

# Problem Plateau — przejście od minimalizacji funkcjonału Dirichleta do minimalizacji pola

## 1 Definicje

### 1.1 Przypomnienie

$B$  — koło jednostkowe;  $C = \partial B$  — okrąg jednostkowy.

$\mathcal{C}(\Gamma)$  — klasa funkcji dopuszczalnych, czyli funkcji z  $W^{1,2}$ , których ślad jest reprezentowany przez funkcję ciągłą, (słabo) monotoniczną.

$\mathcal{C}(\Gamma)^*$  — funkcje dopuszczalne spełniające warunek trzech punktów: dla danych  $w_1, w_2, w_3 \in C$  i  $Q_1, Q_2, Q_3 \in \Gamma$  zachodzi  $w_i \mapsto Q_i$  dla  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

$\bar{\mathcal{C}}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma) \cap C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^3)$  — funkcje dopuszczalne ciągłe.

$$A(X) = \int \left| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right| dudv$$

$$D(X) = \int |\nabla X|^2 dudv$$

Wiemy, że funkcjonał pola jest majoryzowany przez całkę Dirichleta:  $A(X) \leq D(X)$ .

Dla  $X$  konforemnych zachodzi równość.

### 1.2 Minimum pola

Całkę Dirichleta mogliśmy minimalizować w klasie funkcji ciągłych na  $\bar{B}$ .

Stąd przyjmujemy  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma) \cap C^0(\bar{B}, \mathbb{R})$ .

Będziemy oznaczać:

$d(\Gamma) = \inf_{\mathcal{C}(\Gamma)} A$  — minimum pola w klasie  $\mathcal{C}(\Gamma)$ ;

$\bar{d}(\Gamma) = \inf_{\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)} A$  — minimum pola w klasie  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$ .

Z wcześniejszych oznaczeń:  $e(\Gamma)$  — minimum całki Dirichleta w klasie  $\mathcal{C}(\Gamma)$  i, jak się okazało, również w  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$ .

### 1.3 Twierdzenie

**Twierdzenie 1.** *Zachodzą równości  $d(\Gamma) = \bar{d}(\Gamma) = e(\Gamma)$ .*

*Poza tym pewna funkcja konforemna  $Y \in \bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$  spełnia  $A(Y) = d(\Gamma)$ , czyli minimalizuje jednocześnie pole i całkę Dirichleta.*

Dowód jest długi i ciągnie się do końca notatek...

## 2 Minimalizacja pomocniczych funkcjonałów $F_\varepsilon$

### 2.1 Definicje i oznaczenia

Definiujemy funkcjonały  $F_\varepsilon = A + \varepsilon D$ ,  $\varepsilon \in [0, 1)$ .

Oznaczamy:

$d(\Gamma, \varepsilon) = \inf_{\mathcal{C}(\Gamma)} F_\varepsilon$  — minimum  $F_\varepsilon$  w klasie  $\mathcal{C}(\Gamma)$  dla ustalonego  $\varepsilon$ ;

$\bar{d}(\Gamma, \varepsilon) = \inf_{\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)} F_\varepsilon$  — minimum  $F_\varepsilon$  w klasie  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$  dla ustalonego  $\varepsilon$ .

Czyli  $d(\Gamma, 0) = d(\Gamma)$ ,  $\bar{d}(\Gamma, 0) = \bar{d}(\Gamma)$ .

## 2.2 Oczywiste fakty o $d$ i $\bar{d}$

1.  $0 \leq d(\Gamma) \leq d(\Gamma, \varepsilon) \leq \bar{d}(\Gamma, \varepsilon) \leq +\infty$ , bo:  $A$  i  $D$  są dodatnie, więc zwiększając  $\varepsilon$  zwiększamy  $F_\varepsilon$ , a przechodząc do funkcji ciągłych zmniejszamy klasę funkcji.
2. Przyporządkowania  $\varepsilon \mapsto d(\Gamma, \varepsilon)$  i  $\varepsilon \mapsto \bar{d}(\Gamma, \varepsilon)$  są niemalejące, bo znów zwiększając epsilon, dodajemy coś nieujemnego do całki. Wobec tego istnieją ich granice w zerze.
3. Wobec tego mamy  $d(\Gamma) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} d(\Gamma, \varepsilon)$ ,  $\bar{d}(\Gamma) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{d}(\Gamma, \varepsilon)$ .
4. Dla dowolnej funkcji  $Z \in \mathcal{C}(\Gamma)$   $d(\Gamma, \varepsilon) \leq F_\varepsilon(Z) = A(Z) + \varepsilon D(Z)$ , czyli także  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} d(\Gamma, \varepsilon) \leq A(Z)$ , a wobec tego

