeśli $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu)$, to

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) ds$$

Dowód: $f, g - \mu$ -proste

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m, \quad a_j > 0$$

Niech
$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}(x)$$

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{[0, \mu(E_j))}(t)$$

z drugiej strony

$$g(x) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{F_j}(x) \quad F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n, \quad b_j > 0$$

$\bar{E}$ -mierzalny na $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu &= \sum_{j=1}^n b_j \mu(E \cap F_j) \leq \sum_{j=1}^n b_j \min\{\mu(E), \mu(F_j)\} = \sum_{j=1}^n b_j \int_0^{\mu(F_j)} \chi_{[0, \mu(F_j))}(s) ds = \\ &= \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds \end{aligned}$$

w tenże sposób pokazujemy, że
$$\int_E g d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu &= \sum_{j=1}^m a_j \int_{E_j} g d\mu \leq \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s) ds = \int_0^\infty \sum_{j=1}^m a_j \chi_{[0, \mu(E_j))}(s) g^*(s) ds = \\ &= \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds \end{aligned}$$

Tadno.

Twierdzenie: Niech $1 \leq p_0 < p_1 < \infty, 1 \leq q_0, q_1 \leq \infty, q_0 \neq q_1$

Wtedy quasilinearny operator T jest WST

$(p_0, q_0; p_1, q_1) \Leftrightarrow$ jest słabego typu (p_0, q_0) oraz (p_1, q_1)

Def: $(R_0, \mu_0), (R_1, \mu_1)$ - σ -skończony

T jest zdefiniowany na pewnej podprzestrzeni liniowej $\mathcal{M}_0(R_0, \mu_0)$

o wartościach w μ_1 -mierzalnych f w R_1 , to

T nazywamy quasilinearnym jeśli istnieje stała $k \geq 1$ taka, że

$$|T(f+g)| \leq k(|Tf| + |Tg|) \quad |T(\lambda f)| = |\lambda| |Tf|$$

μ_1 p.w. na R_1 , dla f, g λ - skalar

gdy $k=1$ T jest podliniowy

Dowód tw: Niech T będzie słabego typu $(p_0, q_0), (p_1, q_1)$,

$$f \in (L^{p_0, 1} + L^{p_1, 1})(R, \mu) \quad t > 0$$

$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

Definiujemy f_0 i f_1 na R

$$f_1(x) = \min [|f(x)|, f^*(t^m)] \operatorname{sgn} f(x)$$

$$f_0(x) = f(x) - f_1(x) = [|f(x)| - f^*(t^m)]^+ \operatorname{sgn} f(x)$$

Wtedy

$$f_1^*(s) = \min \{ f^*(s), f^*(t^m) \}, \quad s > 0$$

$$\|f_1\|_{p_1,1} = p_1 t^{\frac{m}{p_1}} f^*(t^m) + \int_{t^m}^{\infty} s^{1/p_1} f^*(s) \frac{ds}{s}$$

Podobnie liczymy

$$f_0^*(s) = [f^*(s) - f^*(t^m)]^+$$

$$\|f_0\|_{p_0,1} = \int_0^{t^m} s^{1/p_0} f^*(s) \frac{ds}{s} - p_0 t^{m/p_0} f^*(t^m).$$

21. XII. 2011

~~z~~ Ponieważ $f = f_0 + f_1$

$$(Tf)^*(t) \leq [k(|Tf_0| + |Tf_1|)]^*(t) \leq k[(Tf_0)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Tf_1)^*\left(\frac{t}{2}\right)]$$

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$$

ST implikuje $(Tf_i)^*\left(\frac{t}{2}\right) \leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-1/q_i} M_i \|f_i\|_{p_i,1} \quad i=0,1$

$$(Tf)^*(t) \leq c \left\{ \frac{t^{-1/q_0}}{p_0} \|f_0\|_{p_0,1} + \frac{t^{-1/q_1}}{p_1} \|f_1\|_{p_1,1} \right\}$$

$$(Tf)^*(t) \leq c \left\{ \frac{t^{-1/q_0}}{p_0} \left(\int_0^{t^m} s^{1/p_0} f^*(s) \frac{ds}{s} - p_0 t^{m/p_0} f^*(t^m) \right) + \frac{t^{-1/q_1}}{p_1} \left(p_1 t^{m/p_1} f^*(t^m) + \int_{t^m}^{\infty} s^{1/p_1} f^*(s) \frac{ds}{s} \right) \right\} \leq c S_{\theta}(f^*)(t)$$

$$-\frac{1}{q_0} + \frac{m}{p} = -\frac{1}{q_1} + \frac{m}{p_1}$$

Twierdzenie (Marcinkiewicza): Niech $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$; $1 \leq p_0, q_1 \leq \infty$; $q_0 \neq q_1$

