Douczki z Analizy Matematycznej 2023

Dzień drugi

Zajęcia prowadzone są w ramach wolontariatu przez członka KPM, który jest studentem. Miej na uwadze to, że może nie być w stanie on odpowiedzieć na wszystkie zadane przez Was pytania.

1. Splot

Zadanie 1.

Niech $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ i niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i ograniczona. Obliczyć

$$\lim_{n\to 0} (g * f_n)(x)$$

2. Miara powierzchniowa

Zadanie 1.

Oblicz długość krzywych

a) $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in [0,1]\}$

b) $\gamma = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$\gamma'(t) = [3, 6t, 6t^2]$$

wobec czego

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 3\sqrt{(1+2t^2)^2} = 3(1+2t^2).$$

Musimy zatem policzyć całkę

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1\, d\sigma_1 = \int_0^1 1 \cdot 3(2t^2+1)\, dt = 3\left(\frac{2}{3}t^2 + t\right)\Bigg|_0^1 = 5.$$

b) Mamy

$$\gamma'(t) = [-e^{-t}\cdot\cos(t) - e^{-t}\cdot\sin(t),\ -e^{-t}\cdot\sin(t) + e^{-t}\cdot\cos(t),\ -e^{-t}]$$

Skąd

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{3e^{-2t}} = \sqrt{3}\cdot e^{-t}$$

wobec czego

$$l(\gamma) = \int_0^\infty \sqrt{3}\cdot e^{-t}\ dt = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$$

Zadanie 2.
Wyznacz położenie środka ciężkości krzywych

a) $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in [0,1]\}$

b) $\gamma = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$

Rozwiązanie:

a) Mamy
$$\langle x_i \rangle_\gamma = \frac{1}{\sigma_1(\gamma)} \cdot \int_\gamma x_i(\mathbf{x})\ d\sigma_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{l(\gamma)} \cdot \int_I x_i(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\ dt$$
zatem
$$\langle \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{l(\gamma)} \cdot \int_\gamma [x_1, x_2, x_3]\ d\sigma_1 = \frac{1}{5} \cdot \int_0^1 [3t, 3t^2, 2t^3] \cdot 3(1+2t^2)\ dt =$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{9}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2, \frac{9}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3, \frac{6}{6}t^6 + \frac{1}{4}t^4\right]\Bigg|_0^1 = \left(\frac{9}{5}, \frac{33}{25}, \frac{7}{10}\right).$$

b) Zauważmy, że
$$\frac{d}{dt}\left[(A\cos t + B\sin t)e^{-2t}\right] = ((-2A+B)\cos t + (-A-2B)\sin t) \cdot e^{-2t},$$
skąd
$$\int \cos t e^{-2t} dt = \left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right) \cdot e^{-2t} \quad \text{oraz} \quad \int \sin t e^{-2t} dt = \left(-\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t\right) \cdot e^{-2t}$$
Wobec tego środek masy to
$$\langle \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{\mathbb{R}+} e^{-t} \cdot [\cos t, \sin t, 1] \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty [\cos t, \sin t, 1] \cdot e^{-2t} dt = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$$

Zadanie 3.
Oblicz pole powierzchni wycinka sfery $S^2(0,R)$ zawartego między płaszczyznami $z = a$ i $z = b$, gdzie $a, b \in [-R, R]$.

Rozwiązanie:
Wystarczy, że zmodyfikujemy nasz rachunek dla pełnego pola sfery.
Sposób 1. Załóżmy, że $a > b > 0$. Półsfera jest wykresem funkcji $z = \sqrt{R^2 - x^2 + y^2} = f(x,y)$ nad kołem $B^2(0,R) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$, a nasz wycinek to fragment wykresu nad pierścieniem $P = \{(x,y) \mid R^2 - a^2 < x^2 + y^2 < R^2 - b^2\}$. Mamy $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}[x,y]$. Stosując wzór na miarę powierzchniową wykresu dostajemy
$$\sigma_2(W) = \int_P \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\ d^2(x,y) = \int_P \sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ d^2(x,y) =$$
$$= \int_P R\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ d^2(x,y) = \Big|\text{podstawienie biegunowe}\Big| \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= R\int_0^{2\pi}\left[\int_{\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-a^2}} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr\right]\,d\varphi = 2\pi R\left(-\sqrt{R^2-r^2}\right)\Big|_{\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-a^2}} = 2\pi R(a-b).$$

Proste rozumowanie pozwala stwierdzić, że ten wzór obowiązuje dla dowolnych $a, b \in [-R, R]$.

