

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Maria Donten

Nr albumu: 209516

Grupy z jedną relacją

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr hab. Zbigniewa Marciniaka
Instytut Matematyki

Czerwiec 2006

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy przedstawiono kilka twierdzeń i metod kombinatorycznej teorii grup wiążących się z topologią. Omówiona została konstrukcja przestrzeni Eilenberga-MacLane'a dla skończone generowanych grup z jedną relacją o tej własności, że słowo tworzące relację nie jest właściwą potęgą innego słowa. Ponadto został podany przykład grupy z jedną relacją, która nie ma własności Hopfa.

Słowa kluczowe

grupy homotopii, nakrycie, przestrzeń Eilenberga-MacLane'a, CW-kompleks, grupa wolna, prezentacja grupy

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Tytuł pracy w języku angielskim:

One-relator groups

Spis treści

Wprowadzenie	5
1. Przestrzenie Eilenberga-MacLane’a dla grup z jedną relacją	7
1.1. Przestrzenie z zadaną grupą podstawową	7
1.2. Grafy – ścieżki w grafach, grupa podstawowa	11
1.3. Kompleksy dwuwymiarowe	13
1.4. Kompleksy Cayleya	15
2. Przykład grupy bez własności Hopfa	17
Bibliografia	25

Wprowadzenie

Celem tej pracy jest omówienie rozwiązań dwóch problemów, które bardzo ogólnie można określić jako topologiczny i algebraiczny, połączonych pojęciem grupy z jedną relacją.

W pierwszym rozdziale zajmujemy się konstrukcją przestrzeni, których grupa podstawowa jest daną skończenie generowaną grupą G z jedną relacją, a wyższe grupy homotopii są zerowe. Okazuje się, że można podać prosty opis takich przestrzeni pod warunkiem, że słowo wyznaczające relację nie jest potęgą innego słowa w grupie wolnej generowanej przez generatory grupy G . Przedstawione zostały dwa spojrzenia na ten problem. Docelowo interesuje nas przestrzeń topologiczna o podanych własnościach, ale aby znaleźć pewne intuicje, badamy również modele kombinatoryczne: grafy i kompleksy dwuwymiarowe.

W drugiej części pracy podajemy przykład skończenie generowanej grupy z jedną relacją, którą można odwzorować homomorficznie na nią samą tak, że jądro tego odwzorowania jest nietrywialne. W tym celu zapoznajemy się z własnościami rozszerzeń Higmana-Neumana-Neumana.

Uwagi dotyczące notacji

Definicja grupy przez podanie generatorów i relacji

$$G = \langle x_1, x_2, \dots \mid r_1, r_2, \dots \rangle$$

Zbiór $\{x_i \mid i \in I\}$ to zbiór generatorów G , natomiast relacje ze zbioru $\{r_j \mid j \in J\}$ mają postać równości $w_j = v_j$, gdzie w_j i v_j są słowami nad alfabetem $\{x_i \mid i \in I\}$. G jest ilorazem grupy wolnej (rozumianej jako grupa słów) o zbiorze generatorów $\{x_i \mid i \in I\}$ przez podgrupę normalną generowaną przez zbiór słów $\{w_j v_j^{-1} \mid j \in J\}$.

Trochę inne oznaczenia: czasami wygodniej jest traktować relacje r_j nie jako równości słów w grupie wolnej $w_j = v_j$, tylko jako słowa – zastępujemy wówczas r_j przez słowo $w_j v_j^{-1}$. Oczywiście oba sposoby zapisu dają tę samą grupę G . Pojawiające się w tekście pracy sformułowanie "słowo tworzące relację" odnosi się właśnie do drugiego sposobu zapisu.

W dalszej części pracy pojawia się konieczność **rozszerzania danej grupy G , której generatory i relacje są znane, o dodatkowe generatory i relacje**. Stosujemy wówczas następującą notację: $H = \langle G; y_1, y_2, \dots \mid s_1, s_2, \dots \rangle$. Generatory i relacje grupy H to generatory i relacje G z dodanymi generatorami y_i oraz relacjami s_j odpowiednio. Przyjmuje się, że generatory y_i nie należą do zbioru generatorów grupy G .

Rozdział 1

Przestrzenie Eilenberga-MacLane’a dla grup z jedną relacją

W tym rozdziale będziemy szukać przestrzeni, których grupa podstawowa jest zadaną skończeniem generowaną grupą z jedną relacją, natomiast wyższe grupy homotopii są trywialne. Zbadamy, dla jakich grup z jedną relacją przestrzenie o powyższych własnościach można opisać poprzez prostą konstrukcję.

1.1. Przestrzenie z zadaną grupą podstawową

Przez cały czas będziemy się zajmować przestrzeniami łukowo spójnymi.

Definicja 1.1. *Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią Eilenberga-MacLane’a $K(\pi, n)$, gdzie π jest grupą i $n \in \mathbb{N}$, jeśli wszystkie grupy homotopii X są zerowe z wyjątkiem n -tej, oznaczanej $\pi_n(X)$, która jest daną grupą π .*

W dalszym ciągu będziemy się zajmować wyłącznie przypadkiem $n = 1$. Przydatna będzie następująca charakteryzacja przestrzeni $K(\pi, 1)$:

Stwierdzenie 1.2. *Jeśli nakrycie uniwersalne łukowo spójnej przestrzeni X o grupie podstawowej π jest ściągające, to X jest typu $K(\pi, 1)$.*

Dowód Przypomnijmy, że przestrzeń $\tilde{X}$ wraz z odwzorowaniem $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest nakryciem przestrzeni X , jeśli dla każdego punktu $x_0 \in X$ istnieje otoczenie otwarte $x_0 \in U$ oraz niepusta przestrzeń dyskretna F takie, że następujący diagram, w którym górna strzałka jest homeomorfizmem, lewa to dane przekształcenie p , a prawa to rzutowanie, jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times F \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U \end{array}$$

Nakrycie uniwersalne to nakrycie o trywialnej grupie podstawowej. Źródłem twierdzeń dotyczących własności nakryć jest [BJ].

Pokażemy, że dowolne, niekoniecznie uniwersalne, przekształcenie nakrywające $p : \tilde{X} \rightarrow X$ indukuje izomorfizm $p_{\#} : \pi_n(\tilde{X}) \rightarrow \pi_n(X)$ na grupach homotopii wyższych niż grupa podstawowa, czyli dla $n > 1$. Istotnie, to odwzorowanie jest epimorfizmem. Sfera wymiaru $n > 1$

jest łukowo spójna, lokalnie łukowo spójna i ma trywialną grupę podstawową, więc dowolne odwzorowanie $S^n \rightarrow X$, czyli reprezentant klasy odwzorowań będącej elementem $\pi_n(X)$, spełnia założenia kryterium istnienia podniesienia dla nakrycia. Klasa w $\pi_n(\tilde{X})$ podniesienia f jest (z definicji podniesienia) elementem $\pi_n(\tilde{X})$, który przechodzi na f . Aby wykazać injektywność $p_\#$ sprawdzimy, że jądro tego homomorfizmu jest trywialne. Jeśli $\tilde{f} : S^n \rightarrow \tilde{X}$ i $p \circ \tilde{f}$ jest homotopijne z przekształceniem stałym, to z własności podnoszenia homotopii o ustalonym początku dla nakryć otrzymujemy homotopię między $\tilde{f}$ i odwzorowaniem z S^n we włókno nad pewnym punktem. Ale ponieważ sfera jest spójna, a włókno to przestrzeń dyskretna, to odwzorowanie musi być stałe, czyli $\tilde{f}$ reprezentuje element neutralny $\pi_n(\tilde{X})$. Wobec tego $p_\#$ jest izomorfizmem.

Jeśli więc nakrycie uniwersalne jest ściągające, a więc wiemy, że wszystkie jego grupy homotopii są zerowe, to grupy homotopii $\pi_n(X)$ dla $n > 1$ muszą również być trywialne, czyli $X = K(\pi_1(X), 1)$. Z tego dowodu wynika, że wystarczy znaleźć dowolne ściągające nakrycie przestrzeni X , żeby uzasadnić powyższą równość. □

Teraz pokażemy, jak skonstruować przestrzeń topologiczną, której grupą podstawową jest dana grupa $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n | r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$. Ograniczamy się do sytuacji, gdy zarówno generatorów, jak i relacji jest skończenie wiele. W tym celu dla każdego generatora x_i grupy G należy wziąć jeden okrąg, a następnie utworzyć bukiet tych okręgów. Jak za chwilę uzasadnimy, grupa podstawowa bukietu okręgów indeksowanych pewnym skończonym zbiorem $\{x_i | i \in I\}$ to grupa wolna, której generatory są w bijekcji z elementami tego właśnie zbioru. Elementy tej grupy wolnej, będące ciągami generatorów (w potęgach 1 lub -1), intuicyjnie można utożsamiać z pętlami w bukiecie okręgów zaczepionymi w punkcie bazowym przebiegającym po kolei okręgi odpowiadające kolejnym literom w wyznaczonym kierunku. Wobec tego, żeby otrzymać przestrzeń o zadanej grupie podstawowej, potrzebujemy dodać do bukietu okręgów coś, co pozwoliłoby utożsamiać pewne ścieżki w taki sposób, jak relacje utożsamiają słowa w grupie wolnej. Niewątpliwie można skorzystać z tego, że przekształcenie okręgu w dowolną przestrzeń jest homotopijne ze stałym wtedy i tylko wtedy, gdy rozszerza się na dysk... Rozwiązaniem problemu okazuje się doklejenie dysków do bukietu okręgów tak, żeby brzegi dysków odwzorowywały się w bukiet dokładnie na pętle wyznaczone przez relacje w grupie – wtedy te pętle będziemy mogli ściągnąć w otrzymanej przestrzeni. Należy to jednak opisać formalnie.

