ANALIZA MATEMATYCZNA I.2

Marysia Nazarczuk

Ćwiczenia 1

Ciągłość jednostajna

Definicja: Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in A$, gdy dla dowolnego ciągu $x_n \to x_0$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, lub równoważnie, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla $x \in A$ warunek $|x - x_0| < \delta$ pociąga za sobą warunek $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Definicja: Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \forall_{x_0\in A} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{x\in A} \, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definicja: Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{x,y\in A} \, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Definicja: Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest lipszycowsko ciągła, gdy

$$\exists_L \, \forall_{x,y\in A} \, |f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$$

lub równoważnie

$$\sup_{x,y\in A, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty$$

Zadanie 1.
Uzasadnij, że funkcja lipszycowsko ciągła jest jednostajnie ciągła.

Rozwiązanie:
Funkcja f jest lipszycowsko ciągła ze stałą L. Jeżeli w definicji jednostajnej ciągłości weźmiemy $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, to mamy $|f(x) - f(y)| < L|x - y| < \varepsilon$, czyli z tego, że funkcja f jest lipszycowsko ciągła wynika, że jest jednostajnie ciągła.

Definicja: Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest holderowsko ciągła z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1)$, gdy

$$\exists_L \, \forall_{x,y\in A} \, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$$

Zadanie 2.
Uzasadnij, że jeśli funkcja jest holderowsko ciągła, to jest jednostajnie ciągła.

Rozwiązanie:

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $|x-y| < \delta$. Wówczas biorąc $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha < L\left|\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right|^\alpha = \varepsilon$$

zatem funkcja jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 3.
Wykaż, że funkcja jest określona na zbiorze ograniczonym, to lipszycowska ciągłość implikuje holderowską ciągłość z dowolnym wykładnikiem $\alpha \in (0,1)$. Podaj przykład świadczący o tym, że nie jest to prawdą, gdy zbiór jest nieograniczony.

Rozwiązanie:
Chcemy pokazać, że $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L'|x-y|^\alpha$. Mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| = L|x-y|^\alpha \cdot |x-y|^{1-\alpha} \leq |x-y|^\alpha \cdot L \cdot \sup_{x,y\in A} |x-y|^{1-\alpha}$$

Zatem biorąc $L' = L \cdot \sup\limits_{x,y\in A} |x-y|^{1-\alpha}$ (supremum jest ograniczone) mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq L' \cdot |x-y|^\alpha$$

Przykłady funkcji liprzycowsko ciągłych na $\mathbb{R}$

- $\sin x$
- $|\sin x - \sin y|$ (dowód ze wzoru na różnicę sinusów)
- funkcja stała
- funkcja liniowa

Zadanie 4.
Wiemy, że $f(x) = x$ jest lipszycowsko ciągła ze stałą 1. Czy $f(x) = x$ jest holderowsko ciągła dla $\alpha = \frac{1}{2}$?

Rozwiązanie:
Mamy

$$\sup_{x,y\in A, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \sup_{x,y\in A, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \cdot |x-y|^{1-\alpha} = +\infty$$

Zatem to nie jest prawda.

Zadanie 5.
Czy $f(x) = x^2$ jest lipszycowsko ciągła na $[0, 2020]$?

Rozwiązanie:
Mamy $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x+y)|x-y| \leq 4040|x-y|$ Zatem $f(x)$ jest lipszycowsko ciągła na $[0, 2020]$.

Zadanie 6.
Czy $f(x) = x^2$ jest lipszycowsko ciągła na $[0, +\infty)$?

Rozwiązanie:
Mamy

$$\sup_{x,y\in A, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \sup_{x,y\in A, x\neq y} \frac{|x^2-y^2|}{|x-y|} = \sup_{x,y\in A, x\neq y} |x+y| = +\infty$$

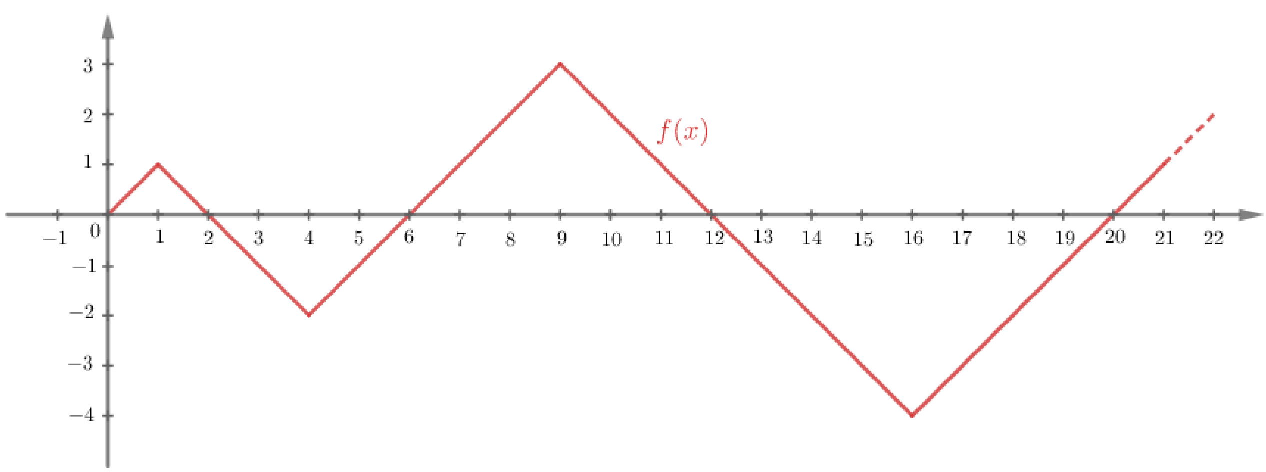
Zatem $f(x)$ nie jest lipszycowsko ciągła na $[0, +\infty)$.

Twierdzenie: Dana jest funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Funkcja f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to b^-} f(x)$ istnieją i są skończone.

Przykładem funkcji określonej na $\mathbb{R}$, która jest jednostajnie ciągła, ale nie ma skończonej granicy w $+\infty$, to funkcja liniowa.

Zadanie 7.
Funkcja f jest jednostajnie ciągła na przedziale $[1, +\infty)$ i nieograniczona. Czy wynika stąd, że $\lim_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest nieskończona?

Rozwiązanie:
Nie, bo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ może nie istnieć.



Zadanie 8.
Czy $f(x) = x \cdot \sin x$ jest jednostajnie ciągła?

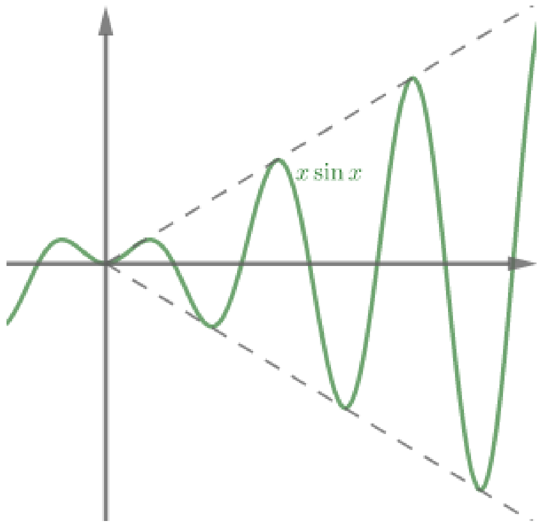
Rozwiązanie:
Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{(x_n)\subseteq A \text{ i } (y_n)\subseteq A}\ x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Weźmy więc $x_n = 2n\pi$ oraz $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$. Wówczas

$$x_n - y_n = -\frac{1}{n} \to 0$$

oraz

$$f(x_n) - f(y_n) = x_n \cdot \sin x_n - y_n \cdot \sin y_n = 0 - \left(2\pi n + \frac{1}{n}\right) \cdot \sin\frac{1}{n} \to -2\pi$$

zatem $f(x) = x \sin x$ nie jest jednostajnie ciągła.



Zadanie 9.
Czy $f(x) = x \cdot \sin\sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła?

Rozwiązanie:

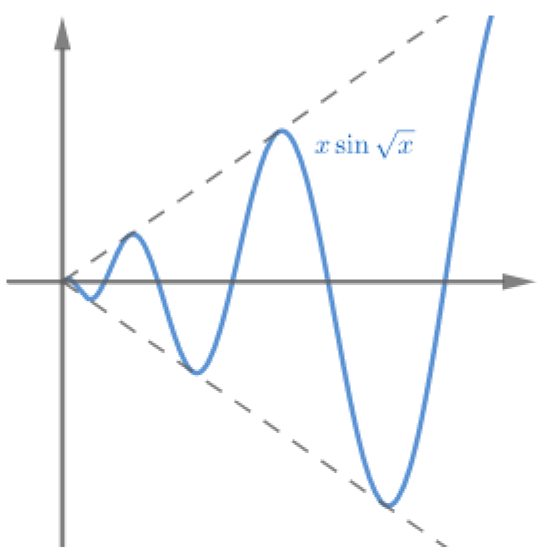
Weźmy $x_n = (2\pi n)^2$ oraz $y_n = \left(2\pi n + \frac{1}{n^2}\right)^2$. Wówczas

$$x_n - y_n = 4\,(2\pi n)^2 - \left(2\pi n + \frac{1}{n^2}\right)^2 = 4\pi^2 n^2 - \left(4\pi^2 n^2 + \frac{4\pi}{n} + \frac{1}{n^4}\right) = -\left(\frac{4\pi}{n} + \frac{1}{n^4}\right) \to 0$$

natomiast

$$f(x_n) - f(y_n) = 0 - \left(4\pi^2 n^2 + \frac{4\pi}{n} + \frac{1}{n^4}\right) \sin\frac{1}{n^2} \to -4\pi^2$$

zaten $f(x) = x \sin\sqrt{x}$ nie jest jednostajnie ciągła.



Twierdzenie: Funkcja ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie: Funkcja ciągła $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że $\lim_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona, jest ograniczona.

Zadanie 10.
Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $(a, b]$ i na $[b, c)$. Czy wynika stąd, że jest jednostajnie ciągła na (a, c)?

Rozwiązanie:
Funkcja jest ciągła na (a, c) i ma skończone granice $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to c^-} f(x)$, zatem jest jednostajnie ciągła na (a, c).

Zadanie 11.
Funkcja f jest jednostajnie ciągła na (a, b) i na (b, c). Czy wynika stąd, że jest jednostajnie ciągła na (a, c)?

Rozwiązanie:
Nie, ponieważ nic nie wiemy o wartości funkcji f w punkcie b.

Zadanie 12.
Wykaż, że funkcja ciągła i okresowa określona na prostej rzeczywistej jest jednostajnie ciągła.

Rozwiązanie:
Niech T będzie okresem tej funkcji (to znaczy $f(x + T) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$). Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Jeżeli $\delta < T$, to $x, y \in [kT, (k + 2)T]$. Wiemy, że f jest jednostajnie ciągła na $[0, 2T]$, czyli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{z,t\in[0,2T]}\ |z - t| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(t)| < \varepsilon$$

ponieważ $|f(x) - f(y)| = |f(x - kT) - f(y - kT)|$.

Zadanie 13.
Dana jest funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest ograniczony. Funkcja f jest holderowsko ciągła z wykładnikiem α. Wykaż, że jest też holderowsko ciągła z wykładnikiem $\beta < \alpha$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że $\forall_{x,y\in A}\ |f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|^{\alpha}$. Weźmy $\varepsilon \in (0, 1)$ takie, że $\alpha - \varepsilon \in (0, 1)$. Chcemy pokazać, że $|f(x) - f(y)| \le L' \cdot |x - y|^{\alpha-\varepsilon}$. Mamy

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|^{\alpha} = L \cdot |x - y|^{\alpha-\varepsilon} \cdot |x - y|^{\varepsilon} \le |x - y|^{\alpha-\varepsilon} \cdot L \cdot \sup_{x,y\in A} |x - y|^{\varepsilon}$$

Oznaczmy $L' = L \cdot \sup_{x,y\in A} |x - y|^{\varepsilon}$, wówczas $|f(x) - f(y)| \le L' \cdot |x - y|^{\alpha-\varepsilon}$.

Zadanie 14.
Pokazać, że $\sqrt{x}$ nie jest lipszycowsko ciągła na $[0,1]$.

Rozwiązanie:

sposób I
Gdyby funkcja ta była lipszycowsko ciągła, to $\exists_L \ \forall_{x,y\in A} \ |f(x)-f(y)| \leq L\cdot|x-y|$. Zaprzeczeniem tego jest $\forall_L \ \exists_{x,y\in A} \ |f(x)-f(y)| > L\cdot|x-y|$. Mamy $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| > L\cdot|x-y| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > L$. Zatem dla ustalonego L wystarczy wziąć odpowiednio małe x i y.

Sposób II
Niech $A=[0,1]$. Spróbujemy pokazać, że $\sqrt{x}$ jest lipszycowsko ciągła, czyli że $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq L\cdot|x-y|$ dla pewnego L, czyli $1 \leq L\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. Ustalmy $y=0\in A$. Dla $L<1$ nierówność nie jest prawdziwa dla dowolnego x (na przykład $x=1$). Możemy zatem założyć, że $L\geq 1$. Ustalmy wówczas $x=\frac{1}{4L^2}\in A$. Wtedy $1 \leq L\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{4L^2}}+0\right) = L\cdot\frac{1}{2L} = \frac{1}{2}$. Mamy więc sprzeczność, zatem $\sqrt{x}$ nie jest lipszycowsko ciągła na $[0,1]$.

Ćwiczenia 2

Jednostajna ciągłość

Zadanie 1.
Zbadaj, czy podane funkcje są ciągłe jednostajnie na przedziale $(0, 1)$:

a) $x \sin \frac{1}{x}$

b $\sin \frac{1}{x}$

c) $e^{\frac{1}{x}}$

d) $e^{-\frac{1}{x}}$

e) $\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{x}$

Rozwiązanie:

Twierdzenie: (Heine-Cantora) Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$, to jest na $[a, b]$ jednostajnie ciągła.

a) Tak, bo ma skończone granice w końcach, zatem jest jednostajnie ciągła na $[0, 1]$.

b) Nie, bo w zerze nie ma granicy.

c) Mamy $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \to 0^+} +\infty$, zatem nie jest jednostajnie ciągła na $[0, 1]$.

d) Mamy $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \to 0^+} 0$, zatem tak.

e) Nie, bo $\cos(x) \xrightarrow{x \to 0^+} 1$ oraz $\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{x \to 0^+}$ nie istnieje, zatem $\cos(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{x \to 0^+}$ nie istnieje.

Zadanie 2.
Zbadaj, czy podane funkcje są jednostajnie ciągłe na przedziale $[0, +\infty)$.

a) $\sqrt{x}$

b) $\sin^2 x$

c) $\sin(\sin x)$

d) $x \sin x$

e) $\sin(x^2)$

f) $\sin(x \sin x)$

Rozwiązanie:

Twierdzenie: f jest lipszycowsko ciągła $\Rightarrow$ f jest holderowsko ciągła $\Rightarrow$ f jest jednostajnie ciągła $\Rightarrow$ f jest ciągła

a) Tak, bo $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L \cdot |x-y|^{\frac{1}{2}}$, czyli jest holderowsko ciągła ze stałą $\alpha = \frac{1}{2}$.

Twierdzenie: Funkcja ciągła i okresowa na prostej rzeczywistej jest jednostajnie ciągła.

b) Tak, bo funkcja $\sin^2(x)$ jest okresowa i ograniczona i ciągła.

c) Tak, bo jest okresowa i ograniczona i ciągła.

d) Nie (było)

e) Nie, bo biorąc $x_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ i $y_n = \sqrt{2\pi n}$ mamy $x_n - y_n \to 0$ oraz $f(x_n) - f(y_n) \to 1$.

f) Nie, bo biorąc $x_n = 2\pi n + \frac{\pi}{n}$ i $y_n = 2\pi n$ mamy $x_n - y_n \to 0$ i $f(x_n) - f(y_n) \to \sin(2\pi^2 + 0) \neq 0$.

Zadanie 3.
Funkcja f określona na prostej rzeczywistej przekształca ciągi Cauchy'ego na ciągu Cauchy'ego. Czy wynika stąd, że jest jednostajnie ciągła?

Twierdzenie: Jeśli f jest jednostajnie ciągła, to przeprowadza ciągi Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego.

Dowód: Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Niech $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ to ciąg Cauchy'ego, zatem istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$, że $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x_0$. Funkcja f jest ciągła i określona na $\mathbb{R}$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. $f(x_n)$ jest zbieżny do skończonej granicy, czyli jest ciągiem Cauchy'ego.

W drugą stronę implikacja jednak nie zachodzi.

Zadanie 4.
Zbiory A i B są domkniętymi podzbiorami prostej rzeczywistej. Funkcja $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze A i jest jednostajnie ciągła na zbiorze B. Czy wynika stąd, że jest jednostajnie ciągła na $A \cup B$?

Rozwiązanie:
Niech $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [2n-1, 2n]$ oraz $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [2n + \frac{1}{n}, 2n+1-\frac{1}{n}]$ oraz niech $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ na } A \\ 0 \text{ na } B \end{cases}$, wówczas $f(x)$ nie jest jednostajnie ciągła na $A \cup B$, bo dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i dla każdego $\delta > 0$ możemy tak dobrać $x_n = 2n \in A$ i $y_n = 2n + \frac{1}{n} \in B$, że $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \delta$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 > \frac{1}{2}$.

Zadanie 5.
Wykaż, że jeśli funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma skończone granice w $+\infty$ i $-\infty$, to jest jednostajnie ciągła.

Rozwiązanie:
Skoro funkcja ma skończone granice w nieskończonościach, to jest ograniczona. Zatem

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n>0}\ \forall_{x\in A}\ x > n \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Zatem korzystając z tego, że

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - g + g - f(y)| \leq |f(x) - g| + |f(y) - g|$$

mamy już jednostajną ciągłość na przedziale $[n, +\infty)$. Stąd widać, że funkcja jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 6.
Czy istnieje funkcja ograniczona, jednostajnie ciągła, która nie jest lipschitzowsko ciągła?

Rozwiązanie:
Funkcja $\sqrt{x}$ nie jest lipszycowsko ciągła na $[0, 1]$. Jest na tym przedziale jednak jednostajnie ciągła.

Zadanie 7.
Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w następujący sposób:

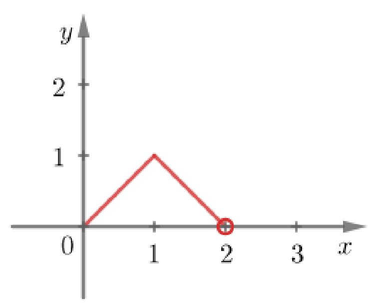
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 2 - x & \text{dla } x \in [1, 2) \end{cases}$$

oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równość $f(x) = f(x - 2)$. Rozstrzygnij, czy funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągła na

a) $(0, 1)$

b) $[1, +\infty)$

Rozwiązanie:
Narysujmy wykres funkcji na przedziale $[0, 2)$.



Granica lewostronna i prawostronna funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ jest taka sama, zatem funkcja jest ciągła w tym punkcie.

Z warunku, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = f(x-2)$ widzimy, że funkcja $f(x)$ jest okresowa. Wiemy, że funkcja ciągła i okresowa na prostej rzeczywistej jest jednostajnie ciągła. Zatem funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, skąd wynika że jest jednostajnie ciągła na $(0, 1)$ oraz $[1, +\infty)$.

Definicja: Zbiór A jest wypukły wtedy i tylko wtedy. gdy dla każdych $x, y \in A$ i dowolnego $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

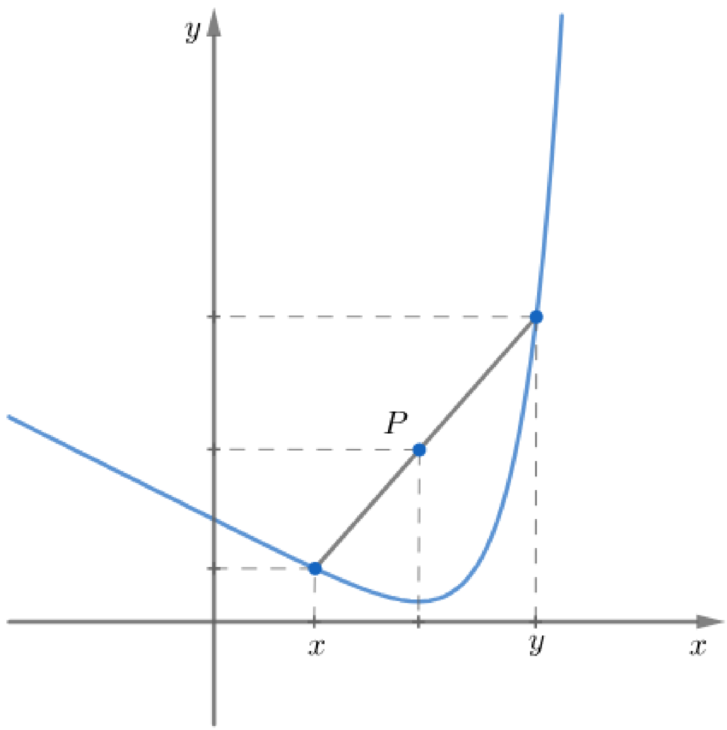
Wypukłe podzbiory prostej

- odcinek
- prosta

- półprosta

Definicja: Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x, y \in I$ oraz dla każdego $\alpha \in [0,1]$ zachodzi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$



$$P = (\alpha x + (1-\alpha)y,\ \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y))$$

Twierdzenie Ciągłą funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x, y \in I$ zachodzi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Zadanie 8.
Wykaż, wklęsłość funkcji $\sin x$ na przedziale $[0, \pi]$ oraz funkcji $\cos x$ na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rozwiązanie:
Funkcja $\sin x$ jest ciągła, zatem wystarczy pokazać, że

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}$$

Mamy
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
zatem jako, że $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$ dla $x, y \in [0, \pi]$, to wystarczy pokazać, że $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq 1$, co oczywiście jest prawdą.

Funkcja $\cos x$ jest wklęsła, zatem wystarczy pokazać, że
$$\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\cos x + \cos y}{2}$$
Mamy
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
zatem jako, że $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$ dla $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, to wystarczy pokazać, że $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq 1$, co oczywiście jest prawdą.

Zadanie 9.
Wykaż, że dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ zachodzi nierówność $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin x$.

Rozwiązanie:
Dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi $\sin x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Niech $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$ oraz $g(x) = \sin x$. Mamy $f(0) = g(0) = 0$ oraz $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zatem funkcja $f(x)$ jest sieczną funkcji $g(x)$. Jako, że $g(x)$ jest wklęsła, to sieczna leży pod wykresem, skąd $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin x$.

