IV seria zadań domowych

Rozwiązania

1. Ponieważ dla $x > -1$ zachodzi $\ln(1+x) \leqslant x$, to $\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \geqslant 0$, czyli wyrazy szeregu są dodatnie. Nie musimy się więc zajmować zbieżnością bezwzględną; wystarczy zbadać zbieżność szeregu.

Dzięki oszacowaniu ze wskazówki dostajemy

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n^2+n}\right) \leqslant \frac{2}{n^2+n} \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

Ponieważ zaś szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ jest zbieżny, to na mocy kryterium porównwczego również badany szereg jest zbieżny.

2. Wiemy, że ciąg $\sqrt[n]{n}$ jest malejący od pewnego miejsca. Ponieważ ciąg $\ln n$ także jest malejący, to $\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ również maleje od pewnego miejsca. Co więcej, ciąg ten jest zbieżny do 0, gdyż $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Na mocy kryterium Leibniza szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ jest więc zbieżny.

Aby zbadać zbieżność bezwzględną tego szeregu należy zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$. Zastosujemy kryterium porównawcze. Jako że $\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} > \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ dla dostatecznie dużych n, zaś szereg harmoniczny jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ jest rozbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ jest zatem zbieżny warunkowo.

3. Oznaczmy n-ty wyraz iloczynu Cauchy'ego danych szeregów przez c_n. Z definicji iloczyu Cauchy'ego mamy

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} \cdot (-1)^{n-k} \frac{n-k}{2^{n-k}} = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)k$$

Zauważmy, że dla n nieparzystych $c_n = 0$. Istotnie, jeśli $n = 2m+1$, to

$$\begin{aligned}
2^n c_n &= 2^{2m+1} c_{2m+1} = -\sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \cdot (2m+1-k)k \\
&= -\sum_{k=0}^{m} \Big((-1)^k \cdot (2m+1-k)k + (-1)^{2m+1-k} \cdot (2m+1-(2m+1-k))(2m+1-k)\Big) \\
&= -\sum_{k=0}^{m} (-1)^k (2m+1-k)k \cdot (1-1) = 0.
\end{aligned}$$

Dla n parzystych z kolei, jeśli $n = 2m$, zachodzi

$$\begin{aligned}
2^n c_n &= 2^{2m} c_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \cdot (2m-k)k = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k (2m-1-k)k + \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \cdot k \\
&= 2^{2m-1} c_{2m-1} + \sum_{k=0}^{m-1} (2k-(2k+1)) = 0 + m \cdot (-1) = -m = -\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Zatem iloczyn Cauchy'ego danych szeregów to szereg $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-m}{4^m}$. Z kryterium Cauchy'ego wynika, że szereg ten jest zbieżny bezwzględnie. Korzystając ze wzoru uzasadnionego na wykładzie ($\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ dla $|q| < 1$), obliczamy sumę tego szeregu; jest ona równa $-\frac{\frac{1}{4}}{(\frac{3}{4})^2} = -\frac{4}{9}$.

4. Wykażemy, że przy założeniach zadania szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[n\sqrt{n}]}a_nb_n$ jest zbieżny bezwzględnie, czyli że szereg $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nb_n|$ jest zbieżny. Skorzystamy z kryterium porównawczego. Ponieważ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$, to dla każdego naturalnego n mamy $a_n^2 + b_n^2 \geqslant 2|a_nb_n|$. Ze zbieżności szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$, a stąd, na mocy kryterium porównawczego, zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nb_n|$, co chcieliśmy pokazać.