Opis konstrukcji przestrzeni o zadanej grupie podstawowej:

1. Niech $G = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$. Dla każdego z generatorów x_i bierzemy okrąg S_i , w którym wyróżniamy punkt bazowy b_i oraz wybieramy na nim orientację.
2. Niech $Y = \bigvee_{i=1}^n (S_i, b_i)$. Punktem bazowym przestrzeni Y jest punkt bukietowy y_0 .
3. Dla każdej relacji r_j bierzemy dysk (dwuwymiarowy) D_j , wybieramy punkt d_j na jego brzegu oraz orientację okręgu brzegowego. Niech $D = \coprod_{j=1}^m D_j$.
4. Definiujemy odwzorowanie $f : \partial D = \coprod_{j=1}^m \partial D_j \rightarrow Y$ w następujący sposób: dla każdego okręgu brzegowego dysku D_j dzielimy go na tyle równych (homeomorficznych z odcinkiem) części zaczynając od wybranego punktu, ile jest liter w słowie tworzącym relację r_j . Orientacja na brzegu dysku wyznacza nam kierunek parametryzacji otrzymanych części. Wszystkie punkty rozdzielające części okręgu zostaną odwzorowane na y_0 .

Następnie, jeśli k -tym znakiem w r_j jest x_α^ϵ , to k -tą z kolei część brzegu dysku odwzorowujemy jednostajnie we współrzędnych na okrąg S_α w bukiecie – jeśli $\epsilon = 1$, to zgodnie z wybraną orientacją na S_i , jeśli $\epsilon = -1$, to przeciwnie.

5. Niech $\sim$ będzie najmniejszą relacją równoważności na $Y \sqcup D$ zawierającą zbiór par $\{(x, f(x)) | x \in \partial D\}$. Wówczas $X = Y \sqcup D / \sim$ jest szukaną przestrzenią. Z konstrukcji wynika, że jest to CW-kompleks.

Twierdzenie 1.3 (O poprawności konstrukcji). *Powyższa konstrukcja dla danej skończonej prezentowalnej grupy G jest poprawna, to znaczy otrzymana przestrzeń faktycznie ma grupę podstawową G .*

Oczywiście należy to udowodnić. Będzie nam potrzebne twierdzenie Seiferta - van Kampena (źródło: [BJ]).

Twierdzenie 1.4. *Niech X będzie przestrzenią lokalnie łukowo spójną, x_0 wybranym punktem, a U i V – podzbiórami otwartymi X zawierającymi x_0 takimi, że $U \cup V = X$ i $U \cap V$ jest łukowo spójny. Wówczas następujący diagram*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \rightarrow & \pi_1(U, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V, x_0) & \rightarrow & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

w którym wszystkie homomorfizmy są indukowane przez włożenia podzbiórów, jest przemienny i jest push-outem, czyli $\pi_1(X, x_0)$ jest sumą wolną grup $\pi_1(U, x_0)$ i $\pi_1(V, x_0)$ z amalgamacją wzdłuż $\pi_1(U \cap V, x_0)$.

Teraz możemy udowodnić poprawność konstrukcji przestrzeni o zadanej grupie podstawowej $G = \langle x_1, \dots, x_n | r \rangle$. W tym przypadku do bukietu n okręgów doklejamy tylko jeden dysk – tak, jak to wskazuje słowo r .

Lemat 1.5. *Grupa podstawowa bukietu n okręgów to F_n grupa wolna o n generatorach.*

Dowód Dowód indukcyjny. Grupa podstawowa okręgu to $\mathbb{Z}$, czyli grupa wolna generowana przez jeden element. Załóżmy tezę dla $n - 1$ okręgów i rozpatrzmy bukiet n okręgów – oznaczmy tę przestrzeń przez X , a jej wyróżniony punkt, w którym łączą się okręgi przez x_0 . Wyróżnijmy jeden z okręgów (oznaczmy go S). Niech $W \subseteq X$ będzie łukowo spójnym otoczeniem otwartym x_0 , nie zawierającym w całości żadnego z okręgów wchodzących w skład bukietu. Definiujemy $U = S \cup W$ i $V = (X \setminus S) \cup W$. U i V są otwarte, ponieważ ich przecięcie z każdym okręgiem jest otwarte, a bukiet jest przestrzenią ilorazową sumy rozłącznej okręgów. Widzimy, że $U \cap V = W$. Jednopunktowa podprzestrzeń $\{x_0\}$ jest silnym retraktem deformacyjnym W : na każdym z okręgów istnieje punkt nie należący do W , więc włożenie przecięcia W z tym okręgiem w okrąg jest homotopijne z przekształceniem stałym; można znaleźć również homotopię nie ruszającą x_0 . Stąd $\pi_1(W)$ jest trywialna. Analogicznie S i $X' = (X \setminus S) \cup \{x_0\}$ są silnymi retraktami deformacyjnymi U i V odpowiednio, więc $\pi_1(U) = F_1$ i $\pi_1(V) = F_{n-1}$ z założenia indukcyjnego. Z twierdzenia 1.4 wobec trywialności $\pi_1(U \cap V)$ otrzymujemy, że $\pi_1(X)$ jest produktem wolnym F_1 i F_{n-1} , czyli jest równa F_n . $\square$

Lemat 1.6. *Niech X będzie łukowo spójną przestrzenią topologiczną o grupie podstawowej $G = \pi_1(X)$, natomiast $Y = X \cup_f D$, gdzie D jest dyskiem dwuwymiarowym, a $f : \partial D \rightarrow X$*

to odwzorowanie doklejające. Wówczas $\pi_1(Y) = \pi_1(X)/N(f(\partial D))$, gdzie $N(f(\partial D))$ oznacza najmniejszą podgrupę normalną $\pi_1(X)$ zawierającą klasę pętli będącej obrazem brzegu dysku D w odwzorowaniu doklejającym.

W sytuacji twierdzenia 1.3 dla grupy z jedną relacją przestrzeń X jest bukieciem n okręgów, więc na mocy lematu 1.5 mamy $\pi_1(X) = F_n$. Doklejamy do X dysk zgodnie z wcześniejszym opisem konstrukcji – przekształcenie doklejające jest wyznaczone przez relację r zadanej grupy $G = \langle x_1, \dots, x_n | r \rangle$. Jako wniosek z lematu 1.6 dostajemy, że grupa podstawowa skonstruowanej przestrzeni jest równa ilorazowi F_n przez podgrupę normalną generowaną przez r , czyli G . Jeśli dana grupa G ma więcej niż jedną relację, to stosując indukcyjny argument i używając lematu 1.6 dla każdego z doklejanych dysków, również wnioskujemy poprawność konstrukcji. Wobec tego do kompletnego dowodu twierdzenia 1.3 brakuje nam jedynie uzasadnienia prawdziwości powyższego lematu.

Dowód Niech y będzie dowolnym punktem leżącym we wnętrzu dysku doklejonego do X . Zdefiniujmy $U = Y \setminus \{y\}$ oraz $V = Y \setminus X$. O V można myśleć jako o wnętrzu doklejonego dysku – ponieważ Y jest ilorazem $X \sqcup D$ przez relację, która utożsamia punkt z D z pewnym punktem X wtedy i tylko wtedy, gdy jest to punkt brzegowy, to V będzie dokładnie obrazem wnętrza dysku z sumy rozłącznej X i D . Zbiory U , V oraz $U \cap V$ są łukowo spójne: V jest homeomorficzne z wnętrzem dysku, $U \cap V$ to wnętrze dysku bez punktu, natomiast U powstaje przez sklejenie zbiorów łukowo spójnych. Grupa podstawowa V jest trywialna, bo V jest ściągające. Zauważmy, że $X \subseteq Y$ jest silnym retraktem deformacyjnym U – identyczność na X i silna retrakcja deformacyjna dysku bez punktu wewnętrznego na brzeg są zgodne obrazy brzegu D w Y i skleją się do silnej retrakcji deformacyjnej U na X . Wobec tego $\pi_1(U) = \pi_1(X)$.

Przyjrzyjmy się teraz $U \cap V$. Chcemy zbadać homomorfizm $i_{U\#} : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$ indukowany przez włożenie $i_U : U \cap V \subseteq U$. (Odwzorowanie $\pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V) = \{e\}$ znamy dobrze.) $U \cap V$ to przestrzeń homotopijnie równoważna z okręgiem, więc jej grupa podstawowa ma jeden generator. Wystarczy znaleźć jego obraz przy $i_{U\#}$. Weźmy włożenie $j : S^1 \hookrightarrow U \cap V$ na okrąg o środku w y i promieniu takim, żeby mieścił się w V (na V mamy współrzędne pochodzące z wyjściowego dysku D doklejanego do X) – to jest generator $\pi_1(U \cap V)$. Wybieramy punkt x_0 leżący w obrazie tego włożenia – to będzie wyróżniony punkt przestrzeni Y , względem którego będziemy liczyć grupę podstawową. Możemy go wybrać dopiero teraz i w miarę dowolnie, bo Y jest łukowo spójna i jej grupa podstawowa nie zależy od wyboru punktu bazowego. Zauważmy, że j jest homotopijne względem x_0 z pętlą ρ w U , która najpierw przebiega łamaną (zawartą w V oprócz końca) od x_0 do pewnego punktu w obrazie ∂D , czyli na brzegu V , następnie obiega obraz ∂D zachowując się jak odwzorowanie f , a później wraca do x_0 tą samą drogą, od której zaczęła. Aby to uzasadnić, należy zobaczyć, jakie pętle odpowiadają opisanym powyżej w dysku D doklejanym do X : jedna się nie zmienia – jest to okrąg wokół punktu x_0 , natomiast druga dochodzi do brzegu łamaną, obiega brzeg dysku i wraca do x_0 . Tutaj konstrukcja homotopii względem x_0 nie sprawia problemu; złożenie tej homotopii z przekształceniem ilorazowym z konstrukcji Y jest szukaną homotopią. Wobec tego obraz $\pi_1(U \cap V)$ w $\pi_1(U)$ jest podgrupą cykliczną generowaną przez ρ .

