Zanurzenia metryczne - zadania kwalifikacyjne

Marcin Kotowski

23 czerwca 2014

Zadania są podzielone na dwie części - podstawowe i dodatkowe. Oczekuję, że każdy zrobi wszystkie zadania podstawowe oraz przynajmniej jedno zadanie dodatkowe. Zadania dodatkowe są nieco trudniejsze, będę je brał pod uwagę w przypadku dużej liczby chętnych, ale niezależnie od tego zachęcam do próby ich zrobienia, bo dadzą lepsze przygotowanie do warsztatów. Jeśli doślesz zadania wcześniej, jest możliwość ich poprawiania, można też się dopytywać, przesyłać częściowe pomysły itd.

Rozwiązania, pytania i znalezione błędy należy nadsyłać na adres: marcin.kotowski1@gmail.com (najlepiej z czymś typu [WWW10] w temacie). Akceptuję jedynie rozwiązania napisane w LaTeXu albo, w ostateczności, odręcznie [1]

Lista zmian:

- 10 czerwca: ujednoznacznienie notacji w zadaniach 4 i 5

1 Zadania podstawowe

1.1 Prawdopodobieństwo

Przed zrobieniem zadań warto zapoznać się z pojęciami niezależności zmiennych losowych oraz wartości oczekiwanej. Warto też przypomnieć sobie własność liczby e - wraz z $n \to \infty$ mamy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$.

Zadanie 1. Niech X, Y będą niezależnymi losowymi punktami ze zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$ wybranymi z rozkładu jednostajnego (każda wartość ma równe prawdopodobieństwo). Oblicz $\mathbb{E}|X-Y|$ (czyli wartość oczekiwaną odległości między X i Y).

Zadanie 2. Przypuśćmy, że rzucamy monetą n razy, przy czym prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p_n. Do jakiej liczby dąży (wraz z $n \to \infty$) prawdopodobieństwo wyrzucenia n reszek, jeśli:

- $p_n = \frac{1}{2^n}$

[1] Jeśli nie znasz jeszcze LaTeXa i rozważasz pisanie odręczne, zastanów się dwa razy. LaTeXa i tak musisz się kiedyś nauczyć - a jeśli nie teraz, to kiedy?

- $p_n = \frac{2}{n}$
- $p_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

1.2 Metryki

Metryką na zbiorze X nazwiemy funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące własności:

1. jeśli $d(x, y) = 0$, to $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ dla dowolnych $x, y, z \in X$ (nierówność trójkąta)

Intuicja: $d(x, y)$ ma określać odległość punktów x i y. Swojskim przykładem metryki jest zwykle odległość euklidesowa na płaszczyźnie:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ale poniżej zobaczymy inne przykłady metryk. Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną. Funkcję d spełniającą jedynie warunki 2 i 3 będziemy nazywać **półmetryką**.

Przez $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać n-wymiarową przestrzeń wektorów o rzeczywistych współrzędnych. Niech $p \in (0, \infty)$. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ oznaczamy:

$$d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Dodatkowo oznaczamy:

$$d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Zadanie 3. Które z poniższych funkcji są metrykami, a które nie?

(a) X - dowolny zbiór, $d(x, y) = 1$ dla $x \neq y$ i 0 w przeciwnym przypadku

(b) d_2

(c) d_1

(d) $d_{\frac{1}{2}}$

(e) d_∞

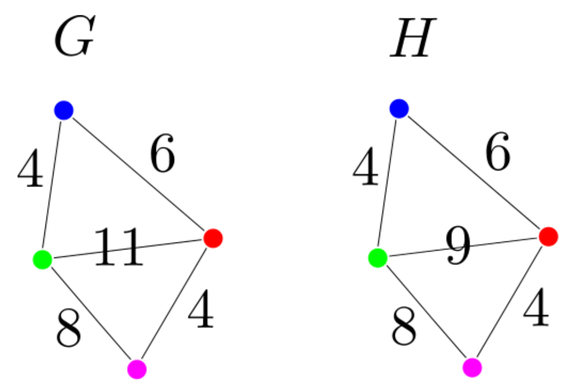
(f) X - zbiór liczb naturalnych postaci $n = 2^k \cdot m$, gdzie m - nieparzyste, a $d(n, n') = |k - k'|$ (gdzie k, k' są te same, co w napisie $n = 2^k \cdot m$)

(g) X - Tatry, $d(x, y)$ - czas przejścia z punktu x do y takim tempem, by się nie zmęczyć

(h) $X =$ zbiór nieskończonych ciągów zerojedynkowych, $d(x, y) = 2^{-k}$, gdzie k jest numerem pierwszej pozycji, na której x i y się różnią

(i) (dodatkowe) d_p dla ogólnych p

Zadanie 4. Rozpatrzmy poniższe grafy z wagami na krawędziach. Wagą ścieżki od x do y nazywamy sumę wag na krawędziach tej ścieżki. Przyporządkujmy każdej parze wierzchołków (x, y) sumę wag na ścieżce łączącej te wierzchołki zawierającej najmniejszą ilość krawędzi (jeśli jest więcej niż jedna, bierzemy najmniejszą sumę wag). Czy taka funkcja zadaje metrykę na poniższych grafach?



