ANALIZA MATEMATYCZNA I.1

Marysia Nazarczuk

Ćwiczenia 1

Aksjomatyka liczb rzeczywistych, kresy zbiorów

I Aksjomaty dodawania $\oplus$

A$_1$ $x + y = y + x$

A$_2$ $(x + y) + z = x + (y + z)$

A$_3$ $\exists_{0\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ x + 0 = x$

A$_4$ $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{-x\in\mathbb{R}}\ x + (-x) = 0$

II Aksjomaty mnożenia $\odot$

A$_5$ $x \cdot y = y \cdot x$

A$_6$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

A$_7$ $\exists_{1\in\mathbb{R},\ 1\neq 0}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ 1 \cdot x = x$

A$_8$ $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \exists_{x^{-1}\in\mathbb{R}}\ x \cdot x^{-1} = 1$

Aksjomat łączący mnożenie z dodawaniem

A$_9$ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

III Aksjomaty porządku $<$

A$_{10}$ $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ zachodzi jedno z $x < y$, $x = y$, $y < x$ (zasada trichotomii)

A$_{11}$ $x < y \Rightarrow \forall_{z\in\mathbb{R}}\ x + z < y + z$

A$_{12}$ $x < y \Rightarrow \forall_{z>0}\ x \cdot z < y \cdot z$

A$_{13}$ $x < y\ \wedge\ y < z \Rightarrow x < z$

Aksjomat ciągłości

A$_{14}$ dla każdego $A \subset \mathbb{R}$ ograniczonego z góry (to znaczy $\exists_c\forall_{a\in A}\ a \leq c$), istnieje liczba $s = \sup A$ ($s \in \mathbb{R}$ - supremum lub kres górny zbioru A), taka że
1) $\forall_{a\in A}\ s \geq a$ (s jest ograniczeniem górnym zbioru A)
2) Jeżeli c jest innym ograniczeniem A, to $s \leq c$ (s jest najmniejszym ograniczeniem)

Zadanie 1.
Które z aksjomatów ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ są spełnione przez zbiory: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$?

Rozwiązanie:

$\rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - A$_1$, A$_2$, A$_5$, A$_6$, A$_7$, A$_9$, A$_{10}$, A$_{11}$, A$_{12}$, A$_{13}$

$\rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - A$_1$, A$_2$, A$_3$, A$_5$, A$_6$, A$_7$, A$_9$, A$_{10}$, A$_{11}$, A$_{12}$, A$_{13}$

→ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}

→ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ - A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}

Zadanie 2.
Wyznacz kres górny zbioru $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 6 < 0\}$.

Rozwiązanie:
$x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 6)$. Zatem $\sup A = 6$.

Zadanie 3.
Wyznacz kres górny zbioru $B = \{x^2 + 6x + 8 \in \mathbb{R} \mid x \in (-2, 3)\}$

Rozwiązanie:
$f(x) = x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$. Funkcja $f(x)$ ma pierwiastki $x = -2$ i $x = -4$, zatem rośnie na prawo od punktu $\frac{-2+(-4)}{2} = -3$. Przedział $(-2, 3)$ leży wewnątrz przedziału $(-3, +\infty)$, zatem funkcja $f(x)$ rośnie na przedziale $(-2, 3)$, wobec czego $B = (f(-2), f(3)) = (0, 35)$, zatem $\sup B = 35$.

Zadanie 4.
Wyznacz kres górny zbioru $C = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Rozwiązanie:
Rozpiszmy początkowe wyrazy $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots < 1$. Sprawdźmy, czy 1 jest supremum zbioru C.

1) Po pierwsze 1 powinno być ograniczeniem górnym. Istotnie $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ \frac{n}{n+1} \leq 1$

2) Sprawdźmy, czy 1 jest najmniejszym ograniczeniem górnym C. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i pokażemy, że $1 - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym. Istotnie, gdyby $1 - \varepsilon$ było ograniczeniem górnym, to $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ 1 - \varepsilon > \frac{n}{n+1}$. Wtedy $n + 1 - \varepsilon(n+1) > n \Leftrightarrow 1 > \varepsilon(n+1)$, czyli $n < \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Zatem biorąc $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ dochodzimy do sprzeczności, a więc $1 - \varepsilon$ nie może być ograniczeniem górnym tego zbioru C dla żadnego $\varepsilon > 0$. Stąd 1 jest najmniejszym ograniczeniem górnym C, zatem $\sup C = 1$.

Zadanie 5.
Wyznacz kres górny zbioru $D = \{\frac{-n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
Wskazówka: Wykaż, że dla $n > 3$ zachodzi nierówność $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.

Rozwiązanie:
Sprawdźmy, czy 0 jest ograniczeniem górnym zbioru D.

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ \frac{-n}{2^n} < 0, \text{ bo } 2^n > 0 \text{ i } -n < 0$$

Zatem 0 jest ograniczeniem górnym zbioru D. Sprawdźmy, czy 0 jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru D.

Lemat: dla $n > 3$ zachodzi $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2^n \geq n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Dowód: Pokażemy dowód przez indukcję matematyczną

1. Sprawdźmy, czy nierówność zachodzi dla $n = 4$

$$2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$$

zatem jest to prawdziwe

2. Załóżmy, że $2^n \geq n^2$. Musimy udowodnić nierówność $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq n^2 + n^2 \text{ (na mocy założenia indukcyjnego)}$$

Pokażemy teraz, że $n^2 \geq 2n + 1$. Mamy

$$n^2 \geq 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (n - (1 - \sqrt{2})) \cdot (n - (1 - \sqrt{2})) \geq 0$$

Jako, że $1 + \sqrt{2} < 3$, toteż dla $n > 3$ prawdą jest, że $n^2 \geq 2n + 1$. Zatem mamy

$$2^{n+1} \geq n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Na mocy indukcji matematycznej teza jest więc prawdziwa. $\square$

Mamy więc $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{-n}{2^n} \geq \frac{-1}{n}$. Jeżeli 0 jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru $\{\frac{-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, to jest również najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru $\{\frac{-n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sprawdźmy więc, czy 0 jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru $\{\frac{-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i pokażemy, że $-\varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym. Istotnie, gdyby $-\varepsilon$ było ograniczeniem górnym, to $\forall_{n \in \mathbb{N}} - \varepsilon \geq -\frac{1}{n} \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon}$, zatem biorąc $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ dochodzimy do sprzeczności, a więc $-\varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym tego zbioru dla każdego $\varepsilon > 0$. Czyli 0 jest najmniejszym ograniczeniem zbioru $\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, a jako, że $\frac{-n}{2^n} \geq \frac{-1}{n}$, to 0 jest też najmniejszym ograniczeniem zbioru D.

Zadanie 7.
Maksimum zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy element $a =: \max A \in A$ taki, że dla każdego $b \in A$ zachodzi $a \geq b$. Wykaż, że jeśli podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ posiada maksimum $\max A$, to $\sup A = \max A$.

Rozwiązanie:

1. Sprawdźmy, czy a jest ograniczeniem górnym zbioru A. Istotnie $\forall_{b \in A}\ b \leq a$

2. Sprawdźmy, czy a jest najmniejszym ograniczeniem górnym A. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i pokażemy, że $a - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym. Istotnie, gdyby $a - \varepsilon$ było ograniczeniem górnym, to $\forall_{b \in A}\ b \leq a - \varepsilon$. Z założenia wiemy, że $\forall_{b \in A}\ b \leq a$. Jako, że $a > a - \varepsilon$, to gdy weźmiemy b takie, że $a \geq b > a - \varepsilon$, to dochodzimy do sprzeczności. Zatem $a - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A, skąd $\sup A = a$, czylu $\sup A = \max A$.

Innymi słowy chcemy pokazać, że dla każdego $b \in A$ istnieje takie $x \in A$, że $x > b$. To jest oczywiście prawdziwe, bo wystarczy wziąć $x = a$. $\square$

Ćwiczenia 2

Aksjomatyka liczb rzeczywistych, kresy zbiorów

Twierdzenie: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem, zaś $c \in \mathbb{R}$ pewnym ograniczeniem górnym zbioru A. Następujące warunki są równoważne:

1. Element c jest najmniejszym ograniczeniem górnym A, to znczay jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $b \geq a$, to $b \geq c$.
2. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje element $a \in A$ taki, że $a > c - \varepsilon$.

Aksjomat ciągłości: Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny

Definicja: Kresem dolnym (infimum) zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy największe z ograniczeń dolnych A.

Zadanie 1.
Czy zbiór $\mathbb{N}$ spełnia aksjomat ciągłości?

Rozwiązanie:
Tak, bo każdy ograniczony podzbiór $A \subset \mathbb{N}$ ma supremum (po prostu maksimum).

Zadanie 2.
Wyznacz kresy zbioru $E = \left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \mid k, n, \in \mathbb{N}\right\}$

Rozwiązanie:
Jako, że $k \geq 1$, toteż $\frac{1}{k} \leq 1$. Analogicznie $\frac{1}{n} \leq 1$. Mamy więc $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$. Jako, że dla $k = n = 1$ mamy $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = 2$, toteż 2 jest maksimum zbioru E, czyli jest jego supremum. Weźmy teraz dowolne $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że $0 + \varepsilon$ nie jest ograniczeniem dolnym zbioru E. Chcemy wykazać, że $\forall_{k,n \in \mathbb{N}}\ \frac{1}{k} + \frac{1}{n} > \varepsilon$. Aby pokazać że tak nie jest, musimy znaleźć takie $k, n \in \mathbb{N}$, że $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} < \varepsilon$. Weźmy dowolne $k > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $n > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wówczas $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Stąd 0 jest najmniejszym ograniczeniem.

Zadanie 3.
Wyznacz kresy zbioru $U = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Rozwiązanie:
Pokażemy, że $\inf U = 0$ oraz $\sup U = 1$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Załóżmy, że $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ \frac{1}{x} < 1 - \varepsilon$, wówczas $x > \frac{1}{1-\varepsilon}$. Ale to nie jest prawdziwe dla $x = 1$, zatem $\sup U = 1$. Załóżmy, że $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ \frac{1}{x} > \varepsilon$, wówczas $x < \frac{1}{\varepsilon}$, to nie jest prawdziwe jednak dla dużych x, zatem $\inf U = 0$.

Definicja: Rozważmy dwa podzbiory zbioru liczb rzeczywistych A i B. Sumą algebraiczną zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z sum wszystkich par elementów ze zbiorów A i B

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Zadanie 4.
Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą dowolnymi podzbiorami. Oznaczmy iloczyn zbiorów A i B następująco $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?

Rozwiązanie:
Nie, bo na przykład dla $A = \{-1000, -1\}$ oraz $B = \{-1\}$ mamy $\sup A = -1$, $\sup B = -1$ oraz $\sup(A \cdot B) = 1000$, zatem $1000 = \sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B = 1$.

Fakt:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B \text{ dla } A, B \subset \mathbb{R}_+$$

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B \text{ dla } A, B \subset \mathbb{R}_+$$

Zadanie 5.
Wyznacz kresy zbioru $F = \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \mid k, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy zbiór $A = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ oraz zbiór $B = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Mamy $\sup A = 1$ i $\inf A = 0$ oraz $\sup B = 0$ i $\inf B = -1$. Zbiór F jest sumą algebraiczną zbiorów A i B, to znaczy $F = A + B$, zatem $\sup F = \sup A + \sup B = 1 + 0 = 1$ oraz $\inf F = \inf A + \inf B = 0 + (-1) = -1$.

Zadanie 6.
Wyznacz kresy zbioru $G = \left\{ \frac{nk}{1+n+k} \mid n, k \in \mathbb{N} \right\}$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Zauważmy, że $\frac{nk}{1+n+k} \geq \frac{1}{1+n+k}$. Kresem górnym zbioru $U = \left\{ \frac{1}{1+n+k} \mid n, k \in \mathbb{N} \right\}$ jest $\frac{1}{3}$. Zatem każdy element zbioru G jest niemniejszy niż $\frac{1}{3}$. Z drugiej strony dla $n = k = 1$ mamy $\frac{nk}{1+n+k} = \frac{1}{3}$, zatem $\min G = \inf G = \frac{1}{3}$.

Załóżmy, że $\exists_{a \in \mathbb{N}} \forall_{n,k \in \mathbb{N}} \frac{nk}{1+n+k} \leq a$. Wtedy $nk \leq a(1+n+k) \Leftrightarrow n(k-a) \leq ak+a$. Biorąc $k = a+1$ mamy $n \leq a(a+2)$, a więc n nie jest dowolne, czyli zbiór G nie ma kresu górnego. Innymi słowy skoro n i k są dowolne, to biorąc $k = n - 1$ mamy $\frac{nk}{1+n+k} = \frac{n(n-1)}{1+n+(n-1)} = \frac{n-1}{2}$. To wyrażenie może być dowolnie duże, czyli zbiór G nie jest ograniczony z góry.

Sposób II
Zauważmy, że $\frac{nk}{1+n+k} = \left(\frac{1}{nk} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right)^{-1}$. Liczba ta przyjmuje najmniejszą wartość, gdy mianownik jest największy. Wiemy, że $\max \frac{1}{x} = 1$ dla $x \in \mathbb{N}$, zatem największa wartość jaka może być w mianowniku to 3, stąd najmniejsza wartość wyrażenia $\frac{nk}{1+n+k}$ dla $n, k \in \mathbb{N}$ to $\frac{1}{3}$, czyli $\inf G = \min G = \frac{1}{3}$.

Pokażemy, że $\frac{1}{nk} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$ może być dowolnie małe. Weźmy dowolne $\varepsilon = 3 \cdot \varepsilon' > 0$ i $\varepsilon' < 1$ oraz $n, k \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{n} < \varepsilon'$ i $\frac{1}{k} < \varepsilon'$, czyli $n > \frac{1}{\varepsilon'}$ oraz $k > \frac{1}{\varepsilon'}$. Wówczas $\frac{1}{nk} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} < \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon'^2 < \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = 3 \cdot \varepsilon' = \varepsilon$. A więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją $n, k \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{nk} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} < \varepsilon$, czyli zbiór G nie jest ograniczony z góry.

Zadanie 7.
Wykaż, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}$ są zbiorami niepustymi i ograniczonymi z góry, to suma algebraiczna tych zbiorów posiada kres górny oraz $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że $\forall_{a \in A}\ a \leq \sup A$ oraz $\forall_{b \in B}\ b \leq \sup B$, czyli $a + b \leq \sup A + \sup B$. Oznacza to, że $\sup A + \sup B$ jest ograniczeniem górnym zbioru $A + B$, czyli $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Ponadto $\forall_{a+b \in A+B}\ a + b \leq \sup(A + B)$, czyli $a \leq \sup(A + B) - b$, zatem $\sup(A + B) - b$ jest ograniczeniem górnym zbioru A, skąd $\sup A \leq \sup(A + B) - b \Leftrightarrow b \leq \sup(A + B) - \sup A$, czyli $\sup(A + B) - \sup A$ jest ograniczeniem górnym zbioru B, skąd $\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A \Leftrightarrow \sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$. Z zasady trichotomii otrzymujemy $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Analogicznie można udowodnić, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}_+$, to $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Ćwiczenia 3

Aksjomatyka liczb rzeczywistych, kresy zbiorów

Zadanie 1.
Wyznacz kresy zbioru $B = \left\{ \frac{(n+m)^2}{2^{nm}} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

Rozwiązanie:
Rozpiszmy początkowe wyrazy zbioru.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5
1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{25}{16}$	$\frac{9}{8}$
2	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{25}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{49}{1024}$
3	1	$\frac{25}{64}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{49}{4096}$	$\frac{1}{512}$
4	$\frac{25}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{49}{4096}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{81}{1048576}$
5	$\frac{9}{8}$	$\frac{49}{1024}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{81}{1048576}$	$\frac{25}{8388608}$

Zauważmy, że dla $m, n \geq 2$ zachodzi $(m+n)^2 \leq 2^{mn}$. Udowodnijmy to. Wiemy, że dla $x > 3$ zachodzi $2^x \geq x^2$. Dla $m, n \geq 2$ mamy $m \cdot n \geq 2 \cdot 2 = 4$, zatem możemy zastosować powyższą nierówność. Mamy $2^{mn} \geq (mn)^2$. Wystarczy, że udowodnimy dla $m, n \geq 2$, że $(mn)^2 \geq (m+n)^2$. Obie strony tej nierówności są dodatnie, zatem wystarczy, że udowodnimu nierówność $mn \geq m+n$ dla $m, n \geq 2$. Załóżmy bez straty ogólności, że $m \geq n$, zatem $m + m \geq m + n$, czyli musimy udowodnić, że zachodzi $mn \geq m + m = 2m$. Po podzieleniu stronami przez m (m jest dodatnie), otrzymujemy $n \geq 2$, co jest oczywiście prawdziwe. Udowodniliśmy więc, że $(m+n)^2 \leq 2^{mn}$ dla $m, n \geq 2$. Zatem dla $m, n \geq 2$ wyrażenie $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}}$ jest co najwyżej równe 1. Zauważmy, że dla $n = 1$ i $m = 6$ mamy $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} = \frac{49}{64} \leq 1$. Udowodnijmy, że dla $m = 1$ i $n \geq 6$ lub $m \geq 6$ i $n = 1$ zachodzi $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} \leq 1$. Zauważmy, że bez straty ogólności możemy udowodnić jedynie, że dla $m = 1$ oraz $n \geq 6$ zachodzi $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} \leq 1$. Dla $m = 1$ i $n \geq 6$ mamy $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} = \frac{(1+n)^2}{2^n} \leq 1$. Musimy więc udowodnić, że dla $n \geq 6$ zachodzi $\frac{(1+n)^2}{2^n} \leq 1$, czyli $(1+n)^2 \leq 2^n$. Udowodnimy to przez indukcję. Dla $n = 6$ nierówność jest prawdziwa, bo $\frac{49}{64} \leq 1$. Przypuśćmy, że $2^n \geq (1+n)^2 = n^2 + 2n + 1$. Chcemy udowodnić, że $2^{n+1} \geq (n+2)^2 = n^2+4n+4$. Mamy $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n^2+2n+1)$ na mocy założenia indukcyjnego. Zatem $2^{n+1} \geq 2 \cdot (n^2+2n+1) = 2n^2+4n+2 = (n^2-2)+(n^2+4n+4) \geq n^2+4n+4$, bo dla $n \geq 6$ zachodzi $n^2 \geq 36$, czyli $n^2 - 2 \geq 34 > 0$. Zatem $2^{n+1} \geq n^2+4x+4 = (n+2)^2$. Udowodniliśmy więc, korzystając z indukcji, że $2^n \geq (n+1)^2$ dla $n \geq 6$. Z tych dwóch powyższych lematów wynika, że $(m+2)^2 \leq 2^{mn}$, czyli $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} \leq 1$. Oznacza to, że wszystkie wyrazy poza powyższą tabelką są mniejsze od 1, czyli zbiór B osiąga największą wartość dla $m = 2$ i $n = 1$ lub dla $m = 1$ i $n = 2$ i jest ona równa $\frac{9}{4}$. Zatem $\max B = \sup B = \frac{9}{4}$. Kresem górnym zbioru B jest więc $\frac{9}{4}$.