Ponieważ $\pi_1(V)$ jest trywialna, to $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(U, x_0)/N(i_{U\#}(\pi_1(U \cap V, x_0)))$. Zmieńmy punkt bazowy na punkt z , w którym pętla ρ po raz pierwszy znajduje się w obrazie ∂D . Przestrzenie są łukowo spójne, więc zmiana punktu bazowego nie wpływa na grupę podstawową, natomiast zamiast $N(i_{U\#}(\pi_1(U \cap V, x_0)))$ rozpatrujemy teraz $N(f(\partial D))$. Wobec tego $\pi_1(Y) = \pi_1(U)/N(f(\partial D))$.

□

Chcemy korzystać z udowodnionych lematów, aby dla danej grupy G znaleźć przestrzeń, która ma grupę podstawową G . Można jednak użyć ich nieco inaczej – do badania grup podstawowych przestrzeni, których standardowy opis jest konstrukcją CW-kompleksu z jednym punktem w zerowym szkielecie i jednym dyskiem w drugim szkielecie. Na przykład torus powstaje w wyniku doklejenia do bukietu dwóch okręgów oznaczonych a i b dysku za pomocą przekształcenia z brzegu dysku w bukiet przebiegającego oba okręgi dwukrotnie, w tej samej kolejności, za drugim razem w przeciwnym kierunku. Odpowiada temu słowo $aba^{-1}b^{-1}$. Wobec tego grupa podstawowa torusa to $\langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$ – jak widać, jest abelowa, ponieważ dzielimy F_2 przez podgrupę normalną zawierającą jej komutant.

Umiemy już wskazać przestrzeń, której grupa podstawowa jest daną skończenie generowaną grupą z jedną relacją. Chcielibyśmy teraz rozstrzygnąć, kiedy skonstruowana przestrzeń jest typu $K(\pi, 1)$. Na początku zauważyliśmy, że wystarczy w tym celu badać nakrycie uniwersalne przestrzeni. Pozostaje problem, jak znaleźć to nakrycie – aby go rozwiązać, przeanalizujemy kombinatoryczny model problemu i spróbujemy przenieść uzyskane wyniki dotyczące grafów na grunt topologii.

1.2. Grafy – ścieżki w grafach, grupa podstawowa

Zacznijmy od struktury kompleksu jednowymiarowego, czyli grafu, któremu w topologii odpowiadają jednowymiarowe CW-kompleksy. *Graf* C składa się z dwóch przeliczalnych zbiorów: V – wierzchołków i E – krawędzi, wraz z trzema funkcjami: $\alpha, \omega : E \rightarrow V$ to odpowiednio początek i koniec krawędzi, $\eta : E \rightarrow E$ to krawędź odwrotna do danej. Stąd wynika, że krawędź odwrotna zawsze istnieje – można myśleć o parach złożonych z krawędzi i jej odwrotnej jako o jednej krawędzi z dwiema możliwymi orientacjami (graf nie jest skierowany). Żądamy, żeby η nie miała punktów stałych, ponadto $\alpha(\eta(e)) = \omega(e)$ i $\omega(\eta(e)) = \alpha(e)$. Często będziemy zapisywać graf C jako parę (V, E) , pamiętając, że oprócz tych zbiorów mamy jeszcze definiujące graf funkcje.

Ścieżka p to skończony ciąg krawędzi $e_1 \dots e_n$, $n \geq 1$ taki, że dla $i = 2, \dots, n$ $\alpha(e_i) = \omega(e_{i-1})$. Definiujemy początek i koniec ścieżki odpowiednio: $\alpha(p) = \alpha(e_1)$, $\omega(p) = \omega(e_n)$. *Długość ścieżki* $|p| = n$ to liczba składających się na nią krawędzi. Jeśli $\alpha(p) = \omega(p)$, to p jest *pętlą*. Ścieżka jest *zredukowana*, jeśli dla żadnego indeksu $i = 2, \dots, n$ nie zachodzi $e_{i-1} = e_i^{-1}$, natomiast *prosta*, jeśli dla $i, j = 1, \dots, n$ mamy $\alpha(e_i) \neq \alpha(e_j)$ oraz $\omega(e_i) \neq \omega(e_j)$ (czyli nie przechodzi przez żaden wierzchołek dwa razy, chyba, że jest pętlą – wtedy dopuszczamy pokrywanie się początku i końca). Pętla jest *cyklicznie zredukowana*, jeśli jest ścieżką zredukowaną i $e_1 \neq e_n^{-1}$. Przez 1_v oznaczamy ścieżkę o długości 0 zaczepioną w wierzchołku v . Graf jest *spójny*, jeśli dowolne dwa wierzchołki można połączyć ścieżką.

Mówimy, że ścieżka p jest *równoważna* ścieżce p' , jeśli można otrzymać p' przez zastosowanie do p ciągu operacji polegających na dodaniu lub skasowaniu pary sąsiednich krawędzi postaci ee^{-1} (oczywiście dodajemy pary ee^{-1} tak, żeby znów otrzymać ścieżkę). Jest to relacja równoważności ze względu na możliwość odwracania operacji.

Lemat 1.7. *Każda ścieżka w grafie jest równoważna dokładnie jednej ścieżce zredukowanej.*

Dowód Każda ścieżka jest równoważna jakiejś ścieżce zredukowanej – algorytm redukcji polegający na kasowaniu par ee^{-1} , jeśli tylko takie istnieją, prowadzi do dobrego wyniku i zawsze się kończy, bo każdy krok zmniejsza liczbę krawędzi. Pokażemy, że nie istnieją dwie różne równoważne ścieżki zredukowane. Załóżmy przeciwnie, że p i p' są zredukowane, a ciąg

$a_1, \dots, a_m$ to ciąg wyników pojedynczych operacji wklejenia lub wyrzucenia pary ee^{-1} prowadzących od $p = a_0$ do $p' = a_{m+1}$, w dodatku minimalny w tym sensie, że suma $\sum_{i=0}^{m+1} |a_i|$ przyjmuje najmniejszą możliwą wartość. Zauważmy, że $|a_1| > |p|$ oraz $|a_m| > |p'|$, bo w ścieżkach p i p' nie można nic zredukować. Wobec tego maksimum $|a_i|$ jest przyjmowane dla pewnego i pomiędzy 1 a m , a nie dla końcowych ścieżek. Mamy $|a_{i-1}| < |a_i|$ oraz $|a_{i+1}| < |a_i|$. To znaczy, że a_i powstaje przez dodanie pary xx^{-1} do a_{i-1} , albo równoważnie a_{i-1} możemy otrzymać przez usunięcie xx^{-1} z a_i , oraz a_{i+1} otrzymujemy, usuwając yy^{-1} z a_i . Jeśli to jest ta sama para, to $a_{i-1} = a_{i+1}$ i możemy wyrzucić a_i oraz a_{i+1} z ciągu. Jeśli $x = y$ lub $x = y^{-1}$ i te pary zachodzą na siebie, czyli w a_i mamy trójkę $zz^{-1}z$, gdzie $z \in \{x, x^{-1}\}$, i w obu operacjach zastępujemy ją przez z , to także pozbywamy się a_i oraz a_{i+1} . Jeżeli natomiast żadna z powyższych sytuacji nie zachodzi, to zastępujemy a_i przez a'_i powstałym z a_i przez wyrzucenie par xx^{-1} i yy^{-1} . Teraz a_i powstaje z a_{i-1} przez usunięcie yy^{-1} , a a_{i+1} otrzymujemy z a_i , dodając xx^{-1} . We wszystkich trzech przypadkach stworzyliśmy nowy poprawny ciąg wyników kolejnych operacji przeprowadzających p na p' , jednocześnie zmniejszając sumę długości kolejnych ścieżek, przecząc założeniu o jej minimalności.

□

Lemat 1.8. *W grafie spójnym istnieje drzewo rozpinające, czyli acykliczny podzbiór zbioru krawędzi taki, że każdy wierzchołek leży na jakiejś krawędzi z tego zbioru. (Tutaj za krawędź uważamy parę $\{e, e^{-1}\}$.)*

Dowód Działaj zachłanny algorytm szukania drzewa rozpinającego. Wybieramy wierzchołek v_0 i dla $n \in \mathbb{N}$ konstruujemy podgraf G_n : jest to zbiór wszystkich wierzchołków, do których da się dojść z v_0 ścieżką nie dłuższą niż n wraz z krawędziami łączącymi te wierzchołki (te podgrafy nie muszą być skończone). $G_0 = (\{v_0\}, \emptyset)$, $T_0 = \emptyset$. Konstrukcja drzewa rozpinającego T_{n+1} dla G_{n+1} przebiega następująco: bierzemy drzewo T_n dla G_n , a następnie dla każdego wierzchołka z G_{n+1} nie leżącego w G_n wybieramy (niezależnie od innych wierzchołków) dowolną krawędź łączącą ten wierzchołek z G_n . Następnie wszystkie wybrane krawędzie dodajemy do T_n i mamy T_{n+1} . Ta operacja nie powoduje powstania cyklu, bo każdy z dodanych wierzchołków leży na dokładnie jednej krawędzi z T_{n+1} . Wynikiem jest suma po $n \in \mathbb{N}$ drzew rozpinających dla G_n . Jest to zbiór acykliczny, ponieważ gdyby istniał cykl, to musiałby być zawarty w którymś G_n . Zauważmy, że z opisu algorytmu wynika, że dla grafów skończonych liczba krawędzi drzewa rozpinającego jest o jeden mniejsza, niż liczba wszystkich wierzchołków w grafie.