Niech $0 < \theta < 1$: p, q t.z.e $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$

Niech T będzie operatorem quasiliniowym $(L^{p_0,1} + L^{p_1,1})(R, \mu)$

z wartościami w $M_0(s, \nu)$

Przyjmijmy, że T ST (p_0, q_0) i (p_1, q_1) z normami M_0, M_1

wtedy

$$T: L^{p,r} \rightarrow L^{q,r} \quad \text{dla} \quad r \in [1, \infty]$$

oraz stała istnieje

$$\|Tf\|_{q,r} \leq \frac{c}{(1-\theta)\theta} \max(M_0, M_1) \|f\|_{p,r} M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

Dowód: Zauważmy, że

$$\frac{1}{m} \left[\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} \right] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} \quad ; \quad \frac{1}{m} \left[\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} \right] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$$

T jest WST $(p_0, q_0; p_1, q_1)$

$$\|Tf\|_{q,r} \leq M \left\{ \int_0^\infty \left[t^{1/q} S_\sigma(f^*)(t) \right]^r \frac{dt}{t} \right\}^{1/r}$$

z poprzedniego stwierdzenia

$$\|Tf\|_{q,r} \leq M \left[\left\{ \int_0^\infty \left[t^{1/q - \frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{1/p_0} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} + \left\{ \int_0^\infty \left[t^{1/q - \frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^\infty s^{1/p_1} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} \right]$$

$$S_\sigma(f) = t^{-1/q_0} \int_0^{t^m} s^{1/p_0} f(s) \frac{ds}{s} + t^{-1/q_1} \int_{t^m}^\infty s^{1/p_1} f(s) \frac{ds}{s}$$

$$\|Tf\|_{q,r} \leq M |m|^{-1/r} \left[\int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}} \int_0^u s^{1/p_0} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{du}{u} \right]^{1/r} +$$

$$+ \left[\int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \int_u^\infty s^{1/p_1} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{du}{u} \right]^{1/r}]$$

$$\left\{ \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \int_0^t \psi(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \psi(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

$$\left\{ \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \int_t^\infty \psi(s) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \psi(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

$$\|Tf\|_{q,r} \leq M |m|^{-1/r} \left(c_1 \left\{ \int_0^\infty \left[u^{1/p} f^*(u) \right]^r \frac{du}{u} \right\}^{1/r} + c_2 \left\{ \int_0^\infty \left[u^{1/p} f^*(u) \right]^r \frac{du}{u} \right\}^{1/r} \right) =$$

$$= C \|f\|_{p,r}$$

$$C \sim \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$r = \infty$ - na egzamin.

4.01.2012

K - Metoda

X_i - Banacha

(X_0, X_1) - para zgodna

$X_0 + X_1, X_0 \cap X_1$ jest Banacha

$$\|f\|_{X_0 + X_1} = \inf \{ \|f_0\|_{X_0} + \|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1 \}$$

$$\|f\|_{X_0 \cap X_1} = \max \{ \|f\|_{X_0}, \|f\|_{X_1} \}$$

Def: K-funkcjonal, $f \in X_0 + X_1, t > 0, f_i \in X_i$

$$K(f, t; X_0, X_1) = \inf \{ \|f_0\|_{X_0} + t \|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1 \}$$

J- funkcjonal, $f \in X_0 \cap X_1$

$$J(f, t; X_0, X_1) = \max \{ \|f\|_{X_0}, t \|f\|_{X_1} \}$$

Zauważmy $K(f, t; X_0, X_1) = \|f\|_{X_0 + tX_1}$

$$\min(1, t) \|f\|_{X_0 + X_1} \leq \|f\|_{X_0 + tX_1} \leq \max\{1, t\} \|f\|_{X_0 + X_1}$$

Widzimy, że

$$K(f, t; X_0, X_1) \simeq \|f\|_{X_0 + X_1}, \quad t > 0$$

Jeśli $f \in X_0$, to $K(f, t; X_0, X_1) \leq \|f\|_{X_0}$

$f \in X_1$, to $K(f, t; X_0, X_1) \leq t \|f\|_{X_1}$

$f \in X_0 \cap X_1$, to $K(f, t; X_0, X_1) \leq \min\{1, t\} \|f\|_{X_0 \cap X_1}$