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} d(\Gamma, \varepsilon) \leq \inf_{\mathcal{C}(\Gamma)} A(Z) = d(\Gamma)$$

5. Z dwóch poprzednich punktów  $d(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} d(\Gamma, \varepsilon)$ .

## 2.3 Funkcje minimalizujące $F_\varepsilon$

To się odbywa podobnie, jak przy minimalizacji całki Dirichleta.

Ustalamy  $\varepsilon > 0$ . Wybieramy ciąg minimalizujący  $X_n \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , czyli

$$F_\varepsilon(X_n) \rightarrow d(\Gamma, \varepsilon).$$

Konstruujemy funkcję  $Y_\varepsilon$  minimalizującą  $F_\varepsilon$ , próbując znaleźć granicę ciągu  $X_n$  w **jakimś** sensie (a potem zobaczyć, że to wystarczy).

1.  **$F_\varepsilon$  jest konforemnie niezmienniczy**:  $D$  jest,  $A$  musi być, bo reparametryzacja nie może zmieniać pola powierzchni. Wobec tego **możemy przejść do klasy  $\mathcal{C}^*$** , z warunkiem trzech punktów na brzegu (składamy  $X_n$  z odpowiednią homografią...) To będzie potrzebne do zbieżności funkcji na brzegach.
2. **Ciąg  $D(X_n)$  jest ograniczony** przez pewną stałą  $C(\varepsilon) < \infty$ , bo  $F_\varepsilon(X_n)$  jest zbieżny, czyli też ograniczony, oraz  $F_\varepsilon(X_n) \geq \varepsilon D(X_n)$ . (Uwaga: tu musi być  $\varepsilon > 0$ , dowód nie przejdzie dla  $F_0 = A$ !)
3. **Chcemy znaleźć wspólne oszacowanie norm  $X_n$  w  $W^{1,2}$** .

Nierówność Poincaré pozwala szacować w  $W_0^{1,2}$  normę funkcji w  $L_2$  przez całkę z kwadratu gradientu (czyli całkę Dirichleta), z dokładnością do stałej zależącej od obszaru i wymiaru przestrzeni. Rozbijmy funkcję  $X_n$  na sumę  $X_n = X'_n + X_n^0$ , gdzie

- $X'_n$  jest klasycznym rozwiązaniem równania Laplace'a w  $\bar{B}$ , z warunkiem brzegowym  $X'_n|_{\partial \bar{B}} = Tr X_n$ ;

- $X_n^0 = X_n - X'_n \in W_0^{1,2}$ .

Supremum funkcji harmonicznej  $X'_n$  to jej supremum po brzegu. To daje wspólne ograniczenie na funkcje  $X'_n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , ponieważ wartości tych funkcji na  $\partial B$  to punkty krzywej  $\Gamma$ . Wobec tego mamy także wspólne ograniczenie na  $\|X'_n\|_{L_2}$ . Natomiast  $X_n^0$  możemy już szacować z nierówności Poincaré.

Możemy więc przyjąć, że **normy funkcji  $X_n$  w przestrzeni  $L_2$  także są wspólnie ograniczone**.

4. Po modyfikacji stałej przyjmijmy, że  $C(\varepsilon)$  **szacuje normy funkcji  $X_n$  w  $W^{1,2}$** :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_W^{1,2} \leq C(\varepsilon).$$

5. **Z ciągu  $X_n$  da się wybrać podciąg słabo zbieżny w  $W^{1,2}(\overline{B}, \mathbb{R})$  do pewnej funkcji  $Y_\varepsilon$ .**

Tak jest, ponieważ  $W^{1,2}(\overline{B}, \mathbb{R})$  jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wobec tego wartości wszystkich funkcjonałów na funkcjach  $X_n$  są zbieżne do wartości na  $Y_\varepsilon$ , jeśli wartości funkcjonałów z ośrodka będą zbieżne. Po kolei dla wszystkich funkcjonałów  $\phi_k$  z ośrodka wybieramy podciąg  $X_n$ , dla którego wartości  $\phi_k$  są zbieżne — te wartości są ograniczone, bo normy  $X_n$  mają wspólne ograniczenie. Następnie metodą przekątniową konstruujemy ostateczny podciąg.