Wiemy, że dla $x > 3$ zachodzi $2^x > x^2$. Mamy $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} = \frac{n^2+2mn+m^2}{2^{mn}} = \frac{mn}{2^{mn}} \cdot \frac{n}{m} + \frac{mn}{2^{mn}} \cdot 2 + \frac{mn}{2^{mn}} \cdot \frac{m}{n}$. Dla $m = 1$ i $n = 1$ lub $m = 1$ i $n = 2$ lub $m = 1$ i $n = 3$ lub $m = 2$ i $n = 1$ lub $m = 3$ i $n = 1$ zachodzi $m \cdot n \leq 3$. Dla żadnych z tych par wyrażenie $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}}$ nie jest mniejsze od 1, czyli wyrażenie będzie większe od kresu dolnego zbioru B. Przypuśćmy więc, że $m \cdot n > 3$. Wówczas mamy $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} = \frac{mn}{2^{mn}} \cdot \frac{n}{m} + \frac{mn}{2^{mn}} \cdot 2 + \frac{mn}{2^{mn}} \cdot \frac{m}{n} \leq \frac{1}{mn} \cdot \frac{n}{m} + \frac{1}{mn} \cdot 2 + \frac{1}{mn} \cdot \frac{m}{n}$ na mocy nierówności $2^x \geq x^2$ dla $x > 3$. Zatem $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} \leq \frac{1}{mn} \cdot \frac{n}{m} + \frac{1}{mn} \cdot 2 + \frac{1}{mn} \cdot \frac{m}{n} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{mn} + \frac{1}{n^2} = \left(\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^2\right.$.

Mamy więc $\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} \leq \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2$. Rozpatrzmy więc zbiór $C = \left\{ \left((\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2 \mid m,n \in \mathbb{N} \right\}$. Wiemy, że infimum zbioru $\left\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$ jest równe 0, zatem infimum zbioru $\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \mid n,m \in \mathbb{N}\right\}$ jest równe 0 (korzystamy tu z własności $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$). Zbiór $\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \mid n,m \in \mathbb{N}\right\}$ ma elementy dodatnie, zatem infimum zbioru C również jest równe 0 (korzystamy tu z własności, że dla $A, B \subset \mathbb{R}_+$ zachodzi $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$). Jako, że infimum zbioru C jest równe 0 oraz wszystkie elementy zbioru B są mniejsze od elementów ze zbioru C, to infimum zbioru B nie może być większe od infimum zbioru C, czyli od zera. Elementy zbioru B są jednak dodatnie, zatem $\inf B = 0$. Kresem dolnym zbioru B jest więc 0.

Zadanie 2.
Wykaż, że liczba $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Sposób I
Gdyby $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ było wymierne, to istniałyby $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ takie, że $\sqrt{3}+\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $NWD(p,q) = 1$. Wówczas $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}+2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \left(\frac{p^2}{q^2}-5\right)\cdot\frac{1}{2}$, czyli $\sqrt{6}$ jest wymierne. Zatem istnieją takie $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, że $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, $NWD(m,n) = 1$. Wówczas $6 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 6n^2 = m^2$. Po lewej stronie mamy nieparzyście wiele dwójek, natomiast po prawej stronie mamy parzyście wiele dwójek. Mamy więc sprzeczność, czyli $\sqrt{6}$ jest niewymierne i wówczas $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ jest niewymierne.

Sposób II
Mamy $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$. Gdyby $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ było wymierne, to wówczas $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ musiałoby być również wymierne. Mamy jednak $(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, zatem $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ nie może być wymierne.

Zadanie 3.
Wyznacz kresy zbioru $P = \{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Rozpiszmy początkowe wyrazy $\sqrt[2]{2} \approx 1,41$, $\sqrt[3]{3} \approx 1,44$, $\sqrt[4]{4} \approx 1,41$, $\sqrt[5]{5} \approx 1,38, \ldots$. Widać że każdy kolejny wyraz jest mniejszy od poprzedniego dla $n \geq 3$. Udowodnijmy to. Mamy tezę, że dla $n \geq 3$ zachodzi $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n^{n+1} \geq (n+1)^n \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Udowodnimy to przez indukcję.

1. Czy nierówność $n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zachodzi dla $n = 3$? Tak, bo $3 \geq \frac{67}{27}$.
2. Załóżmy, że $n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, wykażemy, że $n+1 \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, Wiemy, że $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Mamy $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leq n \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$.

Zatem na mocy indukcji matematycznej $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$. Otrzymujemy więc $\sup P = \sqrt[3]{3}$.

Zauważmy, że $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{2\cdot\sqrt{n}+n-2}{2} = 2\sqrt{\frac{1}{n}}+1-\frac{2}{n} \leq 1+2\sqrt{\frac{1}{n}} \leq \left(1+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2$. Infimum zbioru $\left\{\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ jest równe 1, bo $\inf\left\{\sqrt{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0$, zatem infimum zbioru P nie może być większe od 1. Wiemy, że 1 jest ograniczeniem dolnym P, bo $\sqrt[n]{n} \geq 1$, zatem $\inf P = 1$.

Sposób II

Niech $\sqrt[n]{n} = 1 + d_n$. Zatem $n = (1+d_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} d_n + \binom{n}{2} d_n^2 + \ldots > 1 + \frac{n(n-1)}{2} d_n^2 \Leftrightarrow n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} d_n^2 \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{2} d_n^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{n}} > d_n$. Zatem $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$. Chcemy pokazać, że $\inf P = 1$. Wystarczy że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znajdziemy n takie, że $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$. Weźmy $n > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Wówczas $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon^2}}} = 1 + \varepsilon$. Zatem $\inf P = 1$.

Zauważmy, że dla $n \geq 12$ zachodzi $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{12}} \approx 1,41$. Zatem zbiór P ma maksimum, które jest jednym z elementóe zbioru pierwszych dwunastu elementów. Sprawdzamy, że $\sup P = \sqrt[3]{3}$.

Sposób III Pokażemy, że dla $n \geq 4$ zachodzi $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow n^3 \leq 3^n$. Baza indukcyjna dla $n = 4$ to $4^3 = 64 < 81 = 3^4$. Załóżmy teraz, że $n^3 < 3^n$. Chcemy udowodnić, że $(n+1)^3 < 3^{n+1}$. Mamy $(n+1)^3 \leq \left(n + \frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}n\right)^3 = \frac{125}{64}n^3 \leq \frac{128}{64}n^3 = 2n^3 < 3n^3 < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. Zatem $\sup P = \sqrt[3]{3}$.

Zadanie 4.

Udowodnij, że dla dwóch podzbiorów ograniczonych $A, B \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$$

Rozwiązanie:

Mamy $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow x \leq \sup A \ \vee \ x \leq \sup B \Rightarrow x \leq \max(\sup A, \sup B)$. Zatem $\max(\sup A, \sup B)$ jest ograniczeniem górnym zbioru $A \cup B$, czyli $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$. Mamy $\forall_{a \in A}\ a \in A \cup B$, czyli $a \in A \Rightarrow a \in A \cup B \Rightarrow a \leq \sup(A \cup B)$, zatem $\sup A \leq \sup(A \cup B)$. Analogicznie $\sup B \leq \sup(A \cup B)$. Zatem $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$. Mamy więc $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.

Zadanie 5.

Wyznacz kresy zbioru $E = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \mid k, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Rozwiązanie:

Mamy $k \geq 1 \Leftrightarrow k \geq 1^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{k} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}} \leq 1$ oraz analogicznie $\frac{1}{\sqrt[k]{n}} \leq 1$. Zatem $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \leq 1 + 1 = 2$. Ale dla $k = n = 1$ mamy $\frac{1}{\sqrt[1]{1}} + \frac{1}{\sqrt[1]{1}} = 1 + 1 = 2$, czyli $\sup E = \max E = 2$.

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną mamy $\sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{k \cdot \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-1}} \leq \frac{n-1+k}{n}$ oraz analogicznie mamy $\sqrt[k]{n} \leq \frac{k-1+n}{k}$. Zatem $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \frac{n}{n+k-1}$ oraz $\frac{1}{\sqrt[k]{n}} \geq \frac{k}{n+k-1}$, czyli $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \geq \frac{n}{n+k-1} + \frac{k}{n+k-1} = \frac{n+k}{n+k-1} > 1$. Zatem 1 jest ograniczeniem dolnym E. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ takie, że $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} > 1 + \varepsilon$. Ma to być spełnione dla każdego $k, n \in \mathbb{N}$. W szczególności dla $k = 1$ mamy $\frac{1}{\sqrt[n]{1}} + \frac{1}{\sqrt[1]{n}} = 1 + \frac{1}{n}$, czyli musi zachodzić $1 + \frac{1}{n} > 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \varepsilon \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Nie jest to jednak prawdą dla dostatecznie dużych n. Wobec sprzeczności otrzymujemy, że $\inf E = 1$, bo $1 + \varepsilon$ nie może być ograniczeniem dolnym tego zbioru.

Ćwiczenia 4

Zasada indukcji, podstawowe nierówności

Twierdzenie: Jeżeli W_1 oraz $(W_n \Rightarrow W + n + 1)$ są prawdziwe, to W_n jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 1.
Wykaż, że dla każdego n naturalnego $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rozwiązanie:

1. Sprawdźmy, czy równość zachodzi dla $n = 1$. Tak, bo $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$.
2. Załóżmy, że $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Chcemy wykazać, że $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Istotnie $1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Na mocy indukcji matematycznej teza jest prawdziwa.

Zadanie 2.
Wykaż, że dla każdego n naturalnego $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Rozwiązanie:

1. Sprawdźmy, czy nierówność zachodzi dla $n = 1$. Tak, bo $1^2 = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1$.
2. Załóżmy, że $1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Chcemy pokazać, że $1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Istotnie $1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Na mocy indukcji matematycznej teza jest prawdziwa.

Zadanie 3.
Wykaż, że dla każdego naturalnego n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie:

Sposób I
Mamy $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 + 1)(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1)$. Dla $n \equiv 0 \mod 5$ mamy $5 \mid n$, czyli wyrażenie jest podzielne przez 5. Dla $n \equiv 1 \mod 5$ mamy $5 \mid n - 1$, czyli wyrażenie jest podzielne przez 5. Dla $n \equiv 2 \mod 5$ mamy $5 \mid n^2 + 1$, czyli wyrażenie jest podzielne przez 5. Dla $n \equiv 0 \mod 5$ mamy $5 \mid n^2 + 1$, czyli wyrażenie jest podzielne przez 5. Dla $n \equiv 0 \mod 5$ mamy $5 \mid n + 1$, czyli wyrażenie jest podzielne przez 5.

Sposób II
Mamy $n^5 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5) = 5n(n - 1)(n + 1) + (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Pierwszy składnik jest podzielny przez 5, ponieważ jeden z jego czynników to 5. Drugi składnik jest podzielny przez 5, ponieważ jest to iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych. Zatem całe wyrażenie jest podzielne przez 5.

Sposób III

1. Sprawdźmy, czy $n^5 - n$ jest podzielne przez 5 dla $n = 1$. Tak, bo $1^5 - 1 = 0$, co jest podzielne przez 5.

2. Załóżmy, że $5 \mid n^5 - n$. Chcemy wykazać, że $5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$. Istotnie $(n+1)^5 - (n+1) = (n^2+2n+1) \cdot (n^2+2n+1) - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n = 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) + (n^5 - n)$. Pierwszy składnik jest podzielny przez 5, ponieważ jeden z jego czynników to 5. Drugi składnik jest podzielny przez 5 z założenia indukcyjnego. Zatem całe wyrażenie jest podzielne przez 5.

Na mocy indukcji matematycznej teza jest prawdziwa.

Zadanie 4.
Wykaż, że dla każdego naturalnego n większego niż 2 zachodzi $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Rozwiązanie:

1. Sprawdźmy, czy nierówność zachodzi dla $n = 2$. Mamy $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Czyli chcemy wykazać, że $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{2} \Leftrightarrow 4 > 2$, a to jest prawdziwe.

2. Załóżmy, że $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$. Chcemy pokazać, że $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$. Mamy $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n}$ z założenia indukcyjnego. Wystarczy zatem wykazać, że $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n} > \sqrt{n+1}$, aby teza była prawdziwa. Jest to równoważne stwierdzeniu, że $1 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} > n + 1 \Leftrightarrow \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} > n \Leftrightarrow n^2 + n > n^2 \Leftrightarrow n > 0$, co jest prawdziwe.

Na mocy indukcji matematycznej teza jest prawdziwa.

Zadanie 5.
Wykaż, że dla każdego n naturalnego $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Zauważmy, że $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Mamy $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Oczywiste jest, że $\frac{n}{n+1} < 1$, bo $n < n + 1$.

Sposób II
Zauważmyliśmy, że $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Udowodnijmy to

1. Dla $n = 1$ mamy $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

2. Załóżmy, że $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Musimy udowodnić, że $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. Z założenia indukcyjnego mamy $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

Na mocy indukcji matematycznej teza jest prawdziwa.

Zadanie 6.
Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniających zależność $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ prawdziwa jest nierówność $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$. Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie:
Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla pewnego dowolnie ustalonego n. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że liczby $a_1, \ldots, a_{n+1}$ spełniające warunek $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 1$ są ponumerowane w ten sposób, że $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1}$. Wtedy $a_1 \leq 1$ oraz $a_{n+1} \geq 1$. Skoro $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1 \Leftrightarrow a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot (a_{n+1} \cdot a_1) = 1$, to na podstawie założenia indukcyjnego, zachodzi $a_2 + a_3 + \ldots + (a_{n+1} \cdot a_1) \geq n \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + (a_{n+1} \cdot a_1) \geq n + a_1 + a_{n+1}$. Stąd $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} \geq n + a_{n+1} + a_1 - a_{n+1} \cdot a_1 = n + a_{n+1}(1 - a_1) + (a_1 - 1) + 1 = n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geq n + 1$. Na mocy indukcji matematycznej teza jest prawdziwa. Równość zachodzi kiedy każda z liczb $a_1, \ldots, a_n$ jest równa 1.

Zadanie 7.
Korzystając z wyników poprzedniego zadania udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Rozwiązanie:
Weźmy ciąg (b_n) taki, że $b_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}}$. Wówczas $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = 1$. Wiemy, że $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n$, zatem $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \geq 1$. Po pomnożeniu stronami nierówności przez $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot \ldots a_n}$, otrzymujemy $\frac{a_1+a_2\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Zadanie 8.
Udowodnij, że dla każdego n naturalnego zachodzi równość $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ oraz $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Obliczmy $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$. Mamy

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1 + \sum_{k=2}^{n} k^4 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^4 = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - (n+1)^4 =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 - (n+1)^4$$

Mamy więc

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}((n+1)^4 - 1 - (n(n+1)(2n+1)) - 2 \cdot (n(n+1)) - n) =$$

$$= \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} =$$

$$= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Zadanie 9.
Udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1}$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że

$$\frac{x_1 + \ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots + \cdot x_n}$$

czyli mamy

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Ćwiczenia 5

Zasada indukcji, podstawowe nierówności

Twierdzenie: (Nierówność Bernoulli'ego) Niech n będzie liczbą naturalną, zaś $x > -1$ liczbą rzeczywistą. Wówczas zachodzi nierówność $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

Zadanie 1.
Udowodnij, że dla każdego n naturalnego prawdziwa jest nierówność $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Mamy $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną mamy $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$

Sposób II
Udowodnimy to przez indukcję.

1. Dla $n = 1$ mamy $1! = 1 \leq 1 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^1$.

2. Przyjmijmy, że $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Chcemy pokazać, że

$$(n+1)! \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n! \cdot (n+1)! \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{n+2}\right) \cdot (n+1) \cdot n! \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{2n+2}{n+2}\right) \cdot n! \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^n$$

Z założenia indukcyjnego mamy

$$\left(\frac{2n+2}{n+2}\right) \cdot n! \leq \left(\frac{2n+2}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

zatem wystarczy, że udowodnimy nierówność

$$\left(\frac{2n+2}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^n \Leftrightarrow \frac{2n+2}{n+2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{n}{n+2} \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Z nierówności Bernoulliego mamy $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n+1}$, zatem wystarczy udowodnić, że

$$1 + \frac{n}{n+2} \leq 1 + \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+2} \leq \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \leq n+2$$

co jest oczywiście prawdziwe.

Zatem na mocy indukcji matematycznej teza jest prawdziwa.

Sposób III
Inny sposób przez indukcję. Załóżmy, że $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Mamy $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$. Z założenia indukcyjnego mamy $n! \cdot (n+1) \leq (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(n+1)^(n+1)}{2^n}$. Musimy więc udowodnić, że

$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \leq \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$. Mamy $2 \cdot (n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1} \Leftrightarrow 2 \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. Z nierówności Bernoulliego mamy $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n+1} = 2$, zatem teza jest prawdziwa.

