Douczki z Analizy Matematycznej 2023

Dzień pierwszy

Zajęcia prowadzone są w ramach wolontariatu przez członka KPM, który jest studentem. Miej na uwadze to, że może nie być w stanie on odpowiedzieć na wszystkie zadane przez Was pytania.

1. Twierdzenie o zamianie zmiennych i twierdzenie Fubiniego

Zadanie 1.

Obliczyć całkę

$$\int_D x^2 + y^2 \; d\lambda_3(x,y,z) \qquad \text{gdzie} \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \; z \geq 0\}$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy z podstawienia sferycznego

$$\varphi(r,\alpha,\beta) = (r\cos\alpha\cos, r\cos\alpha\sin\beta, r\sin\beta)$$

wówczas

$$\varphi^{-1}(D) = \{(r,\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \mid 1 \leq r^2 \leq 4, \; \sin\alpha \geq 0\}$$

oraz

$$\int_D x^2 + y^2 \; d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(D)} r^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot r^2 \cdot \cos\alpha \; d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \cos^3\alpha \; d\beta \; d\alpha \; dr = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha \; d\alpha \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_1^2$$

Mamy $\frac{r^5}{5}\Big|_1^4 = \frac{31}{5}$ oraz

$$\cos^3(x) = \cos(x) \cdot \cos^2(x) = \cos(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) = \cos(x) - \cos(x) \cdot \sin^2(x)$$

Następnie, całka może być zapisana jako sumy dwóch całek:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \; dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin^2(x) \; dx$$

Pierwsza całka jest łatwa do obliczenia i wynosi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ Druga całka może być obliczona z użyciem podstawienia $t = \sin(x)$, wtedy $dx = \frac{dt}{\cos(x)}$. W efekcie, druga całka sprowadza się do

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Stąd, wynik całkowania $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$ wynosi

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin^2(x)dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 2.
Oblicz całkę

$$\int_{\{x^2+y^2\leq y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Korzystając z podstawienia biegunowego $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ mamy

$$\int_{\{x^2+y^2\leq y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\lambda_2(x,y) = \int_{r\leq \sin\alpha} \frac{r\cos\alpha}{r} \cdot r\ d\lambda_2(r,\alpha) =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin\alpha} r\cos\alpha\ dr\ d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{2}\ d\alpha$$

Mamy

$$\int \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\ d\alpha = \left\| \begin{array}{c|c} g' = \cos\alpha & g = \sin\alpha \\ f = \sin^2\alpha & f' = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array} \right\| = \sin^3\alpha - \int 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\ d\alpha$$

zatem $\int \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\ d\alpha = \frac{1}{3}\sin^3\alpha$, skąd

$$\int_{\{x^2+y^2\leq y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{2}\ d\alpha = \frac{\sin^3}{3}\Big|_0^{\pi} = 0$$

Zadanie 3.
Rozważmy zbiór $A = (0,1)\times(0,\frac{\pi}{2})$ oraz przekształcenie $\Phi : A \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\Phi(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y) =: (u,v)$$

Uzasadnić, że Φ jest dyfeomorfizmem na swój obraz, opisać ów obraz, a następnie dokonać zamiany zmiennych $(x,y)\mapsto(u,v)$ w całce

$$\int_A \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}\cos^2 y\sin^2 y}\ d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Dla $\Phi(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$ mamy

$$D\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{bmatrix}$$

więc $|\det D\Phi(x,y) = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x} \neq 0$, zatem Φ jest lokalnie dyfeomorfizmem. Można sprawdzić, że obrazem Φ jest zbiór