□

Ścieżki p i q w grafie możemy złożyć do ścieżki pq , łącząc odpowiadające im ciągi krawędzi, pod warunkiem, że $\omega(p) = \alpha(q)$. To składanie jest łączne i dobrze określone na klasach równoważności ścieżek: jeśli p i q są równoważne odpowiednio ścieżkom p' i q' , to pq i $p'q'$ także są równoważne. Jeśli wybierzemy wierzchołek $v \in V$, to klasy równoważności pętli zaczepionych w v ze składaniem jako mnożeniem i klasą 1_v jako elementem neutralnym tworzą grupę – jest to grupa podstawowa grafu i oznaczamy ją $\pi(C, v)$. Jeśli graf jest spójny, to grupa podstawowa nie zależy od wyboru wierzchołka v – wtedy oznaczamy ją $\pi(C)$. Dowód jest analogiczny do dowodu dla przestrzeni topologicznych i nie ma sensu go przytaczać.

Twierdzenie 1.9. *Jeśli $C = (V, E)$ jest grafem spójnym, a v jego dowolnym wierzchołkiem, to $\pi(C, v)$ jest grupą wolną. Ponadto liczba jej generatorów wynosi $|E| - |V| + 1$.*

Jeśli C nie jest spójny, to jego grupa podstawowa jest po prostu grupą podstawową tej spójnej składowej, w której leży v . Dlatego założenie spójności grafu to właściwie powiedzenie, że bada się tylko tę jedną składową.

Dowód Niech T będzie dowolnym drzewem rozpinającym C . Pokażemy, że $\pi(C, v)$ jest generowana przez pętle ρ_e dla $e \in E \setminus T$ utworzone w następujący sposób: jeśli przez p_e oznaczymy ścieżkę zredukowaną od v do $\alpha(e)$ złożoną wyłącznie z krawędzi z T , a q_e to ścieżka zredukowana w T łącząca v i $\omega(e)$, to $\rho_e = p_e e q_e^{-1}$. Zauważmy, że p_e i q_e są jednoznacznie wyznaczone, bo to ścieżki w drzewie. Ponadto ρ_e są ścieżkami zredukowanymi, bo p_e i q_e były, a e pojawia się tylko raz i jej odwrotność nie występuje w ρ_e . Wobec tego, na mocy lematu 1.7, żadne dwie pętle ρ_e nie są równoważne i żadna nie jest równoważna z 1_v . Aby uzasadnić, że pętle ρ_e generują $\pi(C, v)$, weźmy dowolną pętlę $p = e_1 \dots e_n$ zaczepioną w v . Dla ułatwienia utwórzmy również pętle ρ_e dla $e \in T$ w sposób opisany powyżej. Pętla p jest równoważna złożeniu $\rho_{e_1} \rho_{e_2} \dots \rho_{e_n}$, ponieważ $p_{e_{i+1}} = q_{e_i}$. Stąd otrzymujemy

$$\rho_{e_1} \rho_{e_2} \dots \rho_{e_n} = p_{e_1} e_1 q_{e_1}^{-1} p_{e_2} e_2 q_{e_2}^{-1} \dots p_{e_n} e_n q_{e_n}^{-1} = p_{e_1} e_1 q_{e_1}^{-1} q_{e_1} e_2 q_{e_2}^{-1} \dots q_{e_n} e_n q_{e_n}^{-1}$$

i redukując $q_{e_i}^{-1} q_{e_i}$, dostajemy wyjściową pętlę ($p_{e_1} = q_{e_n} = 1_v$, bo pętla p jest zaczepiona w v).

Przyjrzyjmy się pętlom ρ_e dla $e \in T$ – one są ściągające, czyli równoważne 1_v , ponieważ są w całości zawarte w drzewie T . Wobec tego nie wnoszą nic nowego do zbioru generatorów $\pi(C, v)$ – wystarczą wyłącznie ρ_e dla $e \notin T$, a w skończonym grafie jest ich $|E| - |T| = |E| - |V| + 1$.

Trzeba jeszcze uzasadnić, dlaczego grupa generowana przez ρ_e dla $e \notin T$ jest wolna. Weźmy złożenie pętli $\rho_{e_1} \rho_{e_2} \dots \rho_{e_n}$, gdzie $e_1 \dots e_n$ jest zredukowanym słowem nad alfabetem złożonym z nazw krawędzi ze zbioru $E \setminus T$ (może nie stanowić ścieżki, tylko składać się z fragmentów zredukowanych ścieżek). Pokażemy, że to nietrywialny element $\pi(C)$. Tak jest, ponieważ z tego złożenia otrzymujemy ścieżkę zredukowaną, kasując tylko wspólne początki par $p_{e_{i+1}}$ i q_{e_i} – widać, że po tych operacjach nie zostaną nam już żadne pary krawędzi postaci ee^{-1} . Wobec tego żadnego złożenia pętli ρ_e odpowiadającego nietrywialnemu słowu $e_1 \dots e_n$ nie utożsamiamy z 1_v , czyli otrzymaliśmy grupę wolną o $|E| - |V| + 1$ generatorach jako $\pi(C, v)$. □

1.3. Kompleksy dwuwymiarowe

Kompleksy dwuwymiarowe, nazywane dalej kompleksami, są pewnym rozszerzeniem pojęcia grafu i stanowią model kombinatoryczny dla CW-kompleksów, które mają komórki wyłącznie w wymiarach 0, 1 i 2. Kompleks C składa się z grafu C_1 (szkieletu kompleksu C) oraz zbioru ścian F wraz z dwiema funkcjami: ∂ i η_2 . Dla dowolnej ściany $D \in F$ funkcja ∂D przypisuje D jej brzeg – ścieżkę w C_1 , natomiast $\eta_2(D) = D^{-1}$ to odwrotność ściany D ; ∂D^{-1} to ścieżka odwrotna do ∂D . Naprawdę nie chodzi o to, żeby wyobrażać sobie pary ścian, tylko żeby mówiąc o ścianie kompleksu, myśleć również o wybranej z dwóch dopuszczalnych orientacji brzegu tej ściany – taką intuicję będziemy się posługiwać.

Każdy graf to kompleks, który nie ma żadnych ścian – to uzasadnia przyjęcie jednakowych oznaczeń dla obu konstrukcji. Ścieżka w kompleksie C to ścieżka w jego szkielecie C_1 . Mówimy, że ścieżki w kompleksie C są równoważne, jeśli można przejść od jednej do drugiej, wykonując ciąg operacji polegających na dodaniu lub skasowaniu pary ee^{-1} (gdzie e jest krawędzią w C_1) albo ciągu krawędzi będących brzegiem jakiejś ściany. Oczywiście operacje muszą mieć sens, to znaczy w wyniku każdej z nich musimy dostać ścieżkę. Dodając ściany do grafu C_1 powiększamy relację równoważności ścieżek zdefiniowaną dla grafu – teraz różne elementy grupy podstawowej $\pi(C_1)$ mogą zostać utożsamione, jeśli różnią się o fragmenty przebiegające brzegi pewnych ścian.

Ścieżki w kompleksie możemy składać tak, jak robiliśmy to dla ścieżek w grafie – własności działania się nie zmieniają. Definiujemy grupę podstawową $\pi(C, v)$ kompleksu C dla wybranego wierzchołka v jako zbiór klas równoważności pętli zaczepionych w v ze składaniem jako działaniem grupowym i elementem neutralnym 1_v . Widać, że struktura kompleksu jest bardzo bliska wykonywanej przez nas konstrukcji przestrzeni topologicznej przez doklejanie dysków do bukietu okręgów.

Teraz dowolnej grupie $G = \langle X, R \rangle$, gdzie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ to zbiór generatorów, a $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ jest zbiorem relacji wyznaczonych przez słowa cyklicznie zredukowane, przyporządkujemy kompleks $K(X, R)$ mający tylko jeden wierzchołek. Dla każdego generatora x_1 w $K(X, R)$ istnieje krawędź (o obu końcach w v), wraz z krawędzią do niej odwrotną. Natomiast dla każdej relacji r_i w $K(X, R)$ istnieje ściana, której brzeg jest ścieżką odpowiadającą słowu r_i , wraz ze ścianą odwrotną. Analogiczną metodą konstruowaliśmy przestrzeń topologiczną o grupie podstawowej G – o faktycznym podobieństwie obu obiektów powinno ostatecznie przekonywać następujące spostrzeżenie:

Lemat 1.10. *Grupą podstawową $K(X, R)$ jest $G = \langle X | R \rangle$.*

Dowód W notacji grupy podstawowej pomijamy wierzchołek, w którym są zaczepione pętle, bo wybór jest oczywisty. Mamy homomorfizm z grupy wolnej F_n , czyli grupy podstawowej C_1 (szkieletu kompleksu $K(X, R)$) w $\pi(K(X, R))$, ponieważ doklejając ściany, utożsamiamy pewne ścieżki w C_1 tak, że jest to również dobrze zdefiniowane utożsamianie na klasach ścieżek – elementach $\pi(C_1)$, przemienne z działaniem grupowym. W jądrze tego homomorfizmu na pewno znajdują się pętle odpowiadające słowom r_i , czyli również cała generowana przez nie podgrupa normalna $N(R)$. Z drugiej strony, operacje utożsamiające ścieżki w kompleksach $K(X, R)$ stanowią pewien ograniczony podzbiór możliwości utożsamiania ścieżek w CW-kompleksach utworzonych za pomocą opisanej na początku konstrukcji. Każdej formalnej operacji w $K(X, R)$ możemy przyporządkować homotopię dróg w CW-kompleksie, która zmienia drogę tylko na określonym odcinku (przeciąga przez dysk, wydłuża albo skraca). Ponieważ nawet wszystkie homotopie w skonstruowanej przestrzeni nie utożsamiają z pętlą trywialną nic poza drogami odpowiadającymi $N(R)$, to kombinatoryczne operacje na pętlach w kompleksie też nie mogą, czyli $\pi(K(X, R)) = F_n/N(R)$. Może nie jest to stuprocentowo ścisły argument, ale pokazuje, że przejście z pewnymi własnościami przestrzeni topologicznych na odpowiadające im kompleksy nie jest trudne, natomiast widać, że z przejściem w drugą stronę byłby problem.