1.3 Grafy

Poniżej $G = (V, E)$ jest skończonym nieskierowanym grafem bez pętli i wielokrotnych krawędzi. **Stopniem wierzchołka** $v \in V$ nazwiemy liczbę krawędzi wychodzących z V.

Dla $A \subseteq V$ przez ∂A będziemy oznaczać brzeg zbioru A, który definiujemy jako zbiór krawędzi wychodzących z A (tj. krawędzi postaci (x, y), gdzie $x \in A, y \notin A$).

Z dowolnym grafem G możemy stowarzyszyć metrykę najkrótszej ścieżki: $d(x, y)$ jest równe liczbie krawędzi na najkrótszej ścieżce łączącej $x, y \in V$. **Średnicą grafu**, ozn. $\operatorname{diam}(G)$, nazwiemy $\max_{x,y \in V} d(x, y)$.

Zadanie 5. Jaki rozmiar ma ∂A dla następujących zbiorów A i grafów G:

(a) G - pełne drzewo binarne wysokości n, A - zbiór wierzchołków odległych od korzenia o co najwyżej $k \leqslant n$

(b) G - prostokątna siatka $n \times n$ o środku w punkcie $(0, 0)$, A - siatka rozmiaru $k \times k$ o środku w $(0, 0)$ (tzn. siatka ma n wierzchołków, przyjmijmy, że n jest nieparzyste)

(c) G - graf pełny (klika) o n wierzchołkch, A - zbiór składający się z jednego wierzchołka

Zadanie 6. (**Uwaga:** to zadanie okazało się trudne, więc proszę potraktować je jako dodatkowe, a zamiast tego zrobić zadanie 7.) Niech G_n będzie rodziną grafów takich, że G_n ma n wierzchołków i jest 3-regularny (każdy wierzchołek ma stopień 3). Załóżmy, że istnieje stała c taka, że każdy G_n spełnia następującą własność: dla dowolnego $A \subseteq G_n$ takiego, że $|A| \leqslant \frac{n}{2}$ zachodzi:

$$|\partial A| \geqslant c|A|$$

Pokaż, że $\mathrm{diam}(G_n) \leqslant C \log n$ dla pewnej stałej C (uwaga: jest dalekie od oczywistości, że grafy spełniające $|\partial A| \geqslant c|A|$ dla stałej c niezależnej od n istnieją!)

2 Zadania dodatkowe

Zadanie 7. Niech d będzie metryką na zbiorze X. Czy funkcje:

$$d_1(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$$
$$d_2(x,y) = d^2(x,y)$$

zawsze też są metrykami? Jeśli tak, podaj dowód, jeśli nie, podaj kontrprzykład.

Zadanie 8. Obwodem grafu, ozn. $g(G)$, nazwiemy długość najkrótszego cyklu w G (lub ∞, jeśli graf nie ma cykli). Udowodnij, że obwód dowolnego grafu o n wierzchołkach, w którym wierzchołki są stopnia $d \geqslant 3$, jest równy co najwyżej $C \log n$ dla pewnej stałej C niezależnej od n.

Zadanie 9. Udowodnij, że istnieją stałe c, c' takie, że w grafie 3-regularnym o n wierzchołkach istnieje $\geqslant c \cdot n^2$ par wierzchołków odległych o $\geqslant c' \mathrm{diam}(G)$.

Dla dwóch przestrzeni metrycznych (X, d_X) i (Y, d_Y) zanurzeniem będziemy nazywać dowolne odwzorowanie $f : X \to Y$. Zanurzenie nazwiemy izometrycznym, jeśli dla dowolnych $x, x' \in X$ mamy $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$.

Zadanie 10. Rozpatrzmy "naiwne" zanurzenie cyklu o n wierzchołków w płaszczyznę z metryką euklidesową, powstałe przez narysowanie go jako wierzchołków n-kąta foremnego. Jak mają się odległości po takim zanurzeniu do odległości w grafie z metryką długości ścieżki? (podaj dolne i górne oszacowania)

Zadanie 11 (trudniejsze)**.** Rozpatrzmy C_4 - cykl o 4 wierzchołkach. Czy C_4 z metryką długości ścieżki da się zanurzyć izometrycznie w $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową? (uwaga poboczna: łatwo zobaczyć, że bez straty ogólności można założyć $n \leqslant 3$)