Sposób 2. Rozważmy standardową parametryzację sfery $S^2(0,R)$ za pomocą kątów Eulera:

$$\Phi : (\varphi, \beta) \mapsto (R\cos\varphi\cos\beta, R\sin\varphi\cos\beta, R\sin\beta),$$

gdzie $\varphi \in (0, 2\pi)$ i $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nasz wycinek jest opisany warunkiem $z = \sin\beta \in \left[\frac{a}{R}, \frac{b}{R}\right]$. Różniczkując parametryzację, otrzymujemy $e_1 := d\Phi[e_\varphi] = R\cos\beta[-\sin\varphi, \cos\varphi, 0]$ i $e_2 := d\Phi[e_\beta] = R[-\cos\varphi\sin\beta, -\sin\varphi\sin\beta, \cos\beta]$, a więc $\langle e_1, e_1\rangle = R^2\cos^2\beta$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = R^2$. Stąd odpowiedni wyznacznik Grama wynosi $R^2\cos\beta$ (moduł nie jest potrzebny w rozważanym zakresie kątów). Ostatecznie

$$\sigma_2(S^2) = \int_{(0,2\pi)\times\{\beta|\sin\beta\in\left[\frac{a}{R},\frac{b}{R}\right]\}} R^2\cos\beta\ d_2(\varphi,\beta) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{\left\{\beta|\sin\beta\in\left[\frac{a}{R},\frac{b}{R}\right]\right\}} \cos\beta\ d\beta = 2\pi R^2\cdot(\sin\beta)\Big|_{\arcsin\left(\frac{b}{R}\right)}^{\arcsin\left(\frac{a}{R}\right)} = 2\pi R^2(a-b).$$

Sposób 3. Wprowadźmy współrzędne walcowe ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$). Sfera o promieniu R jest opisana równaniem $r^2 + z^2 = R^2$, skąd dostajemy jej następującą parametryzację

$$\Phi : (\varphi, z) \mapsto (\sqrt{R^2-z^2}\cos\varphi, \sqrt{R^2-z^2}\sin\varphi, z = z),$$

gdzie $\varphi \in (0, 2\pi)$ i $z \in [b, a]$. Nasza miseczka paraboliczna jest zdefiniowana warunkiem $2z = x^2 + y^2 \in [0, 1]$. Różniczkując parametryzację, otrzymujemy

$$e_1 := d\Phi[e_\varphi] = (-\sqrt{R^2-z^2}\sin\varphi, \sqrt{R^2-z^2}\cos\varphi, 0),$$
$$e_2 := d\Phi[e_z] = \left(\frac{-z\cos\varphi}{\sqrt{R^2-z^2}}, \frac{-z\sin\varphi}{\sqrt{R^2-z^2}}, 1\right),$$

a więc $\langle e_1, e_1\rangle = R^2 - z^2\cos^2\varphi$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = \frac{z^2\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi}{R^2-z^2} + 1 = \frac{z^2+R^2-z^2}{R^2-z^2} + 1 = \frac{R^2}{R^2-z^2}$. Stąd odpowiedni wyznacznik Grama wynosi R. Liczymy

$$\sigma_2(W) = \int_0^{2\pi}\int_b^a R\,d\phi\,dz = 2\pi R(a-b)$$

Zadanie 4.

Oblicz masę miseczki parabolicznej $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]\}$ o gęstości powierzchniowej $\rho(x, y, z) = z$.

Rozwiązanie:

Rozważany zbiór to wykres funkcji $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ nad kołem $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2\}$. Mamy $\nabla f(x, y) = [x, y]$, skąd

$$\int_M z\,d\sigma_2 = \int_B \frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\ d^2(x,y) = \int_B \frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2}\ d^2(x,y) =$$

$$= \left|\text{współrzędne biegunowe}\right| \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\sqrt{1+r^2}\ r\ dr\ d\phi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s = 1+r^2 \\ ds = 2r\ dr \end{array} \right| = 2\pi \int_1^3 \frac{s-1}{2}\sqrt{s} \cdot \frac{1}{2}\ ds = \pi \left(\frac{2}{5} s^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_1^3 =$$

$$= \pi \left(\frac{\sqrt{35}}{5} - \frac{\sqrt{33}}{3} + \frac{2}{15} \right)$$

Zadanie 5.
Niech $M = \{(u\cos v, u \sin v, v) \mid u \in (-1,1),\ v \in (-\pi, \pi)\}$. Oblicz $\int_M f\ d\sigma_M$, gdzie f przyporządkowuje punktowi z M jego odległość od osi $\{x = y = 0\}$.

