III seria zadań domowych

Rozwiązania

1. Zauważmy, że

$$a_n \leqslant \frac{1+[\sqrt{n}]}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}+1}{n} =: b_n$$

oraz

$$a_n \geqslant \frac{1+[\sqrt{n}]}{n+[\sqrt{n}]} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} =: c_n$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 = \lim_{n\to\infty} c_n$, to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ponieważ zaś $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} b_n = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} c_n$, to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, także $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = 1$.

2. Ponieważ ciąg $(n^4)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i rozbieżny do nieskończoności, to, na mocy twierdzenia Stolza, ciąg

$$a_n := \frac{1^3+4^3+\ldots+(3n-2)^3}{n^4}$$

jest zbieżny, o ile ciąg

$$c_n := \frac{(1^3+4^3+\ldots+(3(n+1)-2)^3)-(1^3+4^3+\ldots+(3n-2)^3)}{(n+1)^4-n^4}$$

jest zbieżny. Wtedy też granice powyższych ciągów są takie same.

Zauważmy, że

$$c_n = \frac{(3n+1)^3}{(n+1)^4-n^4} = \frac{27n^3+27n^2+9n+1}{4n^3+6n^2+4n+1},$$

zatem ciąg $(c_n)_n$ jest zbieżny do $\frac{27}{4}$, w związku z czym ciąg $(a_n)_n$ również jest zbieżny do $\frac{27}{4}$.

3. Skorzystamy z faktu, że jeśli ciąg $(a_n)_n$ zbiega to 0, a ciągi $(b_n)_n$ i $(a_n b_n)_n$ – do nieskończoności, to ciąg $((1+a_n)^{b_n})_n$ również jest zbieżny do nieskończoności. Zastosujemy to stwierdzenie dla ciągów

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}$$

oraz $b_n = n$.

Sprawdźmy, czy założenia stwierdzenia są spełnione. Oczywiście, ciąg $(b_n)_n$ jest rozbieżny do nieskończoności. Ponieważ ciąg $(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)_n$ jest zbieżny do pewnej liczby dodatniej, to ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do zera, zaś ciąg $(a_n b_n)_n$ jest rozbieżny do nieskończoności (gdyż $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$). Spełnione są więc założenia stwierdzenia. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} \right)^n = \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = \infty.$$

4. Niech $b_n = a_n + \frac{1}{2^{n-1}}$ dla n naturalnych. Zauważmy, że z założeń zadania wynika, że

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{2^n} - \frac{2}{2^n} = a_{n+1} - a_n - \frac{1}{2^n} \geqslant 0.$$

Ciąg $(b_n)_n$ jest więc niemalejący. Co więcej, jeśli M jest ograniczeniem górnym ciągu $(a_n)_n$ (którego istnienie zakładamy), to $M+1$ jest ograniczeniem górnym ciągu $(b_n)_n$. W związku z tym ciąg $(b_n)_n$ jest niemalejący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Pozostaje zauważyć, że ciąg $(2^{-n+1})_n$ jest zbieżny, więc $(a_n)_n$ jest różnicą ciągów zbieżnych, skąd wynika, że też jest ciągiem zbieżnym, co należało wykazać.