V seria zadań domowych

Rozwiązania

1. Ponieważ a_n zbiega malejąco do 0, to liczby a_n są dodatnie. Wobec tego liczby $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ są dodatnie. Wiemy z wykładu, że ciąg średnich arytmetycznych ciągu zbieżnego do g jest zbieżny do g. Wobec tego ciąg $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ jest zbieżny do 0. Pokażemy, że ciąg ten jest także malejący. Istotnie,

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} - \frac{a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)(a_1+\ldots+a_n)-n(a_1+\ldots+a_n)-na_{n+1}}{n(n+1)}$$
$$= \frac{a_1+\ldots+a_n-na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(a_1-a_{n+1})+\ldots+(a_n-a_{n+1})}{n(n+1)} > 0.$$

Ostatnia nieróność wynika z monotoniczności ciągu a_n; mamy dla $j < n+1$ oszacowanie $a_j - a_{n+1} > 0$.

Z kryterium Leibniza wynika więc, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ jest zbieżny. Aby zbadać zbieżność bezwzględną tego szeregu należy zabdać zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$. Ponieważ wyrazy ciągu a_n są dodatnie, zachodzi nierówność $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} > \frac{a_1}{n}$. Skoro zaś $a_1 > 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{n}$ jest rozbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego także szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ jest rozbieżny.

Badany szereg jest więc zbieżny warunkowo.

3. Oznaczmy przez b granicę ciągu b_n. Ponieważ $\lim_{n\to\infty}(n+b_n)=\infty$, to istnieje n_0 takie, że dla $n \geqslant n_0$ liczby $\frac{1}{n+b_n}$ oraz $\frac{1}{n+b-1}$ są dodatnie. Zajmiemy się badaniem zbieżności szeregu $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+b_n}$, gdyż pierwsze n_0-1 wyrazów początkowych nie wpływa na zbieżność szeregu.

Wiemy już, że $\frac{1}{n+b_n}$ zbiega do nieskończoności przy n zbiegającym do nieskończoności. Pokażemy, że ten ciąg jest malejący od pewnego miejsca. Istotnie,

$$\frac{1}{n+b_n} - \frac{1}{n+1+b_{n+1}} = \frac{n+1+b_{n+1}-n-b_n}{(n+b_n)(n+1+b_{n+1})} = \frac{1+b_{n+1}-b_n}{(n+b_n)(n+1+b_{n+1})} > 0$$

dla dostatecznie dużych n. W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że $|b_n - b_{n+1}| \leqslant |b_n - b| + |b - b_{n+1}| < 2\cdot\frac{1}{3} < 1$ dla dostatecznie dużych n, co wynika ze zbieżności b_n do b.

Z kryterium Leibniza wynika więc, że szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+b_n}$ jest zbieżny, czyli także ciąg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+b_n}$ jest zbieżny. Aby zbadać zbieżność bezwzględną tego szeregu, zajmiemy się badaniem zbieżności szeregu $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n+b_n}$. Ponieważ dla dostatecznie dużych n zachodzi $\frac{1}{n+b_n} > \frac{1}{n+b-1} > \frac{1}{2n}$, zaś szereg harmoniczny jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n+b_n}$ również jest rozbieżny.

Badany szereg jest więc zbieżny warunkowo.

3. Niech $a_n := (2\cdot(-1)^{\frac{n^2(n-1)}{2}}-1)$, $b_n := \frac{1}{\sqrt{n}-\ln n}$ oraz $A_n := \sum_{k=2}^{n}a_k$. Zauważmy, że $a_n = -3$ dla $n \equiv 3(mod 4)$ oraz $a_n = 1$ w przeciwnym przypadku. W związku z tym dla $n = 4m+r+2$, gdzie $r \in \{0,1,2,3\}$, zachodzi

$$\begin{aligned} |A_n| &= |\sum_{j=0}^{m}(a_{4j+2}+a_{4j+3}+a_{4j+4}+a_{4j+5}) + \sum_{i=0}^{r}a_{4m+2+i}| \\ &= |\sum_{j=0}^{m}(1-3+1+1) + \sum_{i=0}^{r}a_{4m+2+i}| = |\sum_{i=0}^{r}a_{4m+2+i}| \leqslant \sum_{i=0}^{r}|a_{4m+2+i}| \leqslant 3\cdot 4. \end{aligned}$$

Ciąg sum częściowych ciągu a_n (czyli ciąg A_n) jest wobec tego ograniczony.

Oczywiście, ciąg b_n jest zbieżny do 0, bo $\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ jest rozbieżny do nieskończoności, wobec czego $\frac{1}{\sqrt{n}-\ln n} < \frac{2}{\sqrt{n}}$ dla dostatecznie dużych n. Z tych obserwacji wynika też, że ciąg b_n jest dodatni od pewnego miejsca. Pokażemy, że jest też malejący od pewnego miejsca. Faktycznie,

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= \frac{\sqrt{n+1} - \ln(n+1) - \sqrt{n} + \ln n}{(\sqrt{n+1} - \ln(n+1))(\sqrt{n} - \ln(n))} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{n+1} - \ln(n+1))(\sqrt{n} - \ln(n))} \cdot \left(- \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{n+1} - \ln(n+1))(\sqrt{n} - \ln(n))} \cdot \left(- \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \\
&\geqslant \frac{1}{(\sqrt{n+1} - \ln(n+1))(\sqrt{n} - \ln(n))} \cdot \left(- \frac{1}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \right) \geqslant 0
\end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n, to jest takich, że $b_n > 0$, $b_{n+1} > 0$ oraz $n > 2\sqrt{n+1}$. Wiemy, że takie dostatecznie duże n istnieją, bo ciąg $\frac{n}{\sqrt{n+1}}$ jest rozbieżny do nieskończoności, więc w szczególności od pewnego miesjca jest większy od 2. W ten sposób dowiedliśmy monotoniczności ciągu b_n od pewnego miejsca. Ponieważ zaś ciąg ten jest zbieżny do 0, zaś a_n ma sumy częściowe ograniczone, to na mocy kryterium Dirichleta badany szereg jest zbieżny.

4. Pokażemy, że ten szereg jest zbieżny. Korzystając ze wzoru na sinus sumy, dostajemy

$$\sin \left(n + \frac{1}{(\ln n)^2} \right) = \sin n \cos \left(\frac{1}{(\ln n)^2} \right) + \sin \left(\frac{1}{(\ln n)^2} \right) \cos n,$$

zatem aby wykazać, że badany szereg jest zbieżny, wystarczy wykazać, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{(\ln n)^2})$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin(\frac{1}{(\ln n)^2})$ są zbieżne.

Ponieważ ciągi $\sin n$ oraz $\cos n$ mają sumy częściowe ograniczone, co było wykazane na wykładzie lub ćwiczeniach, zaś ciąg $\frac{1}{n}$ zbiega monotonicznie do 0, to na mocy kryterium Dirichleta szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ są zbieżne. Ponieważ zaś funkcje sinus, kosinus i $\frac{1}{(\ln x)^2}$ są monotoniczne, to również ciągi $\sin(\frac{1}{(\ln n)^2})$ oraz $\cos(\frac{1}{(\ln n)^2})$ są monotoniczne. Dwa ostatnie ciągi są też oczywiście ograniczone co do modułu przez 1. Z kryterium Abela wynika więc, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{(\ln n)^2})$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin(\frac{1}{(\ln n)^2})$ są zbieżne, co mieliśmy wykazać.