3. Formy różniczkowe pierwszego stopnia

Zadanie 1.
Rozstrzygnij, czy 1-forma $\eta = dx + (x\cos y - 2y)\ dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ ma funkcję pierwotną.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że ta 1-forma ma funkcję pierwotną, czyli że istnieje gładka funkcja f taka, że $\eta = df$. Wówczas

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

czyli $f'_x = 1$ oraz $f'_y = x\cos y - 2y$. Ale mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f'_x = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} f'_y = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y - 2y) = \cos y$$

co z twierdzenia Schwarza oznacza, że $0 = \cos y$ dla każdego y, co jest sprzeczne. Więc η nie ma funkcji pierwotnej.

Zadanie 2.
Czy forma

$$\omega = (1 + \sin y)\ dx + (x\cos y - 2y)\ dy$$

jest zamknięta? Czy jest dokładna? Jeśli tak, to jak wyglądają wszystkie funkcje pierwotne formy ω?

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\partial}{\partial y}(1 + \sin y) = \cos y = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y - 2y)$$

zatem forma jest zamknięta. Niech f będzie funkcją pierwotną dla tej formy, czyli $\omega = df$. Wtedy

$$f'_x = (1 + \sin y) \qquad \text{oraz} \qquad f'_y = x \cos y - 2y$$

Stąd $f(x, y)$ powinno być postaci $f(x, y) = x + x \sin y + h(y)$ oraz $f(x, y) = x \sin y - y^2 + g(x)$, zatem

$$f(x, y) = x + x \sin y - y^2 + C$$

Zadanie 3.
Sprawdź zamkniętość i wyznacz funkcję pierwotną z 1-formy (o ile istnieje)

$$\omega = (1 + yze^{xy})\ dx + (1 + xze^{xy})\ dy + e^{xy}\ dz$$

Rozwiązanie:
Sprawdźmy, czy $d\omega = 0$. Mamy

$$\begin{gathered} d\omega = d(1 + yze^{xy}) \wedge dx + d(1 + xze^{xy}) \wedge dy + d(e^{xy}) \wedge dz = \\ = (y^2 ze^{xy}\ dx + (ze^{xy} + xyze^{xy})\ dy + ye^{xy}\ dz) \wedge dx + \\ + ((ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx + x^2 ze^{xy}\ dy + xe^{xy}\ dz) \wedge dy + \\ + (ye^{xy}\ dx + xe^{xy}\ dy + 0\ dz) \wedge dz = \\ = (ze^{xy} + xyze^{xy})\ dy \wedge dx + ye^{xy}\ dz \wedge dx + \\ + (ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx \wedge dy + xe^{xy}\ dz \wedge dy + \\ + ye^{xy}\ dx \wedge dz + xe^{xy}\ dy \wedge dz = \\ = -(ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx \wedge dy - ye^{xy}\ dx \wedge dz + \\ + (ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx \wedge dy - xe^{xy}\ dy \wedge dz + \\ + ye^{xy}\ dx \wedge dz + xe^{xy}\ dy \wedge dz = 0 \end{gathered}$$

zatem forma jest zamknięta. Wyznaczmy teraz funkcję pierwotną $f(x, y, z)$. Mamy

$$f'_x = (1 + yze^{xy}) \qquad f'_y = (1 + xze^{xy}) \qquad f'_z = e^{xy}$$

skąd

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x + ze^{xy} + g(y, z) \\ f(x, y, z) = y + ze^{xy} + h(x, z) \\ f(x, y, z) = ze^{xy} + k(x, y) \end{cases}$$

czyli

$$f(x, y, z) = x + y + ze^{xy} + C$$

4. Całka z 1-formy

Zadanie 1.
Oblicz całkę z $\omega = (1+\sin y)\ dx + (x\cos y - 2y)\ dy$ wzdłuż krzywej $\gamma(t) = (t, \sin^2 t)$, gdzie $t \in [0, 4\pi]$ zorientowanej w kierunku rosnącego t.

Rozwiązanie:
Funkcją pierwotną dla danej formy jest $f(x, y) = x + x\sin y - y^2 + C$, skąd wartość całki wynosi

$$\int_\gamma \omega = f(4\pi, \sin^2(4\pi)) - f(0, \sin^2(0)) = f(4\pi, 0) - f(0, 0) = 4\pi - 0 = 4\pi$$

Zadanie 2.
Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x\ dx + y\ dy}{x^2+y^2}$ po łuku elipsy $E = \{(2\cos t, 3\sin t) \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$.