Zadanie 2.
Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Możemy więc napisać nierówność

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}$$

Wiemy, że $\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)} = \frac{n}{n+1}$, zatem $\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)} = 1+\frac{n}{n+1}$. Mamy więc

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 1+\frac{n}{n+1} = 2-\frac{1}{n}$$

Zadanie 3.
Udowodnij nierówność Weierstrassa, która jest uogólnieniem nierówności Bernoulliego. Dla liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, które wszystkie są tego samego znaku i z których każda jest większa od -1 zachodzi $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Rozwiązanie:
Udowodnimy to przez indukcję

1. Czy nierówność zachodzi dla $n=1$? Tak, bo $1+a_1 \geq a_1+1$

2. Załóżmy, że zachodzi

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 1+a_1+\ldots+a_n$$

Chcemy wykazać, że

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}$$

Jako, że $a_i > -1$, toteż $a_{n+1} > -1 \Leftrightarrow a_{n+1}+1 > 0$. Możemy więc przemnożyć nierówność z założenia stronami przez $(1+a_{n+1})$. Mamy wówczas

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\cdot(1+a_{n+1}) \geq (1+a_1+\ldots+a_n)\cdot(1+a_{n+1}) =$$

$$= 1+a_1+\ldots+a_n+(1+a_1+\ldots+a_n)\cdot a_{n+1} = 1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}+a_{n+1}\cdot(a_1+\ldots+a_n)$$

Wyrażenie $a_{n+1}\cdot(a_1+\ldots+a_n)$ jest niemniejsze od zera, ponieważ jeżeli $a_{n+1} < 0$, to $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$, czyli $a_{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$, natomiast jeżeli $a_{n+1} > 0$, to $\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$, czyli $a_{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$. Dla $a_{n+1} = 0$ oczywiście iloczyn będzie równy 0. Zatem

$$1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}+a_{n+1}\cdot(a_1+\ldots+a_n) \geq 1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}$$

czyli z założenia indukcyjnego wynika teza.

Na mocy indukcji matematycznej nierówność $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$ jest prawdziwa.

Zadanie 4.
Udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geq n$.

Rozwiązanie:
Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną mamy

$$\frac{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[n]{1} = 1$$

zatem

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Zadanie 5.
Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)}{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2} =$$

$$= \frac{(2n)!}{(1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot 2)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n\cdot(n!))^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}$$

Mamy więc tezę $\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Udowodnimy to przez indukcję.

1. Czy nierówność zachodzi dla $n=1$? Tak, bo $\frac{2!}{2^2\cdot 1^2} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+1}}$.

2. Załóżmy więc, że $\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Musimy udowodnić, że $\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\cdot((n+1)!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Mamy

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\cdot((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{2\cdot 2\cdot(n+1)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

   Wystarczy więc udowodnić, że

$$\frac{2n+1}{\sqrt{2n+1}\cdot(2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \Leftrightarrow \sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n+3} \leq 2n+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)(2n+3) \leq (2n+2)^2 \Leftrightarrow 4n^2+8n+3 \leq 4n^2+8n+4 \Leftrightarrow 3 \leq 4$$

   co oczywiście jest prawdziwe.

Zatem na mocy indukcji matematycznej, teza jest prawdziwa.

Zadanie 6.
Udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność między średnią arytmetyczną i kwadratową $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Rozwiązanie:
Przekształćmy tezę równoważnie

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \Leftrightarrow n\cdot(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) \geq (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$$

Udowodnijmy to. Mamy

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2\cdot[(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n}_{n-1})+$$

$$+(\underbrace{x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_2x_n}_{n-2})+\ldots+(\underbrace{x_{n-1}x_n}_{1})]$$

Skorzystamy teraz z faktu, że dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $2ab \leq a^2+b^2$. Mamy więc

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2\cdot[(x_1x_2+\ldots+x_1x_n)+(x_2x_3+\ldots+x_2x_n)+\ldots+(x_{n-1}x_n)] \leq$$

$$\leq x_1^2+\ldots+x_n^2+(n-1)x_1^2+(x_2^2+\ldots+x_n^2)+(n-2)x_2^2+(x_3^2+\ldots+x_n^2)+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2$$
$$n\cdot x_1^2+n\cdot x_2^2+\ldots+n\cdot x_n^2 = n\cdot(x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2)$$

Udowodniliśmy więc nierówność, która jest równoważna nierówności z tezy.

Zadanie 7.
Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$.

Rozwiązanie:
Udowodnimy to przez indukcję.

1. Czy nierówność zachodzi dla $n=1$? Tak, bo $1+\frac{1}{2} = 1,5 = 2-\frac{1}{2}$.
2. Załóżmy, że $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$. Musimy udowodnić, że $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^{n+1}}$. Mamy

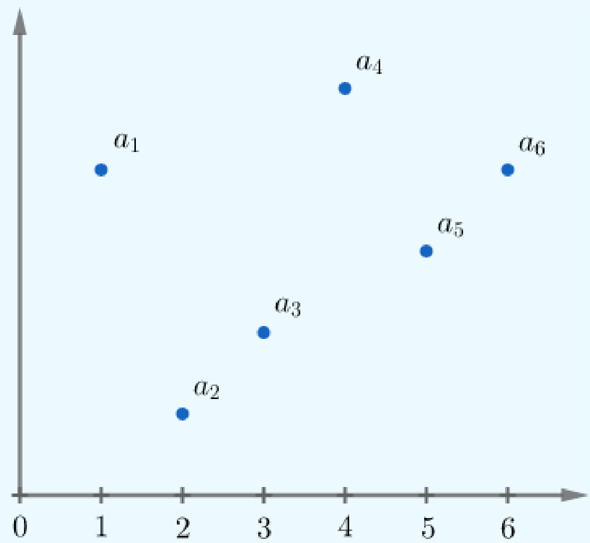
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2} = 2-\frac{1}{2^{n+1}}$$

Zatem na mocy indukcji matematycznej, teza jest prawdziwa.

Ćwiczenia 6

Ciągi i ich granice

Definicja: Ciągiem nazywamy funkcję $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Oznaczamy typowo $a_n := a(n)$, $\{a_n\} \in \mathbb{N}$



Definicja: Ciąg nazywamy monotonicznym, gdy zachodzi jedno z

1. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leq a_{n+1}$
2. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \geq a_{n+1}$

Ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym, gdy $\exists_{m,M\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ m \leq a_n \leq M$

Zadanie 1.
Rozważmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony następująco $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$. Rozstrzygnij, czy ciąg ten jest a) rosnący? b) ograniczony?

Rozwiązanie:

Sposób I
Ciąg ten jest rosnący, jeżeli $a_{n+1} - a_n > 0$, czyli $\sqrt{2+a_n} > a_n$. Mamy

$$\sqrt{2+a_n} > a_n \Leftrightarrow 2 + a_n > a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 < 0 \Leftrightarrow (a_n - 2)(a_n + 1) < 0$$

Zatem ciąg ten jest rosnący, gdy $a_n \in (-1, 2)$. Udowodnijmy, że ciąg jest ograniczony. Pokażemy, że $a_n < 2$.

1. Czy nierówność zachodzi dla $n = 1$? Tak, bo $a_1 = \sqrt{2} < 2$
2. Załóżmy, że $a_n < 2$. Chcemy wykazać, że $a_{n+1} < 2$. Mamy $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Musimy udowodnić, że $\sqrt{2+a_n} < 2 \Leftrightarrow 2 + a_n < 4 \Leftrightarrow a_n < 2$, co jest prawdziwe.

Zatem $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \in (0, 2) \subset (-1, 2)$, skąd wynika, że a_n jest rosnący i ograniczony.

Sposób II
Udowodnimy przez indukcję, że $a_n < a_{n+1}$, czyli że ciąg ten jest rosnący.

1. Czy nierówność zachodzi dla $n = 1$? Tak, bo $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$.

2. Załóżmy, że $a_n < a_{n+1}$. Musimy udowodnić, że $a_{n+1} < a_{n+2}$. Mamy

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n + 2 < a_{n+1} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+a_{n+1}}$$

   Ale przecież $\sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$ oraz $\sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$, zatem $a_{n+1} < a_{n+2}$

Zadanie 2.
Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest rekurencyjnie $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Udowodnij, że n-ty wyraz tego ciągu dany jest wzorem Bineta $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Rozwiązanie:
Udowodnimy to przez indukcję.

1. Czy wzór zachodzi dla $n = 3$? Tak, bo $F_3 = 1+1 = 2$ oraz $F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$.

2. Załóżmy, że wzór zachodzi dla n oraz dla $n+1$. Musimy udowodnić, że zachodzi również dla $n+2$. Mamy

$$F_n + F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] = F_{n+2}$$

Zadanie 3.
Czy ciąg Fibonacci'ego jest a) monotoniczny? b) ograniczony?

Rozwiązanie:
Wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie (indukcja). Ciąg Fibonacciego jest więc rosnący, bo każdy kolejny wyraz jest równy poprzedniemu plus coś dodatniego (indukcja) Gdyby ciąg Fibonacciego był ograniczony, to dla pewnego $g \in \mathbb{R}$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ zachodziłoby

$$|a_{n_0} - g| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_{n_0} - g \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

czyli $\forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \frac{1}{2}$. Ale mamy

$$a_n - g = \underbrace{a_n - a_{n-1}}_{=a_{n-2}} + \underbrace{a_{n-1} - a_{n-2}}_{=a_{n-3}} + \ldots + \underbrace{a_{n_0+1} - a_{n_0}}_{=a_{n_0-1}} + a_{n_0} - g > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Mamy sprzeczność, zatem g nie może być granicą, skąd ciąg Fibonacciego jest rozbieżny.

Rozwiązywanie rekurencji liniowych (na przykładzie ciągu Fibonacciego)

Zastanówmy się jak można wymyślić wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego? Pomysł polega na szukaniu ciągów spełniających rekurencję

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \tag{1}$$

w postaci $x_n = a^n$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Taki ciąg spełnia (1) wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$, co prowadzi do $a^2 = a + 1$. Stąd już łatwo dostaniemy dwa pierwiastki $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Zauważmy na koniec, że jeśli ciągi (x_n) oraz (y_n) spełniają rekurencję (1), to spełnia ją również dowolna kombonacja liniowa postaci $C \cdot x_n + D \cdot y_n$, gdzie $C, D \in \mathbb{R}$. Stąd mamy ogólną postać ciągu spełniającego rekurencję (1) postaci

$$x_n = C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Współczynniki C i D dobieramy tak, aby spełnione były warunki początkowe $x_1 = x_2 = 1$.

Uwaga! Analogicznie możemy rozwiązywać wszystkie inne rekurencje liniowe. Z zastrzeżeniem, że gdy pojawi się pieriastek wielokrotny, to pojawiają się dodatkowe rozwiązania postaci $x_n = na^n$.

Zadanie 4.
Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu spełniającego rekurencję $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, jeżeli:

a) $x_0 = 0, x_1 = 4$;

b) $x_0 = 1, x_2 = 2$.

Rozwiązanie:

a) Załóżmy, że równanie to ma rozwiązanie postaci $x_n = a^n$. Mamy więc $a^{n+2} = 4a^{n+1} - 4a^n$, czyli $a^2 = 4a - 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Ma ono pierwiastek podwójny, zatem $X_n = (C + Dn) \cdot a^n$ dla pewnych C i D. Mamy więc $x_0 = 0 = (C + D \cdot 0) \cdot 2^0 \Leftrightarrow C = 0$ oraz $x_1 = 4 = (C + D \cdot 1) \cdot 2^1 \Leftrightarrow C + D = 2$, czyli $D = 2$. Zatem wzór na n-ty wyraz to $x_n = 2n \cdot 2^n$.

b) Załóżmy, że równanie to ma rozwiązanie postaci $x_n = a^n$. Mamy więc $a^{n+2} = 4a^{n+1} - 4a^n$, czyli $a^2 = 4a - 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Ma ono pierwiastek podwójny, zatem $X_n = (C + Dn) \cdot a^n$ dla pewnych C i D. Mamy więc $x_0 = 1 = (C + D \cdot 0) \cdot 2^0 \Leftrightarrow C = 1$ oraz $X_1 = 2 \Leftrightarrow (C + D \cdot 1) \cdot 2^1 \Leftrightarrow C + D = 1$, czyli $D = 1$. Zatem wzór na n-ty wyraz to $x_n = 2^n$.

Równanie rekurencyjne

Przykładem równania rekurencyjnego liniowego jednorodnego jest równanie postaci

$$a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}$$

gdzie A i B są dane. Załóżmy, że ma ono rozwiązanie postaci $a_n = r^n$. Podstawiając, otrzymujemy

$$r^n = Ar^{n-1} + Br^{n-2} \Leftrightarrow r^2 = Ar + B \Leftrightarrow r^2 - Ar - B = 0$$

Równenie to nazywamy równaniem charakterystycznym równania rekurencyjnego. W tym przypadku jest to równanie kwadratowe. Jeżeli nie ma ono pierwiastków podwójnych, to wówczas

$$a_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

Jeżeli natomiast równanie charakterystyczne ma pierwiastek podwójny, to

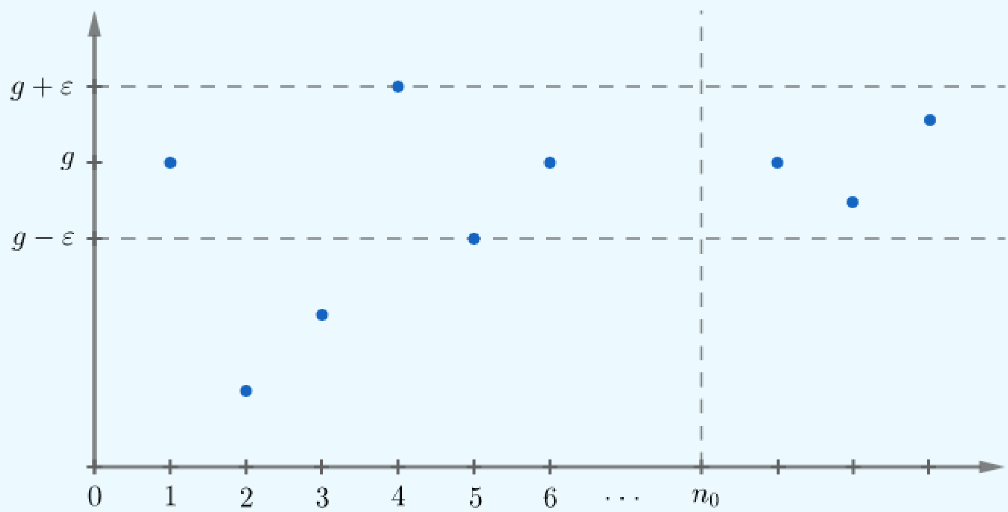
$$a_n = (C + D \cdot n)r_1^n$$

C oraz D są dowolnymi stałymi, natomiast r_1 i r_2 są pierwiastkami równania charakterystycznego. Jeżeli dane jest a_1 i a_n, wówczas łatwo można ułożyć układ równań i otrzymać ich wartości.

Ćwiczenia 7

Ciągi i ich granice

Definicja: Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą ciągu (a_n), gdy $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon$. Piszemy $a_n \overset{n\to\infty}{\to} g$ lyb $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Jeżeli ciąg ma granicę, to mówimy, że jest zbieżny.



Twierdzenie: (Arytmetyczne własności granic) Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne odpowiednio do granic a i b, to wówczas zbieżne są ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ i o ile $b_n \neq 0$, to zbieżny jest też ciąg $\frac{a_n}{b_n}$. Gdy $b > 0$, to zbieżny jest ciąg $(b_n^{a_n})$, zaś gdy $a, b > 0$, to zbieżny jest ciąg $(\log_{a_n} b_n)$. Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{a_n} = b^a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{a_n} b_n = \log_a b$.

Zadanie 1.
Oblicz granice następujących ciągów $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{n}{n^3+3}$, $d_n = \frac{n^2+5n+3}{3n^2-5n+8}$.

Rozwiązanie:

a_n Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Wtedy $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, co jest prawdziwe dla $n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, zatem $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

b_n Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $n_0^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Wtedy $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, co jest prawdziwe dla $n > n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, zatem $b_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

c_n $\frac{n}{n^3+3} = \frac{1}{n^2+\frac{3}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

d_n $\frac{n^2+5n+3}{3n^2-5n+8} = \frac{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{5}{n}+\frac{8}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3}$

Twierdzenie: (O trzech ciągach) Jeśli wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n) spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zależność $a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz jeśli ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to wówczas ciąg (b_n) jest również zbieżny do granicy g.

Zadanie 2.
Oblicz granice następujących ciągów $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b_n = \sqrt[n]{n^2}$, $c_n = \sqrt[n]{3}$ $d_n = \sqrt[n]{3n+1}$, $e_n = \sqrt[n^2]{n^2}$, $f_n = \frac{n^5}{3^n}$.

Rozwiązanie:

a_n pokazaliśmy, że $1 \le \sqrt[n]{n} \le 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. Ponadto mamy $\frac{1}{\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{n\to\infty}{\to} 0^{\frac{1}{2}} = 0$, zatem $1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 1$, więc z twierdzenia o trzech ciągach $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$.

b_n Mamy $\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \cdot 1 = 1$.

c_n Mamy $1 \le \sqrt[n]{3} \le \sqrt[n]{n}$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\sqrt[n]{3} \overset{n\to\infty}{\to} 1$.

d_n Mamy $\sqrt[n]{3n} \le \sqrt[n]{3n+1} \le \sqrt[n]{4n}$. Wiemy, ż3 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n} = 1$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\sqrt[n]{3n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1$.

e_n Mamy $\sqrt[n^2]{n^2} = (n^2)^{\frac{1}{n^2}} = (n^2)^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \left((n^2)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} \le (n^2)^{\frac{1}{n}}$. Mamy więc $1 \le \sqrt[n^2]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2}$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\sqrt[n^2]{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 1$

f_n Dla dostatecznie dużych n mamy $3^n \ge n^6$, zatem dla dostatecznie dużych n mamy $\frac{n^5}{3^n} \le \frac{n^5}{n^6} = \frac{1}{n}$. Mamy więc $0 \le \frac{n^5}{3^n} \le \frac{1}{n}$, zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{3^n} = 0$.

Zadanie 3.
Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

Zadanie 4.
Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{1+2^3+3^3+\ldots+n^3}$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Mamy $\sqrt[n]{1+2^3+3^3+\ldots+n^3} = \sqrt[n]{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2}{2}} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \cdot 1 = 1$

Sposób II
Mamy $\sqrt[n]{1+1+1+\ldots+1} \le \sqrt[n]{1+2^3+3^3+\ldots+n^3} \le \sqrt[n]{n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3} \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{1+2^3+3^3+\ldots+n^3} \le \sqrt[n]{n^4}$, więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Zadanie 5.
Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 4$, $a_1 = 7$.