6. Do śladów funkcji  $X_n$  (są ciągłe na  $\Gamma$ , bo  $X_n \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ) możemy zastosować rozumowanie z konstrukcji funkcji minimalizującej całkę Dirichleta, oparte na lemacie Couranta-Lebesgue'a. To rozumowanie nie korzysta z postaci funkcji wewnątrz  $B$ , tylko z ich wartości na brzegu koła. Jako wniosek **otrzymujemy zbieżność jednostajną**

$$X_n|_{\partial B} \rightrightarrows Y_\varepsilon|_{\partial B}.$$

**Ale właściwie dlaczego granica  $X_n|_{\partial B}$  ma być śladem słabej granicy  $X_n$ ?**

Operator śladu jest liniowy, prowadzi w  $L_2(C)$ . Mam nadzieję, że jest też ciągły na  $L_2(\overline{B})$ . Możemy go złożyć z dowolnym ciągłym funkcjonałem liniowym na  $L_2(C)$ , i otrzymać w wyniku ciągły funkcjonał liniowy na  $L_2(\overline{B})$ . Z założenia o słabej zbieżności jego wartości na  $X_n$  będą zbieżne do wartości na  $Y_\varepsilon$ . Wobec tego ślady  $X_n$  zbiegają słabo w  $L_2(C)$  do śladu  $Y_\varepsilon$ . Słaba granica w  $L_2(C)$  jest wyznaczona jednoznacznie (funkcjonały oddzielają punkty), a granica jednostajna  $X_n|_C$  oczywiście jest także słabą granicą, czyli można ją uznać za ślad  $Y_\varepsilon$ .

7. Z dalszych lematów wynikają własności funkcji  $Y_\varepsilon$ , w szczególności fakt, że minimalizuje ona  $F_\varepsilon$ .

## 2.4 Własności funkcji $Y_\varepsilon$

### 2.4.1 Minimalizacja $F_\varepsilon$

**Lemat 1.** *Dla każdego  $\varepsilon \in [0, 1)$  funkcjonał  $F_\varepsilon$  jest słabo ciągowo półciągły z dołu na  $W^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ . W szczególności*

$$F_\varepsilon(Y_\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_\varepsilon(X_n).$$

**Dowód.** Może kiedyś będzie...

□

Ciąg  $F_\varepsilon(X_n)$  jest zbieżny przy  $n \rightarrow \infty$ , więc  $\liminf F_\varepsilon(X_n) = \lim F_\varepsilon(X_n) = d(\Gamma, \varepsilon)$ . A ponieważ  $d(\Gamma, \varepsilon)$  jest minimum  $F_\varepsilon$  w klasie  $\mathcal{C}(\Gamma)$ , to mamy równość

$$F_\varepsilon(Y_\varepsilon) = d(\Gamma, \varepsilon),$$

czyli  $Y_n$  **minimalizuje  $F_\varepsilon$  w klasie  $\mathcal{C}(\Gamma)$** .

## 2.4.2 Konforemność

**Lemat 2.** *Zachodzi równość (wariacji wewnętrznych)  $\partial F_\varepsilon(Y_\varepsilon, \eta) = \partial D(Y_\varepsilon, \eta) = 0$  dla każdej funkcji  $\eta \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R})$  (to jest pole wektorowe, którym modyfikujemy dziedzinę funkcji).*

**Dowód.**  $Y_\varepsilon$  minimalizuje  $F_\varepsilon$ , stąd równość  $\partial F_\varepsilon(Y_\varepsilon, \eta) = 0$ . Ale część  $F_\varepsilon$  pochodząca od funkcjonału pola nie zmienia się przy zmianie parametryzacji, więc wariacja tej części jest zerowa.

□

Stąd, tak jak przy minimalizacji całki Dirichleta, otrzymujemy **konforemność**  $Y_\varepsilon$  wewnątrz  $B$ . Aczkolwiek na razie jest to warunek dotyczący słabych pochodnych... Co niewiele zmienia, trzeba pamiętać tylko, że równości zachodzą poza zbiorem miary zero...