Rozwiązanie:
Sposób 1. Elipsa jest sparametryzowana za pomocą odwzorowania

$$\gamma : t \mapsto (2\cos t, 3\sin t)$$

dla $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Mamy $\gamma'(t) = [-2\sin t, 3\cos t]$, zatem

$$\int_E \omega = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{2(\cos t)\cdot(-2\sin y) + 3\sin t \cdot (3\cos t)}{(2\cos t)^2 + (3\sin t)^2} = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{5\sin t\cos t}{4 + 5\sin^2 t} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s = 4 + 5\sin^2 t \\ ds = 10\sin t\cos t\ dy \end{array} \right| = \int_4^9 \frac{1}{2s}\ ds = \ln 3 - \ln 2$$

Sposób 2. Sprawdźmy, czy rozważana forma jest zamknięta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{oraz } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

zatem $f''_{yx} = f''_{yx}$, czyli forma jest zamknięta. Znajdźmy teraz funkcję pierwotną. Mamy

$$f'_x = \frac{x}{x^2+y^2} \quad f'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

zatem

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y) \\ f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(x) \end{cases}$$

Skąd

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$$

zatem

$$\int_E \omega = f\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - f(2\cos(0), 3\sin(0)) = f(0,3) - f(2,0) = \ln 3 - \ln 2$$

Zadanie 3.
Oblicz całkę

$$\int_\Gamma (y+z)\ dx + (z+x)\ dy + (x+y)\ dz$$

po krzywej $\Gamma = \{(t, t(1-\cos t), t\sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ zorientowanej w kierunku rosnącego t.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy funkcję pierwotną f formy $\omega = (y+z)\ dz + (z+x)\ dy + (x+y)dz$ (o ile istnieje). Mamy

$$f'_x = y + z \quad f'_y = z + x \quad f'_z = x + y$$

zatem

$$\begin{cases} f(x,y,z) = xy + xz + g(y,z) \\ f(x,y,z) = xy + yz + h(x,z) \\ f(x,y,z) = xz + yz + k(x,y) \end{cases}$$

skąd

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx + C$$

Niech $\gamma : [0, 2\pi] \to \Gamma$ określona wzorem $\gamma(t) = (t, t(1-\cos t), t\sin t)$ będzie parametryzacją Γ zgodnie zorientowaną. Wówczas

$$\int_\Gamma \omega = f(2\pi, 0, 0) - f(0,0,0) = 0 - 0 = 0$$

Zadanie 4.
Oblicz całkę z formy $\theta = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2+y^2}$ po okręgu $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie:
Funkcja $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, jest parametryzacją okręgu. mamy $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, zatem

$$\int_{S^1} \theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin t}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi$$

Zadanie 5.
Wykaż, że forma $\theta = \frac{xdy - ydx}{(x^2+y^2)}$ nie jest dokładna (to znaczy, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taka, że $\theta = df$), ale jest zamknięta, tzn. spełnione są warunki konieczne dla dokładności θ, czyli że pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ są równe.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2) + y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

zatem forma θ jest zamknięta. Gdyby forma była zamknięta, to całka po krzywej zamkniętej byłaby równa zero. Jednak całkując po okręgu dostajemy 2π, zatem forma nie jest dokładna.

Zadanie 6.
Oblicz całkę
$$\int_K (2x+y)\ dx + (x-2y)\ dy$$
wzdłuż następującej krzywej
$$K = \{(x,y) \mid x^4 + y^3 = 1,\ x \leq 0 \leq y\}$$
zorientowanej tak, aby jej początkiem był punkt $(0,1)$ a końcem $(-1,0)$.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy funkcję pierwotną f formy $\omega = (2x = y)\ (x-2y)\ dy$ (o ile istnieje). Mamy $f'_x = 2x+y$ oraz $f'_y = x-2y$, skąd
$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + g(y) \\ f(x,y) = -y^2 + h(x) \end{cases}$$
zatem forma jest różniczką zupełną funkcji
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$
Stąd
$$\int_K (2x+y)\ dx + (x-2y)\ dy = f(-1,0) - f(0,1) = 2$$

Zadanie 7.
Niech $K = \{(x,y) \mid 4x^2 + y = 5,\ y \geq 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x. Oblicz całkę
$$\int_K \frac{xdy - y\ dx}{x^2+y^2}$$
wzdłuż krzywej K.

Rozwiązanie:
Niech $\gamma : [-1,1] \to K$ będzie parametryzacją określoną wzorem $\gamma(t) = (t, 5-4t^2)$. Wówczas $\gamma'(t) = (1, -8t)$. Teraz podstawiamy:
$$\int_K \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_{-1}^{1} \frac{(-8t)dt}{t^2 + (5-4t^2)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{-5+4t^2}{t^2+(5-4t^2)^2} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Zadanie 8.
Oblicz całkę
$$\int_D (x^2+y)dx + (x-y)dy$$
gdzie D to łuk paraboli $y^2 = x$ zorientowany od $(1,1)$ do $(1,-1)$.