Rozwiązanie:
Niech $a_n = r^n$, wówczas mamy $r^{n+2} = 3r^{n+1} - 2r^n \Leftrightarrow r^2 = 3n - 2 \Leftrightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r-1) = 0$, czyli $r = 2$ lub $r = 1$. Mamy więc $a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 1^n$, co daje mam układ równań

$$\begin{cases} C \cdot 2^0 + D \cdot 1^0 = 4 \\ C \cdot 2^1 + D \cdot 1^1 = 7 \end{cases}$$

czyli $C = 3$ oraz $D = 1$, zatem $a_n = 3 \cdot 2^n + 1$.

Ćwiczenia 8

Ciągi i ich granice

Fakt: Ciąg $\frac{n^a}{c^n}$, gdzie $a > 0$ i $c > 1$ zbiega do zera przy $n \to \infty$.

Dowód: Zauważmy, że $(\sqrt[n]{n})^a \overset{n\to\infty}{\to} 1$, zatem dla dostatecznie dużych n zachodzi $(\sqrt[n]{n})^a < d$, gdzie $d < c$. Zatem dla dostatecznie dużych n mamy $n^a < d^n$, czyli $\frac{n^a}{c^n} < \left(\frac{d}{c}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, bo $\frac{d}{c} < 1$.

Zadanie 1.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}{5+n-n-3} =$$

$$= \frac{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}{2} \cdot \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \cdot \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$$

Zadanie 2.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2})\sqrt[3]{n^2}$.

Rozwiązanie:

$$(\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2})\sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{n^3+5n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2} =$$

$$= (\sqrt[3]{n^3+5n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}) \cdot \frac{(\sqrt[3]{n^3+5n^2}^2 + \sqrt[3]{(n^3+5n^2)(n^3+2n^2)} + \sqrt[3]{n^3+2n^2})}{(\sqrt[3]{n^3+5n^2}^2 + \sqrt[3]{(n^3+5n^2)(n^3+2n^2)} + \sqrt[3]{n^3+2n^2})} =$$

$$= \frac{n^3+5n^2-n^3-2n^2}{n^2(\sqrt[3]{1+\frac{10}{n}+\frac{25}{n^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{7}{n}+\frac{10}{n^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{3}{3} = 1$$

Zadanie 3.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2})(\sqrt[3]{2n^2+4n+5})$.

Rozwiązanie:

$$(\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2})(\sqrt[3]{2n^2+4n+5}) = (\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2}) \cdot \sqrt[3]{n^2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2n^2+4n+5})}{\sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= (\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2}) \cdot \sqrt[3]{n^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt[3]{n^2}} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

Twierdzenie: Jeśli (a_n) jest ciągiem zbieżnym do 0, zaś (b_n) jest ciągiem ograniczonym (to znaczy, że istnieje takie $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|b_n| \leq M$), to ciąg $(a_n \cdot b_n)$ zbiega do 0 przy $n \to \infty$.

Dowód: Mamy $0 \leq |a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot M$, gdzie M jest ograniczeniem ciągu (b_n), czyli $|b_n| \leq M$. Mamy $|a_n| \cdot M \overset{n\to\infty}{\to} 0 \cdot M = 0$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach $a_n \cdot b_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Zadanie 4.
Oblicz granicę ciągów $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ oraz $b_n = \frac{\cos(n!)}{n^2}$.

Rozwiązanie:
Ciąg $(-1)^n$ jest ograniczony, natomiast ciag $\frac{1}{n}$ jest zbieżny do zera, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$. Ciąg $\cos(n!)$ jest ograniczony, natomiast ciąg $\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny do zera, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2} = 0$.

Zadanie 5.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie:

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{1+1} = 1$$

Zadanie 6.
Rozważmy podzbiór $A \subset \mathbb{R}$. Wykaż, że jeśli $c \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym A oraz istnieje ciąg (a_n) elementów A zbieżny do c, to $c = \sup A$.

Rozwiązanie:
Jeśli $c \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym A oraz istnieje ciąg (a_n) elementów A zbieżny do c, to dla każdego $b < c$ zachodzi $b < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, więc z twierdzenia o szacowaniu dla dostatecznie dużych n mamy $b < a_n$, zatem b nie jest ograniczeniem górnym zbioru A, skąd $\sup A = c$.

Ćwiczenia 9

Ciągi i ich granice

Definicja: Symbol, bądź wyrażenie nieoznaczone to wyrażenie algebraiczne, które nie ma sensu liczbowego, będące umownym sposobem zapisu przy obliczeniu granic funkcji. Zalicza się do niech: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$.

Zadanie 1.
Oblicz granice ciągów $a_n = \sqrt[n^2]{n^2}$, $b_n = \sqrt[n]{3^n + n^3}$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$. Ciąg $\sqrt[n^2]{n^2}$ to podciąg ciągu $x_n = \sqrt[n]{n}$, czyli $a_n = x_{n^2}$, zatem skoro x_n zbiega do 1, to również a_n zbiega do 1.

Oszacujmy ciąg $b_n = \sqrt[n]{3^n + n^2}$ z góry i z dołu. Mamy

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + n^2} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2}$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\sqrt[n]{3^n + n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 3$.

Twierdzenie: (O ciągu monotonicznym i ograniczonym) Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Zadanie 2.
Wykaż, że ciąg $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:
Wiemy, że $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$, zatem ciąg s_n jest ograniczony z góry. Ciąg ten jest również rosnący, gdyż dodajemy do siebie coraz więcej dodatnich wyrażeń. Jest więc zbieżny (jego granica wynosi $\frac{\pi}{6}$).

Zadanie 3.
Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$. Wykaż, że (a_n) jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Rozwiązanie:
Wykażemy najpierw, że ten ciąg jest monotoniczny. Przez indukcję udowodnimy, że ciąg jest rosnący.

1. Czy $a_1 < a_2$? Tak, bo $a_1 = \sqrt{3}$ oraz $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, czyli mamy

$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow 3 < 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3}$$

2. Załóżmy, że $a_n < a_{n+1}$. Musimy udowodnić, że $a_{n+1} < a_{n+2}$. Mamy

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 2 + a_n < 2 + a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$$

Na mocy indukcji matematycznej, wykazaliśmy, że ciąg ten jest rosnący.

Wykażmy, że ciąg ten jest ograniczony przez 2. Udowodnimy to przez indukcję.

1. Czy $a_1 < 2$? Tak, bo $a_1 = \sqrt{3}$ oraz mamy $a_1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$
2. Załóżmy, że $a_n < 2$. Musimy udowodnić, że $a_{n+1} < 2$. Mamy

$$a_n < 2 \Leftrightarrow a_n + 2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{a_n + 2} < 2 \Leftrightarrow a_{n+1} < 2$$

Na mocy indukcji matematycznej, wykazaliśmy, że ciąg ten jest ograniczony z góry przez 2.

Skoro ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest również zbieżny. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, wówczas mamy

$$g = \sqrt{2+g} \Leftrightarrow g^2 = 2 + g \Leftrightarrow g^2 - g - 2 = 0 \Leftrightarrow (g-2)(g+1) = 0 \Leftrightarrow g = 2 \ \vee \ g = -1$$

Jako, że pierwszy wyraz ciągu jest dodatni oraz ciąg jest rosnący, toteż granica jest dodatnia. A zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Fakt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} e$$

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n\cdot b} \overset{n\to\infty}{\to} e^{a\cdot b}$$

Zadanie 4.
Oblicz następujące granice

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n+3}$.

Rozwiązanie:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{4}}{n}\right)^n = e^{\frac{1}{4}}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n} = 1 \cdot e^{5\cdot 2} = e^{10}$$

Zadanie 5.
Wykaż, że jeśli ciąg x_n jest rozbieżny do $+\infty$ przy $n \to +\infty$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ oraz ogólniej, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$.

Rozwiązanie:
Istnieje ciąg liczb naturalnych k_n, taki że $k_n \leq x_n \leq k_n + 1$. Oszacujmy ciąg $\left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n}$. Mamy

$$\frac{\left(1+\frac{a}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}{\left(1+\frac{a}{k_n+1}\right)} = \left(1+\frac{a}{k_n+1}\right)^{k_n} \leq \left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{a}{k_n}\right)^{k_n+1} = \left(1+\frac{a}{k_n}\right)^{k_n} \cdot \left(1+\frac{a}{k_n}\right)$$

Ciąg k_n+1 to podciąg ciągu liczb naturalnych rozbieżny do $+\infty$, zatem ciągi $\left(1+\frac{a}{k_n+1}\right)$ i $\left(1+\frac{a}{k_n}\right)$ są zbieżne do 1 oraz ciągi $\left(1+\frac{a}{k_n+1}\right)^{k_n+1}$ i $\left(1+\frac{a}{k_n}\right)^{k_n}$ są zbieżne do e^a. Zatem oszacowaliśmy ciąg $\left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n}$ z góry i z dołu przez ciągi zbieżne do e^a, więc z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$.

Zadanie 6.
Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1,001+\frac{5}{n}\right)^{2n+3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$

Rozwiązanie:

a)
$$\left(1,001+\frac{5}{n}\right)^{2n+3} \geq (1,001)^{2n+3} \geq (1+0,001)^{2n+3} \geq 1+0,001\cdot(2n+3) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$$

b)
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n} = \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \overset{n\to\infty}{\to} e^{-1}\cdot e^{1} = 1$$

c)
$$\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4} = \left(\frac{3n+1-2}{3n+1}\right)^{n+4} = \left(1+\frac{-\frac{2}{3}}{n+\frac{1}{3}}\right)^{(n+\frac{1}{3})+\frac{11}{3}} \overset{n\to\infty}{\to} e^{-\frac{2}{3}}$$

Zadanie 7.
Czy ciąg $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Rozwiązanie:
Mamy

$$a_{2n}-a_n = \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Stąd a_n jest rozbieżny, ponieważ nie spełnia warunku Cauchy'ego.

Zadanie 8.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$.

Rozwiązanie:

$$\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5} = \left(1+\frac{2}{n^2+1}\right)^{2\cdot(n^2+1)+3} = \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2\cdot(n^2+1)} \cdot \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{3} \overset{n\to\infty}{\to} e^{2\cdot 2}\cdot 1 = e^4$$

Ćwiczenia 10

Ciągi i ich granice

Twierdzenie: (O scalaniu) Niech ciąg (x_n) ma k podciągów o własnościach

1. wszystkie te podciągi są zbieżne do granicy g,
2. każdy wyraz ciągu (x_n) należy do jednego z tych podciągów.

Wówczas ciąg (x_n) jest zbieżny do g.

Zadanie 1.
Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n\cdot n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{2n+1}}$

Rozwiązanie:

a) Dla n parzystego mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Dla n nieparzystego mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} = e$.

Zatem z twierdzenia o scalaniu mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n\cdot n} = e$.

b)

$$\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{2n+1}} = \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}-1}\right)^{(\sqrt{n}-1)\cdot\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}-1}} \overset{n\to\infty}{\to} (e^2)^{\sqrt{2}} = e^{2\sqrt{2}}$$

Zadanie 2.
Wykaż, że ciąg $f_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$ jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Rozwiązanie:
Znajdźmy wzór na sumę tego ciągu. Mamy $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n}$, zatem możemy napisać

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\right]+$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\right]+\ldots+\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\right]+\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\right]+\ldots+$$

$$+\ldots+\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]=$$

$$n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \left[\frac{1}{2} \cdot (n-1) + \frac{1}{2^2} \cdot (n-2) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] =$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \left[\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \left[(n-1) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right] =$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \left[(n-1) - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right] = n - \frac{n}{2^n} - n + 1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Zatem $f_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \overset{n\to\infty}{\to} 2$.

Logarytm naturalny

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

Własności $\ln : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**:**

- $\ln(1) = 0$
- ln jest rosnący
- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \Rightarrow \ln \frac{1}{x} = 0 \ln x$
- $0 < x < y \Rightarrow \ln x < \ln y$
- $a \ln x = \ln x^a$

Zadanie 3.
Udowodnij, że dla każdego $x > -1$ prawdziwe jest oszacowanie $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Rozwiązanie:
Z wykładu wiemy, $\frac{1}{1-x} \geq e^x \geq 1 + x$. Udowodnijmy najpierw nierówność $\ln(1+z) \leq x$. Mamy $e^x \geq 1 + x = e^{\ln(1+x)}$, zatem korzystając z monotoniczności funkcji exp mamy $x \geq \ln(1+x)$. Udowodnijmy teraz nierówność $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$. Do nierówności $\frac{1}{1-x} \geq e^x$ podstawmy $x = \frac{y}{1+y}$, wówczas $e^{\frac{y}{1+y}} \leq \frac{1}{1-\frac{y}{1+y}} = 1 + y = e^{\ln(1+y)}$, zatem $\frac{y}{1+y} \leq \ln(1+y)$.

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli ciąg x_n zbiega do 0, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$.

Rozwiązanie:
Oszacujmy wyrażenie $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}$. Mamy

$$1 \overset{n\to\infty}{\leftarrow} \frac{x_n}{(1+x_n) \cdot x_n} \leq \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \leq \frac{x_n}{x_n} = 1$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$.

Zadanie 5.
Wykaż, że jeśli ciąg x_n rozbiega do $+\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = +\infty$.

Rozwiązanie:
Skoro $x_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, to $\exists_{k_n \in \mathbb{N},\ k_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty}\ k_n \leq x_n \leq k_n + 1$, zatem

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} > \frac{e^{k_n}}{k_{n+1}} = \frac{e^{k_n}}{k_n} \cdot \frac{k_n}{k_{n+1}}$$

Wyrażenie $\frac{k_n}{k_{n+1}}$ ma granicę równą 1, natomiast $\frac{e^{k_n}}{k_n}$ rozbiega do nieskończoności. Zatem z twierdzenia o dwóch ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = +\infty$.

Ćwiczenia 11

Ciągi i ich granice

Zadanie 1.
Ciąg a_n określony jest rekurencyjnie $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n$. Wykaż, że jest to ciąg zbieżny i oblicz jego granicę.

Rozwiązanie:
Wykażemy najpierw, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n < 2$.

1. Dla $n = 1$ mamy $a_1 = 1 < 2$.
2. Załóżmy, więc, że $a_n < 2$. Musimy wykazać, że $a_{n+1} < 2$. Mamy $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n$, zatem musimy wykazać, że

$$-\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n < 2 \Leftrightarrow a_n^2 - 4a_n + 4 > 0 \Leftrightarrow (a_n - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow a_n \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

   co jest prawdą dla $a_n < 2$.

Zatem na mocy indukcji $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n < 2$. Ciąg a_n jest więc ograniczony z góry.

Wykażemy teraz, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n > 0$.

1. Dla $n = 1$ mamy $a_1 = 1 > 0$.
2. Załóżmy, więc, że $a_n > 0$. Musimy wykazać, że $a_{n+1} > 0$. Mamy $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n$, zatem musimy wykazać, że

$$-\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n > 0 \Leftrightarrow a_n(2 - \frac{1}{2}a_n) > 0 \Leftrightarrow a_n(4 - a_n) > 0 \Leftrightarrow a_n \in (0, 4)$$

   co jest prawdą dla $a_n \in (0, 2)$.

Zatem na mocy indukcji $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n > 0$. Ciąg a_n jest więc ograniczony z dołu.

Chcemy pokazać, że ciąg ten jest rosnący.

1. Mamy $a_2 = 1,5 > 1 = a_1$.
2. Załóżmy więc, że $a_n > a_{n-1}$. Musimy wykazać, że

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n > a_n \Leftrightarrow a_n > \frac{1}{2}a_n^2 \Leftrightarrow a_n(2 - a_n) > 0 \Leftrightarrow a_n \in (0, 2)$$

Zatem na mocy indukcji wykazaliśmy ciąg a_n jest rosnący.

Skoro ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny i ma granicę. Niech g będzie granicą tego ciągu. Mamy więc równanie

$$g = -\frac{1}{2}g^2 + 2g \Leftrightarrow g^2 - 2g = 0 \Leftrightarrow g(g - 2) = 0 \Leftrightarrow g = 0 \ \vee \ g = 2$$

Ciąg jest rosnący, zatem $g = 2$.

Zadanie 2.
Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu X_n zadanego rekurencyjnie $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n + 1$, $X_1 = X_2 = 1$.

Rozwiązanie:
Mam równanie rekurencyjne $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n + 1$. Przyjmuje więc, że $X_n = r^n$ i rozwiązuję równanie rekurencyjne $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$, ale jest to postać ciągu Fibonacciego, zatem znamy już jego pierwiastki $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Jak rozwiązanie równania rekurencyjnego bez wyrazu wolnego było dane wzorem $x_n = ar_1^n + br_2^n$, co w przypadku równania $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$, dawało nam wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego, tak w przypadku równania z wyrazem wolnym, wzór na n-ty wyraz będzie dany wzorem $x_n = ar_1^n + br_2^n + c$, zatem w naszym przypadku jest to $x_n = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c$. Podstawiam pierwsze trzy wyrazy ciągu ($a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$) by otrzymać układ trzech równań z trzema niewiadomymi. Mamy

$$\begin{cases} a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c = 1 \\ a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c = 1 \\ a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + c = 3 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań liniowych, otrzymuję: $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $b = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ oraz $c = -1$. Zatem wzór na n-ty wyraz ciągu , gdzie $X_1 = X_2 = 1$ dany jest wzorem

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

Wystarczy jeszcze udowodnić to indukcyjnie.

1. Wzór oczywiście zachodzi dla $n = 1, 2, 3$.

2. Załóżmy więc, że wzór działa dla X_n oraz dla X_{n+1}. Musimy wykazać, że działa dla X_{n+2}. Mamy

$$X_{n+1} + X_n + 1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 + 1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right] \right] - 1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \right] \right] - 1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \right] - 1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) \right] - 1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] - 1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] - 1 = X_{n+2}$$

Zatem przez indukcję udowodniliśmy poprawność tego wzoru.

Zadanie 3.
Oblicz granice $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n^3}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln n}{n} = 3 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 0$$

Zadanie 4.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^3+2n)}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$0 < \frac{\ln(n^3 + 2n)}{\sqrt{n}} < \frac{\ln n^4}{\sqrt{n}} = \frac{3\ln n}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 4 \cdot 0 = 0$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^3+2n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Twierdzenie: (Stolza) Niech (y_n) będzie ciągiem monotonicznym (od pewnego miejsca). Załóżmy, ponadto, że zachodzi jeden z warunków

1. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

Wówczas jeśli ciąg $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)$ jest zbieżny, to zbieżny jest też ciąg $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

Zadanie 5.
Wykaż, że dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ i dowolnej liczby $\beta > 0$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n^\alpha}{n^\beta} = 0$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\ln n^\alpha}{n^\beta} = \frac{\alpha \cdot \ln n}{n^\beta} = \frac{\alpha \cdot \ln(n^\beta)^{\frac{1}{\beta}}}{n^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\ln n^\beta}{n^\beta} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{\alpha}{\beta} \cdot 0 = 0$$

Zadanie 6.
Wykaż, że jeśli ciąg x_n zbiega do 0, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1$.