Zadanie 10.
Wykaż, że dla wszystkich $n > 2$ zachodzi nierówność $(1+n)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1$.

Rozwiązanie:
Chcemy pokazać, że
$$(1+n)\cos\frac{\pi}{n+1} \geq \cos 0 + n\cos\frac{\pi}{n} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{n+1} \geq \frac{\cos 0 + n\cos\frac{\pi}{n}}{n+1}$$
Niech w warunku wklęsłości funkcji mamy $x = 0$, $y = \frac{\pi}{n}$, $1 - \alpha = \frac{n}{n+1}$ oraz $f = \cos x$. Funkcja $\cos x$ jest wklęsła na danym przedziale, zatem mamy
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \cos\left(\frac{1}{n+1}\cdot 0 + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{n}\right) = \cos\frac{\pi}{n+1} \geq \frac{\cos 0 + n\cos\frac{\pi}{n}}{n+1}$$

Ćwiczenia 3

Wypukłość funkcji

Definicja: Zbiór otwarty A, to taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że jeśli $x \in A$, to $\exists_{\varepsilon>0}\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$.

Definicja: Zbiór domknięty B to taki zbiór $B \subseteq \mathbb{R}$, że jeśli $(x_n) \subseteq B$ i (x_n) jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in B$

Twierdzenie: Każda funkcja wypukła na przedziale (a, b) jest ciągła.

Zadanie 1.
Podać przykład funkcji $f : I \to \mathbb{R}$ wypukłej i nieciągłej.

Rozwiązanie:

Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x = 0 \\ x^2 \text{ dla } x > 0 \end{cases}$, wówczas f jest wypukła i nieciągła.

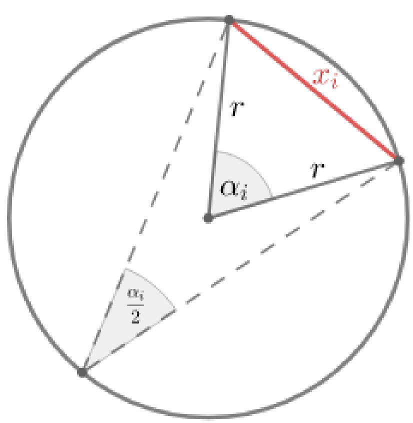
Twierdzenie: (Nierówność Jensena) Niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie wypukła. Wówczas dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ takich, że $\forall_i\ \alpha_i \geq 0$ oraz $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = 1$, zachodzi nierówność

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Dla funkcji wklęsłych nierówność zachodzi w drugą stronę.

Zadanie 2.
Wykaż, że spośród wszystkich n-kątów wpisanych w okrąg o ustalonym promieniu największy obwód ma n-kąt foremny.

Rozwiązanie:



Niech dany okrąg ma promień r. Niech długość boku n-kąta foremnego wynosi a. Wówczas $a = 2r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2}\right) = 2r \sin\frac{\pi}{n}$. Niech w ten sam okrąg będzie wpisany dowolny wielokąt. Niech i-ty bok ma długość x_i. Wówczas $x_i = 2r\sin\frac{\alpha_i}{2}$, gdzie α_i to kąt wpisany oparty na łuku, którego ciąciwą jest bok x_i. Chcemy pokazać, że

$$\sum x_i \leq n \cdot a \Leftrightarrow \sum \sin\frac{\alpha_i}{2} \leq n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

Niech $f(x) = \sin x$ oraz $x_i = \frac{1}{n}$, wówczas z nierówności Jensena mamy

$$\sum \frac{1}{n} \cdot \sin\frac{\alpha_i}{2} \leq \sin\left(\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_i}{2}\right)$$

Mamy $\sum \alpha_i = 2\pi$, zatem $\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_i}{2} = \frac{\pi}{n}$. Zatem teza jest prawdziwa.

Zadanie 3.
Niech $a, b, c \in [0, 1]$. Wykaż, że $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{3}{1-\sqrt[n]{abc}}$.

Rozwiązanie:
Weźmy funkcję $f(x) = \frac{3}{1-x}$. Jest to funkcja wypukła na przedziale $[0, 1]$. Z nierówności między średnimi mamy $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$. Jako, że $f(x)$ jest rosnąca na $[0, 1]$, to mamy

$$f\left(\sqrt[3]{abc}\right) \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Z nierówności Jensena z wagą $\frac{1}{3}$ mamy

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3}$$

zatem ostatecznie mamy

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1-\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1-a} + \frac{3}{1-b} + \frac{3}{1-c}\right)$$

Zadanie 4.
Udowodnij, że dla dodatnich x, y, z zachodzi nierówność $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{x+y+z}{y+z} - 1 + \frac{x+y+z}{z+x} - 1 + \frac{x+y+z}{x+y} - 1$$

zatem wystarczy udowodnić, że

$$\frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} + \frac{x+y+z}{x+y} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x+y+z}$$

Niech $f(x) = \frac{1}{x}$. Jest to funkcja wypukła, zatem z nierówności Jensena z wagą $\frac{1}{3}$ mamy

$$\frac{1}{3}f(x+y) + \frac{1}{3}f(y+z) + \frac{1}{3}f(z+x) \geq f\left(\frac{1}{3}(x+y+y+z+z+x)\right)$$

czyli

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+y+z}$$

Zadanie 5.
Udowodnij, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła i ograniczona, to jest stała.

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Dla ustalonego x funkcja $I(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ jest niemalejąca, wtedy gdy f jest wypukła.

Ustalmy więc $x = 0$, wówczas $I(0, y) = -\frac{f(y)}{y}$. Skoro f jest ograniczona, to

$$\lim_{y \to \pm\infty} I(0, y) = \lim_{y \to \pm\infty} -\frac{f(y)}{y} = 0$$

Zatem $I(0, y)$ jest stała i dodatkowo jest stale równa zero. Wobec tego $f(y) = f(0)$, czyli f jest funkcją stałą.

Zadanie 6.
Wykaż, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to ma skończone pochodne jednostronne w każdym punkcie.

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym. Wtedy każda funkcja wypukła $f : P \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Zatem funkcja f jest ciągła. Skoro jest ciągła, to ma skończone pochodne jednostronne w każdym punkcie.

Zadanie 7.
Wykaż, że jeśli $f : I \to \mathbb{R}$ (I-przedział) jest ściśle rosnąca i wypukła, to funkcja odwrotna do niej jest wklęsła.

Rozwiązanie:
Mamy $f^{-1}(f(x)) = x$, zatem jeśli $x_1 < x_2$ i $f(x)$ jest rosnąca, czyli $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, to mamy $f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))$, czyli funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest funkcją rosnącą. Wiemy, że $f(x)$ jest funkcją wypukłą, zatem

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

dla pewnego $t \in [0, 1]$. Jako, że f^{-1} jest rosnąca, toteż

$$f^{-1}(f((1-t)x_1 + tx_2)) \leq f^{-1}((1-t)f(x_1) + tf(x_2))$$

Ale mamy

$$f^{-1}(f((1-t)x_1 + tx_2)) = (1-t)x_1 + tx_2 = (1-t)f^{-1}(f(x_1)) + tf^{-1}(f(x_2))$$

zatem mamy

$$(1-t)f^{-1}(f(x_1)) + tf^{-1}(f(x_2)) \leq f^{-1}((1-t)f(x_1) + tf(x_2))$$

czyli funkcja $f^{-1}(x)$ jest wklęsła.

Zadanie 8.
Wykaż, że dla dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2(a+b+c)(bc+ac+ab)}$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

Zatem funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest wklęsła.

Weźmy teraz $p_1 = \frac{a}{a+b+c}$, $p_2 = \frac{b}{a+b+c}$ oraz $p_3 = \frac{c}{a+b+c}$. Wówczas $p_1+p_2+p_3 = 1$. Weźmy $x_1 = b+c$, $x_2 = c+a$ oraz $x_3 = a+b$. Wówczas z nierówności Jensena mamy

$$p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + p_3f(x_3) \leq f(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)$$

$$\frac{a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{ab+ac+bc+ba+ac+bc}{a+b+c}}$$

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2(a+b+c)(bc+ac+ab)}$$

Zadanie 9.
Niech p będzie ustaloną liczbą większą od 1, zaś n dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność Holdera

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Rozwiązanie:
Niech

$$S_x := \sum_{k=1}^{n} x_k^p \qquad S_y := \sum_{k=1}^{n} y_k^p$$

Załóżmy, że $S_x = S_y = 1$. Z nierówności Younga mamy $x_k y_k \leq \frac{1}{p}x_k^p + \frac{1}{q}y_k^q$. Sumując takie nierówności dla $i = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \frac{1}{p}S_x + \frac{1}{q}S_y = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = (S_x)^{\frac{1}{p}} \cdot (S_y)^{\frac{1}{q}}$$

czyli nierówność Holdera w przypadku $S_x = S_y = 1$.

Jeśli $S_x = 0$ lub $S_y = 0$, to wszystkie x_k lub wszystkie y_k znikają, zać nierówność Holdera przybiera banalną postać $0 \leq 0$.

Niech $S_x > 0$ i $S_y > 0$. Połóżmy

$$a_k = \frac{x_k}{(S_x)^{\frac{1}{p}}} \qquad b_k = \frac{y_k}{(S_y)^{\frac{1}{q}}}$$

Wtedy

$$S_a := \sum_{k=1}^{n} a_k^p = 1 \qquad S_b := \sum_{k=1}^{n} b_k^q = 1$$

Mamy więc

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq 1$$

więc po pomnożeniu obu stron przez iloczyn $(S_x)^{\frac{1}{p}} \cdot (S_y)^{\frac{1}{q}}$ otrzymujemy

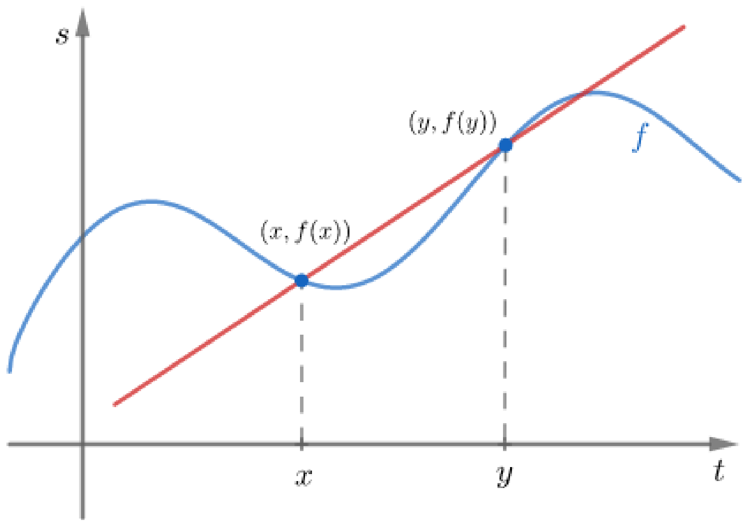
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ćwiczenia 4

Różniczkowalność

Definicja: Niech $f : P \to \mathbb{R}$, gdzie P to przedział. Ilorazem różnicowym funkcji f w punktach $x, y \in P, x \neq y$, nazywamy wyrażenie $I(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Interpretacja geometryczna



Definicja: Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A. Powiemy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalnaa w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Liczbę $f'(x_0)$ nazywamy pochodną funkcji f w punkcie a.

Zadanie 1.
Wyznacz zbiór parametrów α dla których funkcja $f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}$ dookreślona w zerze przez 0 jest na $\mathbb{R}$

a) ciągła

b) różniczkowalna

c) klasy C^1

Rozwiązanie:

a) Funkcja jest ciągła na przedzialne $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zatem musimy zbadać ciągłość funkcji w zerze. Funkcja jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy granica funkcji w punkcie jest równa zero.

$$\lim_{x\to 0} |x|^\alpha \cdot \sin\frac{1}{x} = 0 \text{ dla } \alpha > 0$$

Biorąc $\alpha \le 0$ i ciąg $x_n \to 0$ taki, że $f(x_n) \not\to 0$, czyli na przykład $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)^\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \lim\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)^\alpha = \begin{cases} 1 \text{ dla } \alpha = 0 \\ \infty \text{ dla } \alpha < 0 \end{cases}$$

b) Funkcja będzie różniczkowalna gdy jest ciągła, czyli gdy $\alpha > 0$ oraz gdy jej pochodna prawostronna jest równa pochodnej lewostronnej.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{0 - x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{-x} = \lim_{x\to 0^+} (-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0 \text{ dla } \alpha > 1 \\ \text{nie istnieje dla } \alpha \le 1 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{0 - (-x)^\alpha \sin\frac{1}{x}}{-x} = \lim_{x\to 0^+} -(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0 \text{ dla } \alpha > 1 \\ \text{nie istnieje dla } \alpha \le 1 \end{cases}$$

Zatem funkcja f jest różniczkowalna dla $\alpha > 1$.

Definicja: funkcja jest klasy C^n w przedziale P, jeśli jest n-krotnie różniczkowalna w tym przedziale, a n-ta pochodna jest ciągła.

c) Szukamy takich α, że pochodna jest funkcją ciągłą. Musimy policzyć pochodną w zerze dla $\alpha > 1$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^\alpha \sin\frac{1}{h} - 0}{h - 0} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1}\sin\frac{1}{h} = 0$$

Dla $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \left(x^\alpha \cdot \sin\frac{1}{x}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{x} + x^\alpha\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cdot\cos\frac{1}{x}$$

Dla $x < 0$ mamy

$$f'(x) = \left((-x)^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)' = \alpha\left((-x)^{\alpha-1}\cdot(-1)\sin\frac{1}{x}\right) + \cos\frac{1}{x}\cdot(-x)^{\alpha-2}$$

Chcemy sprawdzić dla jakich α zachodzi

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

Mamy

$$\lim_{x\to 0^+} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}\cdot\cos\frac{1}{x} = \begin{cases} 0 \text{ dla } \alpha > 2 \\ \text{nie istnieje dla } \alpha \le 2 \end{cases}$$

Zatem f jest klasy C^1 dla $\alpha > 2$.

Zadanie 2.
Wykaż, że jeśli f jest różniczkowalna w x_0, to

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Pokaż przykład świadczący o tym, że istnienie granicy $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ nie implikuje różniczkowalności funkcji f w x_0.

Rozwiązanie:
Mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

oraz

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Gdy $f(x) = |x|$ i $x_0 = 0$, to

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0 - h)}{2h} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$$

natomiast $f'(0)$ nie istnieje.

Zadanie 3.
Określmy następująco zbiory:

$$A = \{y \in (0, 3) \mid y \in \mathbb{Q} \text{ i } \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2}(y + 4) \text{ dla pewnego } y \in A\right\}$$

Rozważmy funkcję f określoną na przedziale $(0, 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \in \mathbb{Q} \cap (0, 2) \\ 2x - 1 \text{ dla } x \in (0, 2) \setminus \mathbb{Q} \\ 2x - 4 \text{ dla } x \in B \end{cases}$$

Uzasadnij, że

a) f jest różnowartościowa i poprawnie zdefiniowana na $(0, 2) \cup B$

b) f jest różniczkowalna w $x_0 = 1$

c) przedział $(0, 3)$ należy do zbioru wartości funkcji f

d) pochodna f^{-1} w $y_0 = 1$ nie istnieje

Rozwiązanie:

a) Jeżeli y jest liczbą niewymierną, to jest obrazem pewnego argumentu ze zbioru $(0,2)\setminus\mathbb{Q}$. Na tym zbiorze f jest różnowartościowa (bo jest określona wzorem $2x-1$), zatem jeśli $f(x)=y$ oraz $f(z)=y$, to $x=z$.

Jeżeli y jest liczbą wymierną, to należy do $f(B\cup(0,2)\cup\mathbb{Q})$. Funkcja $f|_{\mathbb{Q}\cap(0,2)}$ jest różnowartościowa oraz $f|_B$ jest różnowartościowa. Pozostaje więc sprawdzić, czy istnieje $x\in\mathbb{Q}\cap(0,2)$ i $z\in B$ takie, że $f(x)=f(z)$. Gdyby tak było, to zachodziłaby równość $x^2=2z-4$ dla $x\in(0,2)\cap\mathbb{Q}$ oraz $z\in B$, ale to nie jest możliwe, gdyż $2z-4\in A$, czyli nie jest kwadratem liczby wymiernej.

b) W dziedzinie f w otoczeniu punktu x_0 nie ma punktów ze zbioru B, ponieważ $B\subseteq\left(2,\frac{7}{2}\right)$. Mamy

$$\lim_{h\to0,\ h\in\mathbb{Q}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$$

bo na tym podzbiorze granica ilorazów różnicowych jest zgodna z pochodną funkcji x^2 w punkcie $x_0=1$. Mamy

$$\lim_{h\to0,\ h\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$$

bo jest to pochodna funkcji $2x-1$ w $x_0=1$. Zatem granica ilorazów różnicowych istnieje, czyli funkcja f jest różniczkowalna w 1.

c) Obrazem przedziału $(0,2)$ są liczby z przedziału $(0,4)$, które są kwadratami liczb wymiernych oraz wszystkie liczby niewymierne z przedziału $(0,3)$, jeśli $y\in(0,3)\setminus\mathbb{Q}$, to $\frac{y+1}{2}$ jest liczbą niewymierną z przedziału $(0,2)$ i zgodnie z definicją funkcji $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=y$.

Obrazem zbioru B jest zbiór A, czyli zbiór wszystkich liczb wymiernych z przedziału $(0,3)$, które są kwadratami liczb wymiernych. Stąd $(0,3)\subseteq f(0,2)\cup f(B)$.

d) Wyznaczmy f^{-1} dla $y\in(0,3)$

$$f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y} & \text{dla } y\in\mathbb{Q}\cap(0,3)\setminus A\\ \frac{y+1}{2} & \text{dla } y\in(0,3)\setminus\mathbb{Q}\\ \frac{y+4}{2} & \text{dla } y\in A\end{cases}$$

Ta funkcja nie jest różniczkowalna w 1, gdyż nie jest ciągła w tym punkcie. Istotnie

$$f^{-1}(1)=\sqrt{1}=1$$

oraz

$$\lim_{y\to1,y\in A}f^{-1}(y)=\lim_{y\to1,y\in A}\frac{y+4}{2}=\frac{5}{2}\neq1$$

Zadanie 4.
Wyznacz zbiór wszystkich parametrów $\alpha\in\mathbb{R}$ dla których funkcja

$$f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\cos\frac{\pi}{\sqrt{|x|}} & \text{dla } x\neq0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

a) jest różniczkowalna

b) jest klasy C^1

Rozwiązanie:

a) Różniczkowalność $f(x)$ na przedziale $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ wynika z twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu,ilorazu i złożenia.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^\alpha\cos\frac{\pi}{\sqrt{|x|}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^\alpha\cos\frac{\pi}{\sqrt{|x|}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\alpha-1}\cos\frac{\pi}{\sqrt{|x|}}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{dla } \alpha>1\\ \text{nie istnieje} & \text{dla } \alpha\le 1\end{cases}$$

Funkcja $f(x)$ jest parzysta, zatem dla granicy prawostronnej mamy analogicznie.

Zatem funkcja jest różniczkowalna dla $\alpha>1$. Dla $\alpha\le 1$ funkcja $f(x)$ nie ma pochodnej w zerze.

b) Policzmy pochodną w $x_0=0$ dla $\alpha>1$. Mamy

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\cos\frac{\pi}{\sqrt{x}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\cos\frac{\pi}{\sqrt{x}}=0$$

Dla $x>0$ mamy

$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^\alpha\cos\frac{\pi}{\sqrt{x}}=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{\pi}{\sqrt{x}}+x^{\alpha-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

Sprawdzamy ciągłość pochodnej w zerze:

$$\lim_{x\to 0^+}\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{\pi}{\sqrt{x}}+x^{\alpha-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{x}}=\begin{cases}0 & \text{dla } \alpha>\frac{3}{2}\\ \text{nie istnieje} & \text{dla } \alpha\le\frac{3}{2}\end{cases}$$

Funkcja $f(x)$ jest parzysta, zatem jej pochodna jest nieparzysta, skąd dla $x<0$ mamy

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-\lim_{x\to 0^+}\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{\pi}{\sqrt{x}}+x^{\alpha-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{x}}=\begin{cases}0 & \text{dla } \alpha>\frac{3}{2}\\ \text{nie istnieje} & \text{dla } \alpha\le\frac{3}{2}\end{cases}$$

Zatem pochodna jest ciągła dla $\alpha>\frac{3}{2}$.

Zadanie 5.
Zbadaj istnienie prawostronnej pochodnej w zerze funkcji

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin^2\frac{\pi}{x} & \text{dla } x>0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

Rozwiązanie:
Mamy
$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sin^2\frac{\pi}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sin^2\frac{\pi}{x}}{x}$$
Ponadto jeśli $x_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = +\infty$ oraz jeśli $y_n = \frac{1}{2n}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0} = 0$ Zatem szukana granica nie istnieje, czyli funkcja $f(x)$ nie ma prawostronnej pochodnej w zerze.

Zadanie 6.
Dana jest funkcja
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sin x^2 & \text{dla } x > 0 \\ -x^2 + \sin(-x^2) & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Zbadaj różniczkowalność f w $x_0 = 0$

b) Wykaż, że f jest odwracalna

c) Określ dziedzinę funkcji odwrotnej

d) Wyznacz zbiór punktów różniczkowalności funkcji odwrotnej do f

e) Oblicz pochodną f w punkcie $y = \frac{\pi+3}{6}$

Rozwiązanie:

a) Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna na przedziale $(\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$. Musimy sprawdzić, czy jest ciągła również w punkcie $x_0 = 0$. Mamy
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + \sin x^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -x^2 + \sin -x^2 = 0$$
Zatem funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$. Mamy $f(0) = 0$.

Zbadajmy teraz jej różniczkowalność w punkcie $x_0 = 0$. Aby funkcja była różniczkowalna w $x_0 = 0$, to $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$. Prawostronną granicę mamy
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + \sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + \sin x^2}{x^2} \cdot x = 0$$
oraz lewostronną granicę mamy
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + \sin -x^2}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + \sin x^2}{x^2} \cdot x = 0$$
oraz lew Zatem funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w zerze.

b) Aby pokazać, że funkcja $f(x)$ jest odwracalna, musimy pokazać, że funkcja jest rosnąca (lub malejąca, ale funkcja jest rosnąca, więc to pokażemy).

Twierdzenie: Jeżeli funkcja f jest określona i różniczkowalna na $\mathbb{R}$ oraz jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedziału dodatnia z wyjątkiem co najwyżej przeliczalnej liczby punktów, w których jest równa zeru, to funkcja jest rosnąca.

