

Zadania o transferze

1. Oznaczenia, założenia i przypomnienia

Przez M i $\tilde{M}$ będziemy oznaczać rozmaitości gładkie, przy czym $\tilde{M}$ nakrywa M .

Przyjmujemy, że gładkie odwzorowanie $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ jest nakryciem skończonym.

Nakrycie rozpatrujemy w kategorii rozmaitości gładkich. To oznacza, że dla każdego punktu $x \in M$ istnieje jego otoczenie U takie, że $p^{-1}(U)$ jest dyfeomorficzne z $U \times D$, gdzie D jest przestrzenią dyskretną (w przypadku G -nakrycia można przyjąć $D = G$). W szczególności każdy punkt $y \in \tilde{M}$ ma spójne otoczenie dyfeomorficzne z pewnym otoczeniem $p(y)$ na rozmaitości M , przy czym ten dyfeomorfizm jest obcięciem p do mniejszej dziedziny.

Przykład 1.1 (Iloraz działania grupy). *Jeśli grupa skończona G działa w sposób wolny na rozmaitości $\tilde{M}$ (albo nawet grupa dyskretna, niekoniecznie skończona, działa w sposób właściwie nieciągły), to iloraz przez to działanie jest rozmaitością gładką, a dzielenie jest przekształceniem nakrywającym (zadanie 24). W ten sposób otrzymujemy G -nakrycie.*

Mamy indukowane przez p odwzorowanie kompleksów łańcuchowych form różniczkowych $p^* : \Omega^*(\tilde{M}) \longrightarrow \Omega^*(M)$ — cofanie form.

Uwaga 1.1. *Przypomnijmy, że cofanie form jest przemienne z różniczkowaniem, a także z operacjami dodawania, mnożenia przez skalar i iloczynu zewnętrznego form różniczkowych.*

W dalszym tekście rozważamy jedynie teorię kohomologii de Rhama; nie będzie to za każdym razem zaznaczane.

2. Homomorfizm transferu

Na początku zdefiniujemy homomorfizm transferu dla dowolnego nakrycia skończonego i udowodnimy kilka jego własności.

Definicja 2.1. *Definiujemy przekształcenie $p_{\#} : \Omega^*(\tilde{M}) \longrightarrow \Omega^*(M)$ następująco: k -formę η na rozmaitości $\tilde{M}$ przeprowadzamy na k -formę ω na M daną na wektorach $v_1, \dots, v_k \in T_M^x$ wzorem*

$$\omega(x)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} \eta(y)(Dp(y)^{-1}(v_1), \dots, Dp(y)^{-1}(v_k)).$$

Uwaga 2.1. *Tę definicję można podsumować stwierdzeniem, że przekształcenie $p_{\#}$ jest sumowaniem po włóknie.*

Uwaga 2.2. *Definicja 2.1 jest poprawna, to znaczy $\omega = p_{\#}(\eta)$ jest dobrze zdefiniowaną formą różniczkową. Wystarczy zauważyć, że na pewnym otoczeniu U punktu $x \in M$ forma ω jest zdefiniowana za pomocą cofnięć:*

$$\omega = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\hat{p}_y^{-1})^*(\eta),$$

gdzie $\hat{p}_y$ jest obcięciem p do otoczenia punktu $y \in p^{-1}(x)$, będącym dyfeomorfizmem na U .

Uwaga 2.3. Przekształcenie $p_{\#}$ jest homomorfizmem kompleksów łańcuchowych — to wynika z powyższego przeformułowania definicji i uwagi 1.1.

Definicja 2.2. Homomorfizm kohomologii $p_{\#} : H^*(\tilde{M}) \longrightarrow H^*(M)$ indukowany przez $p_{\#}$ nazywamy transferem.

Naturalne przekształcenie p^* przeprowadza formy na przestrzeni bazowej M w formy na przestrzeni nakrywającej $\tilde{M}$. Okazuje się, że transfer „prawie odwraca” to przekształcenie.

Lemat 1. Złożenie $p_{\#} \circ p^*$ jest mnożeniem przez moc włókna nakrycia p .

