Douczki z Rachunku Prawdopodobieństwa 2023

Dzień drugi

Zajęcia prowadzone są w ramach wolontariatu przez członka KPM, który jest studentem. Miej na uwadze to, że może nie być w stanie on odpowiedzieć na wszystkie zadane przez Was pytania.

1. Wyznaczanie gęstości zmiennej losowej z innej zmiennej losowej

Zadanie 1.
Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$ (tzn. X ma gęstość równą $1_{[0,1]}(x)$). Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Y = -\ln X$.

Rozwiązanie:
Mamy $X \sim Unif([0,1])$, zatem $g_X(x) = \frac{\mathbf{1}_{[0,1]}(x)}{1} = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Niech $\varphi : [0,1] \to (0,\infty)$ zadane będzie wzorem $\varphi(X) = -\ln X$, wówczas $\varphi^{-1}(X) = e^{-X}$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = -e^{-X}$, skąd

$$g_Y(x) = \int_{[0,\infty)} (x) \cdot g_X(e^{-x}) \cdot e^{-x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(e^{-x}) \cdot e^{-x} =$$

$$= \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot e^{-x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot e^{-x}$$

bo to że $e^{-x} \in [0,1]$ jest równoważne temu, że $x \in [0,\infty)$. Zatem gęstość Y jest gęstością rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$.

Zadanie 2.
Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$ (tzn. X ma gęstość równą $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$). Wyznaczyć gęstość $Y = e^X$

Rozwiązanie:
Niech $\varphi : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ określone będzie wzorem $\varphi(X) = e^X$, wówczas $Y = \varphi(X)$. Mamy $\varphi^{-1}(X) = \ln X$ oraz $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{x}$, skąd

$$g_Y(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

Zadanie 3.
Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ (tzn. $\lambda > 0$ oraz X ma gęstość równą $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$). Wyznaczyć gęstość $Y = e^X$.

Rozwiązanie:
Niech $\varphi : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ zadaną wzorem $\varphi(X) = e^X$. Mamy $\varphi^{-1}(X) = \ln X$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = \frac{1}{X}$. Mamy

$$g_Y(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(X) \cdot g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)]}(x) \cdot \lambda e^{-\lambda \ln x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\ln X) \frac{1}{x} =$$

$$= \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot x^{-\lambda} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) = \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) \cdot \lambda \cdot x^{-(\lambda+1)}$$

2. Zadania podobne do zadania 4. z egzaminu

Zadanie 1.
Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = c \cdot e^{-x} y \cdot \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x\}}$.

a) Wyznaczyć stałą c

b) Obliczyć $P(2Y \leq X)$

c) Obliczyć $P((X+Y)^2 \mid X)$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} c \cdot e^{-x} y \cdot \mathbf{1}_{0 \leq y \leq x} \, d\lambda_2(x, y) = c \cdot \int_0^\infty \int_0^x e^{-x} y \, dy \, dx = c \cdot \int_0^\infty e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \, dx =$$

$$= \frac{c}{2} \cdot \int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx = \frac{c}{2} \cdot \Gamma(3) = \frac{c}{2} \cdot 2 = c$$

zatem $c = 1$.

b) Mamy

$$P(2Y \leq X) = P\left((X, Y) \in \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{1}{2} x \right\} \right)$$

Niech więc $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{1}{2} x \right\}$, wówczas

$$P(2Y \leq X) = P((X, Y) \in A) = \int_A g(x, y) \, d\lambda_2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{2} x} e^{-x} y \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{8} x^2 \right) \, dx = \frac{1}{8} \int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx = \frac{\Gamma(3)}{8} = \frac{1}{4}$$

c) Mamy

$$\mathbb{E}\left((X+Y)^2 \mid X \right) = \mathbb{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2 \mid X \right) = \mathbb{E}\left(X^2 \mid X \right) + 2\mathbb{E}\left(XY \mid X \right) + \mathbb{E}\left(Y^2 \mid X \right)$$

Policzmy więc osobno $\mathbb{E}\left(X^2 \mid X \right)$, $\mathbb{E}\left(XY \mid X \right)$ oraz $\mathbb{E}\left(Y^2 \mid X \right)$. Mamy $\mathbb{E}(X^2) = X^2$, $\mathbb{E}(XY \mid X) = X\mathbb{E}(Y \mid X)$. Wiemy, że

$$\mathbb{E}\left(f(X, Y) \mid X \right) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(X, y) \cdot g(X, y) \, dy}{\int_{\mathbb{R}} g(X, y) \, dy}$$

zatem

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y e^{-x} y \cdot \mathbf{1}_{0 \leq y \leq x} \, dy}{\int_{\mathbb{R}} y e^{-x} \cdot \mathbf{1}_{0 \leq y \leq x} \, dy} =$$

Zadanie 2.
Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 \cdot \chi_{[0,7]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuantę X.