□

Odwzorowanie kompleksów to taka trójka odwzorowań zbiorów wierzchołków, krawędzi i ścian tych kompleksów, że końce danej krawędzi przechodzą na końce obrazu tej krawędzi, brzeg danej ściany przechodzi na brzeg obrazu tej ściany, a odwrotności krawędzi i ścian przechodzą na odwrotności obrazów. *Nakryciem* nazywamy odwzorowanie kompleksów, które jest "na" oraz dla każdego wierzchołka jest różnowartościowe na zbiorach krawędzi i ścian sąsiadujących z tym wierzchołkiem. *Nakryciem uniwersalnym* nazwiemy nakrycie, którego dziedziną jest kompleks o trywialnej grupie podstawowej. Okazuje się, że nakrycia kompleksów mają podobne własności, jak nakrycia przestrzeni topologicznych. Na przykład nakrycie indukuje monomorfizm na grupach podstawowych ([LS]). Jednak dla naszego problemu nie jest to istotne.

1.4. Kompleksy Cayleya

Chcielibyśmy umieć badać nakrycie uniwersalne dla skonstruowanych przez nas przestrzeni o zadanej grupie podstawowej. Na początek spróbujemy znaleźć nakrycia uniwersalne dla kombinatorycznych odpowiedników tych przestrzeni.

Kompleksem Cayleya $C = C(X, R)$ dla grupy $G = \langle X, R \rangle$ nazywamy kompleks, którego zbiorem wierzchołków V jest zbiór wszystkich elementów grupy G , zbiór krawędzi E to $G \times L$, gdzie $L = X \cup X^{-1}$, natomiast zbiór ścian to $G \times (R \cup R^{-1})$. Krawędź (g, y) ma początek w g i koniec w gy , krawędź odwrotna do niej to (gy, y^{-1}) . Zbiór L nazywamy zbiorem etykiet; każda krawędź $e = (g, y)$ ma etykietę $\phi(e) = y$. Funkcję ϕ możemy rozszerzyć multiplikatywnie na dowolne ścieżki w C : jeśli $p = e_1 \dots e_n$ jest ścieżką, to $\phi(p) = \phi(e_1) \dots \phi(e_n)$. W wyniku otrzymamy słowo – ciąg generatorów G , który wraz z wyborem punktu zaczepienia wyznacza ścieżkę. Ściana (g, r) , gdzie relację r traktujemy jako słowo, ma brzeg będący pętlą zaczepioną w g o etykiecie r . Ścianą odwrotną do (g, r) jest (g, r^{-1}) . Zauważmy, że jeśli $r = s^k$, gdzie s jest pewnym słowem, a $k > 1$, to ściany $(g, r), (gs, r), \dots, (gs^{k-1}, r)$ mają dokładnie ten sam brzeg (nie wyróżniamy w pętli brzegowej punktu zaczepienia). Wtedy wszystkie te ściany będziemy traktować jako jedną ścianę (dopóki nie wrócimy do kategorii przestrzeni topologicznych). Można badać działanie grupy G na kompleksie C przez mnożenie z lewej strony.

Udowodnimy kilka własności kompleksów Cayleya. Przyjmijmy, że mamy daną grupę $G = \langle X, R \rangle$.

Stwierdzenie 1.11. *Kompleks $C(X, R)$ jest jednospójny – $\pi(C(X, R)) = 1$.*

Dowód Aby to pokazać, będziemy korzystać z funkcji etykietującej ścieżki. Weźmy dowolną pętlę p zaczepioną w wierzchołku v , utożsamianym z elementem grupy $G = \langle X | R \rangle$. Wtedy, ponieważ przejście krawędzią to mnożenie początku przez odpowiadający jej generator, mamy równość w G : $v\phi(p) = v$, czyli $\phi(p) = 1_G$. To oznacza, że $\phi(p)$ jako element F_n ($n = |X|$) leży w $N(R)$ – najmniejszej podgrupie normalnej zawierającej $R = \{r_j | j \in J\}$. Jest to podgrupa generowana przez $\{ur_ju^{-1} | j \in J, u \in F_n\}$ (łatwo sprawdzić, że to podgrupa normalna; oczywiście musi być zawarta w $N(R)$), więc $\phi(p) = \prod_{i=1}^m u_i s_i u_i^{-1}$ dla pewnych $u_i \in F_n$, $s_i \in R \cup R^{-1}$. To jest równość w F_n , czyli pętla zaczepiona w v odpowiadające obu stronom są równoważne (nawet jeśli potraktujemy je tylko jako pętle w szkielecie, zapominając o ścianach kompleksu). Ale prawą stronę łatwo sprowadzić do 1_v za pomocą dopuszczalnych operacji: najpierw wykreślamy wszystkie s_i , a potem odpowiednio dużo razy kasujemy pary postaci ee^{-1} , żeby pozbyć się wszystkich słów $u_i u_i^{-1}$. Wobec tego wybrana dowolnie pętla jest równoważna stałej.

□

Stwierdzenie 1.12. *Kompleks $C(X, R)$ jest nakryciem uniwersalnym kompleksu $K(X, R)$.*

Dowód Chcemy zdefiniować odwzorowanie kompleksów z $C = C(X, R)$ w $K = K(X, R)$ – właściwie jest tylko jedna możliwość. Dowolny wierzchołek C przechodzi na jedyny wierzchołek K , wychodząca z niego krawędź odpowiadająca generatorowi x_i na krawędź w K odpowiadającą temu generatorowi. Ściany analogicznie. To odwzorowanie jest nakryciem. Co do różnowartościowości na zbiorze krawędzi wychodzących z danego wierzchołka nie ma wątpliwości. Zauważmy, że sklejenie identycznych ścian powstających, jeśli relacja jest potęgą innego słowa, pozwala na otrzymanie różnowartościowości nakrycia na zbiorze ścian zaczepionych w danym wierzchołku. Uniwersalność nakrycia to wniosek z lematu 1.11.

□

Opis kompleksu Cayleya dla danej grupy G ułatwia nam konstrukcję CW-kompleksu będącego nakryciem uniwersalnym naszego kandydata na $K(G, 1)$. Należy dokonać drobnych modyfikacji. Przede wszystkim będziemy traktować krawędź wraz z jej odwrotną, a także ścianę wraz z jej odwrotną jako jeden obiekt, odpowiednio odcinek i dysk doklejany do niższego szkieletu. Jak zostało to wcześniej zasugerowane, wzięcie krawędzi lub ściany odwrotnej to zmiana orientacji, w przypadku ściany – orientacji brzegu. Ponadto tym razem nie będziemy utożsamiać identycznych ścian w przypadku, gdy słowo tworzące relację jest potęgą innego słowa. Gdybyśmy tak robili, w niektórych przypadkach nie otrzymalibyśmy nakrycia.

Przyjrzyjmy się rzeczywistej przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^2$, konstruowanej przez doklejenie dysku do okręgu za pomocą dwukrotnego nawinięcia. Na mocy lematu 1.6 jej grupa podstawowa to $\langle x | x^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. Wobec tego jej kompleks Cayleya ma dwa wierzchołki, dwie krawędzie oraz ich odwrotne i jedną ścianę (wraz z odwrotną), której brzeg stanowią te dwie krawędzie. Przechodząc do konstrukcji topologicznej, otrzymujemy dysk. Możemy go odwzorować na $\mathbb{R}P^2$ zgodnie z wcześniejszym opisem konstrukcji tej przestrzeni, ale punkty antypodyczne z brzegu dysku odwzorowują się na ten sam punkt, a na wewnątrz dysku to jest lokalny homeomorfizm. Wobec tego włókna nad niektórymi punktami są jednoelementowe, a nad innymi dwuelementowe – tak nie może wyglądać nakrycie nad przestrzenią spójną. Jeśli jednak nie utożsamimy dwóch identycznych ścian, to, tak jak powinniśmy, otrzymamy sferę S^2 jako nakrycie uniwersalne $\mathbb{R}P^2$. Zauważmy, że odwzorowanie nakrywające jest złożeniem dwóch etapów. Najpierw sklejamy obie ściany (obracając najpierw jedną o 180°) i otrzymujemy dysk, ale tym razem pamiętamy, że punkty w jego wnętrzu mają krotność 2. Dzięki temu przy standardowym przekształceniu dysku w $\mathbb{R}P^2$ włókna nad wszystkimi punktami będą zgodne.

Po wyjaśnieniu powyższych wątpliwości powinno być mniej więcej jasne, że otrzymana na podstawie opisu kompleksu Cayleya dla danej grupy G przestrzeń topologiczna jest nakryciem skonstruowanej przez nas przestrzeni o grupie podstawowej G . Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.13. *CW-kompleks C skonstruowany na podstawie kompleksu Cayleya dla danej grupy G z jedną relacją jest ściągalny wtedy i tylko wtedy, gdy słowo wyznaczające tę relację nie jest potęgą żadnego innego słowa.*

To twierdzenie pozostawimy bez dowodu. Jest on dość skomplikowany. Bardzo ogólnie, korzystając z twierdzenia Whiteheada i wykazanej wcześniej jednospójności przestrzeni C można wywnioskować, że do dowodu ściągłości C wystarczy pokazać różnowartościowość odwzorowania brzegu ∂ między jej drugą i pierwszą grupą łańcuchów komórkowych. Okazuje się, że ∂ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G spełnia założenia twierdzenia 1.13, ale wykazanie tego wymaga znajomości pewnych pojęć kombinatorycznej teorii grup, których nie będziemy tutaj wprowadzać.

Jako wniosek z lematu 1.2 i twierdzenia 1.13 otrzymujemy, że skonstruowana przez nas przestrzeń o zadanej grupie podstawowej $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n | r \rangle$ – skończenie generowanej, z jedną relacją – jest $K(G, 1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy słowo tworzące relację nie jest potęgą żadnego innego słowa.