Rozwiązanie:
Mamy $x = y^2$ dla $y \in (-1,1))$ oraz $dx = 2y\ dy$. Ustawiając całkę w przeciwnej orientacji niż łuk paraboli mamy
$$\int_D (x^2+y)\ dx + (x-y)\ dy = -\int_{-1}^{1} (y^4+y) \cdot 2y\ dy + (y^2-y)\ dy =$$

$$= -\int_{-1}^{1}(2y^5 + 3y^2 - y)\ dy = -\left(\frac{y^6}{3} + y^3 - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = -2$$

5. Formy różniczkowe k-tego stopnia

Zadanie 1.

Oblicz

a) $(x\ dy + y\ dx) \wedge (dx + dy + dz)$

b) $(x\ dy \wedge dz + y\ dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz)$

Rozwiązanie:

a) Iloczyn zewnętrzny jest operacją nieprzemienną, za to rozdzielną względem dodawania, skąd mamy

$$(x\,dy + y\,dz + z\,dx) \wedge (dx + dy + dz) = x\,dy \wedge dx + x\,dy \wedge dy + x\,dy \wedge dz +$$

$$+y\,dz \wedge dx + y\,dz \wedge dy + y\,dz \wedge dz + z\,dx \wedge dx + z\,dx \wedge dy + z\,dx \wedge dz =$$

$$= -x\ dx \wedge dy + 0 + x\ dy \wedge dz - y\ dx \wedge dz - y\ dy \wedge dz + 0 +$$

$$+ 0 + z\ dz \wedge dy + z\ dx \wedge dz =$$

$$= (z - x)\,dx \wedge dy + (x - y)\,dy \wedge dz + (z - y)\,dx \wedge dz$$

b) Mamy

$$(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz)$$

$$= x\,dy \wedge dz \wedge dx + x\,dy \wedge dz \wedge dy + x\,dy \wedge dz \wedge dz +$$

$$+y\,dz \wedge dx \wedge dx + y\,dz \wedge dx \wedge dy + y\,dz \wedge dx \wedge dz +$$

$$+z\,dx \wedge dy \wedge dx + z\,dx \wedge dy \wedge dy + z\,dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$= x\ dx \wedge dy \wedge dz + 0 + 0 + 0 + y\ dx \wedge dy \wedge dz + 0 + 0 + 0 + z\ dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$= (x + y + z)\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Zadanie 2.

Oblicz $d\omega$ dla

a) $\omega = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2 + y^2}$

b) $\omega = xy^2z^3\,dx \wedge dy - yz^2x^3\,dy \wedge dz$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$d\omega = d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\wedge dx =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx + Ady\right]\wedge dy - \left[\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dy + Bdx\right]\wedge dx =$$

$$= \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\wedge dy = 0$$

Obliczenie wyrażeń A i B nie jest potrzebne, gdyż się zredukują.

b)

$$d\omega = d(xy^2z^3)\wedge dx\wedge dy - d(yz^2x^3)\wedge dy\wedge dz =$$

$$= (xy^2\cdot 3z^2dz + \cdots dx + \cdots dy)\wedge dx\wedge dy - (yz^2\cdot 3x^2dx + \cdots dy + \cdots dz)\wedge dy\wedge dz =$$

$$= (xy^2z^2 - yz^2x^2)dx\wedge dy\wedge dz$$

Zadanie 3.
Korzystając z twierdzenie Gaussa-Greena oblicz pole wnętrza elipsy

$$E = \{(a\cos\varphi, b\sin\varphi) \mid \varphi\in[0,2\pi]\}$$

Rozwiązanie:
Niech $\omega = x\ dy$ będzie 1-formą. Wówczas $d\omega = dx\wedge dy$ jest formą objętości w $\mathbb{R}^2$. Wobec tego, na mocy twierdzenia Greena mamy

$$\lambda_2(V) = \int_V d^2(x,y) = \int_V d\omega = \int_E \omega$$

gdzie V oznacza wnętrze zbioru ograniczonego krzywą E. Drugą z całek łatwo policzyć, używając parametryzacji $\gamma(\varphi) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$. Mamy $\gamma'(\varphi) = (-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$.

$$\int_E \omega = \int_0^{2\pi} x(\phi)\cdot \mathrm{d}y[\gamma'(\phi)]\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} a\cos(\phi)\cdot b\cos(\phi)\,\mathrm{d}\phi = ab\int_0^{2\pi}\cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi = ab\pi.$$

6. Cofnięcie formy

Zadanie 1.
Oblicz cofnięcie $\Phi^*\omega$ dla:

$\omega = xy\,dx + 2z\,dy - y\,dz$ i $\Phi(u,v) = (uv, u^2, 3u+v)$,

$\omega = 4x\,dx + 9y\,dy$ i $\Phi(r,\varphi) = (3r\cos\varphi, 2r\sin\varphi)$,

$\omega = x\,dy - y\,dx$ i $\Phi(r,\varphi) = (3r\cos\varphi, 2r\sin\varphi)$.

