Douczki z GALu

Marysia Nazarczuk

20 stycznia

1. * (Kol 19/20) Dana jest baza $A = (\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (1,1,-1), \alpha_3 = (0,1,-1))$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, zadane macierzą $M(\phi_t)_A$:

$$M(\phi_t)_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 2 & t & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   - Dla jakich t przekształcenie ϕ_t jest izomorfizmem?
   - Wyznaczyć $\phi_0(1,2,3)$.
   - Niech $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie funkcjonalem liniowym zadanym wzorem $\psi(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = x_1 + 2x_2 - x_3$. Znaleźć współrzędne funkcjonatu w bazie sprzężonej do bazy A.

2. * (Kol 19/20) + Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + x_2 + x_4)$$

   - Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\phi)$ oraz przestrzeni $\mathrm{Im}(\phi)$.
   - Wyznaczyć macierz $M(\phi)_A$, gdzie $A = ((1,1,0),(0,1,2),(0,0,1))$.
   - Znaleźć, o ile to możliwe, bazy B przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz C przestrzeni $\mathbb{R}^3$, takie, że macierz $M(\phi)_C^B$ ma dokładnie dwa niezerowe współczynniki.

3. * (Kol 15/16) Niech $\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,1,0,0)$, $\alpha_4 = (1,0,0,0)$. Niech $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, a $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $\ker(\phi) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\phi(\alpha_3) = \alpha_2$ oraz $\phi(\alpha_4) = \alpha_3$. Znajdź:

   - $M(\phi)_{\mathrm{st}}$.
   - $M(\phi)_A$.
   - Rząd przekształcenia $\phi^k = \phi \circ \cdots \circ \phi$ (złożenie k razy).

4. * (Kol 15/16) Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będące zdefiniowane jako:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   - Obliczyć $\det(A)$.
   - Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz B jest odwracalna?

5. * (Kol 16/17) Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\phi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem:

$$\phi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + tx_3, x_1 - x_2 - x_4, tx_2 + tx_3 + (t-1)x_4)$$

   - Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie ϕ_t jest epimorfizmem?

- Znaleźć bazę $\ker(\phi_2)$.
- Znaleźć wymiar przestrzeni $\ker(\phi_0) \cap \ker(\phi_1)$.

6. (LK - 6.52) Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{R}$-linowe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wyznaczone przez macierz

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

gdzie $B = \{1, i\}$ jest bazą kanoniczną $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

- Pokaż, że $f(z) = pz + q\overline{z}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{C}$. Jakie relacje zachodzą pomiędzy liczbami p, q oraz a, b, c, d?
- Jakie warunki muszą spełniać liczby p, q (lub a, b, c, d), aby odwzorowanie f było $\mathbb{C}$-linowe?

7. (LK - 6.54) Niech $K = \mathbb{F}_{13}$. Założymy, że odwzorowanie $f \in \mathrm{Hom}(K^4, K^3)$ jest dane za pomocą macierzy

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Niech ponadto

$$U = \mathrm{Lin}((1,1,1,1),(4,0,-1,1),(3,2,1,1)) \subseteq K^4,$$
$$V = \mathrm{Lin}((1,0,0),(3,1,1),(0,2,2)) \subseteq K^3.$$

Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $f(U)$ oraz $f^{-1}(V)$.

8. * (Kol 17/18)
Niech

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ t & t & t & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

będą macierzami $A, B \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

- Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz B jest odwracalna?
- Obliczyć wyznacznik macierzy $C = BAB^{-1}$ w zależności od t, zakładając, że B jest odwracalne.
- Przypuśćmy, że macierz $X \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ spełnia równanie macierzowe $X - 4X^{-1} = 0$. Obliczyć $|\det(X)|$.
- Obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$ postaci:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 3 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 \end{bmatrix}$$

9. * (Kol 22/23) Rozpatrzmy przestrzenie liniowe $V = \mathbb{Q}^4$, $W = \mathbb{Q}^3$ i przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ zadane wzorem

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_4, -x_2 - x_3 + x_4, x_1 + x_3).$$

– Znajdź $k = \dim\ker(\phi)$ i $r = \dim\mathrm{im}(\phi)$.

– Wyznacz dowolną podprzestrzeń V_0 przestrzeni V, która spełnia warunek $V = \ker(\phi) \oplus V_0$. Wypisz bazę podprzestrzeni V_0.

– Wyznacz dowolną podprzestrzeń W_0 przestrzeni W, która spełnia warunek $W = \mathrm{im}(\phi) \oplus W_0$. Wypisz bazę podprzestrzeni W_0.

– Znajdź przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$ takie, że złożenie $\psi \circ \phi : V \to V$ jest rzutem na podprzestrzeń $V_0 \subseteq V$ wzdłuż $\ker(\phi)$. Przekształcenie ψ zadaj za pomocą macierzy $M(\psi)_{A,B}$ dla wybranych przez siebie baz A i B przestrzeni V i W.

10. * (Kol 21/22) Rozpatrzmy przestrzenie liniowe $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ i $Z = \mathbb{R}^4$ oraz ich przekształcenia liniowe $\phi_t : V \to W$, $\psi_s : W \to Z$, które są zależne od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$. Przekształcenie ψ_s jest zadane wzorem

$$\psi_s(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + s \cdot x_2, x_3, -x_2, x_3),$$

natomiast przekształcenie ϕ_t przyjmuje następujące wartości:

$$\phi_t(1,1) = (-2, 0, 2t), \quad \phi_t(-1,1) = (0, 2, 0).$$

– Zapisz macierze przekształceń ϕ_t, ψ_s oraz $\psi_s \circ \phi_t$ w bazach standardowych.

– Znajdź wymiar jądra przekształcenia $\psi_s \circ \phi_t$ w zależności od parametrów t i s.

– Rozstrzygnij dla jakich wartości parametrów t i s obraz przekształcenia $\psi_s \circ \phi_t$ jest zawarty w przestrzeni $U = \mathrm{lin}((1,-1,0,1), (0,1,-1,-1), (0,1,0,-1)) \subset Z$.

11. * (Kol 16/17) Dane są macierze

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

– Obliczyć $\det(B)$. Obliczyć wyznacznik macierzy $B^T \cdot (A_t)^3 \cdot B^{-4}$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

– Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} n & n & n & \cdots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n & n \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}$$