Rozwiązanie:
Weźmy $t_n = e^{x_n} - 1$, wówczas $t_n + 1 = e^{x_n}$ oraz $x_n = \ln(t_n + 1)$. Gdy $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, to $t_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Mamy więc

$$\frac{t_n}{\ln(t_n+1)} = \frac{1}{\frac{1}{t_n} \cdot \ln(t_n+1)} = \frac{1}{\ln(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}}} \overset{t_n\to 0}{\to} \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

Ćwiczenia 12

Ciągi i ich granice

Fakt: Jeżeli $|x_n| \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$, to $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \overset{n\to\infty}{\to} e$

Dowód: x_n możemy rozbić na dwa podciągi $x_{n_1} \geq 0$ oraz $x_{n_2} < 0$. Oczywiście $x_{n_1} \overset{n_1\to\infty}{\to} +\infty$ oraz $x_{n_2} \overset{n_2\to\infty}{\to} -\infty$. Wiemy, że

$$\left(1+\frac{1}{x_{n_1}}\right)^{x_{n_1}} \overset{x_1\to\infty}{\to} e$$

Z kolei

$$\left(1+\frac{1}{x_{n_2}}\right)^{x_{n_2}} = \left(\left(1+\frac{-1}{-x_{n_2}}\right)^{-x_{n_2}}\right)^{-1} \overset{n_2\to\infty}{\to} \left(e^{-1}\right)^{-1} = e$$

Zatem z twierdzenia o scalaniu otrzymujemy $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. $\square$

Zadanie 1.
Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2\cdot+n^2}{n^3}$.

Rozwiązanie:
(n^3) jest ściśle monotoniczny i rozbieżny do $+\infty$, zatem spełnione są założenia Stolza. Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 2.
Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

Zadanie 3.
Ciąg a_n jest zbieżny do granicy g. Wykaż, że ciąg średnich arytmetycznych tego ciągu $s_n := (a_1+a_2+\ldots+a_n)\frac{1}{n}$ jest także zbieżny do g.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{1} = g$$

Zadanie 4.
Ciąg $a_n > 0$ jest zbieżny do granicy $g > 0$. Wykaż, że ciąg średnich geometrycznych tego ciągu $s_n := \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ jest także zbieżny do g.

Rozwiązanie:

Sposób I

Wiemy, że $x_n \overset{n\to\infty}{\to} g \Leftrightarrow \ln(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \ln(g)$. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \ln(a_{n+1}) = \ln g$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = g$.

Sposób II

Niech A to śrendnia arytmetyczna, G to średnia geometryczna, natomiast H to średnia harmoniczna. Wiemy, że

$$g \overset{n\to\infty}{\leftarrow} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = A \geq G \geq H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1} \overset{n\to\infty}{\to} g$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $G \overset{n\to\infty}{\to} g$.

Zadanie 5.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^3+5n+1)}{\ln(n^2+6n+5)}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^3+5n+1)}{\ln(n^2+6n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^3 \left(1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{\ln n^2 \left(1 + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln n + \ln\left(1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{2\ln n + \ln\left(1 + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3}{2}$$

Zadanie 6.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+3!+5!+\ldots+(2n-1)!}{2!+4!+\ldots+(2n)!}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 3! + \ldots + (2n-1)!}{2! + 4! + \ldots + (2n)!} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1! + \ldots + (2n-1)! + (2n+1)! - 1! - \ldots - (2n-1)!}{2! + \ldots + (2n)! + (2n+2)! - 2! - \ldots - (2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$$

Zadanie 7.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n})}{\ln(n)^2}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{n})}{\ln(n)^2} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt[n+1]{n+1}}{\ln(n+1)^2 - \ln)n)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt[n+1]{n+1}}{(\ln(n+1) + \ln(n))(\ln(n+1) - \ln(n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt[n+1]{n+1}}{(\ln(n^2+n))(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right))} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \ln(n+1)}{(\ln(n^2+n)^{\frac{1}{n}}) \cdot (\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \ln(n+1)}{\left(\frac{1}{n} \cdot \ln(n+1) + \frac{1}{n} \cdot \ln(n)\right) \cdot (\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n)} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

Zadanie 8.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$. Weźmy $t_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1$, wówczas $2^{\frac{1}{n}} = t_n + 1$ oraz $\frac{1}{n} = \log_2(t_n+1)$. Gdy $n \to \infty$, to $\frac{1}{n} \to 0$, czyli $t_n \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$. Mamy więc

$$\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{t_n}{\log_2(t_n+1)} = \frac{1}{\log_2(t_n+1)^{\frac{1}{t_n}}} \stackrel{t_n\to 0}{\to} \frac{1}{\log_2 e} = \ln 2$$

Ćwiczenia 13

Ciągi i ich granice

Twierdzenie (Bolzano-Weierstrassa) Z każdego ciągu ograniczonego (a_n) da się wybrać podciąg zbieżny.

Wniosek: Z każdego ciągu da się wybrać podciąg zbieżny (być może do granicy niewłaściwej).

Definicja: Dla każdego ciągu (a_n) przez $\omega(a_n)$ oznaczmy zbiór wszystkich punktów skupienia (inaczej zbiór wszystkich granic częściowych ciągu), a więc zbiór granic wszystkich zbieżnych podciągów ciągu (a_n).

Definicja: Granicą górną (odpowiednio dolną) ciągu (a_n) nazywamy liczbę

$$\limsup_{n\to+\infty} := \sup \omega(a_n) \quad \text{(odpowiednio } \liminf_{n\to+\infty} := \inf \omega(a_n))$$

Innymi słowy granica górna (odpowiednio dolna) to najmniejsze ograniczenie górne (odpowiednio największe ograniczenie dolne) zbioru wszystkich granic częściowych danego ciągu.

Zadanie 1.
Wyznacz zbiory punktów skupienia następujących ciągów $a_n = (-1)^n$, $b_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cdot \frac{\ln(2^n+2)}{\ln(3^n+2)}$.

Rozwiązanie:
Rozbiajmy (a_n) na dwa podciągi zbieżne: $a_{2n} = 1$ oraz $a_{2n+1} = -1$, zatem $\omega(a_n) = \{-1, 1\}$.

Rozbijamy (b_n) na podciągi zbieżne, $b_{3n} \to 0$, $b_{6n+1} \to \frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3}$, $b_{6n+2} \to \frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3}$, $b_{6n+4} \to -\frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3}$, $b_{6n+5} \to -\frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3}$ (sinus przyjmuje wartości $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n+1)}{\ln(3^n+1)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$). Zatem $\omega(b_n) = \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

Zadanie 2.
Wykaż, że w definicji granicy górnej (odpowiednio dolnej) supremum (odpowiednio infimum) możemy zastąpić przez maksimum (odpowiednio minimum).

Rozwiązanie:
Rozważmy cią g(a_n) i przez $\omega(a_n)$ oznaczmy zbiór jego punktów skupienia. Chcemy pokazać, że $\sup \omega(a_n) = \max \omega(a_n)$, czyli że $\omega(a_n)$ ma element maksymalny. Oznaczmy przez $g := \sup \omega(a_n)$. Z definicji kresu górnego, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje element $w \in \omega(a_n)$ taki, że $w > g - \varepsilon$. Innymi słowy, istnieje pewien podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) zbieżny do granicy $w > g-\varepsilon$. Ponieważ wyrazy tego podciągu mogą być dowolnie bliskie granicy w, znajdziemy wśród nich element (o dowolnie dużym indeksie) większy niż $w - \varepsilon > g - 2\varepsilon$. Konstruujemy podciąg ciągu (a_n) zbieżny do g. Pokażemy, że $\sup \omega(a_n) = g \in \omega(a_n)$. Konstrukacja będzie indukcyjna: a_{n_1} wybieramy dowolnie, natomiast w $(k+1)$-szym kroku wybieramy z ciągu (a_n) element $a_{n_{k+1}}$ o następujących własnościach: indeks

n_{k+1} jest większy niż poprzedzający indeks n_k, oraz $a_{n_{k+1}} > g - \frac{2}{k}$. Na mocy poprzednich rozważań, taki wybór jest możliwy. Na mocy wniosku z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa z ciągu a_{n_k} możemy wybrać podciąg zbieżny do granicy h (być może niewłaściwej). Z nierówności $a_{n_{k+1}} > g - \frac{2}{k}$ wynika, że $h \geq g$. Ponieważ $h \in \omega(a_n)$ (jako granica pewnego podciągu), zaś g było kresem górnym, musi zachodzić $h = g$. $\square$

Powyższe rozumowanie dość łatwo uogólnić na przypadek gdy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Zadanie 3.
Wykaż, że następujące warunki są równoważne

1) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = g$

2) a) dla dowolnie wybranego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze niż $g + \varepsilon$

   b) istnieje podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) zbieżny do g.

Rozwiązanie:
1) $\Rightarrow$ 2) 2b) wynika z 1) na mocy poprzedniego zadania. Pokażemy teraz, że zaprzeczenie 2a) pociąga za sobą zaprzeczenie 1). Istotnie, jeśli 2a) nie zachodzi, to dla pewnego $\varepsilon > 0$ w ciągu a_n istnieje nieskończenie wiele wyrazów większych niż $g + \varepsilon$. Na mocy wniosku z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, z tych wyrazów możemy wybrać podciąg zbieżny do granicy h (być może niewłaściwej), ponieważ wszystkie wyrazy tego podciagu były większe niż $g+\varepsilon$, na mocy twierdzenia o porównywaniu mamy $h \geq g + \varepsilon$. A zatem h jest elementem zbioru $\omega(a_n)$ większym niż g, więc g nie mogło być supremum tego zbioru.

2)$\Rightarrow$ 1) Niech (a_{n_k}) będzie podciągiem ciągu (a_n) zbieżnym do granicy h. Na mocy warunku 2a) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy podciągu (a_{n_k}) są mniejsze niż $g + \varepsilon$, zatem również granica spełnia $h \leq g + \varepsilon$. Z dowolności ε wnioskujemy, że $h \leq g$, a więc g jest ograniczeniem górnym zbioru granic częściowych $\omega(a_n)$. Z kolei z 2b) wynika, że w istocie $g = \max \omega(a_n)$. $\square$

Zadanie 4.
Niech (x_n) i (y_n) będą dowolnymi ciągami. Wykaż, że

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

Rozwiązanie:
Wiemy, że $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq g$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n są mniejsze niż $g + \varepsilon$. Oznaczmy przez $a := \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ oraz $b := \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wiemy, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są mniejsze niż $a + \frac{\varepsilon}{2}$ oraz prawie wszystkie wyrazy ciągu (y_n) są mniejsze niż $b + \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd wynika, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $(x_n + y_n)$ są mniejsze niż $a + b + \varepsilon$, a zatem

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq a + b = \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

Łatwo znaleźć kontrprzykład na równość w powyższej nierówności, na przykład dla $x_n = (-1)^n$ oraz $y_n = (-1)^{n+1}$ granice górne obu ciągów wynoszą 1, zaś $x_n + y_n = 0$.

Zadanie 5.
Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n}}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\ln\sqrt[n]{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}\cdot\ln n}-1}{\frac{1}{n}\ln n}\cdot\ln n$$

Mamy $\frac{1}{n}\cdot\ln n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, zatem $\frac{e^{\frac{1}{n}\cdot\ln n}-1}{\frac{1}{n}\ln n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$, czyli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\cdot\ln n}-1}{\frac{1}{n}\ln n}\cdot\ln n = +\infty$$

Ćwiczenia 14

Zbieżność szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich

Twierdzenie: (warunek Cauchy'ego) Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists n_\varepsilon\ \forall_{m,n>n_\varepsilon}\ |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Zadanie 1.
Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Ciąg (x_n) spełnia zależność rekurencyjną $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}$. Wykaż, że (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego i oblicz jego granice.

Rozwiązanie:

Sposób I
Mamy

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$$

Niech więc $x_n = r^n$, zatem mamy

$$r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(2r+1) = 0$$

Mamy więc $r = 1$ oraz $r = -\frac{1}{2}$. Ogólny wzór na rekurencję będzie wyglądał

$$x_n = A \cdot 1^n + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Po podstawieniu za $x_1 = a$ oraz za $x_2 = b$ otrzymujemy $B = \frac{2a-2b}{3}$ oraz $A = \frac{a+2b}{3}$. Zatem ogólny wzór na n-ty wyraz dany jest wzorem

$$x_n = \left(\frac{a+2b}{3} \cdot 1^n\right) + \left(\frac{2a-2b}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Jego granica przy $n \to \infty$ jest równa $\frac{a+2b}{3}$.

Sposób II
Obliczmy różnicę dwóch sąsiednich wyrażeń w module

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{x_n + x_{n+1}}{2} - x_{n+1}\right| = \left|\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right|$$

zatem każde kolejne jest równe połowie różnicy dwóch poprzednich. Zatem mamy

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \ldots = \left|\frac{x_2 - x_1}{2^n}\right| = \left|\frac{a-b}{2^n}\right|$$

Obliczmy teraz różnicę dwóch wyrazów oddalonych od siebie o m. Mamy

$$|x_{n+m} - x_n| = |(x_{n+m} - x_{n+m-1}) + (x_{n+m-1} - x_{n+m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)|$$

Jest to mniejsze z nierówności trójkąta od

$$|a-b|\left(\frac{1}{2^{n+m-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=|a-b|\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}\right)$$

co z kolei jest mniejsze od

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2|a-b|<\varepsilon$$

zatem ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego. Obliczmy teraz granicę tego wyrażenia. Różnica dwóch sąsiednich wyrażeń wynosi

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n+1}}{2}-x_{n+1}=\frac{x_n-x_{n+1}}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x_{n+1}-x_n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(x_n-x_{n-1})=$$

$$=\ldots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot(b-a)$$

Zatem mamy

$$x_{n+1}-x_1=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\ldots+(x_2-x_1)=$$

$$=(b-a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(b-a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\ldots+(b-a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}=$$

$$=(b-a)\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=(b-a)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\overset{n\to\infty}{\to}\frac{2}{3}(b-a)$$

Zatem

$$x_{n+1}\overset{n\to\infty}{\to}a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{2b+a}{3}$$

Ćwiczenia 15

Zbieżność szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich

Twierdzenie: (Kryterium porównawcze 1) Załóżmy, że ciągi o wyrazach nieujemnych (a_n) i (b_n) spełniają (dla dostatecznie dużych n) nierówność $a_n < b_n$. Wówczas

- jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $\sum a_n$.
- jeśli szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest również szereg $\sum b_n$.

O jakich szeregach wiemy, że są zbieżne/rozbieżne. - $\sum \frac{1}{n}$ - rozbieżny - $\sum \frac{1}{n^s}$ - rozbieżny gdy $s \leq 1$ i zbieżny gdy $s > 1$ - $\sum \frac{1}{q^n}$ - rozbieżny gdy $|q| \leq 1$ i zbieżny gdy $|q| > 1$

Twierdzenie: (warunek konieczny zbieżności) Gdy szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Zadanie 1.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+(-1)^n}{6}\right)^n$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+(-1)^n}{6}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

zatem na mocy kryterium porównawczego 1, szereg ten jest zbieżny.

Zadanie 2.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+3(-1)^n}{6}\right)^n$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Zauważmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+3(-1)^n}{6}\right)^n \geq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{7}{6}\right)^2\right)^n$$

Mamy $\left(\frac{7}{6}\right)^2 > 1$, zatem szereg ten jest rozbieżny.

Sposób II

Nie jest spełniony warunek konieczności zbieżności, zatem szereg ten jest rozbieżny.

Twierdzenie: (Kryterium porównawcze 2) Dla szeregów o wyrazach dodatnich $\sum a_n$ i $\sum b_n$, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g > 0$, to oba szeregi są albo równocześnie zbieżne, albo równocześnie rozbieżne. W przypadku gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, wówczas:

- jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $\sum a_n$.
- jeśli szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest również szereg $\sum b_n$.

Gdy zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ to:

- jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $\sum a_n$.
- jeśli szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest również szereg $\sum b_n$.

Zadanie 3.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{n^3+4n-3}$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Zauważmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{n^3+4n-3} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ponieważ $\frac{n^2+n+5}{n^3+4n-3} > \frac{1}{n}$. Zatem na mocy kryterium porównawczego 1 szereg ten jest rozbieżny.

Sposób II
Niech $a_n = \frac{n^2+n+5}{n^3+4n-3}$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$, wówczas

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+n^2+5n}{n^3+4n-3} \overset{n\to\infty}{\to} 1$$

Jako, że szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny to na mocy kryterium porównawczego 2, szereg $\sum a_n$ również jest rozbieżny.

Zadanie 4.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Niech $a_n = \sqrt[n]{2} - 1$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$, wówczas $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}$. Niech $x_n = \sqrt[n]{2} - 1$, wówczas mamy

$$\sqrt[n]{2} = x_n + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln 2 = \ln(x_n + 1) \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + x_n)}$$

Mamy więc

$$\frac{a_n}{b_n} = x_n \cdot \frac{\ln 2}{\ln(1 + x_n)} = \frac{\ln 2}{\ln(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}}}$$

Zauważmy, że $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, zatem $\frac{\ln 2}{\ln(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{\ln 2}{\ln e} = \ln 2$.

Sposób II

Niech $a_n = \sqrt[n]{2} - 1$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$, wówczas

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 1}{\frac{1}{n}\ln 2} \overset{n\to\infty}{\to} \ln 2$$

Zatem na mocy kryterium porównawczego 2, szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Zadanie 5.

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)^{\beta}$ w zależności od wartości paramateru β.