Dla $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^2 + \sin x^2 = 2x + \cos x^2 \cdot 2x = 2x(1 + \cos x^2)$$

Dla $x < 0$ mamy

$$f'(x) = \frac{d}{dx} - x^2 + \sin -x^2 = -2x + (-2x) \cdot \cos -x^2 = -2x(1 + \cos x^2)$$

Pochodna funkcji $f(x)$ istnieje wszędzie i jest skończona, zatem jako że $1 + \cos x^2$ jest nieujemne, to pochodna $f(x)$ jest nieujemna. Sprawdźmy kiedy pochodna się zeruje.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(1 + \cos x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \cos x^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{\pi} \cdot (\pm\sqrt{2n \pm 1}) : n \in \mathbb{Z}$$

Zatem jako, że zbiór $\{\pm\sqrt{2n \pm 1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ jest przeliczalny, toteż cosinus zeruje się przeliczalnie wiele razy, czyli funkcja $f(x)$ jest rosnąca.

c) Skoro $f(x)$ jest ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych i rosnąca, to musimy zbadać jej granice w nieskończoności.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \pm(x^2 + \sin x^2) = \pm\infty$$

Zatem zbiorem wartości funkcji $f(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Czyli dziedziną funkcji odwrotnej będzie również zbiór liczb rzeczywistych.

d) Z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wiemy, że f^{-1} jest różniczkowalna poza punktami w których pochodna się zeruje, czyli poza punktami $x = 0 \vee x = \sqrt{\pi} \cdot \left(\pm\sqrt{2n \pm 1}\right) \ : \ n \in \mathbb{Z}$.

e) Mamy

$$f'(x) = 2x(1 + \cos x^2)$$

Zatem

$$f'\left(\frac{\pi + 3}{6}\right) = 2\frac{\pi + 3}{6}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi + 3}{6}\right)^2\right)$$

Zadanie 7.

Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} \text{ dla } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ dla } x = 0 \end{cases}$$

Zadanie 8.
Określ parametry a, b, c i d dla których funckja

$$f(x) = \begin{cases} ax + b \text{ dla } x \leq 0 \\ cx^2 + d \text{ dla } 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} \text{ dla } x > 1 \end{cases}$$

jest różniczkowalna.

Zadanie 9.
Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wykaż, że f ma (skończone) pochodne jednostronne w każdym punkcie. Podaj przykład funkcji wypukłej określonej na $\mathbb{R}$, która nie jest różniczkowalna.

Zadanie 10.
Podaj przykład funkcji $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w zerze, ale nie jest ciągła na żadnym otoczeniu zera.

Zadanie 11.
Podaj przykład funkcji różniczkowalnej w zerze i określonej na pewnym otoczeniu zera, oraz ciągów $x_n \to 0,\ y_n \to 0,\ 0 \neq x_n \neq y_n \neq 0$ takich, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \neq f'(0)$$

Zadanie 12.
Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, przy czym $f(a)$ i $f'(a)$ są wielkościami danymi. Oblicz:

$$\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a + \frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{k}{n}\right) - kf(a)\right)$$

Zadanie 13.
Rozważmy funkcję f określoną na przedziale $(0, 2)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \in \mathbb{Q} \cap (0, 2) \\ 2x - 1 \text{ dla } x \in (0, 2) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sprawdź, że f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$ oraz, że F jest funkcją odwracalną. Czy f^{-1} jest różniczkowalna w $y_0 = 1$?

Ćwiczenia 5
Różniczkowalność

Podstawowe wzory rachunku różniczkowego

- $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1} \quad a \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Twierdzenie: (Arytmetyczne własności pochodnej) Niech $f, g : A \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w $x \in A$, wówczas:

1. dla dowolych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcja $\alpha f + \beta g : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x oraz
$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$
2. funkcja $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x oraz
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \text{ (Wzór Leibniza)}$$
3. jeżeli $g(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g} : A \setminus \{g = 0\} \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w x oraz
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Twierdzenie: (O pochodnej złożenia) Niech funkcja $g : A \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w $x \in A$ (w szczególności $x \in Acc(A)$), $f : B \to \mathbb{R}$, gdzie $g(A) \subseteq B$, niech będzie różniczkowalna w $g(x)$. Wówczas $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x oraz

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Zadanie 1.
Oblicz pochodne funkcji zmiennej x

a) $ax^3 + \frac{b}{x} + c\sqrt{x} + d$

b) $\frac{4}{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + x^{-7}$

c) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}$

d) $\ln x \cos x$

e) $\arctan x \ln x \cos x$

f) $\frac{5x^2-2x+17}{x^2+7}$

g) $\sin^2 x$

h) $\frac{8}{1-2x^2}$

i) $\frac{1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$

j) $4\cos^5\left(\frac{1}{4}x^4\right)$

k) $\cot x^3 + \cot^3 x$

l) $\sin(2x)\cos x^2$

m) $\sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

n) $\ln 5(4\sin x - 8\sin^3(x^2))$

o) $\arctan \ln(x^5 + 5)$

p) $\arctan(x - \sqrt{x^2} + 1)$

r) $\cot 3^x \cdot \arctan x^3$

s) $\arccos\sqrt{1 - x^2}$

Rozwiązanie:

b)
$$\frac{d}{dx}\frac{4}{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + x^{-7} = \frac{d}{dx}4x^{-3} + x^{\frac{2}{5}} + x^{-7} = -12x^{-4} + \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - 7x^{-8}$$

e)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arctan x\cdot\ln x\cdot\cos x &= \left(\frac{d}{dx}\arctan x\cdot\ln x\right)\cdot\cos x+\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)\cdot\arctan x\cdot\ln x=\\
&= \left[\left(\frac{d}{dx}\arctan x\right)\cdot\ln x+\left(\frac{d}{dx}\ln x\right)\cdot\arctan x\right]\cdot\cos x+\\
&\quad +(-\sin x)\cdot\arctan x\cdot\ln x\\
&= \left(\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\arctan x\right)\cdot\cos x-\sin x\cdot\arctan x\cdot\ln x
\end{aligned}$$

h)
$$\frac{d}{dx}\frac{8}{1-2x^2} = \frac{d(\frac{8}{1-2x^2})}{d(1-2x^2)}\cdot\frac{d(1-2x^2)}{dx}=\frac{8}{-(1-2x^2)^2}\cdot(-4x)=\frac{32x}{(1-2x^2)^2}$$

j)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}4\cos^5\left(\frac{1}{4}x^4\right) &= 4\cdot\frac{d(\cos^5\left(\frac14 x^4\right))}{d(\cos\left(\frac14 x^4\right))}\cdot\frac{d(\cos\left(\frac14 x^4\right))}{d(\frac14 x^4)}\cdot\frac{d(\frac14 x^4)}{dx}=\\
&= = 4\cdot 5\cos^4\left(\frac{1}{4}x^4\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{4}x^4\right)\right)\cdot x^3=\\
&= -20x^3\cdot\cos^4\frac{x^4}{4}\cdot\sin\frac{x^4}{4}
\end{aligned}$$

m)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{1+\tan\left(x+\frac{1}{x}\right)} &= \frac{d(\sqrt{1+\tan\left(x+\frac1x\right)})}{d(1+\tan\left(x+\frac1x\right))}\cdot\frac{d(1+\tan\left(x+\frac1x\right))}{d(\tan\left(x+\frac1x\right))}\cdot\frac{d(\tan\left(x+\frac1x\right))}{dx}=\\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\tan\left(x+\frac1x\right)}}\cdot 1\cdot\frac{d(\tan\left(x+\frac1x\right))}{d(x+\frac1x)}\cdot\frac{d(x+\frac1x)}{dx}=\\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\tan\left(x+\frac1x\right)}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac1x\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

n)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln 5(4\sin x-8\sin^3(x^2)) &= \frac{d(\ln 5(4\sin x-8\sin^3(x^2)))}{d(5(4\sin x-8\sin^3(x^2)))}\cdot\frac{d(5(4\sin x-8\sin^3(x^2)))}{dx}=\\
&= \frac{1}{5(4\sin x-8\sin^3(x^2))}\cdot\left[\frac{d(20\sin x)}{dx}-\frac{d(40\sin^3(x^2))}{dx}\right]=\\
&= \frac{20\cos x-40\cdot\frac{d(\sin^3(x^2))}{d(\sin(x^2))}\cdot\frac{d(\sin(x^2))}{d(x^2)}\cdot\frac{d(x^2)}{dx}}{20\sin x-40\sin^3(x^2)}=\\
&= \frac{20\cos x-40\cdot 3\sin^2(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x}{20\sin x-40\sin^3(x^2)}=\\
&= \frac{\cos x-12\sin^2(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot x}{\sin x-2\sin^3(x^2)}
\end{aligned}$$

o)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arctan\ln(x^5+5) &= \frac{d(\arctan\ln(x^5+5))}{d(\ln(x^2+5))}\cdot\frac{d(\ln(x^2+5))}{d(x^2+5)}\cdot\frac{d(x^2+5)}{dx}=\\
&= \frac{1}{1+(\ln(x^2+5))^2}\cdot\frac{1}{x^2+5}\cdot 1\cdot 2x=\\
&= \frac{2x}{(1+(\ln(x^2+5))^2)\cdot(x^2+5)}
\end{aligned}$$

r)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cot 3^x \cdot \arctan x^3 \quad & \frac{d(\cot 3^x)}{dx}\cdot \arctan x^3 + \frac{d(\arctan x^3)}{dx}\cdot \cot 3^x = \\ &= \frac{d(\cot 3^x)}{d(3^x)}\cdot\frac{d(3^x)}{dx}\cdot \arctan x^3 + \frac{d(\arctan x^3)}{dx^3}\cdot\frac{d(x^3)}{dx}\cdot \cot 3^x = \\ &= -\frac{1}{\sin^2(3^x)}\cdot 3^x\cdot \ln 3\cdot \arctan x^3 + \frac{1}{1+x^6}\cdot 3x^2\cdot \cot 3^x\end{aligned}$$

Zadanie 2.
Oblicz $\frac{d}{dx}f(x)$, gdy

a) $e^{\sin^2 x}$

b) x^x

c) $x^{\sin^2 x}$

d) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

e) $\log_2(\sin x)$

f) $\log_5\left(\frac{25}{2x+1}\right)$

Rozwiązanie:

a)
$$\frac{d}{dx}e^{\sin^2 x} = \frac{d(e^{\sin^2 x})}{d(\sin^2 x)}\cdot\frac{d(\sin^2 x)}{d(\sin x)}\cdot\frac{d(\sin x)}{dx} = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cdot\cos x$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{\ln x^x} = \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = \frac{d(e^{x\ln x})}{d(x\ln x)}\cdot\frac{d(x\ln x)}{dx} = \\ &= e^{x\ln x}\cdot\left[\frac{d(x)}{dx}\ln x + x\frac{d(\ln x)}{dx}\right] = x^x\cdot(\ln x+1)\end{aligned}$$

Zadanie 3.
Zbadaj różniczkowalność funkcji, wyznacz pochodną w zerze jeśli istnieje

a) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} \text{ dla } x>0 \\ 0 \text{ dla } x=0\end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} \text{ dla } x>0 \\ 0 \text{ dla } x=0\end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ dla } x>0 \\ 0 \text{ dla } x=0\end{cases}$

d) $f(x) = |x|^3$

e) $f(x) = \sqrt{|x|}$

f) $f(x) = |x|$

Zadanie 4.
Oblicz pochodne poniższych funkcji

a) $\left(\sin^2 x + x\right)^{\cos x}$

b) $\ln^4\left(\cos^2 x + e^{-x}\right)$

c) 5^{3^x}

Rozwiązanie:

a)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x + x\right)^{\cos x} &= \frac{d}{dx} e^{\cos x \cdot \ln\left(\sin^2 x + x\right)} = \\ &= e^{\cos x \cdot \ln(\sin^2 x + x)} \cdot \left(-\sin x \ln(\sin^2 x + x) + \cos x \cdot \frac{2\sin x \cos x + 1}{\sin^2 x + x}\right) = \\ &= \left(\sin^2 x + x\right)^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos x \cdot (2\sin x \cos x + 1)}{\sin^2 x + x} - \sin x \ln x(\sin^2 x + x)\right)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln^4\left(\cos^2 x + e^{-x}\right) &= 4\ln^3\left(\cos^2 x + e^{-x}\right) \cdot \frac{d(\ln\left(\cos^2 x + e^{-x}\right))}{dx} = \\ &= 4\ln^3\left(\cos^2 x + e^{-x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x + e^{-x}} \cdot \frac{d(\cos^2 x + e^{-x})}{dx} = \\ &= \left(2\cos x \cdot (-\sin x) - e^{-x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x + e^{-x}} \cdot 4\ln^3\left(\cos^2 x + e^{-x}\right)\end{aligned}$$

c)
$$\frac{d}{dx}5^{3^x} = 5^{3^x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{d}{dx}3^x = 5^{3^x} \cdot \ln 5 \cdot 3^x \cdot \ln 3$$

Twierdzenie: (O pochodnej funkcji odwrotnej) Załóżmy, że $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$ i ma funkcję odwrotną $f^{-1} : f((a, b)) \to \mathbb{R}$ i f^{-1} jest ciągła w $f(x_0)$. Załóżmy dodatkowo, że $f'(x_0) \neq 0$. Wówczas f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i zachodzi równość
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Zadanie 5.
Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$ oraz f ma funkcję odwrotną $f^{-1} : f((a, b)) \to (a, b)$ ciągłą w $f(x_0)$ oraz dodatkowo $f'(x_0) = 0$. Wykaż, że pochodna funkcji odwrotnej $f^{-1}(x_0)$ nie istnieje.

Rozwiązanie:
Niech $y_0 = f(x_0)$ oraz $H = f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)$. Wówczas $\lim_{h\to 0} H(h) = 0$, bo f^{-1} jest ciągła w y_0. Zauważmy, że

$$f(x_0+H) - f(x_0) = f(x_0 + f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)) - f(x_0) =$$

$$= f(f^{-1}(y_0) + f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)) - f(x_0) = f(f^{-1}(y_0+h)) - y_0 = h$$

Zatem

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{H\to 0} \frac{H}{f(x_0+H) - f(x_0)} = \pm\infty$$

Zadanie 6.

a) Napisz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ w puncie $(1, f(1))$.

b) Pod jakim kątem przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ dla $x > 0$?

Rozwiązanie:

a)

Definicja: Styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0 w którym f jest różniczkowalna, nazywamy prostą o wzorze

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

Musimy zbadać, czy $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$. Funkcja $\arctan x$ jest różniczkowalna w swojej dziedzinie. Dziedziną funkcji $f(x)$ jest $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Zatem funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w $x_0 = 1$.

Obliczmy pochodną funkcji

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1-x}{1+x} =$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{2x^2+2} \cdot \frac{1-x-(-1)(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{x^2+1}$$

Zatem $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$. Oczywiście $f(x_0) = 0$.

Równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ to

$$y = 0 + (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

b) Aby zbadać pod jakim kątem przecinają się wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$ musimy zbadać pod jakim kątem przecinają się styczne tych funkcji w punkcie przecięcia tych dwóch wykresów. Wyznaczmy zatem punkt przecięcia wykresów.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^6 = x \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1$$

Zatem jako, że $x > 0$ to punkt przecięcia tych dwóch funkcji to $x_0 = 1$. Obie funkcje są różniczkowalne w punkcie $x_0 = 1$. Ponadto $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ oraz $g'(1) = \frac{1}{3 \cdot 1^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}$, zatem równania stycznych tych funkcji są następujące

$$y_f = 1 + (x-1) \cdot 2 = 2x - 1$$

$$y_g = 1 + (x-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Musimy teraz wyznaczyć pod jakim kątem przecinają się styczne.

Twierdzenie: Proste o równaniach $l_1 : \ y = a_1 x + b_1$ oraz $l_2 : \ y = a_2 x + b_2$ przecinają się pod kątem α takim, że $\tan \alpha = \left| \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2} \right|$

Dowód: Niech prosta l_1 będzie nachylona do osi OX pod kątem β, natomiast prosta l_2 będzie nachylona do osi OX pod kątem γ. Wówczas $\alpha + \beta = \gamma$, czyli mamy

$$\tan \alpha = \tan(\gamma - \beta) = \frac{\tan \gamma - \tan \beta}{1 + \tan \beta \cdot \tan \gamma} = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}$$

Możemy łatwo wyznaczyć tangens kąta pod jakim przecinają się te dwie proste.

$$\tan \alpha = \left| \frac{\frac{1}{3} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \right| = 1$$

Zatem kąt pod jakimi się przecinają wynosi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Zadanie 7.

W którym punkcie elipsy o równaniu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ należy poprowadzić styczną, aby pole trójkąta ograniczone tą styczną i dodatnimi półosiami układu współrzędnych było najmniejsze?

Rozwiązanie:

Wykażemy najpierw, że prosta styczna do elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ w punkcie (p, q) należącym do elipsy przecina osie współrzędnych w punktach $\left(\frac{a^2}{p}, 0\right)$ i $\left(0, \frac{b^2}{q}\right)$.

Ograniczmy się do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych (elipsa jest środkowo-symetryczna względem punktu $(0,0)$), wówczas możemy rozpatrywać elipsę jako funkcję.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Pierwiastek jest różniczkowalny w swojej dziedzinie. Policzmy więc pochodną funkcji $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Mamy

$$f'(x) = \frac{d}{dx} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Zatem równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie (p,q) należącym do elipsy (możemy założyć, że $p,q\neq 0$, bo w przeciwnym wypadku styczna byłaby równoległa do osi OX lub OY) jest równe

$$y=b\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}+(x-p)\cdot\left(-\frac{bp}{a\sqrt{a^2-p^2}}\right)$$

Prosta ta przecina oś OX w punkcie x takim, że

$$0=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-p^2}+(x-p)\cdot\left(-\frac{bp}{a\sqrt{a^2-p^2}}\right)\Leftrightarrow x=\frac{a^2}{p}$$

Natomiast oś OY w punkcie y takim że

$$y=b\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}+(0-p)\cdot\left(-\frac{bp}{a\sqrt{a^2-p^2}}\right)=\frac{ab}{\sqrt{a^2-p^2}}$$

Mamy $f(p)=q$, zatem

$$q=b\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}\Leftrightarrow p=a\sqrt{1-\frac{q^2}{b^2}}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-q^2}$$

Czyli mamy

$$y=\frac{ab}{\sqrt{a^2-p^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}\cdot(b^2-q^2)}}=\frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2q^2}{b^2}}}=\frac{b^2}{q}$$

Wykazaliśmy więc, że styczna do elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ w punkcie (p,q) należącym do elipsy, przecina osie współrzędnych w punktach $\left(\frac{a^2}{p},0\right)$ i $\left(0,\frac{b^2}{q}\right)$. Zatem dla naszej elipsy o równaniu $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, styczna w punkcie (p,q) przecina osie współrzędnych w punktach $\left(\frac{16}{p},0\right)$ i $\left(0,\frac{25}{q}\right)$ przy czym $p\in(0,4)$ oraz $q\in(0,5)$.

Pole trójkąta wyznaczone przez osie układu współrzędnych i tą styczną jest więc równe

$$P(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{p}\cdot\frac{25}{q}$$

Wiemy jednak, że $q=b\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}$, czyli dla naszej elipsy $q=\frac{5}{4}\sqrt{16-p^2}$, zatem mamy

$$P(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{p}\cdot\frac{25}{\frac{5}{4}\sqrt{16-p^2}}=\frac{160}{p\sqrt{16-p^2}}$$

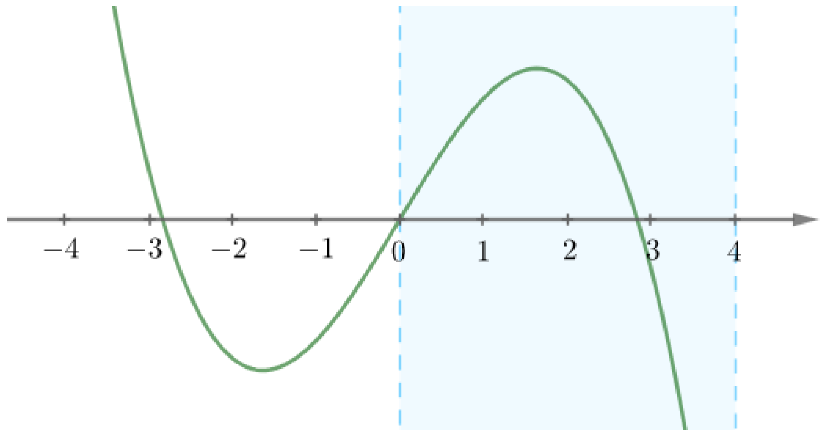
Chcemy zminimalizować funkcję $P(p)$, zatem jako, że funkcja $\frac{1}{x}$ jest malejąca, to wystarczy, że zmaksymalizujemy funkcję $F(p)=p\sqrt{16-p^2}=\sqrt{16p^2-p^4}$. Jednak funkcja $\sqrt{x}$ jest rosnąca, zatem wystarczy, że zmaksymalizujemy funkcję $G(x)=16x^2-x^4$, gdzue $x\in(0,4)$. Pochodna tej funkcji to

$$G'(x)=32x-4x^3$$

Zbadajmy przebieg zmienności tej funkcji

$$32x-4x^3=4x(8-x^2)=x(2\sqrt{2}-x)(2\sqrt{2}+x)$$

Narysujmy to symbolicznie w układzie współrzędnych i ograniczmy do przedziału $(0, 4)$.



Funkcja $G(x)$ rośnie w przedziale $(0, 2\sqrt{2})$ i maleje w przedziale $(2\sqrt{2}, 4)$, zatem ma maksimum lokalne w punkcie $x = 2\sqrt{2}$.

Pierwszą współrzędną szukanego punktu będzie więc $p = 2\sqrt{2}$, natomiast drugą będzie $q = 5\sqrt{1 - \frac{8}{16}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Stczna będzie miała równanie

$$y = \frac{20\sqrt{2} - 5x}{4}$$

Ćwiczenia 6

Zastosowania pochodnych

Definicja: (ekstremum lokalne) Niech $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem w $\mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in I$ maksimum lokalne (odpowiednio minimum lokalne), jeśli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich $x \in I$, takich że $|x - x_0| < \delta$, zachodzi nierówność $f(x_0) \geq f(x)$ (odpowiednio $f(x_0) \leq f(x)$).

Jeżeli dla wszystkich $x \in I$ takich, że $0 < |x-x_0| < \delta$ $f(x_0) > f(x)$ (odpowiednio $f(x_0) < f(x)$), to mówimy wtedy, że f ma w punkcie x_0 maksimum (lub minimum) właściwe.