Stwierdzenie: Dla każdego $f \in X_0 + X_1$, K -funkcjonal $K(f, t; X_0, X_1)$

jest nieujemną, wklęsłą funkcją, $t > 0$ oraz

$$t^{-1} K(f, t; X_0, X_1) = K(f, t^{-1}; X_1, X_0)$$

W szczególności $K(f, t; X_0, X_1)$ jest wklęsła na $(0, \infty)$

$t^{-1} K(f, t; X_0, X_1)$ jest malejąca

Dowód: Jedyłą nieoczywistą rzeczą jest wklęsłość

$$K(f, t) = K(f, t; X_0, X_1)$$

$$t_1, t_2 > 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad t = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2, \quad f = f_0 + f_1, \quad f_i \in X_i$$

mamy

$$\alpha_1 K(f, t_1) + \alpha_2 K(f, t_2) \leq (\alpha_1 + \alpha_2) \|f_0\|_{X_0} + (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) \|f_1\|_{X_1}$$

biorąc inf

$$\alpha_1 K(f, t_1) + \alpha_2 K(f, t_2) \leq K(f, t) = \|f_0\|_{X_0} + t \|f_1\|_{X_1}$$

$t \mapsto K(f, t)$ wklęsła

Def: Niech (X_0, X_1) , $K(f, t) = K(f, t; X_0, X_1)$

Przestrzeń $X_0 + \infty X_1$ składa się ze wszystkich $f \in X_1 + X_0$

$$\|f\|_{X_0 + \infty X_1} = \sup_{0 < t < \infty} K(f, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(f, t) \quad \text{jest skończona}$$

Zauważmy, że $\|f\|_{X_1 + \infty X_0} = \sup_{0 < t < \infty} t^{-1} K(f, t; X_0, X_1) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} K(f, t)$

Tw (bez dowodu): Element $f \in X_0 + X_1$ należy do $X_0 + \infty X_1 \Leftrightarrow$

ciąg $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementów X_0 :

$$\sup_n \|g_n\|_{X_0} < \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{X_0 + X_1} = 0$$

$$\|f\|_{X_0 + \infty X_1} = \inf \{ \sup \|g_n\|_{X_0} : \{g_n\} \text{ j.w.} \}$$

stąd

$$\|f\|_{X_0 + \infty X_1} \leq \|f\|_{X_0} \quad ; \quad X_0 \subset X_0 + \infty X_1 \subset \overline{X_0}^{X_0 + X_1}$$

$$C + \infty L_1 = L_\infty$$

Twierdzenie: $K(f, t; X_0, X_1) = K(f, t; X_0 + \infty X_1, X_1 + \infty X_0)$, $f \in X_0 + X_1$

Twierdzenie: (R, μ) - σ -skóniczone, $f \in (L_1 + L_\infty)(R, \mu)$

$$K(f, t; L_1, L_\infty) = \int_0^t f^*(s) ds = t f^{**}(t)$$

Dowód: $K(f, t; L_1, L_\infty) = \inf \{ \|f_0\|_{L_1} + t \|f_1\|_{L_\infty} \}$

$f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, $\alpha_t = K(f, t)$

Pokażemy

$$\int_0^t f^*(s) ds \leq \alpha_t, \quad f = g + h, \quad g \in L_1, \quad h \in L_\infty$$

Korzystając z subaddytywności f^{**}

$$\int_0^t f^*(s) ds \leq \int_0^t g^*(s) ds + \int_0^t h^*(s) ds \leq \|g\|_{L_1} + t \|h\|_{L_\infty} \sim K(f, t) = \alpha_t$$

po wzięciu
inf po rozk. $f = g + h$

Pokażemy $\alpha_t \leq \int_0^t f^*(s) ds$

wystarczy okonstruować $g \in L_1$, $h \in C^\infty$

$$\|g\|_{L_1} + t \|h\|_{L_\infty} \leq \int_0^t f^*(s) ds$$

$$E = \{x : |f(x)| > f^*(t)\}, \quad t_0 = \mu(E), \quad t_0 \leq t.$$

$$g(x) = \max \{ |f(x)| - f^*(t), 0 \} \operatorname{sgn} f(x) \in L_1$$

$$h(x) = \min \{ |f(x)|, f^*(t) \} \operatorname{sgn} f(x) \in L_\infty$$

Zatem

$$\|g\|_{L_1} = \int_E |f| d\mu - \mu(E) f^*(t) \leq \int_0^{t_0} f^*(s) ds - t_0 f^*(t)$$

Toteż

$$\|g\|_{L_1} + t \|h\|_{L_\infty} \leq \int_0^{t_0} f^*(s) ds + (t - t_0) f^*(t)$$

Jednakowoż

f^* jest stałe i równe $f^*(t)$ dla $s: t_0 \leq s \leq t$

$$\|g\|_{L_1} + t \|h\|_{L_\infty} \leq \int_0^t f^*(s) ds$$

✓
 α_t

Ciekawostka:

$$\|f\|_{L_1 + \infty L_\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f^*(s) ds = \|f\|_{L_1}$$

$$\|f\|_{L_\infty + \infty L_1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \|f\|_{L_\infty}$$

Def: $0 < \theta < 1$, $q \in [1, \infty]$ albo $0 \leq \theta \leq 1$ dla $p = \infty$