Rozwiązanie:

Mamy

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)^{\beta} = \left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)^{\beta}$$

Niech więc $a_n = \left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1.5}}\right)\right)^{\beta}$ oraz $b_n n^{1.5\beta}$, wówczas mamy

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)^{\beta}}{n^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{\beta} \overset{n\to\infty}{\to} 1^{\beta} = 1$$

zatem jako, że szereg $\sum b_n$ jest zbieżny gdy $\frac{3}{2}\beta < -1 \Leftrightarrow \beta < -\frac{2}{3}$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny gdy $\beta < -\frac{2}{3}$

Zadanie 6.

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^{1001}}{1{,}001^n}$.

Rozwiązanie:

Dla dostatecznie dużych n zachodzi

$$1,001^n > n^{1003} \Leftrightarrow \frac{n^{1001}}{1,001^n} < \frac{1}{n^2}$$

zatem dla dostatecznie dużych n mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{1001}}{1,001^n} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Zatem z kryterium porównawczego 1 szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^{1001}}{1{,}001^n}$ jest zbieżny.

Twierdzenie: (Kryterium D'Alemberta (ilorazowe)). Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich spełniających warunek $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Wówczas

- jeżeli $g < 1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,
- jeżeli $g > 1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny,

Twierdzenie: (Kryterium Cauchy'ego (pierwiastkowe)). Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich spełniających warunek $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. Wówczas

- jeżeli $g < 1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,
- jeżeli $g > 1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny,

Rozwiążmy poprzednie zadanie korzystając z kryterium D'Alemberta i kryterium Cauchy'ego. Niech $a_n = \frac{n^{1001}}{1{,}001^n}$, wówczas z kryterium D'Alemberta mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{1001}}{1{,}001^{n+1}}}{\frac{n^{1001}}{1{,}001^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1001} \cdot \frac{1}{1,001} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1,001} < 1$$

zatem szereg jest zbieżny. Z kryterium Cauchy'ego mamy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{1001}}{1,001^n}} = \frac{1}{1,001} \cdot \sqrt[n]{n^{1001}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1,001} \cdot 1 < 1$$

zatem szereg jest zbieżny.

Zadanie 7.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right)^n$.

Rozwiązanie:
Policzmy iloraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(3-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(3-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1-\frac{\frac{1}{3}}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\frac{1}{3}}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{3} < 1$$

zatem na mocy kryterium D'Alemberta szereg ten jest zbieżny.

Zadanie 8.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})^n}$.

Rozwiązanie:
Niech $a_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$, wówczas

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e} > 0$$

zatem szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Ćwiczenia 16

Zbieżność szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich

Zadanie 1.
Zbadaj zbieżność szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Rozwiązanie:
Zbadajmy zbieżność pierwszego szeregu. Niech $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, wówczas mamy z kryterium D'Alemberta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+3n+2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{4} < 1$$

zatem szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Zbadajmy zbieżność drugiego szeregu. Niech $a_n = \frac{n!}{n}$, wówczas z kryterium D'Alemberta mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1$$

zatem szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 2.
Zbadaj zbieżność szeregów

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{\ln n}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{4}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right)^n}{4^n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

Rozwiązanie:

a) Mamy $\frac{n}{10^{\ln n}} = \frac{n}{(e^{\ln 10})^{\ln n}} = \frac{n}{(e^{\ln n})^{\ln 10}} = \frac{n}{n^{\ln 10}} = \frac{1}{n^{\ln 10 - 1}}$. Mamy $\ln 10 - 1 > 1$, zatem szereg ten na mocy kryterium porównawczego 1 jest zbieżny.

b) Niech $a_n == \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{4}}$, wówczas $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{4}}} = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{4}} \overset{n\to\infty}{\to} \sqrt[4]{\frac{2}{3}} < 1$, zatem z kryterium Cauchy'ego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

c) Zauważmy, że $1 > \frac{1}{n^2\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 1$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\frac{1}{n^2\sqrt[n]{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 1$. Szereg ten nie spełnia więc kryterium zbieżności.

d) Niech $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$, wówczas $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} e^{-1} < 1$, zatem z kryterium Cauchy'ego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

e) Niech $a_n = \frac{1000^n}{n!}$, wówczas $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0 < 1$, zatem z kryterium D'Alemberta szereg jest zbieżny.

f) Niech $a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right)^n}{4^n}$, wówczas $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{4}\right)^n}{4^n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right)}{4} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{4} < 1$, zatem z kryterium Cauchy'ego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

g) Niech $a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} = \frac{2}{n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}$ oraz niech $b_n = \frac{1}{n}$, wówczas $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{1+1} = 1$, zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Zadanie 3.
Wykaż, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. To zadanie dowodzi, że kryterium Cauchy'ego jest co najmniej tak silne jak kryterium D'Alemberta.

Rozwiązanie:

Sposób I
Mamy $\ln(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{a_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}$. Korzystając z twierdzenia Stolza (n jest ściśle monotoniczny), mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln a_{n+1} - \ln a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, zatem oczywiście jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

Sposób II
Wiemy, że jeśli ciąg $a_n > 0$ jest zbieżny do granicy $g > 0$, to ciąg średnich geometrycznych tego ciągu $s_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ jest także zbieżny do g. Jeżeli $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{n\to\infty}{\to} g$, to mamy $\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_0}} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} \overset{n\to\infty}{\to} g$, przy czym $\sqrt[n]{a_0} \overset{n\to\infty}{\to} 1$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

Twierdzenie: (o zagęszczaniu) Niech (a_n) będzie malejącym ciągiem liczb dodatnich. Wówczas szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum 2^n a_n$.

Twierdzenie: (Uogólnione twierdzenie o zagęszczaniu) Załóżmy, że

- $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest funkcją niemalejącą;
- (y_k) jest rosnącym ciągiem liczb dodatnich, rozbieżnym do $+\infty$;
- istnieje stała dodatnia $C \in \mathbb{R}_+$, taka że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{y_k - y_{k-1}} \leq C$$

Wówczas szereg $\sum_n f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_k (y_{k+1} - y_k) f(y_k)$$

Zadanie 4.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^p}$ w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Korzystając z twierdzenia o zagęszczaniu możemy napisać, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot (\ln 2^n)^p}$ jest zbieżny. Zbadajmy zatem zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot (\ln 2^n)^p}$. Mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot (\ln 2^n)^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2^n)^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny, gdy $p > 1$ i rozbieżny gdy $p \leq 1$. Zatem szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^p}$ jest zbieżny $p > 1$, gdy i rozbieżny gdy $p \leq 1$.

Zadanie 5.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n)^n \frac{1}{n + 2^n}$.

Rozwiązanie:
Dla n parzystego mamy $(1-(-1)^n)^n \cdot \frac{1}{n+2^n} = 0$, natomiast dla n nieparzystego mamy $(1-(-1)^n)^n \cdot \frac{1}{n+2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{n+2^n} = \left(1 - \frac{n}{2^n+n}\right) \overset{n\to\infty}{\to} 1$. Szereg ten nie spełnia kryterium zbieżności, zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (10(-1)^n)^n \frac{1}{n+2^n}$ jest rozbieżny.

Zadanie 6.
Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$. Jako, że ciąg n jest ściśle monotoniczny, toteż z twierdzenia Stolza mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} - \ln \frac{n!}{n^n}}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \ln \frac{1}{e}$. Zatem skoro $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \ln \frac{1}{e}$., toteż $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Ćwiczenia 17

Zbieżność szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich

Zadanie 1.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n)}$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Korzystając z twierdzenia o zagęszczaniu możemy napisać, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n)}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n \frac{1}{e^n \cdot \ln(e^n) \cdot \ln(\ln e^n)}$ jest zbieżny. Zbadajmy zatem zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \frac{1}{e^n \cdot \ln(e^n) \cdot \ln(\ln e^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(e) \cdot \ln(n \ln e)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$$

Ten szereg jest jednak rozbieżny, zatem rozbieżny jest również szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n)}$.

Sposób II

Korzystając z twierdzenia o zagęszczaniu możemy napisać, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n)}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n) \cdot \ln(\ln 2^n)}$ jest zbieżny. Zbadajmy zatem zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n) \cdot \ln(\ln 2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2) \cdot \ln(n) \cdot \left(1 + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln n}\right)}$$

Niech więc $a_n = \frac{1}{n \ln(2) \cdot \ln(n) \cdot \left(1 + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln n}\right)}$ oraz $b_n = \frac{1}{n \ln n}$, wówczas

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot \left(1 + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln n}\right)} = \frac{1}{\ln 2} > 0$$

Jako, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ jest rozbieżny, toteż rozbieżny jest również szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n)}$.

Uogólnijmy poprzednie zadanie. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n)^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leq 1$. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n) \cdot [\ln(\ln(\ln n))]^p}$ również jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leq 1$. itd.

Zadanie 2.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$ w zależności od parametru α, korzystając z kryterium zagęszczającego.

Rozwiązanie:
Szereg może być zbieżny jedynie dla $\alpha > 0$, gdyż w przeciwnym przypadku nie byłby spełniony warunek zbieżności szeregu. Sprawdźmy czy ciąg o wyrazie $\frac{\ln n}{n}$ jest malejący. Mamy

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} \Leftrightarrow \frac{\ln n}{\ln(n+1)} > \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \ln(n)^{n+1} > \ln(n+1)^n$$

Z monotoniczności logarytmu, wystarczy udowodnić, że $n^{n+1} > (n+1)^n$, co już kiedyś udowodniliśmy ($n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$). Zatem udowodniliśmy, że ciąg o wyrazie $\frac{\ln n}{n}$ jest malejący. Innym sposobem na udowodnienie tego, że ciąg o wyrazie $\left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$ jest malejący to zauważenie, że $\left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha = (\ln \sqrt[n]{n})^\alpha$, co jest oczywiście malejące. Zatem skoro wyrazy szeregu są malejące, to możemy zastosować twierdzenie o zagęszczaniu. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^\alpha$ jest zbieżny. Przyjrzyjmy się szeregowi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^\alpha$. Mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n\ln 2)^\alpha}{(2^{\alpha-1})^n}$. Z kryterium Cauhcy'ego mamy $\sqrt[n]{\frac{(n\ln 2)^\alpha}{(2^{\alpha-1})^n}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^\alpha$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha < 1$. Musimy się jeszcze przyjrzeć szeregowi dla $\alpha = 1$ (gdyż korzystając z kryterium Cauchy'ego przeszliśmy do granicy). Dla $\alpha = 1$ mamy $2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^\alpha = n \ln 2$. Jest to ciąg rosnący, zatem dla $\alpha = 1$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^\alpha$ jest rozbieżny.

Zadanie 3.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ w zależności od parametru α.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} - 1\right)^\alpha}{\left(\ln n^{\frac{1}{n}}\right)^\alpha} \cdot \left(\ln n^{\frac{1}{n}}\right)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} - 1\right)^\alpha}{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha} \cdot \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$$

Niech więc $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ oraz $b_n = \left(\ln n^{\frac{1}{n}}\right)^\alpha$, wówczas $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(\sqrt[n]{n}-1)^\alpha}{\left(\ln n^{\frac{1}{n}}\right)^\alpha} \overset{n\to\infty}{\to} 1$. Szereg $\sum b_n$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leq 1$, zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leq 1$.

Zadanie 4.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n10^{\ln(\ln n)}}$.

Rozwiązanie:
Ciąg o wyrazie $\frac{1}{n10^{\ln(\ln n)}}$ jest malejący, zatem z twierdzenia o zagęszczaniu szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n10^{\ln(\ln n)}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} e^n \frac{1}{e^n 10^{\ln(\ln e^n)}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^{\ln(n)}}$. Mamy

$\frac{1}{10^{\ln(n)}} = \frac{1}{e^{\ln 10 \cdot \ln(n)}} = \frac{1}{n^{\ln 10}}$. Logarytm naturalny z dziesięciu jest większy od jednego, zatem szereg $\sum_{n=2}^{\infty} e^n \frac{1}{e^n 10^{\ln(\ln e^n)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 10}}$ jest zbieżny. Zbieżny jest zatem szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n 10^{\ln(\ln n)}}$.

Zadanie 5.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\ln n^{\ln n}}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n^{\ln n})} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln n)^2}$. Z kryterium D'Alemberta mamy $\frac{2^{n+1}}{(\ln(n+1))^2} \cdot \frac{(\ln n)^2}{2^n} = \frac{2}{\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^2} \xrightarrow{n \to \infty} 2 > 1$.
Zatem szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\ln n^{\ln n}}$ jest zbieżny.

Zadanie 6.
Podaj przykład szeregu, dla którego Kryterium Cauchy'ego rozstrzyga o zbieżności (istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1$), natomiast kryterium D'Alemberta takiej odpowiedzi nie daje (granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie istnieje).

Zadanie 7.
Podaj przykład szeregów zbieżnego i rozbieżnego, dla których odpowiednia granica z kryterium Cauchy'ego i kryterium D'Alemberta wynosi 1.

Zadanie 8.
Zbadaj zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$ oraz $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)}$ w zależności od parametu α.

Zadanie 9.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln n (\ln n))^2}$.

Ćwiczenia 18

Zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych

Od tej pory będziemy zajmować się szeregami o wyrazach dowolnych, to znaczy niekoniecznie dodatnich. Tak jak poprzednio szereg $\sum a_n$ nazwiemy zbieżnym, gdy zbieżny jest jeho ciąg sum częściowych $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, gdy zbieżny jest szereg wartości bezwzględnych $\sum |a_n|$. Zbieżność bezwzględna implikuje zbieżność w zwykłym sensie, ale są przykłady szeregów zbieżnych, które nie są zbieżne bezwzględnie. Mówimy wówczas o zbieżności warunkowej. Wyrazy szeregu zbieżnego bezwzględnie, możemy swobodnie przestawiać bez zmiany sumy. Nie należy tego robić przy szeregu zbieżnym warunkowo, bo przestawiając odpowiednio jego wyrazy, możemy otrzymać dowolną (skończoną bądź nieskończoną) sumę.

Twierdzenie: (Abela) Rozważmy ciągi (a_n) oraz (b_n). Przez $A := \sum_{k=1}^{n} a_k$ oznaczamy ciąg jego sum częściowych ciągu (a_n) wówczas jeśli:

- ciąg A_n jest ograniczony
- szereg $\sum(b_{n+1} - b_n)$ jest zbieżny bezwzględnie

to szereg $\sum(a_n \cdot b_n)$ jest zbieżny.

W praktyce zazwyczaj stosuje się następujące wnioski z twierdzenia Abela.

Twierdzenie: (Kryterium Abela) Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a ciąg b_n jest monotoniczny i ograniczony z góry, to szereg $\sum(a_n \cdot b_n)$ jest zbieżny.

Twierdznie: (Kryterium Dirichleta) Jeśli ciąg sum częściowych $A := \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest ograniczony, a ciąg (b_n) jest monotonicznie zbieżny do 0, to szereg $\sum(a_n \cdot b_n)$ jest zbieżny.

Twierdzenie: (Kryterium Liebniza) Niech (a_n) będzie ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0. Wówczas szereg $\sum(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 1.
Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że dla n parzystego mamy $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ gdzie $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > 0$, natomiast dla n nieparzystego mamy $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, gdzie $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < 0$. Zbadajmy zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Mamy $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\to} 1$, zatem z kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ jest zbieżny. Skoro

$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\to} 1$, toteż $\left|\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 1$. Zatem skoro $\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\to} 1$, toteż $\left|\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 1$, czyli szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ jest zbieżny. Zatem szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ jest zbieżny bezwzględnie, czyli jest też zbieżny warunkowo.

Zadanie 2.
Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Rozwiązanie:
Mamy $\left|\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 1$, zatem skoro szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, toteż rozbieżny jest też szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right|$, zatem szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ nie jest zbieżny bezwzględnie. Szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ jest naprzemienny (znaki zmieniają się co jeden wyraz). Sprawdźmy, czy szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ten spełnia kryterium Liebniza, czyli czy ciąg $|a_n|$ gdzie $a_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ jest zbieżny do 0. Musimy rozpatrzeć dwa przypadki, gdy a_n jest dodatnie i gdy a_n jest ujemne. Gdy a_n jest dodatnie to mamy $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, wówczas a_{n-1} jest ujemne, czyli $-a_{n-1}$ jest dodatnie. $-a_{n-1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n-1}\right) = -\ln\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n-2}\right)$ czyli $|a_n| - |a_{n-1}| = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n^2-n-2}{n^2-n}\right)$. Wyrażenie $\frac{n^2-n-2}{n^2-n}$ jest mniejsze od 1, zatem $\ln\left(\frac{n^2-n-2}{n^2-n}\right) < 0 \Leftrightarrow |a_n| < |a_{n-1}|$. Chcemy aby ciąg był malejący, zatem chcemy wiedzieć, czy $\frac{n-2}{n-1} > \frac{n+1}{n}$, czyli $n^2-n > n^2-n-2 \Leftrightarrow 0 > -2$. Ponadto każdy wyraz ciągu jest dodatni. Gdy a_n jest ujemne, to $-a_n$ jest dodatnie. Mamy $-a_n = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$, wówczas a_{n-1} jest dodatnie, czyli $a_{n-1} = \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$, zatem $|a_n| - |a_{n-1}| = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$. Pokazaliśmy, że $|a_n|$ jest nierosnący i zbieżny do 0. Zatem z kryterium Liebniza szereg $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo. Zbieżny jest zatem warunkowo szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Zadanie 3.
Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$.

Rozwiązanie:
Ciąg o wyrazie $\sqrt[n]{n}-1$ jest nierosnący (dla $n > 3$) i zbieżny do 0, zatem z kryterium Liebniza szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$ jest zbieżny. Szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ jest rozbieżny, zatem szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$ nie jest zbieżny bezwzględnie. Jest zbieżny warunkowo.

Zadanie 4.
Podaj przykład szeregu pokazującego, że w twierdzeniu o nawiasowaniu, założenie o tym że nawiasy są skończonej długości jest konieczne.

Rozwiązanie:
Przykładowy szereg to

$$\sum a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + +\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Rozstawiając nawiasy kolejno długości $2, 4, 8$ itd. dostaniemy szereg zbieżny $\sum 0$. Tymczasem w wyjściowym szeregu występują sekwencje $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 1$, a więc nie jest spełniony warunek Cauchy'ego.