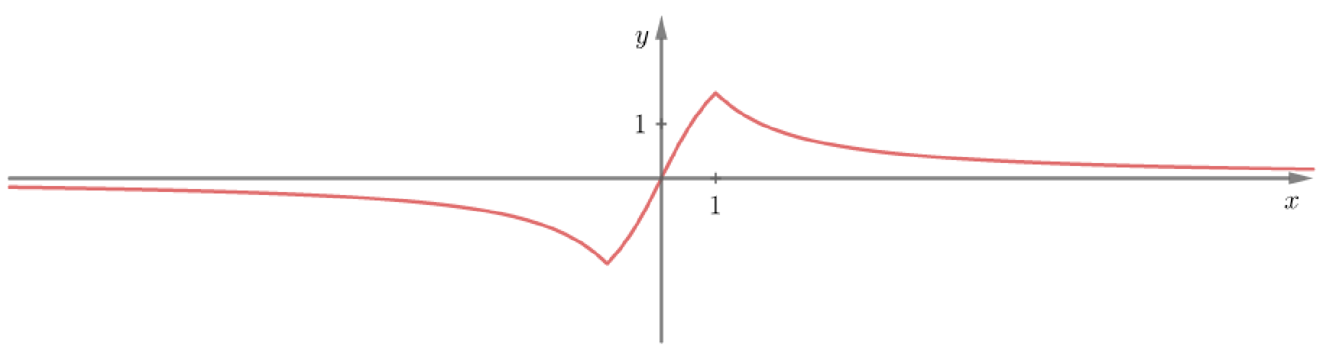
Lemat: (Fermata) Jeżeli I jest odcinkiem otwartym, $x_0 \in I$ oraz $f : I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i f ma w x_0 ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Zadanie 1.
Znajdź wszystkie punkty zerowania się pochodnej funkcji $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Wskaż ekstrema lokalne tej funkcji.

Rozwiązanie:
Liczymy pochodną funkcji z zadania

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \cdot \frac{2-2x^2}{1+x^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} = \\
&= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{dla } x \in (-1,1) \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{dla } x \in (-\infty,-1) \cup (1+\infty) \end{cases}
\end{aligned}$$

Zatem pochodna się nigdzie nie zeruje. Ekstrema lokalne funkcji mogą być tam, gdzie funkcja nie jest różniczkowalna, czyli w 1 lub -1.



Zadanie 2.
Zbadaj liczbę rozwiązań równania $e^x = \mu x^2$ w zależności od parametru μ.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli μ jest mniejsze od zera, to nie mamy żadnych rozwiązać. Zatem musimy zbadać liczbę rozwiązań dla $\mu > 0$. Mamy

$$e^x = \mu x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\mu}$$

Zbadajmy funkcję $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Zbadajmy jej granice w nieskończoności

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Zatem na mocy własności Darboux możemy wywnioskować, że funkcja ta ma co najmniej jedno rozwiązanie dla $\mu > 0$.

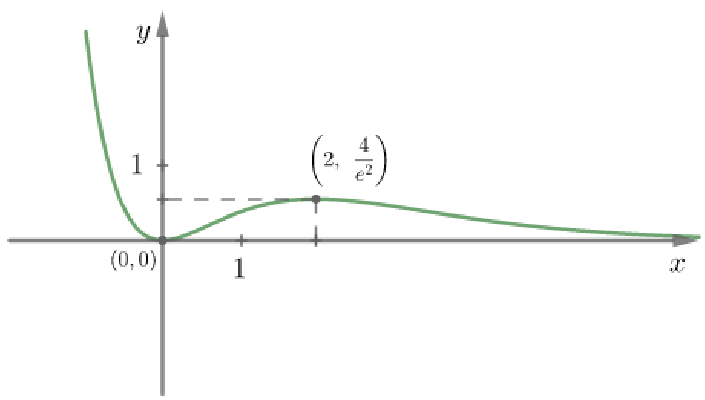
Aby zbadać zachowanie funkcji, liczymy pochodną

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}}$$

Chcemy zbadać kiedy ta pochodna jest dodatnia, czyli kiedy funkcja jest ściśle rosnąca.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2xe^x - x^2e^x > 0 \Leftrightarrow e^x x(2-x) > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,2)$$

Możemy naszkicować więc jej wykres.



Stąd łatwo odczytać liczbę rozwiązań równania $e^x = \mu x^2$ w zależności od μ.

Zadanie 3.
Zbadaj liczbę rozwiązań równania $ae^x = 1 + x - \frac{x^2}{2}$ w zależności od parametru a.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1+x-\frac{x^2}{2}}{e^x}$. Policzmy granice funkcji

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

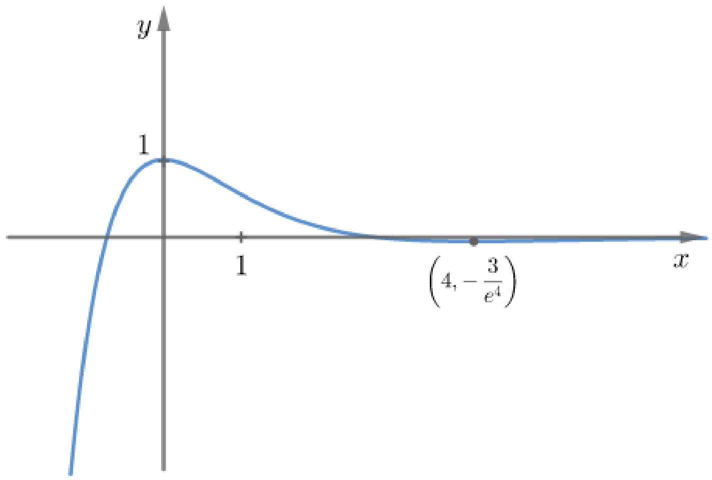
Policzmy pochodną tej funkcji

$$f'(x) = \frac{(x-4)x}{2e^x}$$

Sprawdźmy dla jakich x-ów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, by zbadać kiedy funkcja jest rosnąca a kiedy malejąca

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-4)x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

Narysujmy wykres funkcji.



Stąd już łatwo odczytać liczbę rozwiązań równiania $ae^x = 1 + x - \frac{x^2}{2}$ w zależności od parametru a.

Zadanie 4.
Znajdź kresy zbioru $A = \{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Rozwiązanie:
Rozważmy funkcję $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ na zbiorze $[1, +\infty)$. Policzmy granice w krańcach przedziału

$$f(1) = 1 \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

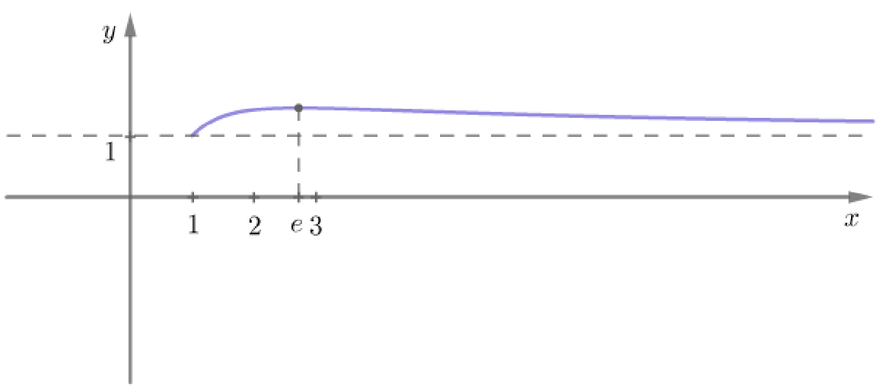
Policzmy pochodną

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{x}} = \frac{d}{dx}e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

Chcemy zobaczyć kiedy ta funkcja rośnie, a kiedy maleje. Sprawdźmy więc dla jakich x-ów pochodna jest dodatnia

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x \in (1, e)$$

Możemy teraz naszkicować wykres tej funkcji



Infimum tej funkcji jest równe 1, natomiast supremum tej funkcji to wartość w ekstremum lokalnym $f(e)$. Musimy zbadać kresy zbioru $\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, czyli interesują nas wartości tej funkcji na zbiorze dyskretnym. Supremum znajduje się więc w dwójce lub w trójce. Mamy $f(2) = \sqrt{2} < f(3) = \sqrt[3]{3}$, zatem $\inf A = 1$ oraz $\sup A = \sqrt[3]{3}$.

Zadanie 5.
Znajdź kresy zbioru $A = \{e^{-n}(n^2 - 2n - 3) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy funkcję $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$. Policzmy granice w końcach przedziałów

$$f(1) = e^{-1}(1^2 - 2 \cdot 1 - 3) = \frac{-4}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{e^x} = 0$$

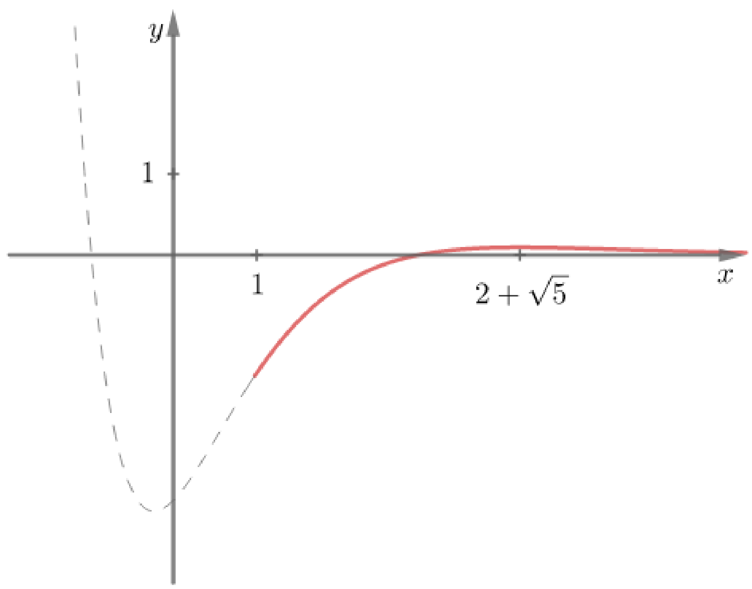
Policzmy pochodną funkcji

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^2 - 2x - 3}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 2x - 3) \cdot e^x - e^x \cdot (x^2 - 2x - 3)}{(e^x)^2} = -\frac{x^2 + 4x + 1}{e^x}$$

Zbadajmy dla jakich x-ów pochodna jest dodatnia, czyli funkcja jest rosnąca

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - (2 + \sqrt{5})\right)\left(x - (2 - \sqrt{5})\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2 + \sqrt{5}]$$

Możemy teraz naszkicować wykres funkcji.



Stąd $\inf A = f(1) = -\frac{4}{e}$ oraz $\sup A = \max(f(4), f(5)) = \max\left(\frac{5}{e^4}, \frac{12}{e^4}\right) = \frac{5}{e^4}$.

Zadanie 6.
Wykaż nierówności

a) $\tan x > x$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$

Rozwiązanie:

a) Rozważmy funkcję $f(x) = \tan x - x$. Mamy $f(0) = 0$, zatem wystarczy, że pokażemy, że funkcja $f(x)$ jest ściśle rosnąca na $(0, \infty)$. Policzmy jej pochodną

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$$

Pochodna jest dodatnia dla $x \in (0, \infty)$, zatem funkcja $f(x)$ jest rosnąca.

b) Rozważmy $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Ta funkcja w zerze przyjmuje wartość zero. Wystarczy pokazać, że jej pochodna jest dodatnia dla $x > 0$. Mamy

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

Chcemy udowodnić nierówność $f'(x) > 0$. Policzmy drugą pochodną

$$f''(x) = -\sin x + x > 0$$

Stąd f' jest funkcją rosnącą, która przyjmuje wartość 0 w zerze, więc jest dodatnia na $(0, 1)$.

Zadanie 7.
Wykaż, że jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na (a, b), f' jest funkcją nieujemną oraz $\{x \in (a, b) \mid f'(x) = 0\}$ jest przeliczalny, to f jest funkcją ściśle rosnącą.

Zadanie 8.
Wykaż, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x + \cos x$ jest funkcją odwracalną. Określ dziedzinę funkcji odwrotnej. Wyznacz zbiór punktów różniczkowalności f^{-1}. Oblicz $f'^{-1}(\pi - 1)$.

Zadanie 9.
Wyprowadź wzór pochodnej funkcji

a) $f(x) = \arccos x$

b) $f(x) = \arctan x$

Zadanie 10.
Wykaż, że $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 11.
Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \ln(\cos^2 x)$.

Zadanie 12.
Znajdź kresy funkcji na podanych zbiorach. Rozstrzygnij, czy funkcja przyjmuje kresy na podanym zbiorze.

a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ na $\mathbb{R}$

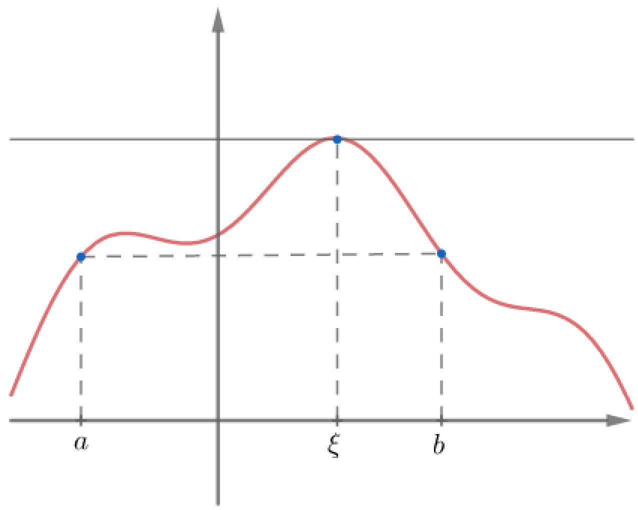
b) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ na $(1, +\infty)$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ na $[1, e^2]$

Ćwiczenia 7

Twierdzenia o wartości średniej

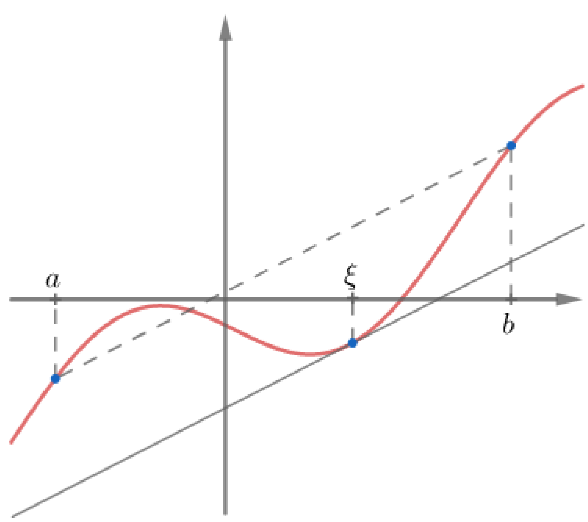
Twierdzenie: (Rolle'a o wartości średniej) Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.



Jeżeli $f(a) = f(b)$, to między a i b jest co najmniej jeden punkt ξ w którym styczna do wykresu jest pozioma.

Twierdzenie: (Lagrange'a o wartości średniej) Niech f będzie ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b). Istnieje wówczas $\xi \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$



Istnieje punkt ξ między a i b, w którym styczna jest równoległa do siecznej poprowadzonej przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Współczynnik kierunkowy tej siecznej to $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Twierdzenie: (Cauchy'ego o wartości średniej) Niech funkcje f i g będą ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) i dodatkowo niech $\forall_{x\in(a,b)}\ g'(x) \neq 0$. Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Zadanie 1.
Funkcja f jest różniczkowalna na (a,b). Czy jest prawdą, że dla każdego $\varepsilon \in (a,b)$ istnieją x_1, x_2 takie że $a < x_1 < \varepsilon < x_2 < b$ i

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

Rozwiązanie:
Nie wynika. Rozważmy funkcję $f(x) = x^3$ jest to funkcja ściśle rosnąca, więc dla $x_1 < 0 < x_2$ mamy $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \neq 0$ jednak $f'(0) = 0$.

Zadanie 2.
Wykaż, że równanie $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Policzmy jej pochodną $f'(x) = 13x^{12} + 21x^2$.

Twierdzenie: (własność Darboux) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux, jeśli obraz każdego przedziału jest znowu przedziałem. W szczególności jeżeli $a < b$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, to obraz funkcji f obejmuje cały przedział $[f(a), f(b)]$, więc istnieje taka wartość c należąca do przedziału (a,b), że $f(c) = 0$.

Policzmy granice funkcji $f(x)$ w nieskończoności

$$\lim_{x\to+\infty} x^{13} + 7x^3 - 5 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{13} + 7x^3 - 5 = -\infty$$

Zatem istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że $f(a) > 0$ oraz istnieje takie $b \in \mathbb{R}$, że $f(b) < 0$ oraz $b < a$, zatem z własności Darboux, istnieje takie $c \in \mathbb{R}$, że $f(c) = 0$. Wykazaliśmy więc, że funkcja $f(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Aby pokazać, że istnieje tylko jeden pierwiastek, pokażemy, że funkcja jest monotoniczna. Niech $x_1 < x_2$, wówczas

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^{13} - x_2^{13} + x_1^7 - x_2^7 < x_2^{13} - x_2^{13} + x_2^7 - x_2^7 = 0$$

zatem $f(x_1) < f(x_2)$. Czyli funkcja jest ściśle rosnąca. Przecina więc oś OX co najwyżej jeden raz.

Zadanie 3.
Wykaż, że równanie $3^x + 4^x = 5^x$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$. Chcemy znaleźć taki x, że $f(x) = 0$. Łatwo zauważyć, że $f(2) = 0$. Wykazaliśmy więc, że funkcja $f(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Aby pokazać, że istnieje tylko jeden pierwiastek, pokażemy, że funkcja jest monotoniczna. Niech $x_1 < x_2$, wówczas

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} - \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} - \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} - \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} = 0$$

Zatem $f(x_1) > f(x_2)$, czyli funkcja jest ściśle malejąca. Przecina więc oś OX co najwyżej raz.

Zadanie 4.
Funkcja $f \in C([a, b])$, gdzie $a > 0$. Załóżmy ponadto, że f jest różniczkowalna na (a, b) oraz spełnia warunek

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$$

Wykaż, że istnieje takie $x_0 \in (a, b)$, że $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

Rozwiązanie:
$f \in C([a, b])$ oznacza, że $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$. Weźmy funkcję $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Funkcja $g(x)$ jest ciągła na $[a, b]$, ponieważ funkcja $f(x)$ jest ciągła i $x > 0$. Funkcja $g(x)$ jest różniczkowalna na (a, b), ponieważ jest ilorazem funkcji różniczkowalnych. Spełniony jest też warunek $g(a) = g(b)$, ponieważ $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$. Pochodna funkcji $g(x)$ to

$$g'(x) = \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2}$$

Z twierdzenia Rolle'a istnieje więc takie $x_0 \in (a, b)$, że $g'(x_0) = 0$. czyli

$$\frac{f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0)$$

Zadanie 5.
Wykaż, że funkcja $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ nie jest różniczkowalna w $x_0 = 1$.

Rozwiązanie:
Funkcja $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ określona jest na prostej rzeczywistej. Jednak dla $x_0 = 1$ mamy

$$f(1) = \arcsin \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^1} = \arcsin 1$$

Funkcja arcus sinus nie jest różniczkowalna w $x_0 = 1$, zatem nie możemy zastosować wzoru na pochodną złożenia. Dla mamy $x \notin \{-1, 1\}$ liczymy pochodną funkcji

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}} \cdot \frac{2 - 2x^2}{1+x^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} = \\
&= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{dla } x \in (-1, 1) \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \cup (1 + \infty) \end{cases}
\end{aligned}$$

Chcemy zbadać różniczkowalność funkcji w 1 i w -1.

Ogólnie jeśli g nie jest różnoczkowalna w $f(x_0)$ to nie wynika stąd, że $g \circ f$ jest nieróżniczkowalna w $f(x_0)$, ponieważ dla $g(x) = |x|$ i $f(x) = x^2$ mamy $g(f(x)) = |x^2| = x^2$, zatem g nie jest różniczkowalna w zerze, natomiast $g \circ f$ jest.

Aby pokazać, że funkcja nie jest różniczkowalna w 1 i w -1, musimy policzyć pochodne jednostronne i zobaczyć, że są różne. Nie będziemy jednak liczyć

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f'(x)$$

ponieważ nie możemy korzystać w tych punktach ze wzoru na pochodną złożenia, bo arcsin nie jest w tych punktach różniczkowalny. Musimy policzyć

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Zastosujemy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji $f(t) = \arcsin \frac{2t}{1+t^2}$ na przedziale $(1, x)$. Funkcja ta jest ciągła i różniczkowalna na przedziale $(1, x)$, zatem istnieje taki $\xi(x) \in (1, x)$ że

$$\frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin \frac{2 \cdot 1}{1+1^2}}{x - 1} = f'(\xi)$$

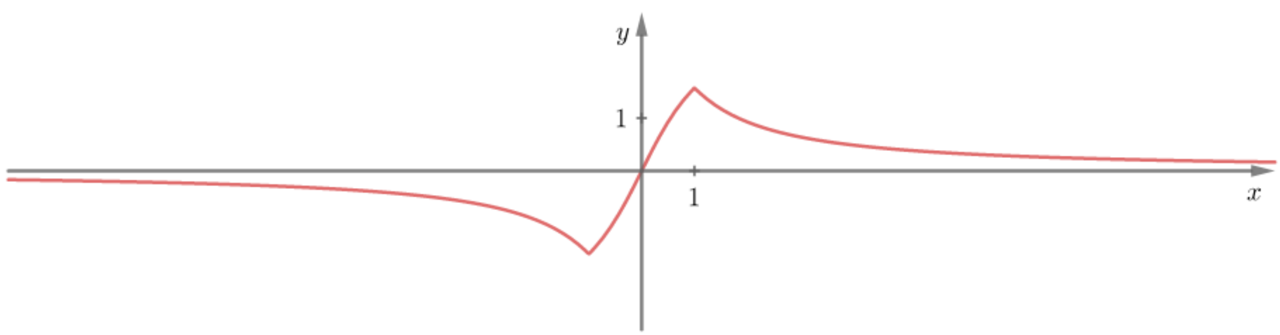
czyli

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin \frac{2 \cdot 1}{1+1^2}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} f'(\xi(x)) = \lim_{x \to 1^+} \frac{-2}{1 + (\xi(x))^2} = -1$$

Analogicznie dla pochodnej lewostronnej mamy $\xi(x) \in (1, x)$, zatem mamy

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin \frac{2 \cdot 1}{1+1^2}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} f'(\xi(x)) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{1 + (\xi(x))^2} = 1$$

Zatem jako, że pochodna prawostonnej różna jest od pochonej lewostronnej, to funkcja nie jest różniczkowalna w $x_0 = 1$.