## 2.4.3 Harmoniczność

Chcemy pokazać, że można założyć, że wszędzie wewnątrz  $B$  funkcja  $Y_\varepsilon$  jest harmoniczna.

Weźmy funkcję  $W_\varepsilon$  będącą słabym rozwiązaniem równania Laplace'a, z warunkiem brzegowym zadany przez ślad  $Y_\varepsilon$ . Z lematu Weila  $W_\varepsilon$  jest klasy  $C^2(B, \mathbb{R}^3)$  (ponadto dowodziliśmy już, że można wziąć taką funkcję ciągłą na  $\overline{B}$  — to zastępuje użycie lematu 3. w następnym punkcie.) Mamy:

$$F_\varepsilon(Y_\varepsilon) = A(Y_\varepsilon) + \varepsilon D(Y_\varepsilon) = (1 + \varepsilon)D(Y_\varepsilon), \text{ z konforemności } Y_\varepsilon;$$

$$F_\varepsilon(W_\varepsilon) = A(h) + \varepsilon D(h) \leq (1 + \varepsilon)D(h), \text{ ponieważ } D \text{ majoryzuje } A.$$

Zachodzi nierówność  $F_\varepsilon(Y_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(W_\varepsilon)$ , bo  $Y_\varepsilon$  minimalizuje  $F_\varepsilon$ , a stąd

$$D(Y_\varepsilon) \leq D(h).$$

Ale funkcja harmoniczna realizuje minimum całki Dirichleta przy ustalonym śladzie, więc jest równość, czyli także  $F_\varepsilon(Y_\varepsilon) = F_\varepsilon(W_\varepsilon)$ .

Wobec tego możemy przyjąć, że  $Y_\varepsilon$  jest harmoniczna w  $B$ , zamieniając ją ewentualnie na  $W_\varepsilon$ .

Konforemność otrzymujemy tak samo, jak powyżej. Śladu nie zmieniliśmy, pozostaje ciągły i słabo monotoniczny.

### 2.4.4 Ciągłość do brzegu

**Lemat 3.**  $Y_\varepsilon \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$

**Dowód.** To już mniej więcej było w jakiejś formie. A jak nie, to może kiedyś będzie... □

Jako wniosek otrzymujemy, że  $\bar{d}(\Gamma, \varepsilon) \leq F_\varepsilon(Y_\varepsilon)$ . Wiemy, że  $d \leq \bar{d}$  oraz  $F_\varepsilon(Y_\varepsilon) = d(\Gamma, \varepsilon)$ . Stąd  $d(\Gamma, \varepsilon) = \bar{d}(\Gamma, \varepsilon) = F_\varepsilon(Y_\varepsilon)$ .

Czyli jest obojętne, czy szukamy funkcji minimalizującej pole wśród funkcji ciągłych, czy dowolnych z klasy  $\mathcal{C}(\Gamma)$  — znalezione  $Y_\varepsilon$  daje minimum w obu tych klasach.

## 3 Minimalizacja funkcjonału pola

### 3.1 Granica ciągu minimalizującego

Dla każdego  $\varepsilon \in (0, 1)$  mamy funkcję  $Y_\varepsilon$ , minimalizującą funkcjonał  $F_\varepsilon$  zarówno w klasie  $\mathcal{C}(\Gamma)$ , jak i  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$ , ciągłą do brzegu, harmoniczną i konforemną.

Niech  $X$  będzie funkcją minimalizującą całkę Dirichleta, skonstruowaną poprzednio.  $X$  jest ciągła na  $\overline{B}$ , harmoniczna i konforemna wewnątrz.

Zauważmy, że

$$D(Y_\varepsilon) = A(Y_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(Y_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(X) = A(X) + \varepsilon D(X) \leq 2D(X),$$

ponieważ  $Y_\varepsilon$  minimalizuje  $F_\varepsilon$ , czyli wartość  $F_\varepsilon$  na  $Y_\varepsilon$  szacuje się z góry przez wartość na  $X$ . Wobec tego  $D(Y_\varepsilon)$  są **wspólnie ograniczone**.

Przechodzimy do **podciągu słabo zbieżnego** w  $W^{1,2}$ , nazywając go nadal  $Y_\varepsilon$ . Granicę oznaczmy przez  $Y$ .