Dowód. Niech $\omega \in \Omega^*(M)$. Korzystając z uwagi 2.2 możemy wyliczyć:

$$p_{\#} \circ p^*(\omega) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\hat{p}_y^{-1})^*(p^*(\omega)) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\hat{p}_y^{-1})^*(\hat{p}_y(\omega)) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} \omega = |p^{-1}(x)|\omega.$$

□

Lemat 2. Transfer jest naturalny ze względu na przeciąganie nakryć.

Dowód. Niech $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ będzie nakryciem rozmaitości, $f : N \longrightarrow M$ odwzorowaniem gładkim, a przez N_f oznaczmy nakrycie nad N przeciągnięte z rozmaitości M przez przekształcenie f , jak na pierwszym diagramie.

$$\begin{array}{ccc} N_f & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M} \\ p_f \downarrow & & \downarrow p \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^*(N_f) & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & \Omega^*(\tilde{M}) \\ (p_f)_{\#} \downarrow & & \downarrow p_{\#} \\ \Omega^*(N) & \xleftarrow{f^*} & \Omega^*(M) \end{array}$$

Naszym celem jest wykazanie przemienności drugiego diagramu.

Skorzystamy z przeformułowania definicji transferu wyrażającej ten homomorfizm za pomocą cofnięć przez odwrotności lokalnych dyfeomorfizmów $\hat{p}_y^{-1}$ dla y leżących we włóknie nad punktem $x \in M$.

Przypomnijmy, że przeciągnięcie nakrycia trywialnego jest trywialne. Wobec tego, jeśli $z \in N$, a U jest otoczeniem $f(z)$ lokalnie trywializującym nakrycie p , to dla dowolnego punktu $s \in p_f^{-1}(z)$ na zbiorze $f^{-1}(U)$ zachodzi $\tilde{f} \circ (\hat{p}_f)_s^{-1} = \hat{p}_{f(s)}^{-1} \circ f$ (gdzie $(\hat{p}_f)_s^{-1}$ to lokalna odwrotność nakrycia p_f na otoczeniu punktu s). Stąd dla dowolnej formy $\eta \in \Omega^*(\tilde{M})$ i punktu $x \in N$ w pewnym otoczeniu x mamy ciąg równości

$$\begin{aligned} f^*(p_{\#}(\eta))(x) &= f^*\left(\sum_{y \in p^{-1}(f(x))} (\hat{p}_y^{-1})^*(\eta)\right)(x) = \sum_{y \in p^{-1}(f(x))} (\hat{p}_y^{-1} \circ f)^*(\eta)(x) = \\ &= \sum_{s \in p_f^{-1}(x)} (\tilde{f} \circ (\hat{p}_f)_s^{-1})^*(\eta)(x) = \sum_{s \in p_f^{-1}(x)} ((\hat{p}_f)_s^{-1})^*(\tilde{f}^*(\eta))(x) = (p_f)_{\#}(\tilde{f}^*(\eta))(x), \end{aligned}$$

co należało udowodnić.

□

Lemat 3. Transfer nakrycia będącego złożeniem nakryć $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ oraz $q : \bar{M} \longrightarrow \tilde{M}$ jest złożeniem transferów $p_{\#} \circ q_{\#}$.

Dowód. Niech $\theta \in \Omega^*(\bar{M})$. Ponadto wybierzmy dowolny punkt $x \in M$ i oznaczmy punkty z jego przeciwoobrazu $p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_s\}$. Wówczas dla dowolnych wektorów $v_1, \dots, v_k \in T_M^x$ zachodzi

$$\begin{aligned} p_{\#}(q_{\#}(\theta))(x)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i=1}^s q_{\#}(\theta)(y_i)(Dp(y_i)^{-1}(v_1), \dots, Dp(y_i)^{-1}(v_k)) = \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{z \in q^{-1}(y_i)} \theta(z)(Dq(z)^{-1} \circ Dp(y_i)^{-1}(v_1), \dots, Dq(z)^{-1} \circ Dp(y_i)^{-1}(v_k)) = \\ &= \sum_{z \in (q \circ p)^{-1}(x)} \theta(z)(D(q \circ p)(z)^{-1}(v_1), \dots, D(q \circ p)(z)^{-1}(v_k)) = (q \circ p)_{\#}(x)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Jak widać, dowód sprowadza się do funktorialności cofania form, ponieważ lokalnie transfer jest określony jako suma cofnięć. □