Twierdzenie: Jeżeli $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz różniczkowalna na $(a - \varepsilon, a)$ oraz $(a, a + \varepsilon)$ i ponadto $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ i $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$ istnieją i są skończone to f jest różniczkowalna w a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$$

Zadanie 6.
Załóżmy, że $0 < x < y$. Wykaż nierówności

$$\frac{x-y}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{y-x}{x}$$

Rozwiązanie:
Sprowadźmy równości do równoważnej postaci

$$\frac{1}{y} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y-x} \leq \frac{1}{x}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a dla funkcji $f(t) = \ln t$ na przedziale (x, y) mamy

$$\frac{\ln y - \ln x}{y-x} = \frac{1}{\xi}$$

dla pewnego $\xi \in (x, y)$. Jako, że $0 < x < y$, to $\frac{1}{y} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$, czyli

$$\frac{1}{y} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y-x} \leq \frac{1}{x}$$

Zadanie 7.
Stosując twierdzenie o wartości średniej wykaż, że funkcje $\sin x$ oraz $\arctan x$ są lipschitzowskie ze stałą 1.

Rozwiązanie:
Zastosujmy twierdzenie Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \sin x$ na przedziale (x, y). Dostajemy (po obłożeniu równości modułem)

$$\frac{|\sin x - \sin y|}{x-y} = \cos(\xi) \leq 1$$

Zatem

$$|\sin x - \sin y| \leq 1 \cdot |x-y|$$

czyli funkcja $\sin x$ jest lipszycowska ze stałą 1.

Zastosujmy twierdzenie Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \arctan x$ na przedziale (x, y). Dostajemy (po obłożeniu równości modułem)

$$\frac{|\arctan x - \arctan y|}{x-y} = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$$

Zatem

$$|\arctan x - \arctan y| \leq 1 \cdot |x-y|$$

czyli funkcja $\arctan x$ jest lipszycowska ze stałą 1.

Twierdzenie: Załóżmy, że $c < d$, zaś funkcja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[c, d]$ i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (c, d)$. Następujące warunki są równoważne:

1. Funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą M
2. Dla każdego $x \in (c, d)$ zachodzi nierówność $|f'(x)| \leq M$

Zadanie 8.
Zbadaj jednostajną ciągłość funkcji

$$f(x) = (e^x - 1)\sin\left(\frac{1}{5^x - 1}\right)$$

a) na przedziale $(0, 2020)$

b) na przedziale $(0, \infty)$

Rozwiązanie:
Policzmy granice w krańcach przedziału $(0, \infty)$

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1)\sin\left(\frac{1}{5^x - 1}\right) = 0$$

ponieważ $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$ oraz sin jest ograniczony.

$$\lim_{x\to\infty}(e^x - 1)\sin\left(\frac{1}{5^x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - 1}{5^x - 1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{5^x-1}}{\frac{1}{5^x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{e}{5}\right)^x - 5^{-x}}{1 - 5^{-x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{5^x-1}}{\frac{1}{5^x-1}} = \frac{0-0}{1-0}\cdot 1 = 0$$

Skoro funkcja ma skończone granice zarówno w lewym jak i prawym końcu przedziału $(0, \infty)$, to jest na nim jednostajnie ciągła. Jest również jednostajnie ciągła na przedziale $(0, 2020)$, bo $(0, 2020) \subseteq (0, \infty)$.

Zadanie 9.
Czy funkcja $f(x) = \cos e^x$ jest jednostajnie ciągła na

a) przedziale $(0, +\infty)$

b) przedziale $(-\infty, 0)$

Rozwiązanie:

a) Rozważmy ciągi $x_n = \ln(2n\pi)$ oraz $y_n = \ln\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, wówczas

$$x_n - y_n = \ln\frac{2n\pi}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \overset{n\to\infty}{\to} \ln 1 = 0$$

oraz

$$f(x_n) - f(y_n) = \cos(2n\pi) - \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

Zatem funkcja nie jest jednostajnie ciągła.

b) Tak, bo ma skończone granicze w końcach przedziału.

Zadanie 10.
Skonstruuj przykład funkcji f ciągłej na $[0, +\infty)$, takiej, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, ale funkcja nie lipschitzowsko ciągła na żadnym przedziale postaci $[a, \infty)$, gdzie $a > 0$.

Badanie przebiegu zmienności funkcji f

1. Wyznaczanie dziedziny D_f
2. Sprawdzanie parzystości/nieparzystości/okresowości
3. Punkty przecięcia z osiami (gdy wykonalne)
4. Asymptoty - pionowe, poziome, ukośne
5. f' i przedziały monotoniczności
6. f'' i punkty przegięcia
7. tabelka
8. wykres

Nasysujmy wykres funkcji $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ dla przykładu

1. $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \in (-1, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
2. $f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, zatem funkcja jest nieparzysta
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0$, zatem mamy asymptoty poziome
5. $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & x \in (-1,1) \\ -\frac{2}{1+x^2} & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$, zatem funkcja jest rosnąca gdy $x \in (-1, 1)$ i malejąca, gdy $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
6. $f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2} & x \in (-1,1) \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$, zatem $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ czyli funkcja jest wypukła gdy $x \in (-1, 0)$ oraz $x \in (1, +\infty)$ i wklęsła gdy $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (0, 1)$

Zadanie 11.
Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Naszkicuj jej wykres.

Rozwiązanie:
Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ jest przedział $(0, +\infty)$. Policzmy granice na końcach przedziału.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

Policzmy pochodną funkcji

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x^3}}$$

Wyznaczmy teraz dla jakiego x pochodna jest dodatnia, czyli funkcja $f(x)$ rośnie.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x^3}} > 0 \Leftrightarrow 2-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$$

Funkcja $f(x)$ rośnie więc na przedziale $(0, e^2)$ i maleje na przedziale $(e^2, +\infty)$. W punkcie $x = e^2$ osiąga maksimum równe

$$f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

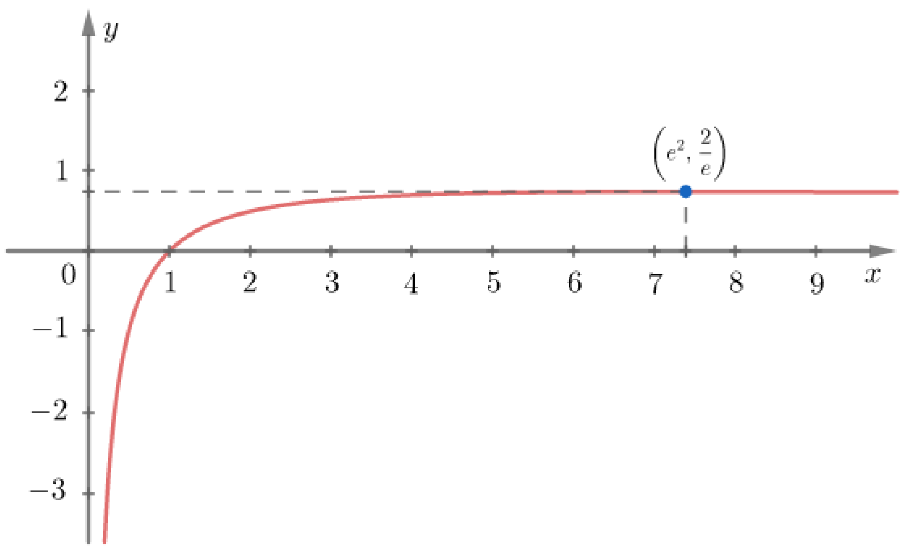
Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Zadajmy wypukłość funkcji. Mamy

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2-\ln x}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4\sqrt{x^5}}$$

Druga pochodna jest ujemna dla takich x-ów, że $\ln x < \frac{8}{3}$ (wtedy też funkcja jest wklęsła) i dodatnia dla takich x-ów, że $\ln x > \frac{8}{3}$ (wtedy funkcja jest wypukła). Mamy $\ln x = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{8}{3}}$. Możemy więc naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.



Zadanie 12.
Wykaż, że jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Podaj przykład świadczący o tym, że jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, to $f(x)$ może nie mieć granicy w nieskończoności.

Rozwiązanie:
Skoro $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = a > 0$, to istnieje takie c, że dla $x > c$ zachodzi $f'(x) > \frac{a}{2}$. Weźmy przedział $[c, x]$, gdzie $x > c$, wówczas z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, istnieje $\xi \in (c, x)$ takie że

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi) > \frac{a}{2} \Leftrightarrow f(x) > \frac{a}{2}\cdot(x-c) + f(c)$$

Zatem dla $x \to +\infty$ mamy $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Weźmy funkcję $g(x) = \sin(\ln x)$, wówczas $g'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$. Mamy więc $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$, jednak funkcja $g(x)$ nie ma granicy w nieskończoności.

Zadanie 13.
Wykaż, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $|f'(x)| < a < 1$, to $f(x)$ ma punkt stały. Podaj przykład świadczący o tym, że warunek $|f'(x)| < 1$ nie gwarantuje punktu stałego.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy funkcję
$$g(x) = f(x) - x$$
Skoro $f(x)$ jest ciągła, to ciągła też jest $g(x)$ i skoro $f(x)$ jest różniczkowalna, to $g(x)$ też, zatem mamy
$$g'(x) = f'(x) - 1 \leq a - 1 < 0$$
Pochodna funkcji $g(x)$ jest mniejsza od ujemnej stałej $a - 1$. Oczywiście $g(x)$ jest malejąca.

Skorzystamy teraz z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Niech $c \in \mathbb{R}$. Biorąc przedział $[c, x]$, gdzie $x > c$ dostajemy
$$\frac{g(x) - g(c)}{x - c} < a - 1 \Leftrightarrow g(x) < (a-1) \cdot (x - c) + g(c)$$
Zatem $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$. Biorąc przedział $[x, c]$, gdzie $x < c$ dostajemy
$$\frac{g(c) - g(x)}{c - x} < a - 1 \Leftrightarrow g(x) > g(c) - (a-1) \cdot (x - c)$$
Zatem $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Funkcja $g(x)$ przetnie więc oś OX, czyli istnieje taki punkt, że
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$$

Rozpatrzmy funkcję
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)^2+(x-4)+1}{(x-4)+1} + 4 & \text{dla } x \in (-\infty, 2) \\ 0 & \text{dla } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$
Jest ona oczywiście różniczkowalna na przedziale $(-\infty, 2)$ oraz $(2, +\infty)$. Policzmy granicę lewostronną
$$f'_-(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{(x-4)^2+(x-4)+1}{(x-4)+1} + 4 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x-3} = 0$$
Granica prawostronna również jest równa zero $f'_+(x) = 0$, zatem funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w całej swojej dziedzinie.

Sprawdźmy czy rzeczywiście zachodzi nierówność $|f'(x)| < 1$ dla przedziału $(-\infty, 2)$ (dla przedziału $(2, +\infty)$ nierówność jest oczywista). Mamy
$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

Chcemy pokazać, że

$$-1 < \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2} < 1$$

$$-(x^2 - 6x + 9) < x^2 - 6x + 8 < x^2 - 6x + 9$$

$$0 < 2x^2 - 12x + 17 \ \vee \ 0 < 1$$

Obie te nierówności są prawdziwe dla $x \in (-\infty, 2)$, zatem $|f'(x) < 1|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Pokażemy jeszcze, że $f(x) < x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, aby udowodnić, że wykres funkcji $f(x)$ nie przecina wykresu funkcji $g(x) = x$. (znowu rozparzymy przedział $(-\infty, 2)$, ponieważ dla przedziału $(2, +\infty)$ nierówność jest oczywista). Mamy

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x-3} < x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{x-3} - x < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1 - x(x-3)}{x-3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} < 0 \Leftrightarrow (x-3) < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

Zatem $f(x) < x$ jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Funkcja $f(x)$ spełnia więc warunek $|f'(x)| < 1$ jednak funkcja $f(x)$ nie ma punktu stałego.

Ćwiczenia 8

Reguła de l'Hospitala i jej zastosowania

Twierdzenie: (reguła de l'Hospitala) Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne na (a,b), przy czym dla dla każdego $x \in (a,b)$ $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$. Załóżmy też, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ oraz że spełniony jest jeden z dwóch warunków:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$

Wówczas istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jest ona równa G.

Zadanie 1.
Oblicz granice

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2^x-2^{2-x}}{(1-x)^2}$

...

Rozwiązanie:

a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\ln x}{\frac{d}{dx}\ln \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{d}{dx}\tan x}{\frac{d}{dx}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2 \cdot 2x}{2x \cdot \sin x^2 + x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2}{\sin x^2 + x^2 \cos x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{2x \cdot \cos x^2 + 2x \cos x^2 - \sin x^2 \cdot 2x \cdot x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x^2}{\cos x^2 + \cos x^2 - x^2 \cdot \sin x^2} =$$

$$= \frac{1}{1+1-0} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 2.
Wykaż, że funkcja
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$
jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w zerze i jej pochodne dowolnego rzędnu są równe 0.

Asymptoty

Prosta $y = Ax + B$ jest asymptotą ukośną funkcji f , wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - Ax - B = 0$$
Wynika stąd, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-Ax-B}{x} = 0$, skąd $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A$. Jednak z tego, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A$ nie wynika, że funkcja ma asymptotę ukośną.

Zadanie 3.
Prostą o równaniu $y = Ax+B$, gdzie nazywamy asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$, wtedy i tylko wtedy gdy
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - Ax - B = 0$$
Zbadaj czy funkcja $f(x) = x^2(\arctan x - \frac{\pi}{2})$ ma asymptotę ukośną w $+\infty$ oraz czy ma asymptotę ukośną w $-\infty$.

Zadanie 4.
Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, czy wynika stąd, że f ma asymptotę ukośną w $+\infty$?

Rozwiązanie:
Nie! Przykładem takiej funkcji jest $f(x) = x + \sqrt{x}$, ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, natomiast funkcja ta nie ma asymptoty.

Zadanie 5.
Czy z istnienia obu granic $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ wynika ich równość?

Zadanie 6.
Podaj przykład funkcji różniczkowalnej, która ma asymptotę ukośną, ale dla której nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Rozwiązanie:
Jest to na przykład funkcja $f(x) = \frac{\sin e^x}{x} + x$.

Ćwiczenia 9

Zastosowania rachunku różniczkowego, wypukłość, nierówności

Zadanie 1.
Znajdź przedziały wypukłości i wskaż punkty przegięcia funkcji

a) $e^{\arctan x}$

b) $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

c) $\ln(1 + x^2)$

Zadanie 2.
Niech g będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na przedziale I, zaś f niech będzie dwukrotnie różniczkowalna na $g(I)$.

a) Wykaż, że jeśli f jest wypukła i rosnąca, a g wypukła to $f \circ g$ jest wypukła.

b) Co wystarczy założyć o funkcjach wklęsłych f, g by mieć pewność, że ich złożenie jest funkcją wklęsłą?

Zadanie 3.
Wykaż, że jeśli funkcja f jest ściśle wypukła i różniczkowalna na I, to zachodzi (dokładnie) jedna z poniższych możliwości

- f jest ściśle monotoniczna i nie ma punktów zerowania się pochodnej.
- $f'(x) = 0$ w dokładnie jednym punkcie, który jest minimum lokalnym funkcji f.

Zadanie 4.
Funkcje $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ i $g : [b, c) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i wypukłe, a funkcja

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in (a, b] \\ g(x) & \text{dla } x \in (b, c) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w b. Wykaż, że h jest wypukła na (a, c). Podaj przykład świadczący o tym, że założenia o różniczkowalności h w punkcie b nie można pominąć.

Rozwiązanie:
Skoro f, g i h są różniczkowalne i f i g wypukłe, to pochodne f i g są rosnące i równe w punkcie b (z różniczkowalności h), więc pochodna h jest rosnąca, czyli h wypukła.

Przykładami funkcji, które pokazują, że założenia o różniczkowalności h w punkcie b nie można pominąć jest $f(x) = (x + 1)^2$ i $g(x) = (x - 1)^2$ dla $b = 0$

Zadanie 5.
Niech α, β, γ oznaczają kąty pewnego trójkąta ostrokątnego. Wykaż, że

a) $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq 1$

b) $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Rozwiązanie:

a) Skoro α, β, γ oznaczają kąty pewnego trójkąta ostrokątnego, to $\alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Ponadto mamy

$$\tan\alpha \geq \tan\frac{\alpha}{2}, \quad \tan\beta \geq \tan\frac{\beta}{2}, \quad \tan\gamma \geq \tan\frac{\gamma}{2}$$

zatem mamy

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2}$$

czyli wystarczy, że udowodnimy nierówność

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$$

Funkcja $f(x) = \tan^2 x$ jest wypukła dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Z nierówności Jensena z wagą $\frac{1}{3}$ mamy

$$\tan^2\left(\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}\right) \leq \frac{\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2}}{3}$$

Jako, że α, β, γ oznaczają kąty pewnego trójkąta ostrokątnego, toteż $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, zatem

$$\tan^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

czyli mamy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2}}{3} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$$

czyli również

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq 1$$

b) Mamy $\frac{1}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$. Przekształćmy więc równoważnie nierówność

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} \leq \tan\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}$$

Po przyłożeniu logarytmu naturalnego stronami mamy

$$\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}\right) \leq \ln\left(\tan\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) + \ln\left(\tan\frac{\beta}{2}\right) + \ln\left(\tan\frac{\gamma}{2}\right) \leq 3\ln\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \ln(\tan x)$ na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Chcemy pokazać, że funkcja na tym przedziale jest wklęsła.

Twierdzenie: Funkcja $f(x)$ jest wklęsła w przedziale (a,b), gdy dla każdego $x \in (a,b)$ druga pochodna jest ujemna $f''(x) < 0$. Funkcja $f(x)$ jest wypukła w przedziale (a,b), gdy dla każdego $x \in (a,b)$ druga pochodna jest dodatnia $f''(x) > 0$.

$$f(x) = \ln\tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

Jako, że cosinus na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ jest większy niż sinus, toteż druga pochodna jest ujemna. Zatem funkcja $f(x) = \ln\tan x$ na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ jest wklęsła.

Z nierówności Jensena dla $f(x) = \ln\tan x$ i wagi równej $\frac{1}{3}$ mamy

$$\frac{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) + \ln\left(\tan\frac{\beta}{2}\right) + \ln\left(\tan\frac{\gamma}{2}\right)}{3} \leq \ln\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right) = \ln\tan\frac{\pi}{6}$$

Po przemnożeniu stronam przez 3 otrzymujemy tezę.

Zadanie 6.
Wykaż, że dla $x, y, z > 0$ zachodzi nierówność

$$x\ln x + 2y\ln y + 3z\ln z + (x+2y+3z)\ln 6 \geq (x+2y+3z)\ln(x+2y+3z)$$

Zadanie 7.
Wykaż nierówności

a) $e^x < (1+x)^{(1+x)}$ dla $x > -1$

b) $\ln x < \ln\left(\frac{10}{e}\right) + 0,1x$ dla $x > 0,\ x \neq 10$

c) $\sin\tan x > x$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} \leq 2\sqrt[3]{3}$

e) $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ dla $x > 0$

Rozwiązanie:

a)

Twierdzenie: Dla $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność $\ln(1+x) \leq x$ oraz dla $x > -1$ prawdziwa jest nierówność $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, przy czym równość zachodzi dla $x = 0$.

Logarytmując nierówność $e^x < (1+x)^{(1+x)}$ stronami mamy

$$x < (1+x)\ln(1+x) \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$$

co oczywiście jest prawdziwe.

b) Przekształćmy nierówność

$$\ln x < \ln\left(\frac{10}{e}\right) + \ln\left(e^{0,1x}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\left(\frac{e^{0,1x-1}}{0,1x}\right) \Leftrightarrow 1 < \frac{e^{0,1x-1}}{0,1x} \Leftrightarrow e^{0,1x-1} > 0,1x$$

Twierdzenie: Dla $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność $1 + x \leq e^x$

Mamy

$$e^{0,1x-1} > 1 + (0,1x - 1) = 0,1x$$

c) Podstawmy $y = \tan x$, wówczas musimy udowodnić, że $\sin y > \arctan y$ dla $y \in (0,1)$. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \sin x - \arctan x$ na przedziale $(0,1)$. Mamy

$$f'(x) = \cos - \frac{1}{1+x^2}$$

Rozpatrzmy funkcję $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ na przedziale $(0,1)$. Wówczas

$$g'(x) = x - \sin x$$

Mamy $g'(x) > 0$ dla $x > 0$, zatem $g(x)$ jest rosnąca i jako, że

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = 0$$

toteż $g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, ponieważ $1 - \frac{x^2}{2} > \frac{1}{x^2+1}$ dla $x \in (0,1)$. Zatem $f(x)$ jest rosnąca i jako, że

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x - \arctan x = 0$$

to mamy $f(x) > 0$ dla $x \in (0,1)$, skąd $\sin x > \arctan x$.

d) Przekształćmy nierówność

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} \leq 2\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}}{2} \leq \sqrt[3]{3}$$

Pokażemy, że funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ jest wklęsła

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0$$

Z nierówności Jensena dla $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i wagi $\frac{1}{2}$ mamy

$$\frac{\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{2}} = \sqrt[3]{3}$$

e) Mamy

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{2}{2x+1} \Leftrightarrow \ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$ dla $x > 0$, wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$$

Mamy $f'(x) > 0$ dla $x > 0$, czyli funkcja jest rosnąca. Zatem

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} > f(0) = 0$$

dla $x > 0$, skąd

$$\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$$

Mamy

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \Leftrightarrow \ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \ln(1+x)^2 < \frac{x^2}{x+1}$$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \ln(1+x)^2 - \frac{x^2}{1+x}$ dla $x > 0$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{2\ln(1+x)}{x+1} - \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)\ln(1+x) - x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Rozpatrzmy funkcję $g(x) = 2(x+1)\ln(1+x) - x(x+2)$ na przedziale $(0, +\infty)$. Wówczas

$$g'(x) = 2\ln(x+1) - 2x$$

Mamy $g'(x) < 0$, bo $\ln(1+x) < x$, zatem $g(x)$ jest malejąca i jako, że $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, toteż dla $x > 0$ mamy $f'(x) < 0$, zatem funkcja $f(x)$ jest malejąca. Skąd mamy

$$f(x) = \ln(1+x)^2 - \frac{x^2}{1+x} < 0 \Leftrightarrow \ln(1+x)^2 < \frac{x^2}{1+x}$$

Ćwiczenia 10
Wzór Taylora

Definicja: Powiemy, że funkcja $f(x) = o(g(x))$, gdzie f, g są określona w otoczeniu x_0, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_\delta \forall_x \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$$

lub równoważnie, gdy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Mówimy wówczas, że f jest niższego rzędu niż g.

Definicja: Przypuśćmy, że funkcje f i g są określone na zbiorze D i mają granice w $x_0 \in D$. Powiemy, że $f(x) = O(g(x))$ przy $x \to x_0$, jeśli istnieją stałe C i δ takie, że

$$\forall_x \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

lub równoważnie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \geq 0$$

Mówimy wówczas, że f jest co najwyżej rzędu g.