Przestrzeń $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ składa się ze wszystkich $f \in X_0 + X_1$ dla których funkcja

$$\|f\|_{\theta, p} = \begin{cases} \left\{ \int_0^\infty [t^{-\theta} K(f, t)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, & 0 < \theta < 1, 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(f, t), & 0 \leq \theta \leq 1, q = \infty \end{cases}$$

jest skończona

Twierdzenie: widzimy, że $(L_1, L_\infty)_{\theta, q} = L^{p, q}$ $\frac{1}{p} = 1 - \theta$

Twierdzenie: T jest dopuszczalnym operatorem liniowym z (X_0, X_1) w (Y_0, Y_1)

wtedy $K(Tf, t; Y_0, Y_1) \leq M_0 K(f, \frac{tM_1}{M_0}; X_0, X_1)$

Dowód: $\|Tf\|_{Y_i} \leq M_i \|f\|_{X_i}$, $i=0,1$

$f \in X_0 + X_1$, $f = f_0 + f_1$, $f_i \in X_i$, $i=0,1$, $Tf = Tf_0 + Tf_1$, $Tf_i \in Y_i$

$$K(Tf, t; Y_0, Y_1) \leq \|Tf_0\|_{Y_1} + t \|Tf_1\|_{Y_1} = M_0 (\|f_0\|_{X_0} + t \frac{M_1}{M_0} \|f_1\|_{X_1})$$

Twierdzenie: (X_0, X_1) , (Y_0, Y_1) , $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$ dla $\theta \in [0, 1]$, $q = \infty$

T dopuszczalny na (X_0, X_1) w (Y_0, Y_1)

$$\|Tf\|_{Y_i} \leq M_i \|f\|_{X_i}, \quad f \in X_i, \quad i=0,1$$

wtedy

$$T: (X_0, X_1)_{\theta, q} \rightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta, q}$$

$$\|Tf\|_{\theta, q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{\theta, q}, \quad f \in (X_0, X_1)_{\theta, q}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\theta, q} &= \left\{ \int_0^\infty [t^{-\theta} K(Tf, t)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq \left\{ \int_0^\infty [t^{-\theta} M_0 K(f, \frac{tM_1}{M_0})]^{q_0} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} = \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{\theta, q} \end{aligned}$$

$$s = \frac{M_1}{M_0} t$$

11.01.2012

W. reiteracyjne:

Niech (X_0, X_1) para zgodna

$$\bar{X}_{\theta_0} = (X_0, X_1)_{\theta_0, q_0}, \quad \bar{X}_{\theta_1} = (X_0, X_1)_{\theta_1, q_1}$$

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < 1, \quad 1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$$

$$\theta \in (0, 1), \quad q \in [1, \infty]$$

$$(\bar{X}_{\theta_0}, \bar{X}_{\theta_1})_{\theta, q}$$

Chcemy pokazać

$$(\bar{X}_{\theta_0}, \bar{X}_{\theta_1})_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta', q} \quad \text{dla } \theta' = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$$

to jest ciekawe

Twierdzenie: $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1, \quad 1 \leq q_0, q_1 \leq \infty, \quad s = \theta_1 - \theta_0$. Wtedy

$$\bar{K}(f, t^\delta) \simeq \left\{ \int_0^t [s^{-\theta_0} K(f, s)]^{q_0} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q_0} + t^\delta \left\{ \int_t^\infty [s^{-\theta_1} K(f, s)]^{q_1} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q_1},$$

gdzie

$$K(f, t) = K(f, t; X_0, X_1)$$

$$\bar{K}(f, t) = K(f, t; \bar{X}_{\theta_0}, \bar{X}_{\theta_1})$$

$$\text{dla } f \in \bar{X}_{\theta_0} + \bar{X}_{\theta_1}, \quad t > 0$$

Dowód: $j = 0, 1$

$$P_j g(t) = \left\{ \int_0^t [s^{-\theta_j} K(g, s)]^{q_j} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q_j}$$

$$Q_j g(t) = \left\{ \int_t^\infty [s^{-\theta_j} K(g, s)]^{q_j} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q_j}$$

Zatem mamy pokazać

$$\bar{K}(f, t^\delta) \simeq P_0 f(t) + t^\delta Q_1 f(t)$$

Niech $f = g + h, \quad g \in \bar{X}_{\theta_0}, \quad h \in \bar{X}_{\theta_1}$

$$P_0 f(t) + t^\delta Q_1 f(t) \leq \|g\|_{\bar{X}_{\theta_0}} + P_0 h(t) + t^\delta (Q_1 g(t) + \|h\|_{\bar{X}_{\theta_1}})$$