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 1 < x^2 + y^2 < e^2\}$$

bo dla ustalonego x wykres funkcji $(x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ jest wycinkiem okręgu o promieniu e^x. Pokażemy, że $\Phi : A \to B$ jest różnowartościowe. Niech $\Phi(x_1,y_1) = \Phi(x_2,y_2)$, czyli $e^{x_1}\cos y_1 = e^{x_2}\cos y_2$ oraz $e^{x_1}\sin y_1 = e^{x_2}\sin y_2$, skąd

$$\frac{\cos y_2}{\cos y_1} = \frac{\sin y_2}{\sin y_1} \Leftrightarrow \cos y_2 \cdot \sin y_1 = \cos y_1 \cdot \sin y_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(y_1+y_2) + \sin(y_1-y_2)}{2} = \frac{\sin(y_2+y_1) + \sin(y_2-y_1)}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin(y_1-y_2) = \sin(y_2-y_1) \Leftrightarrow \sin(y_1-y_2) = -\sin(y_1-y_2)$$

Stąd $\sin(y_1-y_2)=0$, ale skoro $y_1,y_2 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, to $y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 := y$. Wtedy $e^{x_1}\cos y = e^{x_2}\cos y \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$, czyli $x_1 = x_2$. Zatem Φ jest funkcją różnowartościową. To dowodzi istnienie Φ^{-1}. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej skoro $\det D\Phi \neq 0$ wszędzie, to $\Phi^{-1} \in C^1$, więc Φ jest dyfeomorfizmem. Z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy więc

$$\int_A \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}\cos^2 y \sin^2 y}\, d\lambda_2(x,y) = \int_{\Phi^{-1}(\Phi(A))} \frac{|\det D\Phi(x,y)|}{1+e^{4x}\cos^2 y\sin^2 y}\, d\lambda_2(x,y) =$$
$$= \int_{\Phi(A)} \frac{1}{1+u^2v^2}\, d\lambda_2(u,v) = \int_B \frac{1}{u^2v^2}\, d\lambda_2(x,y)$$

Zadanie 4.
Oblicz pole obszaru płaszczyzny ograniczonego od wewnątrz okręgiem jednostkowym, zaś od zewnątrz krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 2 + \cos\theta$.

Rozwiązanie:
Punkt p należący do danego zbioru spełnia nierówności $1 < p < 2 + \cos\theta$, gdzie p to odległość od punktu $(0,0)$. Zatem

$$\int_A 1 \; d\lambda_2(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_1^{2+\cos\theta} r \; dr \; d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cdot\cos^2\theta\right)\, d\theta =$$
$$= 3\pi + 0 + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta \; d\theta = 3\pi + \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Zadanie 5.
Wyznaczyć całkę

$$\int_A (x^2+y^2)\; d\lambda_2(x,y) \qquad \text{gdzie} \qquad A = \{1 < x^2 - y^2 < 2,\ 2 < xy < 4, x, y \geq 0\}$$

Rozwiązanie:
Wygodnie byłoby skorzystać z podstawienia $\varphi(x,y) = (s,t)$, gdzie

$$\begin{cases} s = x^2 - y^2 \\ t = xy \end{cases}$$

bo wówczas $\varphi(A) = (1,2) \times (2,4)$. Jednak wyznaczenie φ^{-1} może być problematyczne.
Mamy jednak

$$D\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\det D\varphi(x,y)| = 2(x^2+y^2)$$

oraz $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$, więc stosując twierdzenie o zamianie zmiennych ("od drugiej strony") mamy

$$\int_A x^2 + y^2 \; d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \int_A |\det D\varphi(x,y)| \; d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi^{-1}(\varphi(A))} |\det D\varphi(x,y)| \; d\lambda_2(x,y) =$$

$$\overset{\text{zamiana zmiennych}}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi(A)} 1 \; d\lambda_2(s,t) = \frac{1}{2} \cdot \int_{(1,2)\times(2,4)} 1 \; d\lambda_2(s,t) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Zadanie 6.
Kula jednostkowa $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ została przecięta płaszczyzną $\{z = a\}$. Oblicz objętość powstałych części.