Rozdział 2

Przykład grupy bez własności Hopfa

W tym rozdziale zajmiemy się znalezieniem przykładu grupy, która nie ma własności Hopfa. Przykład pochodzi z klasy grup z jedną relacją.

Definicja 2.1. *Mówimy, że grupa G ma własność Hopfa, jeśli nie jest izomorficzna z żadną swoją właściwą grupą ilorazową.*

Stwierdzenie 2.2. *Grupa G ma własność Hopfa wtedy i tylko wtedy, gdy każdy epimorfizm przeprowadzający G na G jest różnowartościowy.*

Dowód $h : G \rightarrow G$ jest nieróżnowartościowym epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $H \triangleleft G$ – nietrywialna podgrupa normalna, oraz homomorfizmy $\varphi_1 : G \rightarrow G/H$ i $\varphi_2 : G/H \rightarrow G$ takie, że φ_1 jest dzieleniem przez H , φ_2 to izomorfizm oraz zachodzi $h = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Natomiast istnienie takich φ_1 , φ_2 i H jest równoważne temu, że G jest izomorficzna ze swoją właściwą grupą ilorazową G/H .

□

Celem tego rozdziału jest udowodnienie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.3. *Grupa $H = \langle b, t | t^{-1}b^2tb^{-3} \rangle$ nie ma własności Hopfa.*

Zaprezentowany poniżej dowód tego twierdzenia wymaga użycia jednej z podstawowych struktur kombinatorycznej teorii grup – rozszerzeń Higmana-Neumana-Neumana, nazywanych dalej rozszerzeniami HNN. Zajmijmy się więc definicją oraz opisaniem podstawowych własności i twierdzeń dotyczących tych rozszerzeń.

Definicja 2.4. *Niech G będzie grupą, a A i B jej podgrupami takimi, że istnieje izomorfizm $\phi : A \rightarrow B$. Rozszerzeniem HNN grupy G względem podgrup A i B oraz izomorfizmu ϕ będziemy nazywać grupę $G^* = \langle G; t | t^{-1}at = \phi(a) \rangle$.¹*

W kolejnych definicjach będziemy korzystać z przyjętych oznaczeń dla rozszerzenia HNN grupy G .

¹To oznaczenie jest omówione w uwagach zawartych we wprowadzeniu.

Do badania własności rozszerzeń HNN będziemy potrzebować dwóch definicji, określających rodzaje (skończonych) ciągów, którymi będziemy się dalej zajmować. Ogólnie, ciągi które nas interesują, składają się z występujących na przemian elementów grupy G oraz elementu t lub jego odwrotności. W dalszych rozważaniach przez g_i będziemy oznaczać elementy grupy G , a ϵ_i będzie równe 1 lub -1 .

Definicja 2.5. Ciąg $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, t^{\epsilon_2}, \dots, g_{n-1}, t^{\epsilon_n}, g_n$ ($n \geq 1$) jest zredukowany, jeśli nie zawiera podciągu kolejnych elementów postaci t^{-1}, g_i, t , gdzie $g_i \in A$ lub t, g_i, t^{-1} , gdzie $g_i \in B$.

Kolejna definicja wymaga dokonania wyboru reprezentantów prawych warstw podgrup A i B grupy G . Wobec tego dalej przyjmujemy następujące oznaczenia: dla dowolnego $g \in G$ przez g_A oznaczamy element reprezentujący warstwę Ag i odpowiednio g_B jest reprezentantem warstwy Bg .

Definicja 2.6. Ciąg $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, t^{\epsilon_2}, \dots, g_{n-1}, t^{\epsilon_n}, g_n$ ($n \geq 0$) jest w postaci normalnej, jeśli zachodzą następujące warunki:

- jeśli $\epsilon_i = -1$, to g_i jest jednym z wybranych reprezentantów prawych warstw podgrupy A ($g_i = g_{i;A}$);
- jeśli $\epsilon_i = 1$, to g_i jest jednym z wybranych reprezentantów prawych warstw podgrupy B ($g_i = g_{i;B}$);
- nie istnieje podciąg złożony z kolejnych elementów postaci $t^\epsilon, 1, t^{-\epsilon}$.

Zauważmy, że powyższa definicja nie nakłada żadnych warunków na element g_0 .

Docelowo chcielibyśmy udowodnić, że każdemu elementowi grupy G^* odpowiada dokładnie jeden ciąg w postaci normalnej. Oczywiście to przyporządkowanie powinno polegać na tym, że każdy element grupy G^* jest iloczynem wszystkich wyrazów odpowiadającego mu ciągu wymnożonych w kolejności zgodnej z porządkiem w ciągu. (Dalej to przyporządkowanie będzie również określane jako reprezentowanie elementów G^* przez ciągi w postaci normalnej.) Zauważmy, że gdybyśmy nie wybrali jednego reprezentanta z każdej warstwy A i B w G , to nie mielibyśmy szans na uzyskanie jednoznacznej reprezentacji elementów G^* za pomocą naprzemiennych ciągów elementów G oraz t w potęgach 1 lub -1 . Istnieją różne ciągi zredukowane (których definicja jest praktycznie definicją ciągów w postaci normalnej, tylko bez wyboru reprezentantów warstw), mające ten sam iloczyn elementów.

Konstrukcja jest prosta: weźmy $g \in G$, $g \notin A$. Dwuelementowy ciąg t^{-1}, g jest zredukowany. Niech g' będzie dowolnym, różnym od g , elementem z tej samej warstwy A , co g – dla pewnego $a \in A$ mamy równość $g = ag'$. Z definicji G^* wiemy, że $t^{-1}at = \phi(a) \in B$, czyli $t^{-1}a = \phi(a)t^{-1}$. Wobec tego $t^{-1}g = t^{-1}ag' = \phi(a)t^{-1}g'$. Ciąg $\phi(a), t^{-1}, g'$ również jest zredukowany, a iloczyn jego kolejnych elementów jest taki sam, jak dla ciągu t^{-1}, g .

Ogólnie (i nieściśle): ciągi zredukowane są trochę zbyt ogólne, ponieważ pozwalają na pewne modyfikacje elementów i ich kolejności, wynikające z relacji pochodzących z definicji rozszerzenia HNN grupy G . Ciągi w postaci normalnej bardzo mocno to ograniczają, zawężając możliwość wyboru elementów oprócz g_0 do określonego zbioru reprezentantów warstw. Jak będzie wynikało z dalszych rozważań, konieczność dokonania tego wyboru na samym początku wcale nie zmniejsza ogólności prezentowanego rozumowania.

Zanim sformułujemy główne twierdzenie dotyczące rozszerzeń HNN, udowodnimy lemat, który stanie się częścią dowodu tego twierdzenia.

Lemat 2.7. Niech $G^* = \langle G; t|t^{-1}at = \phi(a) \rangle$ będzie rozszerzeniem HNN grupy G względem podgrup A i B i ich izomorfizmu ϕ . Załóżmy, że dokonaliśmy wyboru reprezentantów prawych warstw podgrup A i B grupy G . Wówczas każdy element grupy G^* jest reprezentowany przez pewien ciąg w postaci normalnej, to znaczy jest iloczynem jego kolejnych elementów.

Dowód Dowód będzie algorytmiczny. Mając dany element $v \in G^*$, czyli słowo nad alfabetem złożonym z generatorów G oraz litery t , podamy sposób otrzymywania ciągu w postaci normalnej takiego, że iloczyn wszystkich jego elementów wymnożonych po kolei daje v . Przyjrzyjmy się najpierw relacjom dodanym do G w konstrukcji G^* . Dla $a \in A$ i $b \in B$

$$\begin{aligned} t^{-1}at = \phi(a) &\Rightarrow t^{-1}a = \phi(a)t^{-1} \\ t^{-1}\phi^{-1}(b)t = b &\Rightarrow tb = \phi^{-1}(b)t \end{aligned}$$

Otrzymane równości zapewniają nam pewną bardzo ograniczoną "przemienność" – nie jest to ściśle przemienność, ponieważ przy przestawieniu $a \in A$ z prawej strony t^{-1} w słowie na lewą stronę a zmienia się na $\phi(a) \in B$, ale otrzymaliśmy proste reguły modyfikacji słów w G^* , które wystarczą do sprowadzenia każdego słowa do iloczynu elementów ciągu w postaci normalnej.

Algorytm znajdowania ciągu w postaci normalnej odpowiadającego elementowi grupy G^* :

Mamy dane słowo $v \in G^*$ nad alfabetem będącym zbiorem generatorów G powiększonym o t . Przyporządkowujemy mu ciąg złożony z elementów G oraz wyrazów t i t^{-1} w następujący sposób: pierwszym wyrazem ciągu jest iloczyn wszystkich elementów G stojących w słowie v przed pierwszą literą t (lub t^{-1}); drugi wyraz to kolejna litera słowa v : t lub t^{-1} , następnie znów bierzemy iloczyn wszystkich elementów G , aż do następnego wystąpienia potęgi litery t (oczywiście może to być 1), dalej analogicznie. Otrzymaliśmy ciąg, w którym na zmianę występują elementy G oraz t lub t^{-1} . Oczywiście tworząc ciąg nie dopuszczamy występujących obok siebie trójek postaci $t^\epsilon, 1, t^{-\epsilon}$. Jeśli otrzymany ciąg jest w postaci normalnej, to algorytm się kończy. Jeśli nie, to wykonujemy cyklicznie opisany poniżej główny krok algorytmu, aż do uzyskania ciągu w postaci normalnej.