3. Własności cofania form przez nakrycie

W tym rozdziale często będziemy zakładać, że p jest G -nakryciem, co oznacza, że grupa G automorfizmów tego nakrycia działa tranzytywnie na każdym włóknie. Jeśli to założenie nie będzie potrzebne, zostanie to zaznaczone.

Automorfizm g nakrycia $p: \tilde{M} \rightarrow M$ indukuje $g^*: \Omega^*(\tilde{M}) \rightarrow \Omega^*(\tilde{M})$. Będziemy chcieli wyróżnić formy, które są przeprowadzane na siebie przez wszystkie elementy grupy G automorfizmów nakrycia p .

Definicja 3.1. *Forma $\omega \in \Omega^*(\tilde{M})$ jest G -niezmiennicza, jeśli dla każdego $g \in G$ zachodzi $g^*(\omega) = \omega$. Element grupy kohomologii jest G -niezmienniczy, jeśli działanie G przeprowadza każdą reprezentującą go formę na formę różniącą się od niej o pewien brzeg.*

Naszym celem jest poznanie zależności pomiędzy kohomologiami przestrzeni bazowej nakrycia i przestrzeni nakrywającej. Zaczniemy od zbadania, jak wygląda przekształcenie p^* — jego podstawowe własności opisuje następujący lemat:

Lemat 4. *(Zadanie 47.) Jeśli p jest G -nakryciem, to p^* zadaje izomorfizm $\Omega^*(M) \simeq \Omega^*(\tilde{M})^G$, gdzie $\Omega^*(\tilde{M})^G$ oznacza zbiór form G -niezmienniczych na $\tilde{M}$.*

Uwaga 3.1. *Założenia, że p jest G -nakryciem, potrzebujemy tylko do wykazania surjectywności p^* . Dla dowolnego nakrycia rozmaitości jest prawdą, że przeciąganie form jest injekcją. Jeśli nakrycie pochodzi od działania grupy G , to p^* prowadzi w podprzestrzeń form G -niezmienniczych.*

Dowód. Najpierw wykażemy, że $\text{Im } p^* = \Omega^*(\tilde{M})^G$. W tym celu udowodnimy, że

1. cofnięcie formy z $\Omega^*(M)$ jest G -niezmienniczą formą na $\tilde{M}$,
 2. każda forma G -niezmiennicza na $\tilde{M}$ jest cofnięciem formy z $\Omega^*(M)$.
1. Ustalmy automorfizm g nakrycia p . Niech $\omega \in \Omega^k(M)$ będzie dowolną k -formą na rozmaitości M . Chcemy pokazać, że $p^*(\omega)$ jest formą niezmienniczą ze względu na

działanie automorfizmu g , czyli że $g^*(p^*(\omega)) = p^*(\omega)$. Korzystając z funktorialności konstrukcji przestrzeni form różniczkowych na rozmaitości otrzymujemy

$$g^*(p^*(\omega)) = (p \circ g)^*(\omega) = p^*(\omega),$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że g jest automorfizmem nakrycia p . Wobec dowolności g forma $p^*(\omega)$ jest G -niezmiennicza. Stąd $\text{Im } p^* \subseteq \Omega^*(\tilde{M})^G$.