Rozwiązanie:
Korzystając z twierdzenia Fubini'ego mamy

$$V = \int_a^R \left(\int_{\{x^2+y^2<R^2-z^2\}} d^2(x,y) \right) dz = \left\| \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \det\Phi = r \end{array} \right\| = \int_a^R \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r \; dr \; d\theta \right) dz =$$

$$= \int_a^R \left(\int_0^{2\pi} \frac{R^2-z^2}{2} \; d\theta \right) dz = \int_a^R \pi(R^2-z^2) \; dz = \pi \left(R^2 \cdot z - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_a^R =$$

$$= \pi \left(R^2(R-a) + \frac{1}{3}(R^3 - a^3) \right) = \pi(R-a) \left(\frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{3}Ra + \frac{1}{3}a^2 \right)$$

Zadanie 7.
Oblicz miarę zbioru

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0 < x, \; 0 < y, \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2, \; 1 \leq xy \leq 2 \right\}$$

Rozwiązanie:
Niech dyfeomorfizm Φ zadany będzie wzorem

$$\Phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{y}{x}, xy \right)$$

czyli stosujemy podstawienie $s = \frac{y}{x}$ oraz $t = xy$. Równoważnie mamy $x = \sqrt{\frac{t}{s}}$ oraz $y = \sqrt{st}$, czyli dyfeomorfizm Φ dany będzie wzorem

$$\Phi(s,t) = \left(\sqrt{\frac{t}{s}}, \sqrt{st} \right)$$

Jakobian dyfeomorfizmu Φ wynosi

$$d\Phi = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \cdot s^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} \cdot s^{-\frac{3}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot s^{-1} + \frac{1}{4} \cdot s^{-1} = \frac{1}{2s}$$

Zatem mamy

$$\int_A 1 \ d^2(x,y) = \int_{\Phi^{-1}} 1 \cdot \det \Phi(s,t) \ d^2(s,t) = \int_{\Phi^{-1}(A)} \frac{1}{2s} \ d^2(s,t)$$

Dalej mamy

$$\Phi^{-1}(A) = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 0 < s, \ 0 < t, \ \frac{1}{2} < s < 2, \ 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

zatem

$$\int_A 1 \ d^2(x,y) = \int_{[\frac{1}{2},2]\times[1,2]} \frac{1}{2s} \ d^2(s,t) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2s} \ ds \cdot \int_1^2 1 \ dt = \frac{1}{2} \ln s \ \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \ln \frac{1}{2} \right) = \ln 2$$

Zadanie 8.
Oblicz całkę

$$\int_A \ln(x+y)(x-2y)^2 \ d\lambda^2(x,y)$$

gdzie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ to równoległobok o wierzchołkach $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$ i $(0,1)$.

Rozwiązanie:
Niech $\Phi(x,y) = (x+y, x-2y)$, czyli stosujemy podstawienie $s = x+y$ oraz $t = x-2y$. Wówczas jeśli

$$A = \text{ równoległobok o wierzchołkach } (1,0), (3,1), (2,2) \text{ i } (0,1)$$

to

$$\Phi(A) = \text{ prostokąt o wierzchołkach } (1,1), (4,1), (4,-2), (1,-2)$$

Niech $f(x,y) = \ln(x+y)(x-2y)^2$. Z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy

$$\int_A f(x,y) \ d^2(x,y) = \int_A g(\Phi(x,y)) \cdot |\det \Phi(x,y)| \ d^2(x,y) = \int_{\Phi(A)} g(s,t) \ d^2(s,t)$$

dla pewnej funkcji g. Jakobian odwzorowania Φ wynosi

$$|\det \Phi(x,y)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = |-3| = 3$$

zatem mamy równość

$$f(x,y) = \ln(x+y) \cdot (x-2y)^2 = g(\Phi(x,y)) \cdot 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(x+y) \cdot (x-2y)^2 = g(x+y, x-2y) \cdot 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g(s,t) = \frac{1}{3} \cdot \ln(s) \cdot t^2$$

