II seria zadań domowych

Rozwiązania

1. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej liczba $a_n := \frac{n+1}{n^2+2n}$ jest dodatnia, zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi $a_n > -\varepsilon$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $a_n < \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{1}{n}$, to dla dowolnego $n > n_\varepsilon := [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ zachodzi $a_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, czyli dla dowolnego $n > n_\varepsilon$ zachodzi $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, co świadczy o tym, że $n_\varepsilon := [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ spełnia warunki zadania.

2. (a) Wykażemy najpierw, że $n \cdot \frac{2^n}{3^n}$ zbiega do 0 przy n zbiegającym do nieskończoności. Pokażemy indukcyjnie, że dla $n > 5$ zachodzi oszacowanie $n \cdot 4^n < 5^n$.Zauważmy, że zachodzi $6 \cdot 4^6 = 6 \cdot 2^{10} \cdot 4 > 6 \cdot 4000 = 24000 > 22500 = 25 \cdot 900 = 25 \cdot (30)^2 > 25^3 = 5^6$, co dowodzi nierówności dla $n = 1$. Załóżmy teraz, że dla pewnego $k > 6$ zachodzi $k \cdot 4^k < 5^k$. Pokażemy, że wtedy $(k+1) \cdot 4^{k+1} < 5^{k+1}$. Z założenia indukcyjnego oraz tego, że $k > 4$ wynika, że

$$(k+1) \cdot 4^{k+1} = 4\left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot k \cdot 4^k < 4\left(1 + \frac{1}{4}\right) 5^k = 5^{k+1},$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Dla dostatecznie dużych n zachodzi więc oszacowanie

$$0 < n \cdot \frac{2^n}{3^n} = n \cdot \frac{4^n}{6^n} < \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Ponieważ ciąg po prawej stronie tej nierówności zbiega do 0, to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, również ciąg $n(\frac{2}{3})^n$ zbiega do zera przy n dążącym do nieskończoności, co chcieliśmy pokazać.

Korzystając z tego faktu i z arytmetyki granic, dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + n \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 + n \cdot (\frac{2}{3})^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

2. (b)

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+1} + n)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+1} + n)}$$

Ponieważ mianownik prawej strony zbiega do nieskończoności, gdy n zbiega do nieskończoności, to ciąg a_n jest zbieżny do 0.

2. (c) Wykażemy najpierw, że $\sqrt[n]{n+1}$ zbiega do 1 przy n dążącym do nieskończoności. Faktycznie, zachodzi oszacowanie

$$1 < \sqrt[n]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n},$$

a ponieważ zarówno $\sqrt[n]{2}$, jak i $\sqrt[n]{n}$ zbiegają do 1, gdy $n \to \infty$, to z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

Korzystając z tego faktu i z arytmetyki granic, dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2}}{(1 + \frac{1}{n})\sqrt[n]{n+1}} = \frac{1+0+0}{(1+0) \cdot 1} = 1.$$

2. (d) Niech $b_n = \frac{1000^n}{n!}$ oraz $c_n = \frac{n^{1000}}{n!}$. Pokażemy, że ciągi $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiegają do 0 przy n dążącym do nieskończoności, skąd już będzie wynikać, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do 0 przy $n \to \infty$.

Zauważmy, że dla $n > 1000$ zachodzi

$$0 < b_n = \frac{1000^{1000}}{1000!} \cdot \left(1 - \frac{1}{1001}\right)\left(1 - \frac{1}{1002}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1000^{1000}}{1000!} \cdot \left(1 - \frac{1}{1001}\right)^{n-1000}.$$

Ponieważ prawa strona powyższej nierówności zbiega do zera przy n dążącym do nieskończoności, to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, również b_n zbiega do zera.

Z kolei dla $n > 2000$ zachodzi oszacowanie dla ciągu $\{c_n\}_n$

$$0 < c_n < \frac{n^{1000}}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-1000)} \cdot \frac{1}{n} < 2^{1000} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ponieważ prawa strona powyższej nierówności zbiega do zera przy n dążącym do nieskończoności, to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, również c_n zbiega do zera.

3. (a) Zauważmy, że $a_n < n \cdot \frac{1}{n} = 1$, gdyż każdy ze składników w definicji a_n jest mniejszy niż $\frac{1}{n}$. Podobnie, $a_n \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Jeśli więc $\{a_n\}_n$ jest zbieżny, to do granicy nie mniejszej niż $\frac{1}{2}$, czyli w szczególności do granicy różnej od 0. Pokażemy, że ciąg $\{a_n\}_n$ jest rosnący, co wraz z wykazanym wyżej oszacowaniem z góry przez 1 będzie świadczyło o tym, że ciąg a_n jest zbieżny do granicy skończonej (gdyż każdy ciąg liczb rzeczywistych niemalejący i ograniczony z góry ma skończoną granicę). Istotnie,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} > \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0,$$

skąd wynika, że ciąg $\{a_n\}_n$ jest rosnący.

3. (b) Zauważmy, że $a_n = \sqrt{2013^2 + n - 1}$ dla dowolnej liczby całkowitej n. Faktycznie, dla $n = 1$ wzór jest prawdziwy. Poza tym ciąg $\{\sqrt{2013^2 + n - 1}\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia rekurencję $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 1}$ dla wszystkich liczb naturalnych n.

Stąd wynika, że $a_n > \sqrt{n}$, więc ciąg $\{a_n\}_n$ jest rozbieżny do nieskończoności.