2. Aby wykazać zawieranie w drugą stronę, ustalmy G -niezmienniczą k -formę $\eta \in \Omega^k(\tilde{M})$. Niech $x \in M$ oraz $y, y' \in \tilde{M}$ będą takie, że $p(y) = p(y') = x$. Definiujemy k -formę $\omega \in \Omega^k(M)$ następująco:

$$\omega(x)(v_1, \dots, v_k) := \eta(y)((Dp(y))^{-1}(v_1), \dots, (Dp(y))^{-1}(v_k)),$$

gdzie $v_1, \dots, v_k \in T_M^x$. Ponieważ p jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu y , możemy odwrócić różniczkę p w tym punkcie. Za pomocą przekształcenia odwrotnego do $Dp(y)$ przenosimy wektory styczne do M w punkcie x do przestrzeni stycznej do $\tilde{M}$ w punkcie y i wyliczamy na nich wartość formy η . Należy sprawdzić poprawność tej definicji, tzn. jej niezależność od wyboru punktu y we włóknie nad x , oraz gładkość tak zdefiniowanej formy.

Łatwo sprawdzić gładkość — zauważmy, że jeśli $\hat{p}_y$ będzie obcięciem p do otoczenia y , na którym p jest dyfeomorfizmem, to na pewnym otoczeniu x (obrazie dziedziny $\hat{p}_y$) forma ω jest cofnięciem η przy przekształceniu $\hat{p}_y^{-1}$.

Aby uzasadnić poprawność definicji, weźmy $g \in G$ takie, że $g(y') = y$. Jego istnienie wynika z tranzytywności działania G na włóknie, czyli tutaj istotnie korzystamy z założenia, że p jest G -nakryciem. Ponieważ $\eta = g^*(\eta)$, mamy

$$\begin{aligned} \eta(y)((Dp(y))^{-1}(v_1), \dots, (Dp(y))^{-1}(v_k)) &= \eta(y)(D\hat{p}_y^{-1}(x)(v_1), \dots, D\hat{p}_y^{-1}(x)(v_k)) = \\ &= g^*(\eta)(y)(D\hat{p}_y^{-1}(x)(v_1), \dots, D\hat{p}_y^{-1}(x)(v_k)) = \\ &= \eta(y')(Dg^{-1}(y) \circ D\hat{p}_y^{-1}(x)(v_1), \dots, Dg^{-1}(y) \circ D\hat{p}_y^{-1}(x)(v_k)) = \\ &= \eta(y')(D(g^{-1} \circ \hat{p}_y^{-1})(x)(v_1), \dots, D(g^{-1} \circ \hat{p}_y^{-1})(x)(v_k)) = \\ &= \eta(y')(D(\hat{p}_{y'})^{-1}(y)(v_1), \dots, D(\hat{p}_{y'})^{-1}(y)(v_k)) \end{aligned}$$

gdzie $\hat{p}_{y'}$ jest, analogicznie do $\hat{p}_y$, obcięciem nakrycia p do otoczenia y' , na którym jest ono dyfeomorfizmem na swój obraz. Wobec tego definicja formy ω jest poprawna, czyli dla G -niezmienniczej formy η na $\tilde{M}$ zdefiniowaliśmy formę na M , której cofnięcie przez nakrycie p to właśnie forma η .

Powyższe dwa punkty sumują się do równości $\text{Im } p^* = \Omega^*(\tilde{M})^G$. Z uwagi 1.1 wynika, że p^* jest homomorfizmem grup abelowych. Wobec tego aby pokazać, że p^* jest izomorfizmem na swój obraz, wystarczy wykazać, że jego jądro jest zerowe. Weźmy dowolną niezerową k -formę $\omega \in \Omega^k(M)$. Niech $x \in M$ będzie punktem, w którym ω jest niezerowa, a $y \in p^{-1}(x)$. Ponieważ nakrycie p jest lokalnym dyfeomorfizmem, różniczka $Dp(y)$ zadaje izomorfizm przestrzeni stycznych do M i $\tilde{M}$ w punktach x i y odpowiednio. Niech $v_1, \dots, v_k \in T_M^x$ będą takimi wektorami, że $\omega(v_1, \dots, v_k) \neq 0$. Przez w_i oznaczmy przeciwbraz wektora v_i przy różniczce w punkcie y : $w_i = (Dp(y))^{-1}(v_i)$. Wówczas z definicji cofnięcia formy $p^*(\omega)(w_1, \dots, w_k) = \omega(v_1, \dots, v_k) \neq 0$. Stąd $\ker p^*$ jest zerowe.