skąd

$$\int_A f(x,y) \ d^2(x,y) = \int_{\Phi(A)} g(s,t) \ d^2(s,t)$$

Z twierdzenia Fubini'ego mamy więc

$$\int_{\Phi(A)} g(s,t)\ d^2(s,t) = \int_{-2}^{1}\int_{1}^{4} \ln(s)\cdot\frac{1}{3}\cdot t^2\ ds\ dt = (s\ln s - s)\ \Big|_1^4 \cdot \frac{t^3}{9}\ \Big|_{-2}^{1} = 8\ln 2 - 3$$

2. Środek ciężkości

Zadanie 1.

Obliczyć średnią odległość punktu trójwymiarowej kuli jednostkowej do jej środka.

Rozwiązanie:

Liczymy

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2<1\}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{(0,1)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)} r\cdot r^2\cdot\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cdot\cos\alpha\ dr\ d\alpha\ d\beta = \int_0^{2\pi} d\beta\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\ d\alpha\cdot\int_0^1 r^3\ dr = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{4} = \pi$$

oraz

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2<1\}} 1\ d\lambda_3(x,y,z) = \frac{4}{3}\cdot 1^3\cdot\pi = \frac{4}{3}\pi$$

zatem średnia odległość wynosi $\frac{\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{4}$.

Zadanie 2.

Znaleźć środek ciężkości półkuli trójwymiarowej.

Rozwiązanie:

Trójwymiarowa półkula to zbiór $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ we współrzędnych sferycznych to $\varphi^{-1}(A) = \{(r,\alpha,\beta) \mid 0 \leq r \leq 1, \alpha \in (0,\frac{\pi}{2}), \beta \in (-\pi,\pi)\}$. Objętość tego zbioru wynosi $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \frac{2}{3}\pi$. Dalej mamy

$$\int_A x\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(A)} r\cos\alpha\cos\beta\cdot r^2\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta\ dr\ d\alpha\ d\beta = 0$$

bo całka po β jest równa zero

$$\int_A y\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(A)} r\cos\alpha\sin\beta\cdot r^2\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\sin\beta\ dr\ d\alpha\ d\beta = 0$$

tu również całka po β daje zero

$$\int_A z\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(A)} r\sin\alpha \cdot r^2\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cdot\cos\alpha\sin\alpha\ dr\ d\alpha\ d\beta = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\cos\alpha\ d\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1 x\ dx = \frac{\pi}{4}$$

skąd środkiem ciężkości jest $\left(0,0,\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2}{3}\pi}\right) = \left(0,0,\frac{3}{8}\right)$.

3. Zbieżność i różniczkowalność pod znakiem całki

Zadanie 1.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^\infty \frac{1}{x^2\ln(1+\frac{x}{n})}\ dx$$

Rozwiązanie:
Niech

$$f_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^2\ln(1+\frac{x}{n})}$$

zatem jako, że $\ln(1+a)\geq\frac{a}{1+a}$, to mamy

$$f_n(x)\leq\frac{1}{nx^2}\cdot\frac{1+\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \frac{1+\frac{x}{n}}{x^3}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

Funkcja ograniczająca jest całkowalna na $[1,+\infty)$, zatem możemy zastosować twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej. Granicą punktową jest

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^2\ln(1+\frac{x}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2\ln(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{1}{x^3}$$

zatem f_n całkuje się do $\frac{1}{2}$.