Zadanie 4.
Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$

Rozwiązanie:

Sposób I
Szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie, bo $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Po nawiasujmy wyrażenia. Mamy $\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2}\ln 2$. Ale czy możemy po nawiasować? Kolejne wyrazy szeregu $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$ to sumy $S_2, S_3, S_5, S_6, S_8, S_9, \ldots$ szeregu wyjściowego. Co się dzieje z sumami o indeksach $3k+1$. Mamy $S_1 = 1, S_4 = S_3 + \frac{1}{3}, S_7 = S_6 + \frac{1}{5}, \ldots$ i ogólnie $S_{3k+1} = S_{3k} + \frac{1}{2k+1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\ln 2 + 0 = \frac{1}{2}\ln 2$, zatem te suma również jest zbieżna. Zatem zbieżny jest warunkowo szereg $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$.

Sposób II
Twierdzenie o nawiasowaniu mówi nam, że możemy po nawiasować wyrazy szeregu, gdyż kolejne wyrazy szeregu dążą do zera.

Zadanie 5.
Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Rozwiązanie:
Z kryterium Cauchy'ego mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{(\ln n)^{\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(\ln n)^{\ln n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(\ln n)^{\frac{\ln n}{n}}}$. Obliczmy więc granicę wyrażenia $(\ln n)^{\frac{\ln n}{n}}$. Wiemy, że jeśli $x_n \overset{n\to\infty}{\to} g \Leftrightarrow \ln(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \ln g$, zatem policzmy granicę wyrażenia $\ln\left((\ln n)^{\frac{\ln n}{n}}\right)$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left((\ln n)^{\frac{\ln n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \ln(\ln n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$$

zatem jako, że $\ln\left((\ln n)^{\frac{\ln n}{n}}\right) \geq 0$, toteż z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left((\ln n)^{\frac{\ln n}{n}}\right) = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(\ln n)^{\frac{\ln n}{n}}} = \frac{2}{1} = 2 > 1$, skąd wnioskujemy, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln n)^{\ln n}}$ jest rozbieżny.

Ćwiczenia 19

Zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych

Zadanie 1.
Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$

Rozwiązanie:
Szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie, bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Niech $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{2-n^2}{n^3+3n^2+2n} \approx -\frac{1}{n}$, zatem dla dostatecznie dużych n wszystkie wyrazy ciągu b_n są mniejsze od zera. Ponawiasujmy nasz szereg $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \ldots$. Wartości w nawiasie to wartości podciągu b_{3n+1}. Skoro dla dostatecznie dużych n wszystkie wyrazy ciągu b_n są mniejsze od zera, to dla dostatecznie dużych n wszystkie wyrazy ciągu $-b_n$ są większe od zera, czyli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -b_{3n+1}$ jest szeregiem (dla dostatecznie dużych n) o wyrazach dodatnich. Zbadajmy więc jego zbieżność. Z kryterium porównawczego $\frac{-b_{3n+1}}{\frac{1}{3n+1}} = 1$, zatem jako, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ jest rozbieżny, toteż szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -b_{3n+1}$ jest rozbieżny, a to jest równoważne z tym, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{3n+1}$ jest rozbieżny. Zauważmy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{3n+1}$ to podciąg S_{3n} ciągu S_n sum częściowych szeregu $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$, a więc skoro S_{3n} jest rozbieżny, to S_n jest rozbieżny, czyli szereg $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$ jest rozbieżny.

Twierdzenie: (O nawiasowaniu) Niech a_n będzie ciągiem zbieżnym do 0. Rozważmy dowolny rosnący ciąg liczb naturalnych l_n (ten ciąg będzie mówił jak rozstawiamy nawiasy), gdzie $l_0 = 0$ i zdefiniujmy $A_n := a_{l_{n-1}+1} + a_{l_{n-1}+2} + \ldots + a_{l_n}$. Jeżeli ciąg $l_{n+1} - l_n$ jest ograniczony (czyli nawiasy są ograniczonej szerokości), to szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum A_n$ są albo równocześnie zbieżne, albo rozbieżne (i mają tę samą sumę).

Innymi słowy, jeżeli ciąg a_n spełnia warunek konieczny zbieżności i pogrupujemy wyrazy szeregu w nie za duże paczki, to zbieżność/rozbieżność się nie zmieni.

Uwaga 1: Niezależnie od tego jak rozstawiamy nawiasy (bez dodatkowych założeń o ciągu l_n) jeżeli $\sum A_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny będzie także $\sum a_n$. Jest to jasne, bo ciąg sum częściowych szeregu $\sum A_n$ to podciąg sum częściowych szeregu $\sum a_n$.

Uwaga 2: Przykład, że w twierdzeniu i nawiasowaniu założenie o tym, że nawiasy są skończonej długości jest konieczne:

$$\sum a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Rozstawiając nawiasy kolejno długości $2, 4, 8$ itd. dostajemy szereg $\sum 0$. Tymczasem w wyjściowym szeregu występują sekwencje $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 1$, a więc nie jest spełniony warunek Cauchy'ego.

Zadanie 2.

Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\frac{1}{n}$.

Rozwiązanie:
Rozpiszmy ten szereg $(1)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots\right)$. Szereg ten nie jest oczywiście zbieżny bezwzględnie, ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Sposób I
Jeżeli po nawiasujemy wyrazy tego samego znaku, to szereg po nawiasowany ma wyrazy większe od $\frac{1}{2}$ co do modułu. Zatem szereg po nawiasowany nie jest zbieżny, a zatem skoro ciąg sum częściowych szeregu po nawiasowanego jest podciągiem ciągu sum częściowych szeregu wyjściowego, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Sposób II
Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\frac{1}{n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego, bo $|a_{2^k}+\ldots+a_{2^{k+1}-1}|>\frac{1}{2}$, zatem jest rozbieżny.

Twierdzenie: (Kryterium Raabe'go) Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich. Załóżmy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówności $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$. Wówczas szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Jeżeli dla dostatecznie dużych n zachodzą nierówności $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Zadanie 3.
Korzystając z kryterium Raabe'go zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{(1+p)(2+p)\cdot\ldots\cdot(n+p)}$. w zależności od parametru $p\in\mathbb{R}_+$.

Rozwiązanie:
Zobaczmy co nam daje kryterium D'Alemberta. Niech $a_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{(1+p)\cdot(2+p)\cdot\ldots\cdot(n+p)}$, wówczas mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n+1+p}\overset{n\to\infty}{\to}1$. Zatem to kryterium nie rozstrzyga zbieżności. Z kryterium Raabe'go mamy $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}-1}\right)=n\cdot\left(\frac{n+1+p}{n+1}-1\right)=\frac{n\cdot p}{n+1}\overset{n\to\infty}{\to}p$. Jeżeli $p>1$ to szereg jest zbieżny, natomiast dla $p<1$ szereg jest rozbieżny. Dla $p=1$ mamy $a_n=\frac{1}{n+1}$, zatem również wtedy szereg jest rozbieżny.

Ćwiczenia 20

Zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych

Zadanie 1.
Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor \ln(\ln(n^2+\exp\left(\frac{n^2+5}{n\sqrt{n}+8}\right))+1)\rfloor}\frac{1}{(n+1)^2}$.

Rozwiązanie:
Zbadajmy zbieżność bezwzględną tego szeregu

$$\left|(-1)^{\lfloor \ln(\ln(n^2+\exp\left(\frac{n^2+5}{n\sqrt{n}+8}\right))+1)\rfloor}\frac{1}{(n+1)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}$$

zatem szereg ten jest zbieżny bezwzględnie. Jest więc też zbieżny warunkowo.

Zadanie 2.
Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n}$.

Rozwiązanie:
Rozpiszmy szereg $-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots\right)$. Zdefiniujmy więc ciąg

$$b_n := \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}$$

Po scaleniu wyrazów tego samego znaku dostajemy szereg naprzemienny $\sum(-1)^k b_k$, którego sumy częściowe to sumy postaci S_{k^2-1} szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n}$. Niech $x_n=(-1)^n$ oraz $y_n=b_n$. Zbadajmy zbieżność szeregu $\sum|b_k-b_{k+1}|$. W tym celu rozważmy dwa przypadki. Mamy

$$b_{n+1}-b_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+4n+3}-\left(\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n}\right)$$

zatem mamy

$$b_{n+1}-b_n \le \frac{2n+3}{(n+1)^2}-\frac{2n+1}{n^2+2n} \le \frac{2n+3}{(n+1)^2}-\frac{2n+1}{n^2+2n+1} = \frac{2n+3}{(n+1)^2}-\frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{2}{(n+1)^2} < \frac{10}{n^2}$$

oraz mamy

$$b_n-b_{n+1} = \frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n}-\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+4n+3}\right)$$

zatem mamy

$$b_n-b_{n+1} \le \frac{2n+1}{n^2}-\frac{2n+3}{(n+2)^2} = \frac{(2n+1)(n+2)^2-n^2(2n+3)}{n^2\cdot(n^2+4n+4)} = \frac{6n^2+12n+4}{n^4+4n^3+4n^2} < \frac{10}{n^2}$$

Zatem $|b_k-b_{k+1}|<\frac{10}{n^2}$. Sumy częściowe szeregu $\sum(-1)^k$ są organizowane, natomiast szereg $\sum|b_k-b_{k+1}|$ jest zbieżny, zatem z twierdzenia Abela, szereg $\sum(-1)^k b_k$ jest zbieżny. Pokażmy, że ze zbieżności szeregu po nawiasowanego wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n}$. Zauważmy, że zachodzą nierówności $S_1 > S_2 > S_3 < S_4 < S_5 < S_6 < S_7 < S_8 > S_9 > \ldots$, a zatem $S_n \in \left[S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2-1},\ S_{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)^2-1}\right]$. Skoro $\sum(-1)^k b_k$ jest zbieżny, to S_{k^2-1} też jest zbieżny, czyli szeregi $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2-1}, S_{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)^2-1}$ są zbieżne (do tej samej granicy), zatem z twierdzenia o trzech ciągach S_n też jest zbieżny. Zatem jest zbieżny szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n}$.

Mnożenie szeregów

Definicja: Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, którego n-tym wyrazem jest $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0$.

Twierdzenie: (Mertens'a) Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich bezwzględnie, to zbieżny jest ich iloczyn Cauchy'ego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ i ponadto

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Ponadto jeśli oba szeregi są zbieżne bezwzględnie, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ też jest zbieżny bezwzględnie.

Uwaga: Iloczyn dwóch szeregów warunkowo zbieżnych nie musi być zbieżny, ale jeśli jest zbieżny, to do iloczynu sum wyjściowych szeregów.

Zadanie 3.
Oblicz iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Rozwiązanie:
Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$. Mamy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 \cdot q^n + q^1 \cdot q^{n-1} + q^2 \cdot q^{n-2} + \ldots + q^n \cdot 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$.

Zadanie 4.
Oblicz sumę $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$ dla $|q| < 1$.

Rozwiązanie:
Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$. Mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot q^n + q^1 \cdot q^{n-1} + q^2 \cdot q^{n-2} + \ldots + q^n \cdot 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$$

Ponadto $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \left(\frac{1}{1-q}\right)$, zatem z drugiej strony

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2$$

Zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-1)q^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2 - \frac{1}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Zadanie 5.
Korzystając z kryterium Raabe'go zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+n)}{q(q+1)(q+2)\cdot\ldots\cdot(q+n)}$.

Rozwiązanie:
Niech $a_n = \frac{p(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+n)}{q(q+1)(q+2)\cdot\ldots\cdot(q+n)}$. Z kryterium Raabe'go mamy

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \left(\frac{q+n+1}{p+n+1} - 1\right) = n \cdot \frac{q-p}{p+n+1} \overset{n\to\infty}{\to} q-p$$

Zatem szereg jest zbieżny, gdy $q-p > 1 \Leftrightarrow q > p+1$ oraz rozbieżny, gdy $q-p < 1 \Leftrightarrow q < p+1$. W przypadku, gdy $q-p = 1 \Leftrightarrow q = p+1$ mamy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+n)}{q(q+1)(q+2)\cdot\ldots\cdot(q+n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p}{p+n+1}$. Szereg tej postaci jest rozbieżny.

Zadanie 6.
Wykaż, że iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^n - r^n}{q-r}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^{n-k} \cdot r^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{q^k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \frac{1 - \frac{r^{n+1}}{q^{n+1}}}{1 - \frac{r}{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q-r}$$

Ćwiczenia 21

Granica i ciągłość funkcji

Funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej $z \in \mathbb{C}$ nazywamy wspólną granicę ciągów

$$\exp(z) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Zauważmy, że na mocy kryterium D'Alemberta, rozważany szereg jest zbieżny bezwzględnie dla każdego ustalonego $z \in \mathbb{C}$. Tak zdefiniowany eksponens zespolony ma szereg standardowych własności zwykłego eksponensa, jak też kilka innych:

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \exp(z+w), \quad \exp(z)^{-1} = \exp(-z), \quad \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}), \quad |\exp(z)| = \exp(|\mathrm{Re}(z)|)$$

Przy użyciu funkcji eksponens możemy zdefiniować funkcje trygonometryczne sinus i cosinus dla argumentu $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) := \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad \text{oraz} \quad \cos(x) := \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

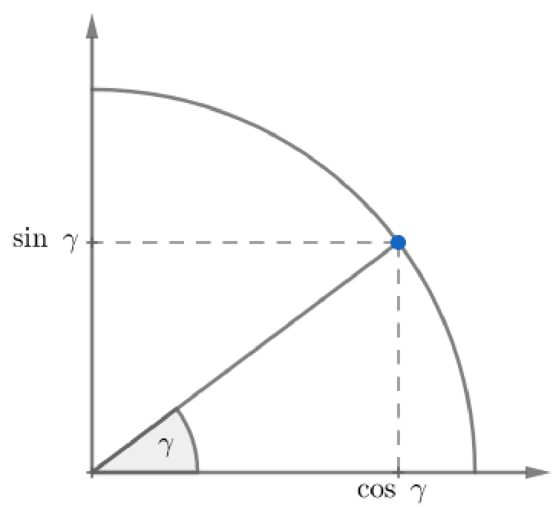
bądź w innej formie

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

skąd

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad \text{oraz} \quad \sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$$

Graficzna interpretacja funkcji trygonometrycznych



Zadanie 1.
Udowodnij, że prawdziwe są dane wzory na sinus i cosinus sumy

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Z definicji sinusa mamy

$$\sin(x+y) = \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} = \frac{e^{ix} \cdot e^{iy} - e^{-ix} \cdot e^{-iy}}{2i}$$

Z drugiej strony mamy

$$\sin x \cdot \cos x + \sin y \cdot \cos y = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{iy} - e^{-ix} \cdot e^{-iy}}{2i}$$

Zatem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Sposób II
Mamy

$$\sin(x+y) = \mathrm{Im}(\exp(i(x+y))) = \mathrm{Im}(\exp(ix) \cdot \exp(iy)) = \mathrm{Im}[(i \sin x + \cos x) \cdot (i \sin y + \cos y)] =$$

$$\mathrm{Im}[-\sin x \sin y + i \sin x \cos y + i \sin y \cos x + \cos y \cos x] = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

Dla cosinusa sumy mamy analogicznie

$$\cos(x+y) = \mathrm{Re}[(i \sin x + \cos x) \cdot (i \sin y + \cos y)] =$$

$$= \mathrm{Re}[-\sin x \sin y + i \sin x \cos y + i \cos x \sin y + \cos y \cos x] = \cos x \cos y - \sin y \sin x$$

Zadanie 2.
Wykaż, że dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \mathrm{Im}\left(e^{ix} \cdot \frac{1-e^{inx}}{1-e^{i}x}\right)$.

Rozwiązanie:

$$\sum \sin kx = \mathrm{Im} \sum \cos kx + i \sin kx = \mathrm{Im} \sum (\cos x + i \sin x)^k =$$

$$= \mathrm{Im}(\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^n}{1 - (\cos x + i \sin x)} = \mathrm{Im}\left(e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{i}x}\right)$$

Ćwiczenia 22

Granica i ciągłość funkcji

Zadanie 1.
Wykaż, że $i(1-e^{ix}) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\frac{ix}{2}}$, gdzie $x\in\mathbb{R}$ i wykorzystaj ten wzór do pokazania, że $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Rozwiązanie:
Wykażmy, że $i(1-e^{ix}) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\frac{ix}{2}}$

Sposób I
Mamy

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\frac{ix}{2}} = 2\cdot\frac{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}{2i}\cdot e^{\frac{ix}{2}} = \frac{e^{ix}-e^{0}}{i} = i(1-e^{ix})$$

Sposób II

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\frac{ix}{2}} = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left[\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right] = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2i\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) =$$
$$=\sin x+i\left(2\left(1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = \sin x+i\left(2-2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$
$$=\sin x+i\left(1+1-2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sin x+i\left(1-\cos x\right) = i\left(-\sin x+1-\cos x\right) =$$
$$= i\left(1-(\cos x+i\sin x)\right) = i\left(1-e^{ix}\right)$$

Pokażmy teraz, że $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. Mamy

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\cdot\frac{1-e^{inx}}{1-e^{i}x}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\cdot\frac{i(1-e^{inx})}{i(1-e^{i}x)}\right) =$$
$$=\mathrm{Im}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot e^{\frac{inx}{2}}}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{\frac{ix}{2}}}\cdot e^{ix} = \mathrm{Im}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\left(e^{\frac{ix}{2}}\cdot e^{\frac{inx}{2}}\right) = \mathrm{Im}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot e^{\frac{ix(n+1)}{2}} =$$
$$\mathrm{Im}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\left(\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Zadanie 2.
Korzystając z twierdzenia Abela wykaż, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ jest zbieżny dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Ciąg $\frac{1}{n}$ jest monotonicznie zbieżny do zera, natomiast sumy częściowe szeregu $\sum\sin(nx)$ są ograniczone, zatem z twierdzenia Abela, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ jest zbieżny dla każdego $x\in\mathbb{R}$ jest zbieżny.