Ponieważ $\bar{X}_{\theta_0} \subset (X_0, X_1)_{\theta_0, \infty}$, to

$$K(g, s) \leq c s^{\theta_0} \|g\|_{\bar{X}_{\theta_0}}$$

Zatem

$$P_0 g(t) \leq c t^{-\delta} \|g\|_{\bar{X}_{\theta_0}}$$

$$P_0 h(t) \leq c t^\delta \|h\|_{\bar{X}_{\theta_1}}$$

Biorąc

$$P_0 f(t) + t^\delta Q_1 f(t) \leq c (\|g\|_{\bar{X}_{\theta_0}} + t^\delta \|h\|_{\bar{X}_{\theta_1}})$$

$$P_0 f(t) + t^\delta Q_1 f(t) \leq c \bar{K}(f, t^\delta)$$

W drugiej stronie $f \in X_0 + X_1$, $P_0 f(t)$, $Q_1 f(t) < \infty$

Chcemy pokazać, że $\bar{K}(f, t^\delta) \leq c (P_0 f(t) + t^\delta Q_1 f(t))$

$$f = g + h, \quad g \in X_0, \quad h \in X_1:$$

$$\|g\|_{X_0} + t \|h\|_{X_1} \leq 2 K(f, t)$$

$$\text{dla } g \in X_0 \quad K(g, s) \leq \|g\|_{X_0} \leq 2 K(f, t)$$

$$\text{dla } h \in X_1 \quad K(h, s) \leq s \|h\|_{X_1} \leq \frac{2s}{t} K(f, t)$$

$$\text{stąd } Q_0 g(t) = \left\{ \int_t^\infty [s^{-\theta_0} K(g, s)]^{q_0} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q_0}$$

$$\leq c t^{-\theta_0} K(f, t) \leq c P_0 f(t)$$

$$P_0 h(t) \leq \left\{ \int_0^t [s^{-\theta_0} K(h, s)]^{q_0} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q_0} \leq c t^{-\theta_0} K(f, t) \leq c_0 P_0 f(t)$$

$$\|g\|_{\bar{X}_{\theta_0}} \leq (P_0 + \theta_0) g(t) \leq c P_0 f(t), \quad g \in \bar{X}_{\theta_0}$$

Podobnie pokazujemy, że $P_1 h, Q_1 g$ majoryzują

$$\|h\|_{\bar{X}_{\theta_1}} \leq (P_1 + \theta_1) h(t) \leq c Q_1 f(t) < \infty$$

$$h \in \bar{X}_{\theta_1}$$

Pozostaje pokazać $\theta \in (0, 1)$, $q = \infty$ - na egzamin, dla chętnych

Twierdzenie (iteruje):

$$0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$$

$$\bar{X}_{\theta_j, q} = (X_0, X_1)_{\theta_j, q}. \quad \text{Jeśli } \theta \in (0, 1), \quad q \in [1, \infty]$$

$$(\bar{X}_{\theta_0}, \bar{X}_{\theta_1})_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta', q}$$

$$\theta' = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$$

Dowód: $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $\delta = \theta_1 - \theta_0$

$$(X_0, X_1)_{\theta_j, 1} \subset \bar{X}_{\theta_j} \subset (X_0, X_1)_{\theta_j, \infty}$$

$$q_i = \infty$$

$$t^{-\theta_0} K(f, t) \leq c K(f, t^\delta; (X_0, X_1)_{\theta_0, \infty}; (X_0, X_1)_{\theta_1, \infty})$$

$$\leq c K(f, t^\delta; \bar{X}_{\theta_0}, \bar{X}_{\theta_1}) = c \bar{K}(f, t^\delta)$$

dla $q < \infty$

$$\|f\|_{(x_0, x_1)_{\theta, q}}^q = \int_0^\infty [t^{-\theta'} K(f, t)]^q \frac{dt}{t} \leq c \int_0^\infty [t^{\theta_0 - \theta'} \bar{K}(f, t^\delta)]^q \frac{dt}{t} =$$

$$= c \int_0^\infty [s^{\frac{\theta_0 - \theta'}{\delta(1-\theta)}} \bar{K}(f, s)]^q \frac{ds}{s} = \int_0^\infty [s^{-\theta} \bar{K}(f, s)]^q \frac{ds}{s} = c \|f\|_{(\bar{x}_{\theta_0}, \bar{x}_{\theta_1})_{\theta, q}}^q$$