Zauważmy, że ostatnią część rozumowania można przeprowadzić bardziej ogólnie. Wystarczy, żeby p było submersją; wtedy różniczka w każdym punkcie jest epimorfizmem. Wobec tego przekształcenie indukowane na formach różniczkowych, zdefiniowane przez składanie z różniczką, na mocy ogólnej teorii jest monomorfizmem.

□

4. Transfer dla G -nakryć

Przyjrzymy się, jak przy założeniu, że p jest G -nakryciem, można opisać homomorfizm $p_{\#}$. Zaczynając od dowolnej formy $\eta \in \Omega^*(\tilde{M})$, wyprodukujemy z niej formę G -niezmienniczą, żeby następnie przeprowadzić ją na formę na M za pomocą opisanego w lemacie 4 izomorfizmu $(p^*)^{-1} : (\Omega^*(\tilde{M}))^G \longrightarrow \Omega^*(M)$.

Definicja 4.1. Definiujemy przekształcenie $p_{\#} : \Omega^*(\tilde{M}) \longrightarrow \Omega^*(M)$ jako złożenie przekształcenia $A : \Omega^*(\tilde{M}) \longrightarrow \Omega^*(\tilde{M})^G$, gdzie $A(\eta) = \sum_{g \in G} g^*(\eta)$, z przekształceniem $(p^*)^{-1}$.

Uwaga 4.1. Powyższa definicja dla p będącego G -nakryciem jest zgodna z ogólniejszą definicją 2.1.

Przekształcenie A faktycznie prowadzi w formy G -niezmiennicze, ponieważ dla dowolnego $h \in G$

$$h^*\left(\sum_{g \in G} g^*(\eta)\right) = \sum_{g \in G} h^*(g^*(\eta)) = \sum_{g \in G} (gh)^*(\eta) = \sum_{gh \in G} (gh)^*(\eta) = \sum_{g \in G} g^*(\eta)$$

Wykonane przekształcenia wynikają z uwagi 1.1, na mocy której wiemy również, że przekształcenie A jest przemienne z różniczkowaniem form oraz liniowe. Ponieważ $(p^*)^{-1}$ także ma te własności jako odwrotność p^* , otrzymujemy, że ich złożenie $p_{\#}$ jest homomorfizmem kompleksów łańcuchowych $\Omega^*(\tilde{M})$ i $\Omega^*(M)$, więc indukuje homomorfizm kohomologii przestrzeni $\tilde{M}$ i M .

Na koniec sformułujemy własności transferu dla G -nakryć.

Lemat 5. (Zadanie 48.) Dla p będącego G -nakryciem transfer spełnia następujące warunki:

1. złożenie $p^* \circ p_{\#}$ jest równe przekształceniu $\sum_{g \in G} g^* = A$,
2. złożenie $p_{\#} \circ p^*$ jest mnożeniem przez $|G|$.

Dowód.

1. Niech $\eta \in \Omega^*(\tilde{M})$. Wtedy

$$p^* \circ p_{\#}(\eta) = p^* \circ \left(\sum_{g \in G} g^*(\eta)\right) = \sum_{g \in G} p^* \circ g^*(\eta) = \sum_{g \in G} (p \circ g)^*(\eta) = \sum_{g \in G} g^*(\eta).$$

2. Ta własność została udowodniona w ogólniejszej sytuacji w lemacie 1.

Ponieważ wiemy, że p^* i $p_{\#}$ definiują przekształcenia na kohomologiach, własności udowodnione powyżej dla form różniczkowych przenoszą się na analogiczne własności indukowanych homomorfizmów dla klas kohomologii.

□

5. Kohomologie ilorazu

Chcielibyśmy zbadać zależności pomiędzy kohomologiami przestrzeni bazowej nakrycia i przestrzeni nakrywającej. Wyniki dotyczące tych zależności znajdują zastosowanie w sytuacji, kiedy trzeba będzie policzyć kohomologie przestrzeni otrzymanej jako iloraz przez działanie grupy wolnej na przestrzeni, której własności są lepiej znane. Na przykład przy obliczaniu kohomologii przestrzeni rzutowych lub ogólniej przestrzeni soczewkowych.

