I seria zadań domowych

Rozwiązania

1. (a) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n.

Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Załóżmy, że dla pewnego naturalnego m zachodzi $\binom{3m}{m} < 7^m$. Pokażemy, że wtedy $\binom{3(m+1)}{m+1} < 7^m$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\binom{3(m+1)}{m+1} &= \frac{(3m+3)!}{(2m+2)!(m+1)!} = \frac{(3m)!}{(2m)!m!} \cdot \frac{3(m+1)(3m+2)(3m+1)}{2(m+1)(2m+1)(m+1)} \\ &\overset{ind}{<} 7^m \cdot \frac{3(m+1)(3m+2)(3m+1)}{2(m+1)(2m+1)(m+1)} = 7^m \cdot \frac{3(3m+2)(3m+1)}{2(2m+1)(m+1)} \\ &= 7^m \cdot \frac{27m^2+27m+6}{4m^2+6m+2} < 7^m \left(7 - \frac{m^2+15m+8}{4m^2+6m+2}\right) < 7^{m+1},\end{aligned}$$

co dowodzi kroku indukcyjnego.

2. (b) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n.

Dla $n = 1$ tożsamość jest oczywista. Załóżmy, że dla pewnego naturalnego m zachodzi

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + m3^{m-1} = \frac{2m-1}{4} \cdot 3^m + \frac{1}{4}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + m3^{m-1} + (m+1)3^m &\overset{ind}{=} \frac{2m-1}{4} \cdot 3^m + \frac{1}{4} + (m+1)3^m \\ &= \frac{2m-1+4m+4}{4} \cdot 3^m + \frac{1}{4} = \frac{2(m+1)-1}{4} + \frac{1}{4},\end{aligned}$$

co dowodzi kroku indukcyjnego.

2. (a) Nie. Jeśli $T(n)$ to zdanie n jest większe niż 10, to spełnione są warunki zadania, ale $T(15)$ jest prawdziwe.

2. (b) Tak, gdyż na mocy zasady indukcji zdania $T(n)$ są prawdziwe dla $n \geqslant 17$.

2. (c) Ponieważ $T(18)$ jest prawdziwe (na mocy zasady indukcji), to implikacja $T(8) \Rightarrow T(18)$ jest prawdziwa niezależnie od wartości logicznej zdania $T(8)$.

2. (d) Nie. Jeśli $T(n)$ to zdanie n jest większe niż 7, to spełnione są warunki zadania oraz $T(18)$ jest prawdziwe, zaś $T(8)$ nie jest prawdziwe.

3. Przypuśćmy przeciwnie, że $\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$ jest liczbą wymierną. Wtedy liczbą wymierną jest też czwarta potęga tej liczby, czyli liczba $13 - 2\sqrt{40} = 13 - 4\sqrt{10}$. Stąd wynika, że wymierna jest też liczba $\sqrt{10}$. Istnieją więc takie dodatnie liczby względnie pierwsze p, q, że $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$, czyli równoważnie $10q^2 = p^2$. Wtedy jednak p^2 jest liczbą parzystą, więc również p jest parzyste, czyli p^2 jest podzielne przez 4. Z równości $10q^2 = p^2$ wynika wobec tego, że także q jest parzyste, co przeczy temu, że p jest względnie pierwsze z q. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że liczba $\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

4. Pokażemy, że $\sup A = 1$ oraz $\inf A = -\frac{1}{4}$. Zauważmy, że licznik ułamka $\frac{m^2-n}{m^2+n^2-1}$ dla $m, n \in \mathbb{N}$ jest mniejszy od mianownika, który jest dodatni. Zatem 1 jest ograniczeniem górnym A.

Załóżmy, że istnieje mniejsze od 1 oszacowanie górne $1-\varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzi $\frac{m^2-1}{m^2} \leqslant 1-\varepsilon$, czyli równoważnie $\frac{1}{m^2} \geqslant \varepsilon$, co przeczy temu, że zbiór liczb naturalnych jest nieograniczony z góry. Udowodniliśmy tym samym, że $\sup A = 1$.

Zauważmy, że $-\frac{1}{4} \in A$ (dla $n=2, m=1$). Poza tym $-\frac{1}{4} \leqslant \frac{m^2-n}{m^2+n^2-1}$ dla dowolnych naturalnych liczb n, m. Faktycznie, ta nierówność równoważna jest z $m^2+n^2-1 \geqslant -4m^2+4n$, a ta z kolei z nierównością $5(m-1)+(n-2)^2 \geqslant 0$, która prawdziwa jest dla $m \geqslant 1$ oraz dowolnych n, czyli w szczególności dla wszsytkich par liczb naturalnych (m,n). To dowodzi, że $\inf A = -\frac{1}{4}$.

5. Pokażemy, że dla $C=5$ nierówności

$$3-\frac{C}{n} \leqslant \frac{3n^2+n-7}{n^2+2n-1} \leqslant 3+\frac{C}{n}$$

zachodzą dla dowolnej liczby naturalnej n.

Istotnie,

$$\frac{3n^2+n-7}{n^2+2n-1} = 3-\frac{5n+2}{n^2+2n-1} = 3-\frac{5}{n}+\frac{8-\frac{5}{n}}{n^2+2n-1},$$

co z jednej strony jest większe niż $3-\frac{5}{n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz mniejsze niż $3-\frac{5}{n}+\frac{8}{n} < 3+\frac{5}{n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.