Mamy $f(x) = o(x^2)$, czy zachodzi $f(x) = o(x^3)$? Nie, ponieważ mamy $\frac{f(x)}{x^2} \overset{x\to 0}{\to} 0$, zatem $\frac{f(x)}{x^3} = \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \overset{x\to 0}{\not\to} 0$

Mamy $f(x) = o(x^5)$, czy zachodzi $f(x) = o(x^2)$? Tak, bo mamy $\frac{f(x)}{x^5} \overset{x\to 0}{\to} 0$, zatem $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^5} \cdot x^3 \overset{x\to 0}{\to} 0$

Mamy $f(x) = o(x^5)$ oraz $g(x) = o(x^2)$, co wiemy o $f(x) + g(x)$? Mamy $f(x) + g(x) = o(x^2)$.

Mamy $f(x) = o(x^3)$, co wiemy o $f^2(x)$? Mamy $f^2(x) = (o(x^3))^2 = o((x^3)^2) = o(x^6)$.

Zadanie 1.
Wykaż, że dla $x \to 0$

a) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$

b) $x \sin\sqrt{x} = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \approx \sqrt[8]{x}$

Rozwiązanie:

a) Aby pokazać, że jest to prawdziwe, wystarczy pokazać, że $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\varepsilon}} = 0$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\varepsilon}} = \lim_{x\to 0} x^\varepsilon \ln x \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = -\frac{1}{\varepsilon}\lim_{x\to 0} x^{-1}\cdot x^{\varepsilon+1} = -\frac{1}{\varepsilon}\lim_{x\to 0} x^\varepsilon = 0$$

b) Dla małych x-ów zachodzi $\sin x < x$, zatem mamy $\sin\sqrt{x} < \sqrt{x} \Leftrightarrow x\sin\sqrt{x} < x\cdot\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ zatem $x\sin\sqrt{x} = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

c) Policzmy granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = 1$$

zatem $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \approx \sqrt[8]{x}$

Zadanie 2.
Jakiego rzędu względem x przy $x \to 0$ jest wyrażenie

$$\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$$

Rozwiązanie:
Szukamy $n \in \mathbb{N}$ takiego, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x^n} = a > 0$$

Mówimy, że licznik dąży do zera tak samo szybko jak x^n. Wyrażenie $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ przemnożymy przez

$$\frac{(\sqrt{1-2x}+\sqrt[3]{1-3x})\cdot\left((\sqrt{1-2x})^4+(\sqrt{1-2x})^2(\sqrt[3]{1-3x})^2+(\sqrt[3]{1-3x})^4\right)}{(\sqrt{1-2x}+\sqrt[3]{1-3x})\cdot\left((\sqrt{1-2x})^4+(\sqrt{1-2x})^2(\sqrt[3]{1-3x})^2+(\sqrt[3]{1-3x})^4\right)}$$

a następnie skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$. Mamy

$$\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x} = \frac{(1-2x)^3-(1-3x)^2}{(\sqrt{1-2x}+\sqrt[3]{1-3x})\cdot\left((\sqrt{1-2x})^4+(\sqrt{1-2x})^2(\sqrt[3]{1-3x})^2+(\sqrt[3]{1-3x})^4\right)}$$

Mianownik przy $x \to 0$ dąży 6, zatem

$$\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x} \approx \frac{-8x^3+3x^2}{6}$$

Dzieląc to wyrażenie przez x^2 dostajemy w granicy $\frac{1}{2}$, zatem $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$ jest rzędu x^2.

Definicja: (Pochodne wyższych rzędów) Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech P będzie przedziałem otwartym w $\mathbb{R}$, $x_0 \in P$. Jeśli w każdym punkcie przedziału P funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ ma pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie, to mówimy że f ma n-tą pochodną w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0. Przyjmujemy

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Definicja: (Wielomian Taylora i reszta) Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną n-tego rzędu, n-tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie x_0 nazywamy wielomian

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

n-tą resztą nazywamy różnicę

$$r_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right)$$

Reszta $r_n(x)$ ma tę własność, że $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Wielomiany Maclaurina funkcji elementatnych

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$

Rozwinięcie w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 1$

- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$
- $(1 + x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2} x^2 + \binom{a}{3} x^3 + \binom{a}{4} x^4 + \ldots$

Zadanie 3.
Wyznacz wielomian Taylora w zerze (Maclaurina) do wyrazu x^n włącznie. Oblicz $f^{(n)}(0)$.

a) $x \cos x - \sin x$ dla $n = 7$

b) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ dla $n = 4$

c) $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{30}}$ dla $n = 2$

d) $\ln(\cos x)$ dla $n = 6$

e) $\tan x$ dla $n = 4$

Rozwiązanie:

a)

$$x\cos x - \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)\right) =$$

$$= x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\right) + x^5\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + x^7\left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right) + o(x^7)$$

Zatem siódmy wielomian Taylora w zerze to

$$x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\right) + x^5\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + x^7\left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right)$$

Mamy

$$\left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right) = \frac{f^{(7)}(0)}{7!} \Leftrightarrow f^{(7)}(0) = 7! \cdot \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right)$$

d) Mamy $\cos x - 1 \approx \frac{x^2}{2}$

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1)) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3} + o((\cos x - 1)^2)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^3 + o(x^6) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)$$

Zatem szósty wielomian Taylora w zerze to $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45}$. Skąd $f^{(6)}(0) = 6! \cdot \left(-\frac{x^6}{45}\right)$.

e) Policzmy kolejne pochodne wyrażenia $\tan x$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x \quad f'(0) = 1$$

$$\tan''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) \quad f''(0) = 0$$

$$\tan'''(x) = 2(1 + \tan^2 x) + 6\tan^2 x(1 + \tan^2 x) \quad f'''(0) = 2$$

Zatem

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

Skąd czwarty wielomian Taylora w zerze to $x + \frac{1}{3}x^3$. Skąd $f^{(4)}(0) = 0$

Zadanie 4.
Wyznacz n-ty wielomian Taylora funkcji f we wskazanym punkcie

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ dla $x_0 = 1$, $n = 5$

b) $f(x) = x\cos(x^2 - x)$ dla $x_0 = 0$, $n = 5$

c) $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$ dla $x_0 = 0$, $n = 8$

Rozwiązanie:

a) Policzmy pierwszą pochodną funkcji

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 3x^2 - 6x + 4$$

Policzmy drugą pochodną funkcji

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = \frac{d}{dx}3x^2 - 6x + 4 = 6x - 6$$

Policzmy trzecią pochodną funkcji

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3}x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = \frac{d}{dx}6x - 6 = 6$$

Policzmy czwartą pochodną funkcji

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = \frac{d}{dx}6 = 0$$

Policzmy piątą pochodną funkcji

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5}{dx^5}x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = \frac{d}{dx}0 = 0$$

Zatem 5-ty wielomian Tylora funkcji f w punkcie $x_0 = 1$ to

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = (x-1)^3 + 2(x-1) + 2$$

b) Funkcję cosinus możemy rozwinąć w szereg Maclaurina

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Mamy

$$\begin{aligned}
x\cos(x^2 - 1) &= x\left(1 - \frac{(x^2-x)^2}{2!} + \frac{(x^2-x)^4}{4!} + O((x^2-x)^6)\right) = \\
&= x\left(1 - \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{2!} + \frac{x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4}{4!} + O(x^6)\right) = \\
&= x\left(\frac{24 - 12x^4 + 24x^3 - 12x^2 + x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4}{24} + O(x^6)\right) = \\
&= \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{6}x^8 + \frac{1}{4}x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{11}{24}x^5 + x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x + O(x^7) = \\
&= -\frac{11}{24}x^5 + x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x + O(x^6)
\end{aligned}$$

Zatem 5-ty wielomian Taylora funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ to

$$-\frac{11}{24}x^5 + x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x$$

c) Funkcję ln możemy rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu $p = 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Skorzystamy z tego, że $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, aby rozwinąć $\ln(1+\sin^2 x)$ w szereg potęgowy zmiennej $\sin^2 x$. Mamy

$$\ln(1+\sin^2 x) = \sin^2 - \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} - \frac{\sin^8 x}{4} + \frac{\sin^{10} x}{5} - \frac{\sin^{12} x}{6} + \frac{\sin^{14} x}{7} - \frac{\sin^{16} x}{8} + O((\sin^2 x)^9)$$

Rozwiniemy teraz w szereg Maclaurina funkcję sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Wyrażenie $\sin^n x$ dla $n \geq 10$ będą rzędu co najmniej $O(x^{10})$, zatem możemy je pominąć. Mamy

$$\ln(1+\sin^2 x) = \sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} - \frac{\sin^8 x}{4} + O(x^{10})$$

Skorzystamy ze wzoru

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Zatem

$$\sin^2 x = \frac{1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} - \dots\right)}{2} = \frac{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} - \dots}{2}$$

Rozpiszmy każdy z sinusów

$$\sin^2 x = \frac{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + O(x^{10})}{2} = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \frac{1}{315}x^8 + O(x^{10})$$

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \frac{1}{315}x^8 + O(x^{10})\right)^2 = x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + O(x^{10})$$

$$\sin^6 x = (\sin^2 x)(\sin^4 x) = x^6 - x^8 + O(x^{10})$$

$$\sin^8 x = (\sin^4 x)^2 = \left(x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + O(x^{10})\right)^2 = x^8 + O(x^{10})$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin^2 x) \quad &= \quad \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \frac{1}{315}x^8\right) - \frac{x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + O(x^{10})}{2} + \\ &+ \frac{x^6 - x^8}{3} + \frac{x^8}{4} + O(x^{10}) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{32}{45}x^6 - \frac{173}{252}x^8 + O(x^{10})\end{aligned}$$

Zatem ósmy wielomian Taylora funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ to

$$x^2 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{32}{45}x^6 - \frac{173}{252}x^8$$

Zadanie 5.
Jakiego rzedu względem $x \to 0$ jest wyrażenie $\tan x - \sin x$?

Zadanie 6.
Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Zadanie 7.
Oblicz 2019 i 2020 pochodną w zerze funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Zadanie 8.
Oblicz 2020 pochodną funkcji $\arctan x$.

Ćwiczenia 11

Zastosowanie wielomianów Taylora

Zadanie 1.

Oblicz granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x^2 - x^2\ln(1+\tan x)}{x^4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) - \frac{1}{2}x\sin x}{x^2\ln(1+x^2)}$

Rozwiązanie:

a) Szukamy takiego $n \in \mathbb{N}$, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x^2 - x^2\ln(1+\tan x)}{x^n} = a > 0$$

Jeśli $a \in \mathbb{R}$ istnieje, to mówimy, ze licznik dąży do 0 tak samo szybko jak x^n.

Rozwiniemy w szereg Maclaurina funkcję sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Zatem

$$x\sin x^2 = x\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \dots\right) = x^3 - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^{11}}{5!} - \frac{x^{15}}{7!} + \frac{x^{19}}{9!} - \dots$$

Możemy więc napisać

$$x\sin x^2 = x^3 + r(x)$$

gdzie $r(x)$ jest taką funkcją, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^4} = 0$$

Funkcję ln możemy rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Możemy więc napisać

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + s(x)$$

gdzie $s(x)$ jest taką funkcją, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x^2} = 0$$

Rozwiniemy teraz w szereg Maclaurina funkcję tangens

$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \dots$$

Możemy napisać

$$\tan x = x + t(x)$$

gdzie $t(x)$ jest taką funkcją, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{t(x)}{x^2} = 0$$

Stąd wnioskujemy, że

$$x^2 \ln(1+\tan x) = x^2 \ln(1+(x+t(x))) = x^2 \left(x + t(x) - \frac{(x+t(x))^2}{2} + s(x+t(x)) \right) =$$

$$= x^3 + x^2 t(x) - \frac{x^4}{2} - \frac{x^3 t(x)}{2} - \frac{x^2 t^2(x)}{2} + x^2 s(x+t(x))$$

Dalej mamy

$$x \sin x^2 - x^2 \ln(1+\tan x) = x^3 + r(x) - x^3 - x^2 t(x) + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3 t(x)}{2} + \frac{x^2 t^2(x)}{2} - x^2 s(x+t(x)) =$$

$$= \frac{x^4}{2} + r(x) - x^2 t(x) + \frac{x^3 t(x)}{2} + \frac{x^2 t^2(x)}{2} - x^2 s(x+t(x))$$

Mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 t(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{t(x)}{2x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 t(x)}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{t(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{t(x)}{2x^2} \cdot x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 t^2(x)}{2x^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 s(x+t(x))}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{s(x+t(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{s(x+t(x))}{(x+t(x))^2} \cdot \frac{(x+t(x))^2}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x^2 - x^2 \ln(1+\tan x)}{x^n} = \frac{1}{2}$$

b) Szukamy takiego $n \in \mathbb{N}$, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) - \frac{1}{2} x \sin x}{x^n} = a > 0$$

Funkcję cosinus możemy rozwinąć w szereg Maclaurina

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Możemy więc napisać

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + r(x)$$

gdzie $r(x)$ jest taką funkcją, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^2} = 0$$

Funkcję ln możemy rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Możemy więc napisać

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + s(x)$$

gdzie $s(x)$ jest taką funkcją, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x^2} = 0$$

Stąd wnioskujemy, że

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + r(x)\right) = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + r(x)\right)\right) = -\frac{x^2}{2} + r(x) + s\left(-\frac{x^2}{2} + r(x)\right)$$

Mamy

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{s\left(-\frac{x^2}{2} + r(x)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{s\left(-\frac{x^2}{2} + r(x)\right)}{-\frac{x^2}{2} + r(x)} \cdot \frac{-\frac{x^2}{2} + r(x)}{x^2} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} - -\frac{1}{2}$$

Wiemy, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Mamy więc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) - \frac{1}{2} x \sin x}{x^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Licznik dąży do 0 tak samo szybko jak x^2 Dalej, szukamy takiego $n \in \mathbb{N}$, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+x^2)}{x^n} = b > 0$$

Wiemy, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+x^2)}{x^4} = 1$$

Mianownik dąży do 0 tak samo szybko jak x^4. Zatem mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) - \frac{1}{2}x\sin x}{x^2\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{x^4} = -\infty$$

Zadanie 2.
Oblicz granice

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \cot^2 x$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + \frac{2\sin x - 2\tan x}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(\sin x)-\tan(\tan x)}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$

Zadanie 3.
Oblicz

a) e zdokładnością do 10^{-9}

b) $\sqrt{5}$ z dokładnością do 10^{-4}

Zadanie 4.
Oszacuj błąd przybliżenia $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ dla $|x| < \frac{1}{2}$.

Zadanie 5.
Wykorzystując wzór Taylora wykaż nierówności

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

dla $x \in (0, +\infty)$.

Rozwiązanie:
Ze wzoru Taylora wynika, że dla $x > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) > x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - o(x^4) < x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Ponieważ dla $f(x) = \ln(1+x)$ mamy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

Ćwiczenia 12

Zbieżność jednostajna

Definicja: Ciąg $f_n : A \to \mathbb{R}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in A} \ \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Równoważnie, gdy

$$\forall_{x \in A} \ \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Definicja: Ciąg $f_n : A \to \mathbb{R}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{x \in A} \ \forall_{n \geq n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Równoważnie, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq n_0} \ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

lub

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Oznaczenie: Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ wprowadzamy oznaczenie $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$

Przykład: Żeby badać zbieżność jednostajną danego ciągu funkcyjnego f_n muszę mieć kandydata na granicę. Jak go wyznaczyć?

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad f(x) =?$$

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad g(x) =?$$

Kandydatem na granicę jednostajną ciągu jest granica punktowa, to znaczy $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$.

Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, oraz że ciąg f_n zbiega jednostajnie do pewnej funkcji f. Co możemy powiedzieć o f?

Twierdzenie: Granicą jednostajną ciągu funkcji ciągłych jest funkcja ciągła.

Przykład: Do czego zbiega punktowo na $(0, 1)$ ciąg $f_n(x) = \frac{1}{nx}$? Ten ciąg zbiega punktowo do funkcji tożsamościowo równej zero.

Czy jest to zbieżność jednostajna? Nie, bo:

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n}} \right| = 1$$

a to nie zbiega do zera.

Zadanie 1.
Zbadaj zbieżność jednostajną i punktową ciągów funkcyjnych na podanych przedziałach.

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{|\sin x|}$ na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f_n(x) = x^{2n} - \sqrt{x^2}$ na $[0, 1]$

c) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n\sqrt{n}}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0, +\infty)$

d) $f_n(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1+nx^2}}$ na $[-1, 1]$

e) $f_n(x) = x \arctan nx$ na $(0, +\infty)$

Rozwiązanie:

a) Zacznijmy od zbadania zbieżności punktowej. Dla ustalonego $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sin x|} = \begin{cases} 1 \text{ dla} x \neq 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0 \end{cases}$$

Zatem ciąg funkcyjny jest zbieżny punktowo do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \neq 0 \\ 0 \text{ dla} x = 0 \end{cases}$$

Jednak $f(x)$ nie jest funkcją ciągłą, więc ciąg funkcyjny f_n nie może być jednostajnie zbieżny, ponieważ granicą jednostajną ciągu funkcji ciągłych może być tylko funkcja ciągła.

b) Zacznijmy od zbieżności punktowej. Dla ustalonego $x \in [0, 1]$. Rozważmy ciąg argumentów $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, wówczas mamy

$$f_n(x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} - \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{4}$$

Zatem $|f_n(x_n)| = a$, gdzie $a = \frac{1-2\sqrt{2}}{4}$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem biorąc $\varepsilon < a$ nie mamy spełnionego warunku jednostajnej zbieżności, skąd wnioskujemy, że f_n nie jest jednostajnie zbieżny do f na przedziale $[0, 1]$.

c) Zbadajmy zbieżność punktową. Mamy

$$n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n\sqrt{n}}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n\sqrt{n}}} + \sqrt{x}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Zbadajmy teraz zbieżność jednostajną. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n\sqrt{n}}} - \sqrt{x}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n\sqrt{n}}} + \sqrt{x}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n\sqrt{n}} = +\infty$$

Zatem f_n nie jest jednostajnie zbieżny na przedziale $(0, +\infty)$. Można też rozważyć ciąg $x_n = \frac{1}{n^2}$, by również otrzymać

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n\sqrt{n}}} - \sqrt{x}\right)\right| = +\infty$$

e) Zbadajmy zbieżność punktową

$$x \arctan nx \overset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2}x$$

Zbadajmy zbieżność jednostajną

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} |x \arctan nx - x\frac{\pi}{2}|$$

W tym celu policzmy pochodną wyrażenia

$$g_n(x) = x \arctan nx - x\frac{\pi}{2}$$

Mamy

$$\left(x \arctan nx - x\frac{\pi}{2}\right)' = \frac{nx}{n^2x^2+1} + \arctan(nx) - \frac{\pi}{2}$$

Policzmy drugą pochodną tego wyrażenia

$$\left(\frac{nx}{n^2x^2+1} + \arctan(nx) - \frac{\pi}{2}\right)' = \frac{2n}{(n^2x^2+1)^2}$$

Druga pochodna jest dodatnia, zatem pierwsza pochodna cały czas rośnie. Ponadto

$$\lim_{x\to 0} \frac{nx}{n^2x^2+1} + \operatorname{arccot}(nx) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$$

oraz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{nx}{n^2x^2+1} + \operatorname{arccot}(nx) - \frac{\pi}{2} \geq 0$$

zatem funkcja $g_n(x)$ najpierw maleje, a następnie rośnie. Największą wartość osiąga więc w którymś ze swoich krańców przedziałów. Mamy

$$\lim_{x\to 0} x \arctan nx - x\frac{\pi}{2} = 0$$

oraz z reguły de'Hospitala mamy

$$\lim_{x\to\infty} x \arctan nx - x\frac{\pi}{2} - \lim_{x\to\infty} \frac{-nx^2}{1+n^2x^2} = -\frac{1}{n}$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} |x \arctan nx - x\frac{\pi}{2}| = 0$$

Czyli f_n jest jednostajnie zbieżny do funkcji $x\frac{\pi}{2}$.

Zadanie 2.
Zbadaj zbieżność jednostajną i punktową podanych ciągów funkcyjnych na $[0,1]$:

a) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$

b) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

d) $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$

Zadanie 3.
Sprawdź, czy podane poniżej ciągi funkcyjne są zbieżne na podanym zbiorze

a) $f_n(x) = \arctan(nx)$ na $\mathbb{R}$

b) $x^n(1-x)$ na $[0,1]]$

c) $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$ na $[0,1]$

d) $f_n(x) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$ na $\mathbb{R}$

e) $f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$ na $\mathbb{R}$

f) $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$

g) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ na $[0,1]$ i na $(0,1)$

h) $f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n x\cos x$ na $[0,\pi]$

Zadanie 4.
Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, zaś ciąg a_n niech będzie ciągiem liczbowym (rzeczywistym) zbieżnym do zera. Dla $n\in\mathbb{N}$ i niech $x\in\mathbb{R}$ zdefiniujmy $g_n(x) = f(x+a_n)$. Rozstrzygnij czy ciąg g_n jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, zaś ciąg a_n niech będzie ciągiem liczbowym (rzeczywistym) zbieżnym do zera. Dla $n\in\mathbb{N}$ i niech $x\in\mathbb{R}$ zdefiniujmy $g_n(x) = f(x+a_n)$. Rozstrzygnij czy ciąg g_n jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że $|a_n| < 1$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$ (można ewentualnie wyrzucić początkowe wyrazy). Ustalmy przedział $[-M,M]$.

Twierdzenie: (Cantora) Każda funkcja ciągła $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$.

Zatem funkcja f jest jednostajnie ciągłą na przedziale $[-M-1,M+1]$. Ustalmy $\varepsilon>0$ i dobieramy $\delta>0$, dzięki jednostajnej ciągłości, tak żeby mieć

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

dla $x, y \in [-M-1, M+1]$. Teraz dzięki zbieżności $a_n \to 0$ dla $n > n_0$ mamy $a_n < \delta$ i wówczas

$$|g_n(x) - f(x)| = |f(x + a_n) - f(x)| < \varepsilon$$

bo różnica argumentów jest mniejsza niż δ. Oszacowanie jest jednostajne dla wszystkich $x \in [-M, M]$, zatem mamy pewność, że zarówno x, jak i $x + a + n$ należą do $[-M-1, M+1]$. Zatem g_n jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Teza zadania nie jest jednak prawdziwa, gdy pytamy o zbieżność jednostajną na $\mathbb{R}$. Niech $f(x) = x^2$ oraz $a_n = \frac{1}{n}$, wówczas

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

czyli dla $x = n$ mamy

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$$

Zadanie 5.
Niech f będzie dowolną funkcją określoną na $[a, b]$ i niech $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ dla $x \in [a, b]$. Wykaż, że $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Ważna własność zbieżności jednostajnej:

Załóżmy, że f_n zbiega jednostajnie do f na $\mathbb{R}$. Załóżmy dodatkowo, że dla każdego n istnieje (skończona lub nie) granica $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$. Wówczas:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x)$$

Załóżmy, że f_n zbiega jednostajnie do f na (a, b). Załóżmy dodatkowo, że dla każdego n istnieje (skończona lub nie) granica $\lim\limits_{x\to b} f_n(x)$. Wówczas:

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b} f_n(x)$$

Zadanie 6.
Udowodnij, że granicą jednostajną ciagu funkcji jednostajnie ciągłych jest funkcja jednostajnie ciągła.