Dla każdeg $x\in\mathbb{R}$ zachodzi:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Zadanie 3.
Oblicz granice $\lim\limits_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^2}$ oraz $\lim\limits_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^3}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^2} = \lim_{x_n \to 0} \frac{x_n - \frac{x_n^3}{3!} + \frac{x_n^5}{5!} - \frac{x_n^7}{7!} + \dots - x_n}{x_n^2} = \lim_{x_n \to 0} -\frac{x_n}{3!} + \frac{x_n^3}{5!} - \frac{x_n^5}{7!} + \dots$$

Mamy więc

$$\left| \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^2} \right| = \left| -\frac{x_n}{3!} + \frac{x_n^3}{5!} - \frac{x_n^5}{7!} + \dots \right| = \left| x_n \left(-\frac{1}{3!} + \frac{x_n^2}{5!} - \frac{x_n^4}{7!} + \dots \right) \right| \leq$$

$$\leq x_n \left(\frac{1}{3!} + \frac{x_n^2}{5!} + \frac{x_n^4}{7!} + \dots \right) \leq x_n \cdot e \overset{n \to \infty}{\to} 0 \cdot e = 0$$

Mamy

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^3} = \lim_{x_n \to 0} \frac{x_n - \frac{x_n^3}{3!} + \frac{x_n^5}{5!} - \frac{x_n^7}{7!} + \dots - x_n}{x_n^2} = \lim_{x_n \to 0} -\frac{1}{3!} + \frac{x_n^2}{5!} - \frac{x_n^4}{7!} + \dots =$$

$$= \lim_{x_n \to 0} -\frac{1}{6} + x_n^2 \left(\frac{1}{5!} - \frac{x_n^2}{7!} + \dots \right)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku granicy $\lim\limits_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^2}$ otrzymujemy

$$\lim_{x_n \to 0} -\frac{1}{6} + x_n^2 \left(\frac{1}{5!} - \frac{x_n^2}{7!} + \dots \right) = -\frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6}$$

Zatem w ogólności wyrażenie takiej postaci dąży do współczynnika takiego jak przy potędze w mianowniku w rozwinięciu

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Na przykład

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^2} = 0$$

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^3} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n + \frac{x_n^3}{3!}}{(x_n)^4} = 0$$

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n + \frac{x_n^3}{3!}}{(x_n)^5} = \frac{1}{5!}$$

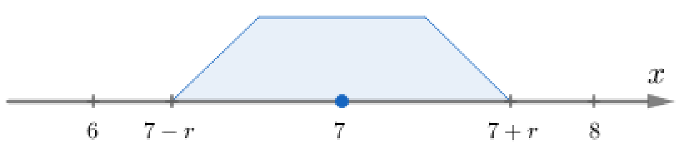
$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n - x_n + \frac{x_n^3}{3!} - \frac{x_n^5}{5!}}{(x_n)^6} = 0$$

Definicja: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem prostej rzeczywistej. Punkt $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ nazywamy punktem skupienia zbioru A, gdy istnieje ciągelementów $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ zbieżny do x_0.

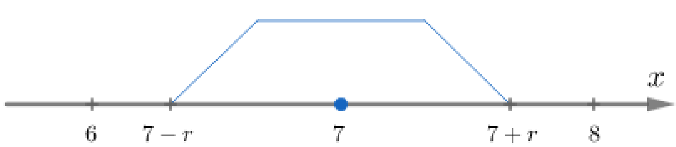
Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A oznaczamy symbolem $\operatorname{Acc}(A)$.

Innymi słowy, punktem skupienia zbioru liczbowego A, nazywamy punkt x_0 taki, że dowolnie blisko punktu x_0 znajduje się nieskończenie wiele liczb ze zbioru A.

Na przykład liczba 7 jest punktem skupienia zbioru liczb rzeczywistych, ponieważ dowolnie blisko punktu 7 znajduje się nieskończenie wiele liczb rzeczywistych.



Liczba 7 nie jest punktem skupienia zbioru liczb naturalnych, ponieważ w otoczeniu 7 o promieniu $r < 1$ nie znajduje się żadna inna liczba naturalna różna od 7.



Zadanie 4.
Znajdź wszystkie punkty skupienia następujących zbiorów $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $C = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ $D = (0,1) \cup (1,2]$, $E = \mathbb{Q}$, $F = (-\pi.\pi) \setminus \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie:
Punkty oddalone od zbioru X o skończoną dodatnią odległość, nie mogą być punktem skupienia zbioru X. Punkty izolowane też nie mogą być punktami skupienia.

a) $\operatorname{Acc}(\mathbb{R}) = \widetilde{\mathbb{R}}$

b) $\operatorname{Acc}(\mathbb{N}) = +\infty$

c) $\operatorname{Acc}\left(\left\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}\right) = \{0\}$

d) $\operatorname{Acc}((0,1) \cup (1,2]) = [0,2]$

e) $\operatorname{Acc}(\mathbb{Q}) = \widetilde{\mathbb{R}}$

f) $\operatorname{Acc}((-\pi.\pi) \setminus \mathbb{Q}) = [-\pi, \pi]$

Definicja: (Heine'go) Rozważmy funkcję $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{R}$ i niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru A. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g, gdy dla dowolnego ciągu $(x_n) \in A \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

(Cauchy'ego) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x \in A \setminus \{x_0\}$ warunek $|x - x_0| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Elementarne granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 5.
Wykaż, że liczby

a) e^2

b) $\cos(1)$

są niewymierne.

Zadanie 6.
Oblicz granice $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - x}{x^3} = \frac{\sin x - x\cos x + x - x}{x^3 \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\left(\frac{\sin x - x}{x^3}\right) + \left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right)\right) =$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

Ćwiczenia 23

Granica i ciągłość funkcji

Zadanie 1.
Oblicz granice

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2020x)}{\sin(2019x)}$

b) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(2020x)}{\sin(2019x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$

Rozwiązanie:

a) Wiemy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, zatem mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2020x)}{\sin(2019x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2020x)}{2020x}\cdot\frac{2019x}{\sin(2019x)}\cdot\frac{2020}{2019}=1\cdot 1\cdot\frac{2020}{2019}=\frac{2020}{2019}$$

b) Mamy $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(2020x)}{\sin(2019x)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(2020(y+\pi))}{\sin(2019(y+\pi))}$. Ze wzoru na sinus sumy mamy

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2020(y+\pi))}{\sin(2019(y+\pi))}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2020y)\cos(2020\pi)+\cos(2020y)\sin(2020\pi)}{\sin(2019y)\cos(2019\pi)+\cos(2019y)\sin(2019\pi)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2020y)\cdot 1+\cos(2020y)\cdot 0}{\sin(2019y)\cdot(-1)+\cos(2019y)\cdot 0}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2020y)}{-\sin(2019y)}=-\frac{2020}{2019}$$

c) Mamy

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{5}}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln x}-1}{e^{\frac{1}{5}\ln x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln x}-1}{\frac{1}{3}\ln x}\cdot\frac{\frac{1}{5}\ln x}{e^{\frac{1}{5}\ln x}-1}\cdot\frac{5}{3}=1\cdot 1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

d) Mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$$

Zadanie 2.
Zbadaj istnienie granicy $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\sqrt{\frac{1}{y}}\sin y$. Sinus jest ograniczony, natomiast $\sqrt{\frac{1}{y}}$ dąży do zera, zatem mamy $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\sqrt{\frac{1}{y}}\sin y=0$.

Sposób II
Mamy $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$, ponadto $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$.

Zadanie 3.
Oblicz granice $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$.

Rozwiązanie:
Mamy $0 \leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, zatem jako, że $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, toteż z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$.

Zadanie 4.
Zbadaj zbieżność szeregów

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left((-1)^n\frac{1}{n}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Rozwiązanie:

a) Mamy $\sin x > 0$ dla $x \in (0,\pi)$, zatem jako, że $\frac{1}{x} \in (0,1) \subseteq (0,\pi)$, toteż $\sin\frac{1}{x} > 0$, zatem mamy $\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 1$ i z kryterium porównawczego, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny bezwzględnie i warunkowo.

b) Mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left((-1)^n\frac{1}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$, ponadto $\sin\frac{1}{n}$ jest monotonicznie zbieżny do zera, bo $\sin n$ jest rosnący dla $n \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, zatem $\sin\frac{1}{n}$ jest malejący, bo $\frac{1}{n} \in (0,1) \subseteq (0,\pi)$. Zatem z kryterium Liebniza, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left((-1)^n\frac{1}{n}\right)$ jest zbieżny.

c) Mamy $\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$, zatem z kryterium porównawczego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1-\cos\frac{1}{n}$ jest zbieżny.

Zadanie 5.
Wykaż, że funkcje określone na zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{R}$) z naturalnym dodawaniem $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ i mnożeniem $(a\cdot f)(x) = a\cdot f(x)$ dla $a \in \mathbb{R}$. Sprawdź, że funkcje posiadające granicę w punkcie tworzą podprzestrzeń liniową tej przestrzeni.

Zadanie 6.
Oblicz granice

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+3}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(\frac{x^2+2+2x+1-2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+\frac{(x-1)^2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \left(1+\frac{(x-1)^2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x-1}{2x+1}} \overset{x\to 1}{\to} e^0 = 1$$

b)

$$\sqrt{x+3}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}) = \sqrt{x+3}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}} \overset{x\to\infty}{\to} \frac{1}{1+1}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenia 24

Granica i ciągłość funkcji

Zadanie 1.
Oblicz sumę $1+\cos x+\cos(2x)+\ldots+\cos(nx)$ i zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$.

Rozwiązanie:

$$1+\cos x+\cos(2x)+\ldots+\cos(nx)=1+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=1+\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right)=$$

$$=1+\mathrm{Re}\left(e^{ix}\cdot\frac{-e^{inx}+1}{-e^{ix}+1}\right)=1+\mathrm{Re}\left(e^{ix}\cdot\frac{e^{\frac{inx}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}\right)}\right)=$$

$$=1+\mathrm{Re}\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\cdot\frac{2i\sin\frac{nx}{2}}{2i\sin\frac{x}{2}}\right)=1+\left(\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Dla $x=2k\pi$ szereg jest rozbieżny, bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny. W przeciwnym przypadku ciąg $\frac{1}{n}$ jest monotonicznie zbieżny do zera oraz $\left|\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\le\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|$, czyli ciąg sum częściowych jest ograniczony, zatem na mocy kryterium Dirichleta zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$.

Zadanie 2.
Wykaż, że jeśli a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do 0, to zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin((-1)^n a_n)$.

Rozwiązanie:
Mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin((-1)^n a_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(a_n)$. Dla $a_n>0$ ciąg jest nierosnący, wówczas dla dostatecznie dużych n zachodzi $a_n<\frac{\pi}{2}$, czyli ciąg $\sin(a_n)$ również monotonicznie zbiega do zera. Dla $a_n<0$ ciąg a_n jest niemalejący. Wiemy, że sinus jest funkcją nieparzystą, czyli mamy $\sin(a_n)=-\sin(-a_n)$. Zachodzi $-a_n>0$, zatem również $\sin(a_n)$ jest monotonicznie zbieżny do zera. Skoro ciąg $\sin(a_n)$ jest monotonicznie zbieżny do zera, to na mocy kryterium Liebniza, zbieżny jest również szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin((-1)^n a_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(a_n)$.

Definicja: Cosinusem hiperbolicznym nazywamy funkcję

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Sinusem hiperbolicznym nazywamy funkcję

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Zadanie 3.
Wykaż, że $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, sinh jest funkcją nieparzystą a cosh jest funkcją parzystą.

Rozwiązanie:

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(-x) \quad \text{zatem } \cosh \text{ jest funkcją parzystą}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{-(e^{-x} - e^x)}{2} = -\sinh(-x) \quad \text{zatem } \sinh \text{ jest funkcją nieparzystą}$$

Zadanie 4.
Udowodnij tożsamość zwaną jedynką hiperboliczną

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

Zadanie 5.
Udowodnij wzory na sinus i cosinus hiperboliczny sumy kątów

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Rozwiązanie:

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} =$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} = \frac{2e^{x+y} - 2e^{(x+y)}}{4} =$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$$

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} =$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}}{4} = \frac{2e^{x+y} + 2e^{(x+y)}}{4} =$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

Zadanie 6.
Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\sinh iy = \frac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy}) = i \sin x$. Weźmy $x = iy$, wówczas $\frac{\sinh x}{x} = \frac{\sinh iy}{iy} = \frac{\sin y}{y} \overset{y\to 0}{\to} 1$.

Zadanie 7.
Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\cosh iy = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) = \cos x$. Weźmy $x = iy$, wówczas mamy $\frac{1-\cosh x}{x^2} = \frac{1-\cosh iy}{(iy)^2} = -\frac{1-\cos y}{y^2} \overset{y\to 0}{\to} 1$.

Ćwiczenia 25

Granica i ciągłość funkcji

Zadanie 1.
Oblicz granice

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[n]{1+x}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)\sin(\tan x)}{1-\cos 2x}$

Rozwiązanie:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[n]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{n}\ln(1+x)}{e^{\frac{1}{n}\ln(1+x)}-1} \cdot n = 1 \cdot n = n$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} = (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)\sin(\tan x)}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{2\sin^2 x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenia 26

Granica i ciągłość funkcji

Definicja: Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in A$, gdy dla dowolnego ciągu $(x_n) \in A,\ x_n \to x_0$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Równoważnie (wersja Cauchy'ego), dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla punktów $x \in A$ warunek $|x - x_0| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{x_0\in A}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in A}\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funckję $f : A \to \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą na A, gdy jest ciągła w każdym punkcie dziedziny A.

Znane nam już przykłady funkcji ciągłych to $\exp(x)$, $\ln(x)$ (dla $x \in \mathbb{R}_+$), $\sin(x)$, $\cos(x)$, wielomiany, x^a (dla $x \in \mathbb{R}_+$), a^x (dla $a > 0$).

Zadanie 1.
Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zadanie 2.
Wykaż, że $\sin(x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Definicja: Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na A, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x_0\in A}\ \forall_{x\in A}\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkcja jednostajnie ciągła jest oczywiście ciągła, ale odwrotne twierdzenie nie zachodzi. Przykładem funkcji jednostajnie ciągłej (a nawet lipszycowskiej) jest $\sin(x)$, zaś funkcji ciągłej, która nie jest jednostajnie ciągła $\frac{1}{x}$.

Zadanie 3.
Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która

a) nie ma granicy w żadnym punkcie dziedziny

b) ma granicę w dokładnie jednym punkcie swojej dziedziny

c) jest ciągła na zbiorach $(-\infty, 0)$ i na zbiorach $[0, +\infty)$, ale nie jest ciągła na $\mathbb{R}$

d) istnieje podział $\mathbb{R} = A \cup B, A \cap B = \emptyset$, taki że obcięcia $f|_A$ i $f|_B$ są ciągłe, ale f nie jest ciągła w żadnym punkcie $\mathbb{R}$.

Ćwiczenia 27

Granica i ciągłość funkcji

Twierdzenie: Rozważmy funkcje zmiennej rzeczywistej $f : A \to \mathbb{R}$ i $B \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ i $f(A) \subset B \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że f jest ciągła w punkcie $a \in A$, g jest ciągła w punkcie $b \in B$ oraz, że $f(a) = b$. Wówczas złożenie $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągłe w a.

Zadanie 1.
Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{dla } x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x+2} & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ b & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest ciągła?

Twierdzenie: (Własność Darboux) Rozważmy funkcję ciągłą $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wówczas dla każdej wartości $\xi \in [f(a), f(b)]$ istnieje argument $c \in [a, b]$ taki, że $\xi = f(c)$.

Innymi słowy, funkcja ciągła przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między dwoma danymi.

Twierdzenie: (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów) Rozważmy funkcję ciągłą $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ogólniej funkcję ciągłą na zbiorze zwartym). Wówczas istnieją argumenty $c, d \in [a, b]$ takie, że

$$f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{oraz} \quad f(d) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Innymi słowy, funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy.

Zadanie 2.
Wykaż, że ciągła funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu, musi przyjmować nieskończenie wiele razy wartość 2020.

Zadanie 3.
Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (to znaczy jest addytywna). Wykaż, że $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ (to znaczy, że f jest liniowa).

Zadanie 4.
Wykaż, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_n, y_n \in A$ warunek $|x_n - y_n| \to 0$ implikuje $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

Ćwiczenia 28

Granica i ciągłość funkcji

Przykład nie-liniowej funkcji addytywnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Rozważmy liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ rozumiane jako przestrzeń liniową nad liczbami wymiernymi $\mathbb{Q}$. Przestrzeń taka ma bazę $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ (nazywaną bazą Hamela), to znaczy każdy element $x \in \mathbb{R}$ możemy jednoznacznie zapisać w postaci skończonej sumy

$$x = q_1 \cdot h_1 + q_2 \cdot h_2 + \ldots + q_n \cdot h_n$$

gdzie $h_i \in \mathcal{H}$, zaś $q_i \in \mathbb{Q}$.

Łatwo zauważyć, że każda funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją liniową, rozumianą jako odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{Q}$, to znaczy dla dowolnych $x, x' \in \mathbb{R}$ oraz $q, q' \in \mathbb{Q}$ mamy

$$f(q \cdot x + q' \cdot x') = qf(x) + q'f(x')$$

Określmy f wzorem

$$f(q_1 \cdot h_1 + q_2 \cdot h_2 + \ldots + q_n \cdot h_n) := q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

(innymi słowy $f|_{\mathcal{H}} \equiv 1$). Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja jest addytywna. Co więcej f przyjmuje tylko wartości wymierne, a więc nie może być funkcją liniową, bo zbiór wartości funkcji liniowej $F; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ lub $\{0\}$.

Twierdzenie: Następujące warunki są równoważne:

1. Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła,
2. (wersja Heine'go) Dla dowolnych $x_n, y_n \in A$ warunek $|x_n - y_n| \to 0$ implikuje $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$
3. (wersja Cauchy'ego) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnych $x_0, x \in A$ jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Twierdzenie: (Heine'go-Cantora) Funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 1.
Rostrzygnij, które z poniższych funkcji są jednostajnie ciągłe: $f(x) = 1$, $g(x) = 5x$, $h(x) = x^2 + 7$, $\phi(x) = \sqrt{x}$, $\psi(x) = \cos(2x)$, $\zeta(x) = \sin^2(x)$, $\xi(x) = \cos(x^2)$?

Zadanie 2.
Wykaż, że funcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i okresowa jest jednostajnie ciągła.

Uwaga: Ważne jest, że dziedziną funkcji jest cała prosta rzeczywista. Przykładem okresowej funkcji nie jednostajnie ciągłej jest $\tan(x)$.

Zadanie 3.
Zbadaj, czy klasa funkcji jednostajnie ciągłych jest zamknięta ze względu na dodawanie, mnożenie, skalowanie przez liczby rzeczywiste, składanie?