Lemat 6. *Jeśli $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ jest skończonym G -nakryciem, to kohomologie rozmaitości M to punkty stałe działania G na kohomologiach $\tilde{M}$.*

Dowód. Grupy kohomologii de Rhama rozmaitości są przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{R}$. Kohomologie G -niezmiennicze $H^*(\tilde{M})^G$ tworzą podprzestrzeń liniową w $H^*(\tilde{M})$, ponieważ ogólnie zbiór punktów stałych działania grupy liniowej na przestrzeni liniowej jest jej podprzestrzenią.

Na mocy lematu 4 przekształcenie p^* przeprowadza formy na M w G -niezmiennicze formy na $\tilde{M}$. Sprawdźmy, że p^* przeprowadza kohomologie M w G -niezmiennicze kohomologie $\tilde{M}$, czyli że w kohomologiach klasa formy G -niezmienniczej jest G -niezmiennicza. Weźmy dowolną formę $\eta \in \Omega^*(\tilde{M})^G$. Dowolny automorfizm nakrycia $g \in G$ indukuje homomorfizm grup kohomologii g^* . Ponieważ $g^*(\eta) = \eta$, to również na kohomologiach $g^*([\eta]) = [\eta]$. Wobec tego $[\eta]$ jest G -niezmiennicznym elementem kohomologii $H^*(\tilde{M})$.

Z lematu 5 wiemy, że złożenie $p_{\#} \circ p^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(\tilde{M})^G$ to mnożenie przez $|G|$, czyli w szczególności jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. Stąd $p^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(\tilde{M})^G$ jest monomorfizmem.

Rozpatrzmy obcięcie złożenia $p^* \circ p_{\#}$ do podprzestrzeni liniowej $H^*(\tilde{M})^G \subseteq H^*(\tilde{M})$. Na podstawie lematu 5 możemy wyliczyć, że dla elementu $\alpha \in H^*(\tilde{M})^G$ zachodzi

$$p^* \circ p_{\#}(\alpha) = \sum_{g \in G} g^*(\alpha) = \sum_{g \in G} \alpha = |G|\alpha.$$

Wobec tego $(p^* \circ p_{\#})|_{H^*(\tilde{M})^G}$ również jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, natomiast $p_{\#}$ indukuje monomorfizm $H^*(\tilde{M})^G \hookrightarrow H^*(M)$.

Ponieważ włożenie $p_{\#} : H^*(\tilde{M})^G \hookrightarrow H^*(M)$ jest izomorfizmem na podprzestrzeni liniowej $p^*(H^*(M)) \subseteq H^*(\tilde{M})^G$, to ta podprzestrzeń nie może być właściwa. Otrzymujemy więc, że przestrzenie $H^*(M)$ i $H^*(\tilde{M})^G$ są izomorficzne. □

Na koniec przyjrzymy się zastosowaniu lematu 6.

Przykład 5.1. *Dla dowolnej rozmaitości różniczkowej M istnieje dwukrotne nakrycie p rozmaitością orientowalną $\tilde{M}$ (zadanie 26). To nakrycie jest trywialne wtedy i tylko wtedy, gdy M jest orientowalna. Z teorii nakryć wynika, że grupa $\mathbb{Z}_2$ działa tranzytywnie na włóknach p . Ponadto jeśli M jest nieorientowalna, to działanie $\mathbb{Z}_2$ musi zmieniać orientację $\tilde{M}$, bo w przeciwnym przypadku orientację na M dałoby się ustalić, lokalnie kopiując orientację na $\tilde{M}$. Wobec tego w najwyższym wymiarze żadna forma na $\tilde{M}$ nie jest zachowywana przez działanie grupy automorfizmów nakrycia. Stąd na podstawie lematu 6 wnioskujemy, że kohomologie rozmaitości nieorientowalnej w najwyższym wymiarze są zerowe.*

Można spróbować przenieść opisaną powyżej teorię na formy i kohomologie o zwartych nośnikach, rozważając również nakrycia nieskończone.