Rozwiązanie:
Niech $f_n : A \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji jednostajnie ciągłych, jednostajnie zbieżnym do f. Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in A}\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej zbieżności wnioskujemy, że

$$\exists_{n_0}\ \forall_{n\geq n_0}\ \forall_{x\in A}\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji f_{n_0} mamy

$$\exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in A}\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Mamy

$$\forall_{x\in A}\ |f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

zatem

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)+f_{n_0}(y)-f(y)| \leq$$
$$\leq |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|+|f_{n_0}(y)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Zadanie 7.
Załóżmy, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wykaż, ze ciąg $f_n|[a,b]\to\mathbb{R}$ jest zbieżny jednostajnie do f wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu x_n o wyrazach w $[a,b]$, takiego, że $x_n\to x$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x)$. Wykaż, że jeśli pominiemy założenia ciągłości f , to implikacja w lewo pozostaje prawdziwa, podczas gdy implikacja w prawo prawdziwą być przestaje.

Zadanie 8.
Czy granicą jednostajną ciągu funkcji ograniczonych może być funkcja nieograniczona?

Rozwiązanie:
Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji ograniczonym na pewnym zbiorze A. Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie jednostajnie zbieżny na A do funkcji f. Ustalmy $\varepsilon>0$, Wówczas istnieje takie $,\in\mathbb{N}$, że dla każdego $x\in A$ mamy

$$|f(x)|\leq|f_m(x)-f(x)|+|f_m(x)|<\varepsilon+|f_m(x)|$$

Pierwsza nierówność wynika z nierówności trójkąta, natomiast druga z faktu $|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$. Zatem funkcja f musi być ograniczona na A, ponieważ f_m jest ograniczona.

Ćwiczenia 13

Zbieżność jednostajna szeregów

Definicja: Szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest zbieżny jednostajnie.

Zadanie 1.

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregów na podanych zbiorach:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2(x^2+1)}$ na $\mathbb{R}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{xln^2n}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$ na $(1,+\infty),(0,+\infty)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$ dla pewnego δ oraz $(0,2\pi)$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}$ dla $|x|<1$

Twierdzenie: (Kryterium Weierstrassa) Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ dla $n = 1,2,\ldots$. Jeśli $|f_n(x)| \leq a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, a szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to wówczas szeregi funkcyjne $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ są zbieżne jednostajnie na X.

Zadanie 2.

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregów funkcyjnych na podanych przedziałach

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin x \cos^n x$ na $[0,\pi]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x} \sin\frac{1}{n^2+x}$ na $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ na $(0,+\infty)$

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \tan\frac{\sin x}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ na $\mathbb{R}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ na $\mathbb{R}$, gdzie $a_n(x) = \begin{cases} x-n+1 & \text{dla } x\in(n-1,n] \\ -x+n+1 & \text{dla } x\in(n,n+1) \\ 0 & \text{dla } x\in\mathbb{R}\setminus(n-1,n+1) \end{cases}$

Rozwiązanie:

b) Zbadajmy zbieżność punktową szeregu. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2+x}\sin\frac{1}{n^2+x}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2+x}\right|$$

Dla ustalonego x szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2+x}\right|$ jest zbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2+x}\sin\frac{1}{n^2+x}\right|$ jest zbieżny punktowo. Zbadajmy zbieżność jednostajną szeregu. Ciąg $\frac{1}{n^2+x}\sin\frac{1}{n^2+x}$ nie jest jednostajnie zbieżny do zera na mocy warunku Cauchy'ego jednostajnej zbieżności, ponieważ dla $x_n = -n^2+\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ mamy

$$\frac{1}{n^2+x}\sin\frac{1}{n^2+x} = 2\sin 2 \neq 0$$

Zatem szereg nie jest zbieżny jednostajnie.

c) Zbadajmy zbieżność punktową szeregu. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+n^4x} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4x}$$

Zatem szereg ten jest zbieżny punktowo. Zbadajmy zbieżność jednostajną szeregu. Mamy

$$\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)' = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}$$

Pochodna jest dodatnia dla $x \in \left(0, \frac{1}{n^2}\right)$ oraz ujemna dla $x \in \left(\frac{1}{n^2}, \infty\right)$, zatem wyrażenie $\frac{x}{1+n^4x^2}$ osiąga maksimum dla $x = \frac{1}{n^2}$. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$$

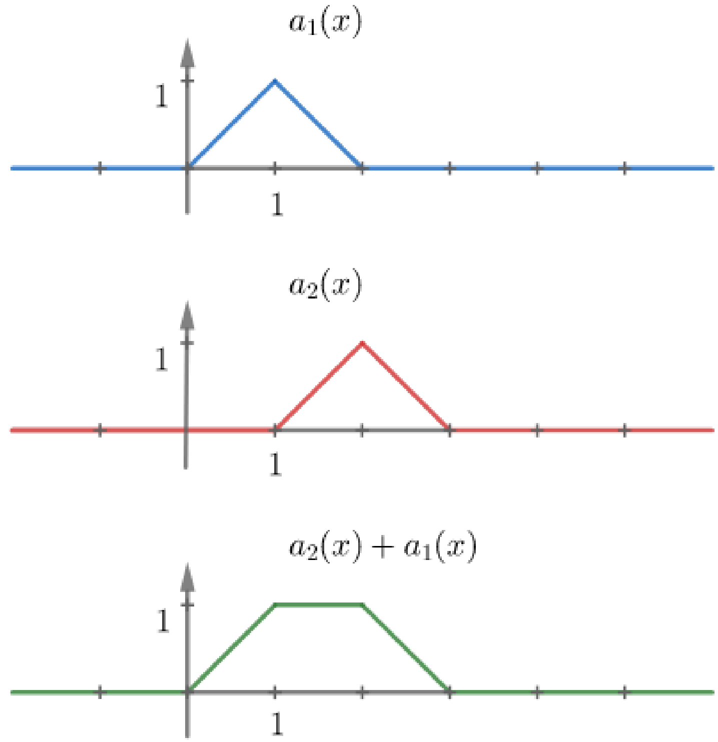
Jako, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ jest zbieżny, toteż na mocy kryterium Weierstrassa, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $(0,+\infty)$.

d) Zbadajmy zbieżność punktową i jednostajną szeregu. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\tan\frac{\sin x}{\sqrt{n}\ln^2 n}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\tan\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}\right|$$

Szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ jest zbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego i korzystając z tego, że $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\tan n}{n} = 1$, zbieżny jest również szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}}\right|$. Zatem na mocy kryterium Weierstrassa, zbieżny jest jednostajnie i punktowo szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\tan\frac{\sin x}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ na $\mathbb{R}$.

e) Dla ustalonego x szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ma wyrazy prawie stale równe zero. Zatem szereg ten jest zbieżny punktowo. Zbadajmy zbieżność jednostajną szeregu. Narysujmy pierwsze początkowe wyrazy ciągu oraz szeregu.



Zatem $a_1 + \ldots + a_n$ to taki trapez o podstawie długości $n+1$. Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ to taki trapez bez końca, czyli na przedziale $[1, +\infty)$ jest to funkcja stale równa 1. Wówczas dla $x > n+1$ funkcja $|f(x) - f_n(x)|$ również jest stale równa 1. Zatem szereg nie jest zbieżny jednostajnie.

Zadanie 2.

Zbadaj na jakim zbiorze zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{\sqrt{n}}$. Zbadaj ciągłość jego sumy na tym zbiorze.

Zadanie 3.

Szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$. Czy wynika stąd zbieżność jednostajna szeregu $\sum x f_n(x)$?

Zadanie 4.

Udowodnij, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny jednostajnie, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ też jest zbieżny jednostajnie. Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna?

Zadanie 5.

Wykaż, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$ jest zbieży na zbiorze A oraz $\sup_{x \in A} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$ i szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie.

Ćwiczenia 14

Własności analityczne sum szeregów

Zadanie 1.
Niech
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \frac{x}{\sqrt{n}}$$
Wykaż, że f jest poprawdnie określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz że $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Zadanie 2.
Określmy
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + e^x}$$
Wyznacz maksymalną dziedzinę funkcji, zbiór jej punktów ciągłości, zbiór jej punktów różniczkowalności oraz oblicz $f'(0)$.

Zadanie 3.
Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^2+n^2}$ jest określona i ciągła na $\mathbb{R}$. Zbadaj jej różniczkowalność.

Zadanie 4.
Niech
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$
dla $x \in [0, +\infty)$. Wykaż, że f jest różniczkowalna na $(0, +\infty)$ oraz prawostronnie różniczkowalna w 0. Wyznacz $f'_+(0), f'(1), \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Zadanie 5.
Udowodnij, że funkcja dzeta Riemena określona wzorem $\xi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest funkcją klasy $C^\infty(1, \infty)$.

Zadanie 6.
Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sin x|^{\sqrt{x}}$ jest ciągła na $(0, 1)$. Czy jest na tym przedziale różniczkowalna?

Zadanie 7.
Wykaż, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, a ciąg a_n dąży do 0 i dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ zdefiniujemy $g_n(x) = f(x + a_n)$, to ciąg funkcji g_n zbiega na $\mathbb{R}$ niemal jednostajnie do f.

Ćwiczenia 15

Zbieżność jednostajna i niemal jednostajna szeregów

Zadanie 1.
Wykaż zbieżność jednostajną na $\mathbb{R}$ szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n_x^2} \arctan(nx)$$

Zadanie 2.
Wyznacz zbiór zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

i zbadaj czy szereg jest zbieżny jednostajnie na tym zbiorze.

Zadanie 3.
Podaj przykład szeregu funkcyjnego o wyrazach dodatnich, dla których nie istnieje majoranta (to znaczy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ o wyrazach dodatnich ma być zbieżny na pewnym zbiorze A, ale jednocześnie ma nie istnieć ciąg a_n taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ oraz dla każdego $x \in A$ i dla dostatecznie dużych n zachodzi $|f_n(x)| < a_n$).

Zadanie 4.
Oblicz

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

Ćwiczenia 16

Własności analityczne sum szeregów

Twierdzenie: (O różniczkowaniu ciągów funkcyjnych) Niech $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ będą różniczkowalne i niech ciąg ich pochodnych (f_n') będzie jednostajnie zbieżny na $[a, b]$ do funkcji $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Załóżmy też, że dla pewnego $x_0 \in [a, b]$ $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, wówczas

1. ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$ do pewnej ciągłej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
2. funkcja f jest różniczkowalna na $[a, b]$ i $f' = g$

Jeżeli więc mamy ciąg funkcji (f_n) różniczkowalnych na $[a, b]$, to żeby stwierdzić że

$$\forall_{x\in[a,b]} (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

to musimy wiedzieć, że

1. ciąg f_n' jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$
2. ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny dla jakiegoś $x \in [a, b]$

Twierdzenie: Niech dla $n \in \mathbb{N}$ funkcje $b_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'$ jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$ i dla pewnego $x \in [a, b]$ zbieżny jest szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$ a jego suma jest funkcją różniczkowalną. Co więcej

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'$$

Zadanie 1.
Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Wykaż, że funkcja f jest dobrze określona na $[0, +\infty)$ oraz różniczkowalna na $(0, +\infty)$. Czy istnieje pochodna prawostronna w zerze?

Rozwiązanie:

Twierdzenie: (Kryterium Leibniza) Jeśli ciąg liczb rzeczywistych b_n maleje do zera, to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ jest zbieżny.

Funkcja jest dobrze określona ze względu na kryterium Leibniza, ponieważ $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ jest malejące. Udowodnimy, że f jest różniczkowalna na przedziale $[0,+\infty)$. Sprawdźmy zbieżność szeregu pochodnych.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+x}$$

Ten szereg jest dobrze określony na $[0,+\infty)$ na podstawie kryterium Leibniza. Sprawdźmy zbieżność jednostajną szeregu. W tym celu sprawdźmy zbieżność szeregu drugich pochodnych.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{(n+x)^2}$$

czyli mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|(-1)^{n}\cdot\frac{1}{(n+x)^2}\right\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Szereg drugich pochodnych jest zbieżny jednostajne, czyli szereg pierwszych pochodnych jest zbieżny. Zatem f jest różniczkowalna na $[0,+\infty)$. Istnieje więc pochodna prawostronna w zerze.

Zadanie 2.
Wykaż, że funkcja ζ-Riemana zadana przez szereg

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

jest funkcją klasy $C^{\infty}(1,\infty)$.

Zadanie 3.
Wyznacz zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, na którym podany szereg jest zbieżny. Sprawdź, czy suma szeregu jest funkcją ciągłą na X

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+x^n}{1+3^n x^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$

Ćwiczenia 17

Szeregi potęgowe

Zadanie 1.
Wyznacz zbiór na którym zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad x \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie:
Z kryterium Cauchy'ego dla $|x| < 1$ szereg ten jest bezwzględnie zbieżny. Dla $|x| > 1$ jest rozbieżnym ponieważ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności. Dla $x = 1$ szereg jest rozbieżny, bo jest to szereg harmoniczny. Dla $x = -1$ szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza.

Zadanie 2.
Jaki zbiór na płaszczyźnie zespolonej opisuje nierówność

$$|z - z_0| < a \ \text{ dla } \ x > 0$$

Rozwiązanie:
Koło otwarte o środku w z_0 i promieniu a.

Zadanie 3.
Wyznacz zbiór na którym zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad z \in \mathbb{C}$$

Rozwiązanie:
Na mocy kryterium Cauchy'ego dla $|z| < 1$ szereg jest zbieżny bezwzględnie. Dla $|z| > 1$ szereg jest rozbieżny, ponieważ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności. Dla $z = 1$ szereg jest rozbieżny, bo jest to szereg harmoniczny. Dla $z = -1$ szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza.

Czy są jeszcze jakieś punkty na okręgu jednostkowym, dla których szereg jest zbieżny? Tak, wszystkie poza $z = 1$.

Definicja: Granicą górną ciągu $(a_n)_n$ nazywamy kres górny zbioru granic wszystkich jego podciągów zbieżnych lub równoważnie

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n_0\to\infty} \sup\{a_n \mid n > n_0\}$$

Twierdzenie: Zachodzi nierówność

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \geq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

Twierdzenie: (Wzór Cauchy'ego - Hadamarda) Niech $(a_n)_n$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych i niech

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Wtedy szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest, dla każdego $\rho < R$ zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w kole $D = \{x \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho\}$ oraz rozbieżny w punktach zbioru $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$.

Wersja dla rzeczywistych szeregów potęgowych

Niech $(a_n)_n$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych i niech

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Wtedy szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest, dla każdego $\rho < R$ zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w przedziale $(-\rho, \rho)$ oraz rozbieżny w punktach zbioru $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > R\}$.

Zadanie 4.
Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego. Określ jego przedział zbieżności

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n (x-1)^{2n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n (1-x)^n$

Rozwiązanie:

a) $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = 2$, zatem $R = \frac{1}{2}$, skąd przedział zbieżności to $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

b) $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(2 + (-1)^n)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3^n} = \sqrt{3}$, zatem $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, skąd przedział zbieżności to $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

c) $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^{n^2}} = 1$, zatem $R = 1$, skąd przedział zbieżności to $(-1, 1)$.

Zadanie 5.
Niech R oznacza promień zbieżności szeregu potęgowego. Udowodnij, że

a) zespolony szereg potęgowy jest zbieżny niemal jednostajnie wewnątrz swojego koła zbieżności

b) rzeczywisty szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie na $(-R, R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny na krańcach przedział zbieżności. Zakładamy tu, że $R < \infty$

c) rzeczywisty szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie na każdym zbiorze zwartym w swoim przedziale zbieżności

Zadanie 6.
Dla x należących do zbioru zbieżności podanych szeregów, znajdź sumę szeregu

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

Rozwiązanie:

a) Przedział zbieżności tego szeregu to $(-1, 1)$. Mamy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)x^n - x^n] = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})' - \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Obliczmy więc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})'$. Szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie wewnątrz przedziały zbieżności, zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

Skąd

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})' - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{2x - x^2 - x + x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

b) Przedział zbieżności tego szeregu to $(-1, 1)$. Niech

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Wiemy, że $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, skąd mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Różniczkując wyraz po wyrazie mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = (xf'(x))' = \frac{(1-x)^2 - x(2x-2)}{(1-x)^4} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 2x}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Skąd otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3}$$

c) Przedział zbieżności to $x \in (-1, 1)$. Mamy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = -\frac{1}{1+x}$$

Zatem $f(x) = -\ln(1+x) + C$, ale skoro $f(0) = 0$, to $C = 0$, skąd $f(x) = -\ln(1+x)$

Twierdzenie: (Jednoznaczność rozwinięcia w szereg potęgowy) Jeśli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n = b_n$.

Twierdzenie: Jeśli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Isnieją funkcje klasy C^∞, które nie są analityczne, na przykład

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

bo wówczas $f^{(n)}(0) = 0$.

Zadanie 7.

Znajdź rozwinięcia podanych funkcji w szereg Taylora w podanym punkcie

a) $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$ dla $x_0 = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(4-x)}$ dla $x_0 = 3$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ dla $x_0 = 0$

d) $f(x) = \arcsin x$ dla $x_0 = 0$

e) $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ dla $x_0 = 0$

Rozwiązanie:

a)

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{2})}\right) = \frac{1}{2}\sum\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{2n}$$

Promień zbieżności wynosi $R = \sqrt{2}$.

b)

$$\frac{1}{(x-1)(4-x)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(4-x)} = \frac{A(4-x)+B(x-1)}{(x-1)(4-x)}$$

Chcemy wyznaczyć A i B.

$$A(4-x)+B(x-1) = 1 \Leftrightarrow x(B-A)+4A-B = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = A \ \wedge \ 4A-B = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \ \wedge \ B = \frac{1}{3}$$

Zatem

$$\frac{1}{(x-1)(4-x)} = \frac{-1}{3(1-x)} + \frac{1}{3(4-x)}$$

Wyznaczmy $\frac{1}{3(4-x)}$. Mamy

$$\frac{1}{3(4-x)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(x-3)} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$$

Wyznaczmy $\frac{-1}{3(1-x)}$. Mamy

$$\frac{-1}{3(1-x)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-2-(x-3)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(x-3}{2}\right)} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n$$

Zatem mamy

$$\frac{1}{(x-1)(4-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}(x-3)^n$$

d)

$$\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2-1}{2-1}\frac{1}{4^n}x^n = \frac{1}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{4^n}x^n$$

Można też inaczej

$$\frac{1}{(x-4)^2} = -\left(\frac{1}{x-4}\right)' = \left(\frac{1}{4-x}\right)' = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\right)' = \left[\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n\right]'$$

Dla $|x| < 4$ możemy różniczkować szereg wyraz po wyrazie

$$\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

e)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}$$

Skąd

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Zadanie 8.

Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ dla tych x, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ jest zbieżny. Oblicz $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ lub wykaż, że ona nie istnieje.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, zatem jako, że funkcja $f(x)$ jest ciągła i ograniczona, toteż mamy $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 0$.

Zadanie 9.

Rozwiń w szereg potęgowy funkcję

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{1-x^2}{2+x^2}\right)$$

Rozwiązanie:

Podstawmy $t = x^2$ i rozwińmy w szereg potęgowy funkcję $g(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{2+x}\right)$. Mamy

$$g'(x) = -\frac{3}{2x^2+2x+5}$$

$$g'(x) = \frac{i}{2\left(x+\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}\right)\right)} - \frac{i}{2\left(x+\left(\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}\right)\right)}$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{i}{2}\left(-\frac{1}{5}-\frac{3i}{5}\right)^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{i}{2}\left(-\frac{1}{5}+\frac{3i}{5}\right)^{n+1} x^n$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{2}\left(\left(-\frac{1}{5}+\frac{3i}{5}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{5}-\frac{3i}{5}\right)^{n+1}\right) x^n$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \sin\left((n+1)\left(\pi - \arctan(3)\right)\right) x^n$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \sin\left((n+1)\left(\pi - \arctan(3)\right)\right) x^n$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{n+1} \sin\left((n+1)\arctan(3)\right)\ x^n$$

Zatem

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{n+1} \sin\left((n+1)\arctan(3)\right)}{n+1} x^{n+1}$$

Skąd otrzymujemy

$$f(x) = xg(x^2) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{n+1} \sin\left((n+1)\arctan(3)\right)}{n+1} x^{2n+3}$$

Ćwiczenia 18

Twierdzenie Arzeli-Ascolliego

Zadanie 1.
Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy holderowsko ciągłą na I z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{c>0} \, \forall_{x,y \in I} \, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}$$

a) Wykaż, że jeśli f jest holderowsko ciągła na I, to jest jednostajnie ciągła na I

b) Załóżmy, że I jest przedziałem ograniczonym a $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Wykaż, że jeśli $f : I \to \mathbb{R}$ jest holderowsko ciągła z wykładnikiem α_2, to jest też holderowsko ciągła z wykładnikiem α_1.

c) Czy rodzina funkcji holderowsko ciągłych na odcinku $[0, 1]$ z wykładnikiem α jest rodziną równociągłą (jednakowo jednostajnie ciągłą)?

Zadanie 2.
Dla ustalonych $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ określamy rodzinę

$$\mathcal{F} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f(a) = 0, \, \forall_{x,y \in [a,b]} \, |f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|^{\alpha}\}$$

Zbadaj, czy rodzina $\mathcal{F}$ jest domknięta ze względu na zbieżność jednostajną. Czy jest ona zwarta?

Zadanie 3.
Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę funkcji określonych ma $[a, b]$, lipschitozwsko ciągłych ze stałą 5 i przyjmujących (dla pewnego argumentu) wartość 5. Czy z każdego ciągu o wyrazach z $\mathcal{F}$ można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny na $[a, b]$?

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli $(f_n)_n$ jest ciągiem funkcji ciągłych $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $(f_n)_n$ jest jednostajnie zbnieżny na $[a, b]$, to rodzina $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest równociągła.

Zadanie 5.
Czy rodzina $\mathcal{W}_n$ wielomianów stopnia co najwyżej n, określonych na $[0, 1]$ jest domknięta ze względu na zbieżność jednostajną? Czy z każdego punktowo zbieżnego ciągu o wyrazach w $\mathcal{W}_n$ można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny?