Rozwiązanie:
Mamy $P_X(\mathbb{R}) = 1 \iff \int_{\mathbb{R}} c \cdot x^2 \cdot \chi_{[0,7]}(x)\, dx = 1 \iff \int_0^7 cx^2\, dx = 1 \iff c \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^7 = 1 \iff c = \frac{3}{7^3}$.
Dystrybuanta wynosi

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{t^3}{343} & \text{dla } t \in [0,7] \\ 1 & \text{dla } t > 1 \end{cases}$$

Zadanie 3.
Zmienna losowa X ma gęstość $cx^4 \mathbf{1}_{[-1,2]}(x)$. Wyznaczyć c oraz dystrybuantę X.

Rozwiązanie:
Mamy $P_X(\mathbb{R}) = 1$, zatem

$$\int_{\mathbb{R}} c \cdot x^4 \cdot \mathbf{1}_{[-1,2]}(x)\, dx = 1 \iff \int_{-1}^{2} cx^4\, dx = 1 \iff c \cdot \left(\frac{x^5}{5}\right) \Big|_{-1}^{2} = 1 \iff$$

$$\iff c \cdot \frac{33}{5} = 1 \iff c = \frac{5}{33} = 1 \iff c = \frac{5}{33}$$

Wówczas dystrybuanta wynosi

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ \frac{t^5}{33} & \text{dla } t \in [-1,2) \\ 1 & \text{dla } t \geq 2 \end{cases}$$

Zadanie 4.
Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 \mathbf{1}_{[0,3]}(x)$. Wyznaczyć c oraz gęstość rozkładu zmiennej $Z = \sqrt{X}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$P(X \in \mathbb{R}) = 1 \iff \int_{\mathbb{R}} cx^2 \mathbf{1}_{[0,3]}(x)\, dx = 1 \iff \int_0^3 cx^2\, dx = 1 \iff$$

$$\iff c \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 1 \iff c = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Zatem

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \in (-\infty, 0) \\ \frac{t^3}{9} & \text{gdy } t \in [0,3) \\ 1 & \text{gdy } t \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Wyznaczmy teraz dystrybuantę $Z = \sqrt{X}$. Mamy

$$F_X(t) = P(Z \leq t) = P(\sqrt{X} \leq t) = P(X \leq t^2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t^2} \frac{1}{9} \cdot x^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,3]}(x)\, dx = \mathbf{1}_{[0,3]}(t) \int_0^{t^2} \frac{1}{9} \cdot x^2\, dx = \frac{t^6}{27}$$

czyli

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t < 0 \\ \frac{t^6}{27} & \text{gdy } t \in [0, \sqrt{3}) \\ 1 & \text{gdy } t \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

Mamy $F_Z'(t) = \frac{2}{9} \cdot t^5 \cdot \mathbf{1}_{[0,\sqrt{3}]}(t)$ oraz sprawdzamy, że

$$\int_{\mathbb{R}} F_Z'(t)\ dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{9} \cdot t^5\ dt = \frac{t^6}{27}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 1$$

Zatem gęstość $Z = \sqrt{X}$ to $g_Z(t) = F_Z'(t) = \frac{2}{9} \cdot t^5 \cdot \mathbf{1}_{[0,\sqrt{3}]}(t)$.

Zadanie 5.
Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = C \cdot e^{-x} \cdot 1_{\{0 \leq y \leq 2x\}}(x, y)$. Wyznaczyć

a) stałą C

b) rozkład X

c) $P(Y \leq \frac{X}{2})$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} C \cdot e^{-x} \cdot 1_{\{0 \leq y \leq 2x\}}(x,y)\ d^2(x,y) = \int_0^{\infty} \int_0^{2x} C \cdot e^{-x}\ dy\ dx =$$

$$= C \cdot \int_0^{\infty} 2xe^{-x}\ dx = 2C$$

Przyrównujemy to do 1 i otrzymujemy $2C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$. Dalej

$$P(X \leq t) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\ dy\ dx$$

Dla $t < 0$ mamy $F_X(t) = 0$, zaś dla $t \geq 0$ mamy

$$F_X(t) = \int_0^t \int_0^{2x} C \cdot e^{-x}\ dt\ dx = \int_0^t C \cdot e^{-x} \cdot 2x\ dx = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^t = 1 - e^{-t}(t+1)$$

