II seria zadań domowych

Rozwiązania

8. Przypuśćmy przeciwnie, że f nie ma prawostronnej skończonej granicy w zerze. Wówczas istnieje (dlaczego?) taki monotonicznie zbieżny do zera ciąg liczb dodatnich (x_n), że $(f(x_n))$ nie jest zbieżny do granicy skończonej, czyli nie jest ciągiem Cauchy'ego. Oznacza to, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ istnieją takie liczby naturalne $n > m > N$, że $|f(x_n) - f(x_m)| > \varepsilon$.

Ponieważ f jest jednostajnie ciągła, to istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x-y| < \delta$, to $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Ponieważ ciąg (x_n) jest zbieżny do zera, to istnieje takie N, że $|x_n - x_m| < \delta$ dla dowolnych $n > m > N$. Wtedy jednak $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, co przeczy temu, że $(f(x_n))$ nie jest ciągiem Cauchy'ego.