Potrzebujemy

$$\|f\|_{(\bar{x}_{\theta_0}, \bar{x}_{\theta_1})_{\theta, q}} \leq c \|f\|_{(x_0, x_1)_{\theta, q}}$$

tw $q_i = 1$

$$\bar{K}(f, t^\delta) = K(f, t^\delta; \bar{x}_{\theta_0}, \bar{x}_{\theta_1}) \leq c K(f, t^\delta; (x_0, x_1)_{\theta_0, 1}, (x_0, x_1)_{\theta_1, 1})$$

$$\leq c \left\{ \int_0^t s^{-\theta_0} K(f, s) \frac{ds}{s} + t^\delta \int_t^\infty s^{-\theta_1} K(f, s) \frac{ds}{s} \right\}$$

$$\left\{ \int_0^\infty [t^{-\theta} \bar{K}(f, t)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq c \left\{ \int_0^\infty [t^{-\delta\theta} \int_0^t s^{-\theta_0} K(f, s) \frac{ds}{s}]^{q_0} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q_0}$$

$$+ \left\{ \int_0^\infty [t^{\delta(1-\theta)} \int_t^\infty s^{-\theta_1} K(f, s) \frac{ds}{s}]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq (*)$$

$$\left\{ \int_0^\infty (t^\lambda \int_0^t \psi(s) ds)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq \frac{c}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty (t^\lambda \psi(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

$$\left\{ \int_0^\infty (t^{1-\lambda} \int_t^\infty \psi(s) \frac{ds}{s})^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq \frac{c}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty (t^{1-\lambda} \psi(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

$$t^{-\delta\theta} = t^{\lambda-1} \quad \lambda = -\delta\theta + 1$$

$$\psi(s) = K(s) s^{-\theta_0-1}$$

$$s^\lambda K(s) s^{-\theta_0-1} = s^{(\theta_1-\theta_0)\theta + 1 - \theta_0-1} K(s)$$

$$\psi(s) = K(s) s^{-\theta_1}$$

$$1-\lambda = \delta(1-\theta) = (\theta_1-\theta_0)(1-\theta)$$

$$1-\lambda-\theta_1 = -((1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1 + \theta_1-\theta_1) = -\theta'$$

$$(*) \leq c \left\{ \int_0^\infty [t^{-\theta'} K(f, t)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

Przestrzeń Biesowa i Sobolewa

Def: Niech $h \in \mathbb{R}^n$, zdefiniujmy T_h $T_h f(x) = f(x+h)$

$$\Delta_h f(x) = (T_h - I) f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{operator różnicowy rzędu 1}$$

$$\Delta_h^{r+1} f(x) = \Delta_h (\Delta_h^r f)(x) \quad r = 1, \dots$$

$$\text{w szczególności } \Delta_h^r f(x) = (T_h - I)^r f(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x+kh)$$

Def: $C(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_\infty$

Modułem ciągłości rzędu r dla $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$ nazywamy następującą wielkość

$$w_r(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r f\|_p \quad w_r(f, t)_p \leq 2^r \|f\|_{L_p}$$

$$w_r(f, 2t) \leq 2^r w_r(f, t)_p$$

$p = \infty$

$$w_r(f, t)_\infty = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r f\|_\infty$$

Def: Niech $\alpha > 0$, $1 \leq p, s \leq \infty$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > \alpha$. Przestrzeń Biesowa składa się ze wszystkich $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, t. ze wielkość

$$\|f\|_{B_{p,s}^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p} + \left\{ \int_0^\infty [t^{-\alpha} w_r(f, t)_p]^s \frac{dt}{t} \right\}^{1/s}$$

$$\left\{ \sup_{0 \leq t \leq \infty} \{t^{-\alpha} w_r(f, t)_p\} \right\}$$

jest skończona

$\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$

$$\left\{ \sum_{i=1}^d \int_0^\infty [t^{-\alpha} \|f(x + te_i) - f(x)\|_{L_p}]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

18.01. 2012

Def: $\alpha > 0$, $1 \leq p, s \leq \infty$, $r > \alpha$, $r \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_{B_{p,s}^\alpha} = \|f\|_{L_p} + \left\{ \int_0^\infty [t^{-\alpha} w_r(f, t)_p]^s \frac{dt}{t} \right\}^{1/s}$$

$$\left\{ \sup_{0 \leq t \leq \infty} \{t^{-\alpha} w_r(f, t)_p\} \right\}$$

$$w_r(t, f)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r f\|_p \quad \Delta_h f = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^{r+1} = \Delta(\Delta^r)$$

Twierdzenie: Jeśli $k, r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$, to dla $t > 0$

$$2^{k-r} w_r(f, t)_p \leq w_k(f, t)_p \leq c t^k \int_t^\infty \frac{w_r(f, u)_p}{u^k} \frac{du}{u}$$

Bez dowodu

Wniosek: Niech $\alpha > 0$, $1 \leq p, s \leq \infty$

Definicja przestrzeni $B_{p,s}^\alpha$ nie zależy od wyboru r , tj. $r \approx r'$

Twierdzenie: $1 \leq p \leq \infty, \alpha, \beta > 0$

Jedli $\alpha < \beta$ lub $\alpha = \beta$ i $s \leq t$ to $\|f\|_{B_{p,s}^\alpha} \leq C \|f\|_{B_{p,t}^\beta}, f \in B_{p,t}^\beta$