Rozwiązanie:

a)
$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= uv \cdot u^2\ d(uv) + 2(3u+v)\ d(u^2) - u^2\ d(3u+v) = \\ &= u^3 \cdot v \cdot (v\ du + u\ dv) + (6u+2v)\cdot(2u\ du) - u^2 \cdot (3\ du + dv) = \\ &= (u^3 \cdot v^2 + 12u^2 + 4uv - 3u^2)\ du + (u^4 \cdot v - u^2)\ dv = \\ &= (u^3v^2 + 9u^2 + 4uv)\ du + (u^4 v - u^2)\ dv\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= 4\cdot(3r\cos\varphi)\ d(3r\cos\varphi) + 9\cdot(2r\sin\varphi)\ d(2r\sin\varphi) = \\ &= 12r\cos\varphi\cdot(3\cos\varphi\ dr - 3r\sin\varphi\ d\varphi) + 18r\sin\varphi\cdot(2\sin\varphi\ dr + 2r\cos\varphi\ d\varphi) = \\ &= (36r\cos^2\varphi + 36r\sin^2\varphi)\ dr + (-36r^2\sin\varphi\cos\varphi + 36r^2\sin\varphi\cos\varphi)\ d\varphi = 36r\ dr\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= 3r\cos\varphi\ d(2r\sin\varphi) - 2r\sin\varphi\ d(3r\cos\varphi) = \\ &= 3r\cos\varphi\cdot(2\sin\varphi\ dr + 2r\cos\varphi\ d\varphi) - 2r\sin\varphi\cdot(3\cos\varphi\ dr - 3r\sin\varphi\ d\varphi) = \\ &= (6r\sin\varphi\cos\varphi - 6\sin\varphi\cos\varphi)\ dr + (6r^2\cos^2\varphi + 6r^2\sin^2\varphi)\ \varphi = 6r^2\ d\varphi\end{aligned}$$

Zadanie 2.
Znajdź cofnięcie $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u,v) = (uv, u^2, 3u+v)$, $\omega = y\,dx + x\,dz$.

Rozwiązanie:
Mamy
$$\Phi^*\omega = u^2\ d(uv) + uv\ d(3u+v) = u^2\cdot(u\ dv + v\ du) + uv\cdot(3\ du + dv)$$

Zadanie 3.
Znajdź $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u,v) = (x = uv, y = u^2, z = 3u+v)$, $\omega = y\,dx \wedge dz$.

Rozwiązanie:
Mamy
$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= u^2 d(uv) \wedge d(3u+v) = u^2(udv + vdu)\wedge(3du + dv) = \\ &= u^2[3udv\wedge du + udv\wedge dv + 3vdu\wedge du + vdu\wedge dv] = \\ &= u^2(v-3u)du\wedge dv.\end{aligned}$$

Zadanie 4.
Oblicz formę $dx \wedge dy$ we współrzędnych biegunowych $(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$.

Rozwiązanie:
Mamy
$$\begin{aligned}\Phi^*(dx\wedge dy) &= d(r\cos(\varphi)) \wedge d(r\sin(\varphi)) = \\ &= (\cos(\varphi)dr - r\sin(\varphi)d\varphi)\wedge(\sin(\varphi)dr + r\cos(\varphi)d\varphi) = \\ &= r\cos^2(\varphi)dr\wedge d\varphi - r\sin^2(\varphi)d\varphi\wedge dr = rdr\wedge d\varphi\end{aligned}$$

7. Całka z k-formy

Zadanie 1.
Oblicz całkę z formy $\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$ po sferze $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = a^2\}$. Przyjmujemy, że orientacja S jest zadana przez wybór bazy uporządkowanej (e_y, e_z) w punkcie $(1,0,0)$. Zakładamy, że $a>0$.