Dalej

$$P\left(Y \leq \frac{X}{2}\right) = \int_{\{y \leq \frac{x}{2}\}} g(x,y)\ d\lambda^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{X}{2}} e^{-x} \cdot \frac{1}{2}\ dy\ dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \frac{x}{4} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 6.
Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = c \cdot xy^2 \cdot \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y \leq 1\}}$.

a) Wyznaczyć stałą c

b) Obliczyć $P(Y \leq \frac{1}{2})$

c) Obliczyć $P((X+Y)^3 \mid Y)$

3. Zadania podobne do zadania 5. z egzaminu

Zadanie 1.
Dwuwymiarowe wektory losowe $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na kole o środku $(0,0)$ i promieniu 1. Dla $n = 1, 2, \ldots$ niech $Z_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$. Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągu

$$W_n = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + \ldots + Z_{n-1} Z_n}$$

Zadanie 2.
Zmienne losowe $X_1, \delta_1, X_2, \delta_2, \ldots$ są niezależne. Zmienne X_i mają rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$, ponadto $p(\delta_i = 1) = 1 - P(\delta_i = 0) = \frac{1}{3}$. Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągu

$$Z_n = \left(X_1^{\delta_1} X_2^{\delta_2} \ldots X_n^{\delta_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

4. Inne

Zadanie 1.
Średnia liczba błędów na pojedynczej stronie skryptu wynosi $0,2$. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że na następnej stronie będą co najmniej 2 błędy.

Rozwiązanie:
Niech X to liczba błędów na stronie. Szukamy $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. Niech n to liczba znaków na stronie oraz niech p to prawdopodobieństwo tego, że znak będzie źle wpisany. Zmienna X to zmienna o rozkładzie Bernoullego $B(n, p)$, gdzie mamy $n \cdot p = 0,2$ oraz n jest duże. Możemy więc rozkład Bernoullego przybliżyć rozkładem Poissona Poiss(λ), gdzie $\lambda = n \cdot p = 0,2$. Wówczas $P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!}$ oraz $P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!}$, skąd $P(X \geq 2) = 1 - \left(e^{-0,2} + 0,2 \cdot e^{-\lambda}\right) \approx 0,0177$

Zadanie 2.
W 100 torebkach cukru umieszczono 200 oznakowanych kryształków. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że ustalona torebka zawiera co najmniej trzy oznakowane kryształki.

Rozwiązanie:
Niech X to liczba oznakowanych kryształków w ustalonej torebce. Rozważmy schemat Bernoullego $n = 200$ prób włożenia oznakowanych kryształków do ustalonej torebki z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{100}$, czyli zmienna X ma rozkład Bernoullego $B(n, p)$. Możemy założyć, że n jest stosunkowo

duże i przybliżyć rozkład Bernoullego rozkładem Poissonowskim Poiss(λ), gdzie $\lambda = n \cdot p = 2$. Wówczas $P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left(\frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!}\right) = 1 - \frac{5}{e^2} \approx 0,3233$. Błąd przybliżenia wynosi $\frac{\lambda^2}{n} = \frac{2^2}{200} = 0,02$

Zadanie 3.
Na terytorium Polski odnotowuje się średnio 3 poważne pożary lasów w ciągu lipca. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że

a) w następnym lipcu nie będzie pożarów.

b) w następnym lipcu będzie parzysta liczba pożarów.

Rozwiązanie:

a) Podzielmy lipiec na n części. W każdej z tych n części pożar może wystąpić raz z jednakowym prawdopodobieństwem p. Wówczas średnio $n \cdot p$ razy w ciągu lipca pojawi się pożar. Mamy więc $n \cdot p = 3$. Niech X oznacza liczbę pożarów w lipcu. Jeśli n jest dostatecznie duże, to zmienna X ma rozkład Poissona Poiss(λ), gdzie $\lambda = n \cdot p = 3$. Mamy więc $P(X = 0) = \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = e^{-3}$.

b) Zdarzenia $X = 2k$ i $X = 2k+2$ są rozłączne, zatem jeśli $P(\text{parz})$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że liczba pożarów w lipcu będzie parzysta, to mamy $P(\text{parz}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-3} \cdot 3^{2k}}{(2k)!} = e^{-3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{(2k)!} = e^{-3} \cdot \frac{e^3 + e^{-3}}{2} = \frac{1 + e^{-6}}{2}$.