Ponadto, tak jak w 2.3 (punkt 6.), ślady  $Y_\varepsilon$  zbiegają jednostajnie do śladu funkcji  $Y$  (lemat Couranta-Lebesgue'a).

### 3.2 $Y$ minimalizuje funkcjonał pola

Zachodzi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(Y_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(Y_\varepsilon),$$

ponieważ  $\varepsilon D(Y_\varepsilon)$  znika, jak  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $D(Y_\varepsilon)$  są wspólnie ograniczone). Ale to jest równe  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} d(\Gamma, \varepsilon)$  (z definicji  $d(\Gamma, \varepsilon)$ ), a wobec tego z 2.2, punktu 5. to jest  $d(\Gamma)$ . (W szczególności stąd wiemy, że w ogóle istnieje granica  $A(Y_\varepsilon)$  w zerze.)

Podsumowując,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(Y_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(Y_\varepsilon) = d(\Gamma).$$

Ze słabej ciągowej półciągłości z dołu  $F_\varepsilon$  (lemat 1.) dla przypadku  $\varepsilon = 0$  otrzymujemy słabą ciągową półciągłość z dołu funkcjonału  $A$ :

$$A(Y) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(Y_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(Y_\varepsilon).$$

**Stąd na mocy wcześniejszych wyliczeń**  $A(Y) = d(\Gamma)$  (bo oczywiście  $A(Y) \geq d(\Gamma)$ .)

Ponadto wiemy, że  $F_\varepsilon(Y_\varepsilon) = d(\Gamma, \varepsilon) = \bar{d}(\Gamma, \varepsilon)$ , a stąd

$$d(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(Y_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{d}(\Gamma, \varepsilon) \geq \bar{d}(\Gamma) \geq d(\Gamma).$$

Ostatecznie  $A(Y) = d(\Gamma) = \bar{d}(\Gamma)$ , **czyli  $Y$  realizuje minimum funkcjonału pola w klasie  $\mathcal{C}(\Gamma)$** , które jest jednocześnie minimum w klasie  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$ , ale nie wiemy, czy  $Y$  jest ciągła, czyli czy realizuje minimum w  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$ . I chcielibyśmy wiedzieć, że minimum całki Dirichleta i funkcjonału pola jest tym samym — pokażemy konforemność  $Y$ .

### 3.3 Konforemność funkcji minimalizującej

#### 3.3.1 Zbieżność norm gradientów

Pokażemy, że gradienty  $Y_\varepsilon$  zbiegają w  $L_2$  do gradientu  $Y$ .

Mamy  $A(Y_\varepsilon) + \varepsilon D(Y_\varepsilon) \leq A(Y) + \varepsilon D(Y) \leq A(Y_\varepsilon) + \varepsilon D(Y)$ , bo  $Y_\varepsilon$  minimalizuje  $F_\varepsilon$ , a  $Y$  minimalizuje  $A$ .

Wobec tego  $D(Y_\varepsilon) \leq D(Y)$  dla  $\varepsilon \in [0, 1)$ .

Z półciągłości całki Dirichleta wynika, że  $D(Y) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} D(Y_\varepsilon)$ , czyli musi być  $D(Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} D(Y_\varepsilon)$  (wybieramy podciąg, na którym jest zbieżność) — normy  $\nabla Y_\varepsilon$  zbiegają do normy  $\nabla Y$  w  $L_2$ .

#### 3.3.2 Zbieżność gradientów w $L_2$

Słaba zbieżność w  $L_2$  ciągu funkcji wraz ze zbieżnością norm implikuje zbieżność w  $L_2$ .

**Dowód.** Niech  $f_n, f \in L_2$ .

Zakładamy słabą zbieżność:  $f_n \rightharpoonup f$  i zbieżność norm:  $\|f_n\|_{L_2} \rightarrow \|f\|_{L_2}$ .

Chcemy pokazać, że  $\int |f_n - f|^2 dx \rightarrow 0$  przy  $n \rightarrow \infty$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). Mamy

$$\int |f_n - f|^2 dx = \int |f_n|^2 dx - 2 \int f_n \cdot f dx + \int |f|^2 dx$$

Ale  $\int f_n \cdot f dx$  możemy potraktować jako funkcjonał reprezentowany przez funkcję  $f$  — z założenia o słabej zbieżności otrzymujemy  $\int f_n \cdot f dx \rightarrow \int f \cdot f dx = \int |f|^2 dx$ .