Rozwiązanie:
Zacznijmy od znalezienia parametryzacji sfery. Naturalnym kandydatem jest parametryzacja sferyczna $\Phi : (\phi,\beta) \mapsto (x = a\cos\phi\cos\beta, y = a\sin\phi\cos\beta, z = a\sin\beta)$, gdzie $U = (0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ jest dziedziną parametryzacji. Mamy $\Phi^*\omega = a^3\cos\beta d\phi\wedge d\beta$. Przyjmijmy na razie, że orientacja w U jest wyznaczona przez bazę (e_ϕ, e_β) (czyli, że ϕ jest pierwszą współrzędną, a β drugą). Wówczas

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U a^3\cos\beta d\phi\wedge d\beta = a^3\int_U \cos\beta d^2(\phi,\beta) = 4\pi a^3.$$

Na koniec zastanówmy się, jak się ma wybrana orientacja w U do orientacji na S. W tym celu zobaczmy, na co przechodzą wektory bazowe e_ϕ i e_β przy $d\Phi(0,0)$ (wybieramy punkt $(0,0)$, bo $\Phi(0,0) = (1,0,0)$, a więc jest to przeciwobraz punktu, w którym zadaliśmy orientację). Prosty rachunek daje nam $d\Phi_0[e_\phi] = a[0,1,0] = ae_y$ i $d\Phi_0[e_\beta] = a[0,0,1] = ae_z$. Jak widać, baza (ae_y, ae_z) zadaje tę samą orientację co baza (e_y, e_z), a więc nie musimy zmieniać znaku w całce.

Zadanie 2.
Używając podstawienia walcowego:

$$\Phi : (\varphi, z) \mapsto (x = \sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi, y = \sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi, z = z),$$

oblicz całkę z formy $\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$ po wycinku sfery $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = a^2, z > \frac{a}{2}\}$. Orientację A przyjmujemy tak, jak we wcześniejszym zadaniu. Zakładamy, że $\alpha > 0$.

Rozwiązanie:
Policzmy cofnięcie $\Phi^*\omega$.

$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega &= \sqrt{a^2-z^2}\cos\phi\, d(\sqrt{a^2-z^2}\sin\phi)\wedge dz + \sqrt{a^2-z^2}\sin\phi\, dz\wedge d(\sqrt{a^2-z^2}\cos\phi) \\
&\quad + z\, d(\sqrt{a^2-z^2}\cos\phi)\wedge(\sqrt{a^2-z^2}\sin\phi) = \\
&= \sqrt{a^2-z^2}\cos\phi\,(\sqrt{a^2-z^2}\cos\phi\, d\phi)\wedge dz + \sqrt{a^2-z^2}\sin\phi\, dz\wedge(-\sqrt{a^2-z^2}\sin\phi\, d\phi) + \\
&\quad + z\,(\cos\phi\, d\sqrt{a^2-z^2} - \sqrt{a^2-z^2}\sin\phi\, d\phi)\wedge(\sin\phi\, d\sqrt{a^2-z^2} + \sqrt{a^2-z^2}\cos\phi\, d\phi) = \\
&= (\sqrt{a^2-z^2})^2\, d\phi\wedge dz + z(\sqrt{a^2-z^2}\cos^2\phi\, d\sqrt{a^2-z^2}\wedge d\phi + \\
&\quad - \sqrt{a^2-z^2}\sin^2\phi\, d\phi\wedge d\sqrt{a^2-z^2}) = \\
&= (a^2-z^2)\, d\phi\wedge dz - z\sqrt{a^2-z^2}\, d\phi\wedge\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}(-z)dz\right) = \\
&= a^2\, d\phi\wedge dz
\end{aligned}$$

Teraz wykonajmy całowanie po dziedzinie parametryzacji $U = \{(\phi,z)\,|\,\phi\in(0,2\pi), z\in(\frac{a}{2},a)\}$, przyjmując, że (e_ϕ, e_z) jest orientacją na U:

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U a^2\, d\phi\wedge dz = \int_U a^2\, d^2(\phi,z) = \pi a^3.$$

Zastanówmy się teraz nad zgodnością przyjętej orientacji U z orientacją A. Zobaczmy, na co przechodzą wektory bazowe e_ϕ oraz e_z przy $d\Phi$ w punkcie $p = (\phi = 0, z = a/2)$. Prosty rachunek daje nam

$$v_1 = d\Phi_p\,[e_\phi] = \left[0, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right] \quad \text{oraz} \quad v_2 = d\Phi_p[e_z] = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1\right].$$

Ich iloczyn wektorowy $v_1 \times v_2$ to $\left[\frac{\sqrt{3}a}{3}, 0, \frac{a}{2}\right]$ jest skierowany na zewnątrz, a zatem przyjęliśmy orientację zgodną ze standardową orientację sfery.