Def: Przestrzeń Sobolewa $W_p^r(\mathbb{R}^n)$; $p \in [1, \infty], r \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\gamma| \leq r} \|\partial^\gamma f\|_p$$

$$|f|_{\dot{W}_p^r(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\gamma|=r} \|\partial^\gamma f\|_p$$

$\dot{W}_p^r$ - przestrzeń

Twierdzenie: $f \in \dot{W}_p^r \cap L_p(\mathbb{R}^n)$, to $f \in W_p^r(\mathbb{R}^n)$, $|\gamma| \leq r$

$$\|D^\gamma f\|_p \leq C t^{-|\gamma|} (\|f\|_p + t^r |f|_{\dot{W}_p^r})$$

Dowód: $|\gamma|=0, |\gamma|=r$ - zachodzi, $1 \leq |\gamma| \leq r-1$

wedmy $n=1$

$$\Delta_1^\gamma f(x) = f^{(\gamma)}(x + \xi), \quad 0 \leq \xi \leq \gamma$$

$$f^{(\gamma)}(x + \xi) = f^{(\gamma)}(x) + \int_0^\xi f^{(\gamma+1)}(x+u) du$$

Zatem

$$f^{(\gamma)}(x) = \Delta_1^r f(x) - \int_0^\xi f^{(\gamma+1)}(x+u) du$$

$$L_p \text{ - norma} \quad \|f^{(\gamma)}(x)\|_p \leq 2^\gamma \|f\|_p + \gamma \|f^{(\gamma+1)}\|_p$$

dostajemy

$$\|f^{(\gamma)}\|_p \leq C \{ \|f\|_p + \|f^{(r)}\|_p \}$$

f_i - funkcja po i -tej zmiennej

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|D_i^{\gamma_i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \{ \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|D_i^{\gamma_i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \}$$

Ale ogólnie mamy $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$g_i := D_i^{\gamma_i} \dots D_n^{\gamma_n} f \quad \gamma_i = |\gamma| - \sum_{m=i+1}^n \gamma_m$$

$$\|g_i\|_p \leq C \{ \|g_{i+1}\|_p + |f|_{\dot{W}_p^r} \}$$

$$\|D^\gamma f\|_p \leq C \|g_1\| \leq C \{ \|g_n\|_p + |f|_{\dot{W}_p^r} \} \leq C \{ \|f\|_p + |f|_{\dot{W}_p^r} \}$$

(= dla $C=1$)

$$\|D^\gamma f\|_p \leq c (\|f\|_p + |f|_{\dot{W}_p^r})$$

Kładąc $t = \|f\|_p / |f|_{\dot{W}_p^r}$

$$\|D^\gamma f\|_p \leq c \|f\|_p^{1-|\gamma|/r} |f|_{\dot{W}_p^r}^{|\gamma|/r}$$

Uwaga: Gdy jesteśmy na ~~całkowicie ograniczonym~~ $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, wówczas powyższa nierówność nie zachodzi. Mamy że to

$$\|D^\gamma f\|_p \leq c \|f\|_p^{1-|\gamma|/r} (|f|_{\dot{W}_p^r}^{|\gamma|/r} + \|f\|_p^{|\gamma|/r})$$

Lemat Paokudny:

Niech $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\prod_{j=1}^r \Delta_{h_j} = \sum_{D \subset \{1, \dots, r\}} (-1)^{|D|} T_{h_D^*} \Delta_{h_D}$$

$$h_D^* = \sum_{j \in D} h_j \quad h_D = - \sum_{j \in D} j^{-1} h_j$$

definiujemy

$$\bar{\omega}(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t \\ 1 \leq j \leq r}} \left\| \prod_{j=1}^r \Delta_{h_j} f \right\|_p$$

$$\omega_r(f, t)_p \leq \bar{\omega}(f, t)_p \leq c \omega_r(f, t)_p$$

Dowód: $k \in \{0, \dots, r\}$

$$\prod_{j=1}^r \Delta_{(j-k)h_j} = \prod_{j=1}^r (T_{(j-k)h_j} - I) = \sum_{D \subset \{1, \dots, r\}} (-1)^{r-|D|} \prod_{j \in D} T_{(j-k)h_j}$$

$$= \sum_D (-1)^{r-|D|} T_{(\sum_{j \in D} j h_j)} T_{(-\sum_{j \in D} h_j)}^k$$

$$\parallel \cdot (-1)^{r-k} \binom{r}{k}$$

$$(-1)^r \prod_{j=1}^r \Delta_{j h_j} = (-1)^{r-|D|} T_{(\sum_j j h_j)} \Delta_{(\sum_j h_j)}^r$$