Niech $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$ będzie ciągiem uzyskanym po k -krotnym wykonaniu kroku głównego algorytmu. Pokażę przebieg kolejnego wykonania kroku głównego. Zaczynając od końca, poprawiamy kolejne g_i tak, żeby spełnić definicję ciągu w postaci normalnej. Zaczynamy poprawianie od g_n : sprawdzamy, czy ϵ_n na wartość 1 czy -1 . Jeśli 1, to g_n powinno być wybranym reprezentantem tej warstwy podgrupy B , w której się znajduje. Jeśli jest, to przechodzimy do poprawiania g_{n-1} . Jeśli nie, to $g_n = bg_{n;B}$, gdzie $b \in B$, a $g_{n;B}$ to wybrany reprezentant warstwy B , w której leży g_n . Wiemy, że

$$tg_n = tbg_{n;B} = \phi^{-1}(b)tg_{n;B}.$$

Wobec tego, jeśli zastąpimy g_n przez $g_{n;B}$, a g_{n-1} przez $g_{n-1}\phi^{-1}(b)$, to nie zmienimy iloczynu wyrazów ciągu (czyli niezmiennika pętli!) Następnie przechodzimy do poprawiania g_{n-1} , oczywiście biorąc pod uwagę wartość zmodyfikowaną przez poprawianie ciągu na miejscu g_n . Dalej postępujemy analogicznie, aż do spełnienia któregoś z warunków końcowych. Mianowicie, przebieg głównego kroku algorytmu kończymy, gdy poprawiając ciąg dojdziemy do g_0 – wtedy z definicji 2.6 i opisu algorytmu wynika, że otrzymaliśmy ciąg w postaci normalnej i algorytm się kończy, lub gdy po jakiejś poprawce otrzymamy kolejną trójkę $t^\epsilon, 1, t^{-\epsilon}$ – wówczas usuwamy z ciągu całą trójkę i ewentualnie odpowiednio dużo otaczających ją par redukujących się potęg t , a następnie wykonujemy główny krok po raz kolejny.

Algorytm zawsze się zakończy, ponieważ każdy przebieg głównego kroku, który nie prowadzi bezpośrednio do zakończenia, zmniejsza liczbę wystąpień litery t w ciągu. Ponieważ na początku działania algorytmu mieliśmy skończenie wiele wystąpień t i żadna operacja tej liczby nie zwiększa, to po skończonej liczbie kroków musimy otrzymać ciąg w postaci normalnej.

□

Algorytm pozwala nam na przyporządkowanie każdemu elementowi G^* pewnego ciągu w postaci normalnej, ale nie wiemy, czy to jest jednoznaczne. Jednemu elementowi G^* może odpowiadać kilka różnych słów nad alfabetem złożonym z generatorów G wraz z t , utożsamianych przez relacje w G^* – być może algorytm daje dla nich różne wyniki.

Jak zwykle niech G^* będzie rozszerzeniem HNN grupy G , przy pozostałych oznaczeniach przyjętych jak wyżej; założymy, że mamy wybór reprezentantów warstw. Okazuje się, że można określić działanie grupy G^* na zbiorze W wszystkich ciągów w postaci normalnej (dla danego wyboru reprezentantów warstw). Pokażemy, jak je zdefiniować. Ogólna idea jest taka, że działając elementem $g \in G^*$ na $w \in W$, chcemy dodać g na początek ciągu W , a następnie sprowadzić ten ciąg do postaci normalnej.

Chcemy znaleźć homomorfizm $\Psi : G^* \rightarrow \mathcal{S}(W)$, gdzie $\mathcal{S}(W)$ oznacza grupę permutacji zbioru W . Wystarczy określić Ψ na generatorach G^* – my określimy ten homomorfizm na $G \cup \{t\}$. Niech $w = g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$. Dla $g \in G$:

$$\Psi(g)(w) = gg_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n.$$

To jest ciąg w postaci normalnej, bo zmieniliśmy tylko g_0 .

Dla t rozpatrzmy ciąg $t, g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$ – on nie jest w postaci normalnej, jeśli g_0 nie jest żadnym z wybranych reprezentantów prawych warstw B . Ale wówczas istnieje $b \in B$ takie, że $g_0 = bg_{0;B}$ i zachodzi $tg_0 = tbg_{0;B} = \phi^{-1}(b)tg_{0;B}$. Wobec tego w większości przypadków definiujemy

$$\Psi(t)(w) = \phi^{-1}(b), t, g_{0;B}, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n. \quad (2.1)$$

Zauważmy jedynie, że jeśli $g_0 \in B$ (czyli $g_{0;B} = 1$ i $b = g_0$) oraz $\epsilon_1 = -1$, to w powyższym wzorze pojawiałyby się trójka $t, 1, t^{-1}$, która nie ma prawa wystąpić – możemy ją jednak wyrzucić, łącząc $\phi^{-1}(b)$ i g_1 . W tym przypadku stosujemy więc następujący wzór:

$$\Psi(t)(w) = \phi^{-1}(g_0)g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n. \quad (2.2)$$

Wprost z definicji wynika, że $\Psi(g) \circ \Psi(g') = \Psi(gg')$. W szczególności dla każdego $g \in G$ $\Psi(g)$ ma odwrotność $\Psi(g^{-1})$, czyli faktycznie permutuje zbiór W . Chcemy pokazać, że również $\Psi(t) \in \mathcal{S}(W)$. W tym celu zdefiniujemy $\Psi(t^{-1})$ i udowodnimy, że to jest odwrotność $\Psi(t)$. Określamy $\Psi(t^{-1})$ za pomocą wzorów analogicznych do tych definiujących $\Psi(t)$. Niech $a \in A$ będzie takie, że $g_0 = ag_{0;A}$. Jeśli $\epsilon_1 = 1$ i $g_0 \in A$, to

$$\Psi(t^{-1})(w) = \phi(g_0)g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n, \quad (2.3)$$

natomiast w przeciwnym przypadku

$$\Psi(t^{-1})(w) = \phi(a), t^{-1}, g_{0;A}, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n. \quad (2.4)$$

Sprawdźmy, że $\Psi(t^{-1})\Psi(t) = id_W$. Weźmy $w \in W$, $w = g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$. Załóżmy najpierw, że $g_0 \in B$ i $\epsilon_1 = -1$, czyli przy wyliczaniu $\Psi(t)(w)$ zachodzi konieczność zastosowania wzoru (2.2). Wtedy $\Psi(t)(w) = \phi^{-1}(g_0)g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$. Zauważmy, że sytuacja w której $g_1 \in A$ oraz $\epsilon_2 = 1$ nie jest możliwa, ponieważ ciąg w był w postaci normalnej – musiałoby być $g_1 = g_{1;A} = 1$, czyli mielibyśmy trójkę $t^{-1}, 1, t$. Ponieważ $\phi^{-1}(g_0) \in A$, to $\phi^{-1}(g_0)g_1 \notin A$. Wobec tego, aby wyliczyć $\Psi(t^{-1})(\Psi(t)(w))$, musimy zastosować wzór (2.4). Ponieważ w był w postaci normalnej, to $g_1 = g_{1;A}$ i stąd

$$\Psi(t^{-1})(\Psi(t)(w)) = \phi(\phi^{-1}(g_0))t^{-1}g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n = w.$$

Jeśli natomiast wyliczyliśmy $\Psi(t)(w)$ z wzoru (2.1), to nowe g_0 pochodzi z podgrupy A , natomiast t pojawia się najpierw w potęgze 1, czyli dalej musimy skorzystać z wzoru (2.3):

$$\begin{aligned} \Psi(t^{-1})(\phi^{-1}(b), t, g_{0;B}, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n) &= \\ &= \phi(\phi^{-1}(b))g_{0;B}, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n = bg_{0;B}, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n = w. \end{aligned}$$

Wobec tego faktycznie $\Psi(t^{-1})\Psi(t) = id_W$ i z symetrii całej sytuacji wynika, że również $\Psi(t)\Psi(t^{-1}) = id_W$, czyli $\Psi(t)$ jest permutacją w .

Ponieważ $\Psi(gg') = \Psi(g) \circ \Psi(g')$ dla dowolnych $g, g' \in G$, to Ψ określone jak wyżej przedłuża się do homomorfizmu $\Psi : G^* \rightarrow \mathcal{S}(W)$.

Teraz możemy już udowodnić twierdzenie o postaci normalnej dla rozszerzeń HNN.

Twierdzenie 2.8. *Niech $G^* = \langle G; t|t^{-1}at = \phi(a) \rangle$ będzie rozszerzeniem HNN grupy G względem podgrup A i B i ich izomorfizmu ϕ . Wówczas*

1. *grupa G zanurza się w G^* , przy czym odwzorowanie przeprowadzające $g \in G$ na $g \in G^*$ jest zanurzeniem; ponadto, jeśli $n \geq 1$ i zachodzi równość $g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n = 1$ w G^* , to ciąg $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$ nie jest zredukowany.*
2. *dla dowolnego wyboru reprezentantów warstw podgrup A i B w G każdy element $v \in G^*$ jest jednoznacznie reprezentowany przez ciąg w postaci normalnej (tak, że jest iloczynem jego kolejnych elementów).*

Dowód Aby wykazać 2. część twierdzenia, wystarczy zauważyć, że zdefiniowane wcześniej działanie Ψ grupy G^* na zbiorze ciągów w postaci normalnej W ma następującą własność: dla ciągu w postaci normalnej $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$:

$$\Psi(g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n)(1) = \Psi(g_0)(\Psi(t^{\epsilon_1})(\dots(\Psi(g_n)(1)))) = g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n.$$

Wobec tego, gdyby istniał element $v \in G^*$ będący iloczynem wyrazów dwóch różnych ciągów normalnych, to $\Psi(v)(1)$ nie byłoby dobrze określone – otrzymujemy sprzeczność. Stąd jednoznaczność reprezentacji; istnienia dowiedliśmy w lemacie 2.7.