Zadanie 3.
Oblicz całkę z formy $\omega = x\,dy \wedge dz + y \sin z\,dz \wedge dx + (z+1)\,dx \wedge dy$ po rozmaitości M zdefiniowanej jako część powierzchni $x^2+y^2 = \cos^2 z$ zawartej pomiędzy płaszczyznami $z = 0$ i $z = \frac{\pi}{4}$ z orientacją wyznaczoną przez bazę $\{e_z, e_x\}$ w punkcie $(0, 1, 0) \in M$.

Rozwiązanie:
Będziemy całkować po zbiorze $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = \cos^2 z, z \in (0, \frac{\pi}{4})\}$, który łatwo sparametryzować:

$$\Phi : (\varphi, z) \mapsto (x = \cos z \cos\varphi, y = \cos z \sin\varphi, z),$$

gdzie $(\varphi, z) \in U = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{4}]$. Policzmy pullback:

$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega &= \cos z \cos\varphi\, d(\cos z \sin\varphi) \wedge dz + \cos z \sin\varphi \sin z\, dz \wedge (\cos z \cos\varphi) \\
&\quad + (z+1)\, d(\cos z \cos\varphi) \wedge (\cos z \sin\varphi) \\
&= \dots \\
&= \left[\cos z \left((1 + z + \cos z) \sin z \sin^2\varphi + (\cos z + \cos^2\varphi(1+z)) \sin z\right)\right]\, d\varphi \wedge dz.
\end{aligned}$$

Policzmy całkę z tej formy, przyjmując że orientacja na U jest dana przez (e_φ, e_z):

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U \left[\cos z \left((1 + z + \cos z) \sin z \sin^2\varphi + (\cos z + \cos^2\varphi(1+z)) \sin z\right)\right]\, d\varphi\, dz =$$

$$= \frac{1}{24}\pi(32 - 2\sqrt{2} + 3\pi).$$

Zadanie 4.
Korzystając z twierdzenia Stokes'a oblicz całkę z formy $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ po sferze $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ Przyjmujemy, że orientacja S i $A \subset S$ jest zadana przez wybór bazy uporządkowanej (e_y, e_z) w punkcie $(a, 0, 0)$. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie:
Mamy $d\omega = 3\,dx \wedge dy \wedge dz$. Załóżmy, że S jest brzegiem kuli $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$. Przyjmujemy standardową orientację (e_x, e_y, e_z) w $\mathbb{R}^3$. Wówczas:

$$\int_B d\omega = \int_B 3\,dx \wedge dy \wedge dz = 3\int_B d^3(x, y, z) = 3\lambda^3(B) = 4\pi a^3.$$

Z drugiej strony, z twierdzenia Stokesa:

$$\int_B d\omega = \int_{S=\partial B} \omega,$$

przy czym orientacja S musi być indukowana z wybranej przez nas orientacji standardowej w $\mathbb{R}^3$. Zatem szukana całka wynosi:

$$\int_S \omega = \pm 4\pi a^3,$$

przy czym znak plus bierzemy, jeśli orientacja indukowana jest taka jak w treści zadania, a minus gdy jest przeciwna. Łatwo zauważyć, że baza (e_x, e_y, e_z) jest zgodna ze standardową orientacją $\mathbb{R}^3$. Ponadto pierwszy wektor e_x jest wektorem normalnym do S w punkcie $(a, 0, 0)$ skierowanym na zewnątrz kuli, zaś pozostałe wektory e_y i e_z są styczne do S. Wobec tego, baza uporządkowana (e_y, e_z) w punkcie $(a, 0, 0)$ wyznacza orientację $S = \partial B$ indukowaną ze standardowej orientacji $\mathbb{R}^3$. Jest to ta sama orientacja, co w zadaniu, zatem:

$$\int_S \omega = +4\pi a^3.$$

To samo można przedstawić inaczej: standardowa orientacja kuli B indukuje orientację brzegu $\partial B = S$ "na zewnątrz". Iloczyn wektorowy wektorów bazowych w punkcie $(1, 0, 0)$ zadających orientację S, czyli e_y i e_z, to e_x również jest skierowany "na zewnątrz", nie ma zatem potrzeby zmieniania znaku.

Zadanie 5.

Oblicz całkę z formy $\eta = x^3\ dy \wedge dz + y^3\ dz \wedge dx + z^3\ dx \wedge dy$ po półsferze $S_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ zorientowanej tak, że wektor $[0, 0, 1]$ jest wektorem normalnym zewnętrznym w punkcie $(0, 0, 1)$.