Ze zbieżności norm  $\int |f_n|^2 dx \rightarrow \int |f|^2 dx$ . Wobec tego

$$\int |f_n - f|^2 dx \rightarrow \int |f|^2 dx - 2 \int |f|^2 dx + \int |f|^2 dx = 0. \quad \square$$

**Jak się tutaj definiuje słabą zbieżność w  $W^{1,2}$ ?**

#### 3.3.3 Wniosek o konforemności

Pokazaliśmy zbieżność  $\nabla Y_\varepsilon \rightarrow \nabla Y$  w  $L_2$ .

Możemy przejść do podciągu (nadal nazywanego  $Y_\varepsilon$ ), na którym zbieżność będzie prawie wszędzie (twierdzenie chociażby z rachunku prawdopodobieństwa...)

Punktowa zbieżność gradientów pozwala już wyciągnąć wniosek o konforemności granicy (oczywiście prawie wszędzie).

### 3.4 Ciągłość i wnioski

Znaleźliśmy funkcję  $Y \in \mathcal{C}(\Gamma)$ , konforemną, dla której wartość funkcjonału pola przyjmuje minimalną wartość dla klas  $\mathcal{C}(\Gamma)$  oraz  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$ .

Z konforemności wynika, że wartość całki Dirichleta na  $Y$  jest równa wartości  $A(Y)$ . Wobec tego, ponieważ  $A \leq D$ , to  $Y$  minimalizuje całkę Dirichleta w  $\mathcal{C}(\Gamma)$ . Pokazaliśmy więc, że  $e(\Gamma) = d(\Gamma) = \bar{d}(\Gamma)$  — minimum pola powierzchni i minimum całki Dirichleta jest takie samo. Ponadto dowodziliśmy, że każda funkcja klasy  $\mathcal{C}(\Gamma)$ , minimalizująca całkę Dirichleta, jest ciągła na  $\bar{B}$  i harmoniczna w  $B$ . Czyli  $Y \in \bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$  — mamy funkcję minimalizującą funkcjonał  $A$  w  $\bar{\mathcal{C}}(\Gamma)$ .

Ponieważ zawsze na brzegu mieliśmy zbieżność jednostajną, zachowana została (słaba) monotoniczność śladu funkcji minimalizującej. Tak jak przy minimalizacji całki Dirichleta, z harmoniczności i konforemności możemy otrzymać homeomorficzność  $Y|_C$  na krzywą  $\Gamma$ .

Przypomnijmy, że na początku definiowaliśmy rozwiązanie problemu Plateau jako funkcję  $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  spełniającą następujące warunki:

1.  $X \in C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ ;
2.  $X$  jest harmoniczna i konforemna w  $B$ ;
3. obcięcie  $X|_C$  jest homeomorfizmem na krzywą  $\Gamma$ .

Wyliczyliśmy, że każda funkcja spełniająca te warunki parametryzuje powierzchnię minimalną rozpiętą na krzywej  $\Gamma$ . Ale teraz wiemy również, że każda taka funkcja zadaje powierzchnię o minimalnym polu: ponieważ jest konforemna, to  $A(X) = D(X)$ , więc (dzięki temu, że udowodniliśmy równość  $d(\Gamma) = e(\Gamma)$ )  $X$  minimalizuje funkcjonał pola. Wobec tego stwierdzenie, że funkcja spełniająca powyższe warunki jest rozwiązaniem zagadnienia Plateau, jest w pełni uzasadnione :)

## 4 Pytania na przyszłość

1. Jak to jest ze słabą zbieżnością w  $W^{1,2}$ ? Czy słaba zbieżność osobno na części gradientowej i na części „zwykłej” jest równoważna temu, że wszystkie funkcjonały w  $W^{1,2}$  na ciągu funkcji mają być zbieżne do wartości na słabej granicy?
2. Półciągłość całki Dirichleta? To wniosek z jakichś ogólnych twierdzeń, czy coś oczywistego?
3. Czy jest jakakolwiek jednoznaczność słabych rozwiązań?
4. Czy wariacje wewnętrzne uwzględniające pola klasy  $C_0^\infty(B)$  dają coś ciekawego? Np. minimum jakiegoś funkcjonału w klasie funkcji o zadanym śladzie? Czy można coś takiego uzyskać?