$$h_j \leftrightarrow j h_j$$

$$\omega_r(f, t)_p \leq \bar{\omega}(f, t)_p$$

$$|h_D| \leq r t \quad \omega_r(f, r t)_p \leq (2r)^r \omega_r(f, t)_p$$

Twierdzenie: $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ istnieją stałe

$$c_1 K(f, t^r) \leq \min(1, t^r) \|f\|_p + w_r(f, t)_p \leq c_2 K(f, t^r)$$

$$f \in L_p \quad K(f, \sigma) = K(f, \sigma; L_p, W_p^r)$$

Dowód: $f = b + g$, $b \in L_p$, $g \in W_p^r$

$$\min\{1, t^r\} \|f\|_p \leq \|b\|_p + t^r \|g\|_p \leq \|b\|_p + t^r \|g\|_{W_p^r}$$

biorąc infimum dostajemy

$$\min\{1, t^r\} \|f\|_p \leq c K(f, t^r)$$

Pokażemy, że

$$w_r(f, t)_p \leq c K(f, t^r)$$

$$\begin{aligned} |h| \leq t \quad \|\Delta_h^r f\|_p &\leq \|\Delta_h^r b\|_p + \|\Delta_h^r g\|_p \\ &\leq 2^r \|b\|_p + c_r t^r \|g\|_{W_p^r} \end{aligned} \quad (\text{I nierówność})$$

$$\text{Nierówność Lagrange'a} \quad \|\Delta_h^r g\|_p \leq c t^r \|g\|_{W_p^r}, \quad |h| \leq t$$

Ponieważ $t \geq 1$ $K(f, t^r) \leq \|f\|_p$, zatem $t \in (0, 1)$

$$b = (-1)^r \int_{[0,1]^r} \Delta_t^r \mathbb{Z}_{u_j} f \, du_1 \dots du_r \quad U = [0,1]^r \subset \mathbb{R}^r, \quad u_m \in \mathbb{R}^r$$

$$g = f - b$$

$$g = (-1)^{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \int_{U^r} T_{kt}(\mathbb{Z}_{u_j}) f \, du_1 \dots du_r = (-1)^{r+1} \sum_{k=1}^r g_k$$

$$\|b\|_p \leq \int_{U^r} \|\Delta_t^r(\mathbb{Z}_{u_j}) f\|_p \, du_1 \dots du_r \leq w_r(f, rt) \leq c w_r(f, t)_p$$

gorzej jest z g

$$\|g\|_{W_p^r} \sim \|g\|_p + \sum_{|\gamma|=r} \|D^\gamma g\|_p$$

$$\|g\|_p \leq \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \|f\|_p \leq 2^r \|f\|_p$$

g_k - sumant (składnik)

$$|D^\gamma g_k(x)| = \binom{r}{k} \left| \int_{U^r} D^\gamma f(x + kt(u_1, \dots, u_r)) \, du_1 \dots du_r \right|$$

$$|D^\gamma g_k(x)| = \binom{r}{k} |(kt)^{-r} \int_0^1 \dots \int_0^1 \Delta_{kte_j}^{\gamma_i} f(x + kt \sum_{i,j} \sigma_{ij} e_j) \prod d\sigma_{ij}|$$

↑
wektor $u_i = e_j$ wybieramy j -tą współzrędną

$$t^r \|D^{\gamma} g_k\|_p \leq c \omega_r(f, kt)_p$$

$$t^r \|D^{\gamma} g\|_p \leq c \omega_r(f, t)$$

$$t^r \|g\|_{W_p^r} \leq c \{ t^r \|f\|_p + \omega_r(f, t)_p \}$$

$$K(f, t^r) \leq \|b\|_p + t^r \|g\|_{W_p^r} \leq c \{ t^r \|f\|_p + \omega_r(f, t)_p \}$$

wniosek:

$$(L_p, W_p^r)_{\theta, q} = B_{p, q}^{\theta r}$$

$$1 \leq p \leq \infty, \quad q \in [1, \infty], \quad \theta \in (0, 1)$$

$q = \infty$

$$\|f\|_{B_{p, q}^{\theta r}} \leq c \|f\|_{(L_p, W_p^r)_{\theta, q}}$$

$$\|f\|_{(L_p, W_p^r)_{\theta, q}} \leq c \|f\|_{B_{p, q}^{\theta r}} + c \|f\|_p$$

$$K(f, t) = \inf \{ \|f - g\|_p + t \|g\|_{W_p^r} \}$$

$$c_1 K(f, t^r) \leq \omega_r(f, t) \leq c_2 K(f, t^r)$$

$$(B_{p, q_1}^{s_1}, B_{p, q_2}^{s_2})_{\theta, q} = B_{p, q}^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}$$

$$(L_p, W_p^1)_{\theta, q} = (B_{p, 7}^0, B_{p, 8}^1)_{\theta, q}$$