Teraz pokażemy, że punkty 1. i 2. twierdzenia są równoważne (aczkolwiek wystarczyłoby pokazać implikację $2. \Rightarrow 1.$)

Najpierw zobaczmy, jak z 2. wynika 1. Niech $g_1, g_2 \in G$. Jednoelementowe ciągi g_1 oraz g_2 są oczywiście w postaci normalnej (i są różnymi ciągami!) Wobec tego odpowiadają one dwóm różnym elementom grupy G^* , czyli G zanurza się w G^* odwzorowaniem przeprowadzającym $g \in G$ na $g \in G^*$. Weźmy ciąg zredukowany $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$ i niech $n \geq 1$. Zauważmy, że stosując do niego przedstawiony wcześniej algorytm sprowadzania ciągu do

postaci normalnej wykonamy główny krok algorytmu tylko raz i nie zmniejszymy liczby wystąpień t w ciągu. Wynika to z faktu, że żeby po poprawieniu i -tego miejsca ciągu otrzymać tam trójkę $t^{-1}, 1, t$, musielibyśmy mieć trójkę t^{-1}, a, t dla $a \in A$ po poprawce na miejscu $i+1$, czyli w wyjściowym ciągu mielibyśmy $g_i \in A$ – to wynika z postaci relacji w G^* używanych do modyfikacji ciągu. Ale taka sytuacja nie jest możliwa, bo wzięliśmy ciąg zredukowany. Argument dla trójki $t, 1, t^{-1}$ jest symetryczny. Wobec tego otrzymany ciąg w postaci normalnej nadal będzie zawierał przynajmniej jedno wystąpienie t lub t^{-1} , czyli nie może odpowiadać elementowi neutralnemu. Ponieważ modyfikując ciąg nie zmieniliśmy iloczynu elementów, to kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Teraz pokażemy, w jaki sposób z 1. uzyskać 2. Chcemy udowodnić jednoznaczność przyporządkowania elementowi G^* ciągu w postaci normalnej. Założmy przeciwnie, że dla różnych ciągów w postaci normalnej $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$ i $h_0, t^{\delta_1}, h_1, \dots, t^{\delta_m}, h_m$ zachodzi równość

$$g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n = h_0 t^{\delta_1} h_1 \dots t^{\delta_m} h_m.$$

Rozpatrzmy ciąg

$$u = g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n h_m^{-1}, t^{-\delta_m} \dots, h_1^{-1}, t^{-\delta_1}, h_0^{-1}.$$

Iloczyn jego kolejnych wyrazów to 1. Jeśli $n = m = 0$, to oba ciągi składają się z pojedynczych elementów G i, na mocy pierwszej części twierdzenia, odpowiadają różnym elementom G^* – mamy sprzeczność. Założmy więc, że $m \geq 0$. Gdybyśmy pokazali, że ciąg u jest zredukowany, to otrzymalibyśmy sprzeczność z pierwszą częścią twierdzenia. Ponieważ jednak na początku wzięliśmy ciągi w postaci normalnej, to definicja ciągu zredukowanego może nie być spełniona tylko, gdy trójka $t^{\epsilon_n}, g_n h_m^{-1}, t^{-\delta_m}$ ma nieodpowiednią postać – na innych pozycjach wszystko się zgadza. (Jeśli $n = 0$, to ciąg u jest zredukowany; możemy przyjąć, że $n \geq 0$.) Bez utraty ogólności możemy założyć, że $\epsilon_n = \delta_m = 1$ i $g_n h_m^{-1} \in B$. Ale ponieważ g_n i h_m pochodzą z ciągów w postaci normalnej, to należą do zbioru wybranych reprezentantów, w tym przypadku podgrupy B , bo przed nimi w ciągach występuje t . Ponieważ iloczyn $g_n h_m^{-1}$ należy do B , to pochodzą z tej samej warstwy, czyli są równe. Ale wobec tego możemy wziąć krótsze od wyjściowych ciągi w postaci normalnej: $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_{n-1}}, g_{n-1}$ i $h_0, t^{\delta_1}, h_1, \dots, t^{\delta_{m-1}}, h_{m-1}$, których iloczyny elementów się zgadzają i, stosując rozumowanie indukcyjne, dojść do sprzeczności z założeniem, że początkowe ciągi są różne. Stąd otrzymujemy, że nie istnieją dwa różne ciągi w postaci normalnej, które mają ten sam iloczyn kolejnych wyrazów.

□

Jako oczywisty wniosek z twierdzenia 2.8 otrzymujemy następujący lemat Brittona:

Lemat 2.9. *Jeśli ciąg $g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \dots, t^{\epsilon_n}, g_n$ jest zredukowany, to w G^**

$$g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n \neq 1.$$

□

Początkowo G. Higman, H. Neuman i B. H. Neuman podali wyłącznie dowód tego, że G zanurza się w G^* poprzez odwzorowanie $g \rightarrow g$. Druga część pierwszego punktu twierdzenia 2.8, czyli powyższy lemat, została udowodniona kilkanaście lat później przez J. L. Brittona. Zamieszczony tutaj dowód jest wzorowany na [LS].

Korzystając z wykazanych własności rozszerzeń HNN, możemy udowodnić twierdzenie 2.3.

Dowód $H = \langle b, t | t^{-1}b^2t = b^3 \rangle$ Zdefiniujmy epimorfizm $\theta : H \rightarrow H$ poprzez określenie go na generatorach grupy: $\theta(t) = t$, $\theta(b) = b^2$. θ jest dobrze określonym homomorfizmem, ponieważ przeprowadza słowo wyznaczające relację na element neutralny:

$$\theta(t^{-1}b^2tb^{-3}) = \theta(t^{-1})\theta(b^2)\theta(t)\theta(b^{-3}) = t^{-1}b^4tb^{-6} = (t^{-1}b^2t)^2b^{-6} = b^6b^{-6} = 1.$$

θ jest epimorfizmem, ponieważ zachodzą równości

$$t = \theta(t)$$

$$b = b^3b^{-2} = t^{-1}b^2tb^{-2} = \theta(t^{-1})\theta(b)\theta(t)\theta(b^{-1}) = \theta(t^{-1}btb^{-1}),$$

więc generatory grupy H leżą w obrazie H przy θ , czyli wszystkie elementy H leżą w obrazie. Pokażemy, że θ nie jest różnowartościowe. W tym celu znajdziemy nietrywialny element H przeprowadzany przez θ na element neutralny. Tym elementem będzie komutator $[t^{-1}bt, b]$. Policzmy

$$\theta([t^{-1}bt, b]) = [\theta(t^{-1}bt), \theta(b)] = [t^{-1}b^2t, b^2] = [b^3, b^2] = 1_H.$$

Natomiast

$$[t^{-1}bt, b] = t^{-1}btbt^{-1}b^{-1}tb^{-1}$$

– wystarczy wykazać, że ten iloczyn nie jest utożsamiany z elementem neutralnym w H . W tym celu zauważmy, że jeżeli $G = \langle b \rangle$ jest grupą wolną cykliczną, podgrupy A i B określimy następująco: $A = \langle b^2 \rangle \triangleleft G$, $B = \langle b^3 \rangle \triangleleft G$, a izomorfizm $\phi : A \rightarrow B$ zadamy na generatorach: $\phi(b^2) = b^3$, to $H = G^*$, gdzie G^* jest rozszerzeniem HNN grupy G względem A , B i ϕ . Co prawda dodaliśmy tylko jedną relację: $t^{-1}b^2t = b^3$, ale pozostałe relacje (postaci $t^{-1}b^{2k}t = b^{3k}$, $k \in \mathbb{Z}$) z niej wynikają – wystarczy podnieść obie strony równości do potęgi k . Popatrzmy na ciąg $t^{-1}, b, t, b, t^{-1}, b^{-1}, t, b^{-1}$ – iloczyn jego kolejnych elementów to $[t^{-1}bt, b]$. Ten ciąg jest zredukowany – nie ma co do tego wątpliwości, ponieważ występujące pomiędzy potęgami t elementy G nie należą ani do A , ani do B . Wobec tego z lematu Brittona iloczyn jego elementów, czyli $[t^{-1}bt, b]$, nie jest elementem neutralnym w $G^* = H$, co chcieliśmy pokazać. $\square$

Istnieje ogólniejsza wersja twierdzenia 2.3:

Twierdzenie 2.10. *Niech m i n będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi o module większym niż 1. Wówczas grupa $H_{m,n} = \langle b, t | t^{-1}b^mtb^{-n} \rangle$ nie ma własności Hopfa.*

Dowód tego twierdzenia przebiega bardzo podobnie do dowodu twierdzenia 2.3. Przyjmy się jedynie, do czego potrzebne jest założenie, że m i n są względnie pierwsze. Gdyby nie było tego założenia i chcielibyśmy prowadzić dowód dokładnie tak, jak w przypadku $m = 2$, $n = 3$ (co jest dobrą drogą, jeśli m i n są względnie pierwsze), to definiowalibyśmy homomorfizm θ na generatorach: $\theta(t) = t$, $\theta(b) = b^m$. Chcielibyśmy udowodnić, że θ jest epimorfizmem, pokazując, że generatory leżą w obrazie $H_{m,n}$ przy θ . Ponieważ b^m i t leżą w obrazie, to $b^n = t^{-1}b^mt$ także. Jeśli m i n są względnie pierwsze, to na mocy elementarnego faktu z teorii liczb (istnieją $c, d \in \mathbb{Z}$ takie, że $cm + dn = \text{NWD}(m, n) = 1$) wiemy, że $b = (b^m)^c(b^n)^d$ też leży w obrazie. Jeżeli jednak $\text{NWD}(m, n) > 1$, to nie mamy takiej pewności i trzeba szukać innych argumentów. W tej chwili nie wiem, czy teza twierdzenia zachodzi również dla par m i n , które nie są względnie pierwsze.

Bibliografia

- [BJ] Agnieszka Bojanowska, Stefan Jackowski *Skrypt do wykładu Topologia II na MIM UW*.
- [H] Allen Hatcher *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [LS] Roger C. Lyndon, Paul E. Schupp *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 1972.
- [MKS] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, Donald Solitar *Combinatorial Group Theory*, Interscience Publishers, 1966.
- [S] Edwin H. Spanier *Topologia algebraiczna*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, 1966.