Zadanie 2.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{nx+x^5+1}\ dx$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $f_n(x) = \frac{n}{nx+x^5+1}$ jest ciągiem rosnącym do $f(x)=\frac{1}{x}$, co nie jest całkowalne. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{nx+x^5+1}\ dx = \int_0^1\frac{1}{x}\ dx = +\infty$$

Zadanie 3.
Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\ln(x^n+2^n)}{nx^2}\,dx$$

Rozwiązanie:
Niech $f_n=\frac{\ln(x^n+2^n)}{nx^2}$, wówczas
$$f_n(x)\geq\frac{\ln(\max\{x^n,2^n\})}{nx^2}=\frac{\ln(\max\{x,2\})}{x^2}$$
oraz
$$f_n(x)\leq\frac{\ln(2\cdot\max\{x^n,2^n\})}{nx^2}=\frac{\ln 2+n\ln(\max\{x,2\})}{nx^2}\overset{n\to\infty}{\to}\frac{\ln(\max\{x,2\})}{x^2}$$
zatem z twierdzenia o trzech funkcjach otrzymujemy
$$f_n(x)\overset{n\to\infty}{\to}\frac{\ln(\max\{x,2\})}{x^2}$$

Całkowalną majorantą $f_n(x)$ jest $\frac{\ln 2}{x^2}+\frac{\ln(\max\{x,2\})}{x^2}$, zatem z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej mamy
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty\frac{\ln(x^n+2^n)}{nx^2}\,dx=\int_1^\infty\frac{\ln\max(x,2)}{x^2}\,dx=$$
$$=\int_1^2\frac{\ln 2}{x^2}\,dx+\int_2^\infty\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\ln 2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2+\int_2^\infty\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'\,dx=$$
$$=\ln 2\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{\ln x}{x}\right)\Big|_2^\infty-\int_2^\infty\frac{1}{x^2}\,dx=\ln 2+\frac{1}{2}.$$

Zadanie 4.
Dla $t>0$ i
$$F(t)=\int_0^1\ln(x^2+t^2)\,dx\quad\text{oraz}\quad f(t)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\ln(x^2+t^2)\,dx$$
sprawdź, że $F'(t)=f(t)$. Sprawdź, czy w rozważanej sytuacji spełnione są założenia twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Rozwiązanie:
Pierwszą całkę policzymy, całkując przez części
$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^1\ln(x^2+t^2)\,dx=\left\|\begin{array}{c|c}f=\ln(x^2+t^2)&g=x\\ df=\frac{2x}{x^2+t^2}\,dx&dg=dx\end{array}\right\|=\\&=x\cdot\ln(x^2+t^2)\Big|_0^1-\int_0^1x\cdot\frac{2x}{x^2+t^2}\,dx=\ln(1+t^2)-2\int_0^1 1-\frac{t^2}{x^2+t^2}\,dx=\\&=\left\|\begin{array}{c}y=\frac{x}{t}\\ dy=\frac{1}{t}dx\end{array}\right\|=\ln(1+t^2)-2+2\int_0^{\frac{1}{t}}\frac{1}{y^2+1}t\,dy=\ln(1+t^2)-2+2t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\end{aligned}$$

Policzmy teraz drugą całkę

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2+t^2)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2} \cdot 2t\ dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1} \cdot \frac{2}{t}\ dx = \left\| \begin{array}{c} y = \frac{x}{t} \\ dy = \frac{1}{t}dx \end{array} \right\| = \\ &= \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{2}{t} \cdot t\ dy = 2\arctan\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Różniczkowanie pierwszego wyrażenia da nam

$$F'(t) = \frac{2t}{1+t^2} + 2\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + 2t \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

Zatem oczywiście $F'(t) = f(t)$. W rozważanej sytuacji spełnione są (lokalnie) założenia twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki. Jeśli $t_1 > t > t_0 > 0$, to wówczas

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2+t^2) \right| = \left| \frac{2t}{x^2+t^2} \right| < \frac{2t_1}{t_0^2}$$

Prawa strona jest funkcją całkowalną zmiennej x na przedziale $[0,1]$, stąd na każdym ograniczonym przedziale $(t_0, t_1) \subseteq \mathbb{R}_+$ możemy różniczkować pod znakiem całki, a więc możemy różniczkować na całym $\mathbb{R}_+$.