Ćwiczenia 19

Całki nieoznaczone

Całki z wybranych funkcji elementarnych:

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ dla $a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

Twierdzenie: (Liniowość całki) Jeśli $f, g : P \to \mathbb{R}$ są ciągłe, zaś $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Twierdzenie: (Wzór na całkowanie przez części) Jeśli $f, g : P \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

Przykłady:

1. Obliczmy $\int \ln x dx$. Niech $g'(x) = 1$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$ oraz $f'(x) = \frac{1}{x}$, wówczas
$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$
2. Obliczmy $I = \int \sin^2 x dx$ oraz $J = \int \cos^2 x dx$. Biorąc $f(x) = \sin x$ i $g(x) = -\cos x$, otrzymujemy
$$\int \sin^2 x dx = \int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 dx$$
Mamy więc $I - J = -\sin x \cos x = -\frac{1}{2}\sin 2x$. Natomiast
$$I + J = \int (\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int 1 dx = x + C$$

Po dodaniu równań stronami otrzymujemy $2I = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$. Zatem

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \qquad \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Twierdzenie: (Wzór na całkowanie przez podstawianie) Niech f, g' będą ciągłe i niech F będzie funkcją pierwotną f. Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

lub jeśli $y = g(x)$, czyli $dy = g'(x)dx$, to mamy

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=y}\underbrace{g'(x)dx}_{=dy} = \int f(y)dy = F(y) + C = F(g(x)) + C$$

Przykłady:

1. Niech $f(y) = \frac{1}{y}$, $g(x) = \cos x$ oraz $F(y) = \ln|y|$. Otrzymujemy

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int f(g(x))g'(x)dx = -F(g(x)) + C = -\ln|\cos x| + C$$

2. Wykorzystując tę samą metodę co w poprzednim przykładzie łatwo pokazać, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

3. Obliczmy całkę $\int xe^{-x^2}dx$. Podstawmy $y = x^2$, $dy = 2xdx$. Wówczas

$$\int xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{-y}dy = -\frac{1}{2}e^{-y} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

Zadanie 1.
Oblicz całki nieoznaczone

a) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x}dx$

b) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

d) $\int \frac{1}{2\sin^2(3x)}dx$

Rozwiązanie:

a)

$$\int \frac{(x^2-1)^3}{x}dx = \int \frac{x^6-3x^4+2x^2-1}{x}dx = \int x^5-3x^3+3x-\frac{1}{x}dx = \\ = \frac{1}{6}x^6-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-\ln x+C$$

b)

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} t=1+x^2 \\ dt=2xdx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

c)

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} t=9-x^2 \\ dt=-2xdx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} = -\sqrt{t} = -\sqrt{9-x^2}$$

d)

$$\int \frac{1}{2\sin^2(3x)}dx = \left| \begin{array}{c} t=3x \\ dt=3dx \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sin^2 t}dt = -\frac{1}{\tan t}+C = -\frac{1}{\tan(3x)}+C$$

Zadanie 2.
Niech F będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na przedziale I i niech $F'(x)=f(x)$. Wyznacz

a) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

b) $\int f(x)f'(x)dx$

c) $f(\cos x)\cdot \sin x dx$

Rozwiązanie:

a)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left| \begin{array}{c} t=f(x) \\ dt=f'(x)dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C$$

b) Mamy $(f^2(x))' = 2f(x)\cdot f'(x)$, zatem

$$\int f(x)\cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}\int 2f(x)\cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}\int \left(f^2(x)\right)' dx = \frac{1}{2}f^2(x)+C$$

c)

$$\int f(\cos x)\sin x dx = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array} \right| = \int f(t)dt = F(t)+C = F(\cos x)+C$$

Zadanie 3.
Wyznacz podane całki nieoznaczone, korzystając z całkowania przez części i przez podstawienie:

a) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

c) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

d) $\int \cos^2 x dx$

e) $\int \sin^m x \cos x dx$

f) $\int \frac{\ln |\arctan x|}{1+x^2} dx$

g) $\int x \sin x dx$

h) $\int e^x \sin x dx$

i) $\int \ln x dx$

j) $\int \arcsin x dx$

k) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

l) $\int (\ln x)^2 dx$

m) $\int \cos^3 x dx$

n) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+17} dx$

Rozwiązanie:

a)

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1} = \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t + C = \arctan e^x + C$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left| \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \end{array} \right| = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

c)

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right| = 2\int te^t dt = \left| \begin{array}{c} g = t \\ f = e^t \end{array} \right\| \begin{array}{c} g' = 1 \\ f' = e^t \end{array} \right| = te^t - \int 1 \cdot e^t dt = \\ &= te^t - e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

e)

$$\int \sin^m x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^m dt - \frac{t^{m+1}}{m+1} + C = \frac{\sin^{m+1}}{m+1} + C$$

f)

$$\int \frac{\ln|\arctan x|}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} t = \arctan x \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{array} \right| = \int \ln|t|dt = t\ln|t| = |t| + C =$$
$$= \arctan x\ n|\arctan x| - |\arctan x| + C$$

g)

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{c} g = x \\ f = -\cos x \end{array} \right\| \begin{array}{c} g' = dx \\ f' = \sin x dx \end{array} \right| = -\cos x + \int \cos x dx = \sin x - x\cos x + C$$

k)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}dx = \int 1dx - \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x + C$$

m)

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x\cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int (1-t^2)dt =$$
$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

n)

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+17}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2+17}dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2+2x+17 \\ dt = (2x+2)dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+17| + C$$

Zadanie 4.
Oblicz podane całko funkcji wymiernych

a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$

b) $\int \frac{1}{x^2+1}dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$

d) $\int \frac{x}{x^2+x-2}dx$

e) $\int \frac{1}{(2x-3)^5}dx$

f) $\int \frac{1}{(x^2+4)^3}dx$

g) $\int \frac{1}{x(x^2+2)^3}dx$

h) $\int \frac{1}{x^4+4}dx$

i) $\int \frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2x+5}dx$

Definicja (Ułamki proste pierwszego rodzaju) Każdą funkcję wymierną

$$\frac{A}{(x-a)^k}$$

gdzie $a, A \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$ nazywamy ułamkiem prostym pierwszego rodzaju.

Definicja: (Ułamki proste drugiego rodzaju) Każdą funkcję wymierną

$$\frac{Cx+D}{(x^2+cx+d)^k}$$

gdzie $c, d, C, D \in \mathbb{R}$, $c^2-4d<0$ i $k \in \mathbb{N}$ nazywamy ułamkiem prostym drugiego rodzaju.

Zadanie 5.
Znajdź rozkład na ułamki proste wyrażeń

a) $\frac{1}{(x+1)^3(x-1)(x^2+2)}$

b) $\frac{1+x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+2)^3}$

Rozwiązanie:

a)
$$\frac{1}{(x+1)^3(x-1)(x^2+2)} = \frac{A_1x+B_1}{(x^2+2)} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{(x+1)} + \frac{A_4}{(x+1)^2} + \frac{A_5}{(x+1)^3}$$

skąd

$$(A_1x+B_1)(x-1)(x+1)^3 + A_2(x^2+2)(x+1)^3 + A_3(x^2+2)(x-1)(x+1)^2 +$$

$$+A_4(x^2+2)(x-1)(x+1) + A_5(x^2+2)(x-1) = 1$$

Po rozwiązaniu mamy

$$\frac{1}{(x+1)^3(x-1)(x^2+2)} = \frac{2x+1}{27(x^2+2)} + \frac{1}{24(x-1)} - \frac{25}{216(x+1)} - \frac{7}{36(x+1)^2} - \frac{1}{6(x+1)^3}$$

b)
$$\frac{1+x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+2)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3x+B_1}{x^2+2} + \frac{A_4x+B_2}{(x^2+2)^2} + \frac{A_5x+B_3}{(x^2+2)^3}$$

Po rozwiązaniu mamy

$$\frac{1+x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+2)^3} = -\frac{2}{27(x^2+2)} - \frac{2}{9(x^2+2)^2} + \frac{1}{3(x^2+2)^3} - \frac{1}{27(x+1)} + \frac{1}{27(x-1)}$$

Ćwiczenia 20

Całka nieoznaczona oraz całka Newtona

Podstawienia trygonometryczne

Do obliczania całek z funkcji niewymiernych używa się podstawienia funkcji trygonometrycznych, a także tak zwanych funkcji hiperbolicznych

Definicja:

$$\cosh x = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = -i\sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Własności:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $(\cosh w)' = \sinh w$
- $(\sinh w)' = \cosh w$

Przykład:
Obliczmy całkę

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

Zastosujemy podstawienie $x = \sin t$. Wówczas $dx = \cos tdt$ oraz $\sqrt{1-x^2} = \cos tdt$, zatem

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos t \cdot \cos tdt = \int \cos^2 tdt$$

Skorzystamy z tożsamości $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 tcdt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2\cdot 2} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C$$

Wystarczy, że obliczymy $\sin(2\arcsin x)$. Podstawmy $y = \arcsin x$, wówczas

$$\sin(2\arcsin x) = \sin 2y = 2\sin y\cos y = 2\sin y\sqrt{1-\sin^2 y} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

zatem

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

Uniwersalne podstawienie trygonometryczne:
Całkę z funkcji wymiernej dwóch zmiennych $\cos x$ i $\sin x$ można zawsze sprowadzić do całki z funkcji wymiernej jednej zmiennej t, podstawiając $t = \tan\frac{x}{2}$. Wówczas

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

a ponadto

$$dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1+t^2}{2}dx \Leftrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Zadanie 1.
Oblicz całki

a) $\int \frac{1}{\sin x}dx$

b) $\int \sin^7 x \cos^6 x dx$

c) $\int \sin^8 x \cos^4 x dx$

d) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$

e) $\int \frac{1}{\cos^5 x}dx$

f) $\frac{1}{\sin x - \cos x}dx$

g) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$

h) $\frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx$

i) $\frac{1}{1-\sin^4 x}dx$

Zadanie 2.
Oblicz całki funkcji niewymiernych

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

b) $\int \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{4x-5}}dx$

d) $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}dx$

e) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \frac{1}{x}dx$

f) $\int \sqrt{1-4x^2}dx$

g) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{4x^2+3x+1}}dx$

h) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

i) $\int \sqrt{6x-x^2}dx$

j) $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

k) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-3x^2}}dx$

l) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-3x^2}}dx$

m) $\int \sqrt{x^2+k}dx$

n) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx$

Zadanie 3.
Oblicz podane całki

a) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx$

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\ dx$

Rozwiązanie:

a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x\ dx &= \left| \begin{array}{c} t = \arctan(x) \\ dt = \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right| = \int t\tan^2(t)\ dt = \int t\left(\frac{1}{\cos^2(t)} - 1\right)\ dt = \\
&= \int t\frac{1}{\cos^2(t)}\ dt - \int t\ dt = \left| \begin{array}{cc} f = t & dg = \frac{1}{\cos^2(t)}dt \\ df = dt & g = \tan(t) \end{array} \right| = \\
&= t\tan(t) - \int \tan(t)\ dt - \frac{t^2}{2} = \left| \begin{array}{c} u = \cos(t) \\ du = \sin(t)dt \end{array} \right| = \\
&= t\tan(t) - \int -\frac{1}{u}\ du - \frac{t^2}{2} = t\tan(t) + \ln(u) - \frac{t^2}{2} = \\
&= t\tan(t) + \ln(\cos(t)) - \frac{t^2}{2} = \\
&= x\arctan(x) + \ln(\cos(\arctan(x))) - \frac{\arctan^2(x)}{2} = \\
&= \left| \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right| = \\
&= x\arctan(x) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \frac{\arctan^2(x)}{2} + C
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\, dx &= \left| \begin{array}{l} x = 2\tan(t) \\ dx = \frac{2}{\cos^2(t)} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{2\tan(t)\sqrt{4\tan^2(t)+4}} \cdot \frac{2}{\cos^2(t)}\, dt = \\
&= \left| \sqrt{4\tan^2(t)+4} = \frac{2}{cos(t)} \right| = \int \frac{2}{2\tan(t)\cdot 2\cos(t)}\, dt = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin(t)}\, dt = \frac{1}{2}\int \csc(t)\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos(t)\csc^2(t)+\csc^2(t)}{\cos(t)\csc(t)+\csc(t)}\, dt = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cot(t)\csc(t)+\csc^2(t)}{\cot(t)+\csc(t)}\, dt = \left| \begin{array}{c} u = \cot(t)+\csc(t) \\ du = -\csc^2(t) - \cot(t)\csc(t) dt \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2}\int -\frac{1}{u}\, du = -\frac{1}{2}\ln(u) = -\frac{1}{2}\ln(\cot(t)+\csc(t)) = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1}\right) = \left| t = \arctan(\tfrac{x}{2}) \right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin(\arctan\left(\frac{x}{2}\right))}{\cos(\arctan\left(\frac{x}{2}\right))+1}\right) = \\
&= \left| \begin{array}{l} \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{2+\sqrt{x^2+4}}\right) + C
\end{aligned}$$

Definicja: Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Całką oznaczoną funkcji f na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f.

Oznaczenie:

$$F|_a^b = F(b) - F(a) \qquad fg|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Twierdzenie: (Wzór na całkowanie przez części) Jeśli $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są klasy C^1, to

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

Twierdzenie: (Wzór na całkowanie przez podstawienie) Niech $g : [a,b] \to [g(a), g(b)]$ będzie funkcją klasy C^1 i niech f będzie ciągła na przedziale $[g(a), g(b)]$. Wówczas

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną f.

Twierdzenie: (Addytywność całki jako funkcji przedziału) Załóżmy, że f jest ciągłą na przedziale $I \subseteq \mathbb{R}$ i niech $a, b, c \in I$, wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Zadanie 4.
Wyznacz całki oznaczone

a) $\int_1^2 \frac{2x^2}{x^3+1}dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x$

c) $\int_0^1 \arctan x dx$

d) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos x}dx$

e) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}$

f) $\int_{-1}^1 \sin x^3 dx$

g) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$

Zadanie 5.
Wykaż, że jeśli f jest ciągła i nieparzysta, to dla każdego a takiego, że $(-a, a) \subseteq D_f$ zachodzi

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx - \int_a^0 f(x)dx = \left| \begin{array}{c} t = -x \\ dt = -dx \end{array} \right| = \\ &= \int_{-a}^0 f(x)dx - \int_{-a}^0 -f(-t)dt = \int_{-a}^0 f(x)dx - \int_{-a}^0 f(t)dt = 0\end{aligned}$$

Zadanie 6.
Oblicz pochodne podanych funkcji

a) $F(x) = \int_1^x t(1+t^2)^5 dt$

b) $F(x) = \int_0^{x^2} t \sin t dt$

c) $F(x) = \int_{-\sin x}^{\sin x} (1 - t^2) dt$

Rozwiązanie:

a) Niech $G(x)$ to funkcja pierwotna funkcji $g(x) = x(1 + x^2)^5$, wówczas mamy

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x t(1+t^2)^5 dt = \frac{d}{dx}(G(x) - G(1)) = x(1+x^2)^5$$

b) Niech $G(x)$ to funkcja pierwotna funkcji $g(x) = x \sin x$, wówczas mamy

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} t \sin t dt = \frac{d}{dx}(G(x^2) - G(0)) = g(x^2) \cdot 2x = (x^2 \sin x^2) \cdot 2x = 2x^3 \sin x^2$$

c) Niech $G(x)$ to funkcja pierwotna funkcji $g(x) = x \sin x$, wówczas mamy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x) &= \frac{d}{dx}(G(\sin x) - G(-\sin x)) = g(\sin x) \cdot \cos x - g(-\sin x) \cdot (-\cos x) = \\ &= 2g(\sin x) \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos x\end{aligned}$$

Twierdzenie: Jeśli f jest ograniczona na (a, b) i ciągła, to

$$\lim_{x \to a^+} \int_a^x f(t) dt = 0$$

Twierdzenie: Niech $f(x) < g(x)$ ma (a, b), wówczas

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

Twierdzenie: (Nierówność trójkąta)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Zadanie 7.
Oblicz $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^x} \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$

Rozwiązanie:
Rozdzielamy całke na dwie całki

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx$$

Zmieniamy granice całkowania pierwszego składnika

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx$$

Domnażamy lewy składnik w całce przez $1=\frac{e^x}{e^x}$

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx$$

Łączymy całkę w jedną całkę

$$\int_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{1+e^x}{(1+e^x)(1+x^2)}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$$

Obliczamy całeczkę

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

Ćwiczenia 21

Całka oznaczona

Twierdzenie: Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Wówczas

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

Ponadto dla pewnego punktu $\xi \in (a, b)$ zachodzi

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Zadanie 1.
Oblicz granice

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^2}{x} dt$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t^2}}{x} dt$

Rozwiązanie:

a) Wiemy, ze $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^x \sin t^2 dt = 0$, zatem z reguły de'Hospitala mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x} = \lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0$$

b) Mamy $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$, zatem z reguły de'Hospitala mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2}}{x} dt = \lim_{x\to 0} e^{-x^2} = 1$$

Zadanie 2.
Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_{\sin x}^x \frac{1}{t^3(1+\sqrt{t})} dt$

Rozwiązanie:
Zbadajmy monotoniczność funkcji $f(x) = \frac{1}{x^3(1+\sqrt{x})}$ w tym celu policzymy pochodną

$$f'(x) = -\frac{7\sqrt{x}+6}{2(\sqrt{x}+1)^2 + x^4}$$

Funkcja $f(x)$ jest zatem malejąca na przedziale $(0, +\infty)$. Wiemy że jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$ oraz

$$m \leq f(x) \leq M$$

to wówczas

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Oszasujmy więc naszą całeczkę

$$\frac{x-\sin x}{x^3(1+\sqrt{x})} \leq \int_{\sin x}^{x} \frac{1}{t^3(1+\sqrt{t})} \leq \frac{x-\sin x}{\sin^3 x(1+\sqrt{\sin x})}$$

Z Taylora (jak sie rozwinie w szereg wokół zera) wyrażenie po lewej i po prawej zbiega do $\frac{1}{6}$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\sin x}^{x} \frac{1}{t^3(1+\sqrt{t})}dt = \frac{1}{6}$$

Twierdzenie: Zachodzi

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

Zadanie 3.

Niech f będzie funkcja ciągłą na $[0,1]$. Wykaż, że

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

b) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

Rozwiązanie:

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - x \\ dy = -dx \end{array} \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos y)dy$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx &= \left| \begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - x \\ dy = -dx \end{array} \right| = -\int_{\pi}^{0} (\pi-y)f(\sin(\pi-y))dy = \int_0^{\pi} (\pi-y)f(\sin y)dy \\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin y)dy - \int_0^{\pi} yf(\sin y)dy \end{aligned}$$

Skąd

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Zadanie 4.

Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\, dt$$

Rozwiązanie:
Dla $\delta \in [x,1]$ mamy

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt = \lim_{x\to 0^+} x\int_x^\delta \frac{f(t)}{t^2}\,dt + \lim_{x\to 0^+} x\int_\delta^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$$

Na przedziale $t\in[\delta,1]$ mamy $f(t)$ jest ciągłe oraz $\frac{1}{t^2}$ jest ciągłe i klasy C^1 zatem $\frac{f(t)}{t^2}$ jest całkowalna, czyli $\int_\delta^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt = const$, skąd $\lim\limits_{x\to 0^+} x\int_\delta^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 0$.

Podzielmy więc przedział $[x,1]$ na przedziały $[x,\delta]$ oraz $[\delta,1]$, wówczas dla $\varepsilon>0$ istnieje taka $\delta\in[0,1]$, że $f(0)-\frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(0)+\frac{\varepsilon}{2}$, ponieważ f jest ciągła na $[0,1]$.

Zatem na przedziale $[x,\delta]$ mamy

$$f(0)-\frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{t^2} < \frac{f(t)}{t^2} < \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{t^2}$$

$$\int_x^\delta \frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{t^2}\,dt < \int_x^\delta \frac{f(t)}{t^2}\,dt < \int_x^\delta \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{t^2}\,dt$$

Dalej mamy

$$\int_x^\delta \frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{t^2}\,dt = \frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{x} - \frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{\delta}$$

$$\int_x^\delta \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{t^2}\,dt = \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{x} - \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{\delta}$$

Skąd

$$\frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{x} - \frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{\delta} < \int_x^\delta \frac{f(t)}{t^2}\,dt < \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{x} - \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{\delta}$$

$$x\left(\frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{x} - \frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{\delta}\right) < x\int_x^\delta \frac{f(t)}{t^2}\,dt < x\left(\frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{x} - \frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{\delta}\right)$$

$$f(0)-\frac{\varepsilon}{2} - x\frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{\delta} < x\int_x^\delta \frac{f(t)}{t^2}\,dt < f(0)+\frac{\varepsilon}{2} - x\frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{\delta}$$

Zatem wystarczy tak doprać δ, że $-x\frac{f(0)-\frac{\varepsilon}{2}}{\delta} > -\frac{\varepsilon}{2}$ oraz $-x\frac{f(0)+\frac{\varepsilon}{2}}{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, ponieważ wówczas mamy

$$f(0)-\varepsilon < x\int_x^\delta \frac{f(t)}{t^2}\,dt < f(0)+\varepsilon$$

Wobec dowolności ε otrzymujemy, że $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$.

Zadanie 5.
Oblicz granicę

a)

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1}dx$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5+1}dx$$

Rozwiązanie:

a) Dla $x \in [n, n+1]$ zachodzi nierówność
$$\frac{n}{(n+1)^5+1} \leq \frac{x}{x^5+1} \leq \frac{n+1}{n^5+1}$$
Zatem
$$n^3 \cdot ((n+1)-n) \cdot \frac{n}{(n+1)^5+1} \leq n^3 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1}dx \leq n^3 \cdot ((n+1)-n) \cdot \frac{n+1}{n^5+1}$$
Zarówno ciąg po lewej jak i ciąg po prawej dążą przy $n \to \infty$ do zera, zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach
$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1}dx = 0$$

b) Dla $x \in [n, 2n]$ zachodzi nierówność
$$\frac{1}{(x+1)^4} \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x^5+1} \leq \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4}$$
Zatem mamy
$$n^3 \int_n^{2n} \frac{1}{(x+1)^4}dx \leq n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5+1}dx \leq n^3 \int_n^{2n} \frac{1}{x^4}dx$$
Ponadto
$$n^3 \int_n^{2n} \frac{1}{(x+1)^4}dx = n^3 \cdot \left(-\frac{1}{3(x+1)^3}\right)\Big|_n^{2n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3}\left(1-\frac{1}{8}\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{7}{24}$$
oraz
$$n^3 \int_n^{2n} \frac{1}{x^4}dx = n^3 \cdot \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_n^{2n} \frac{n^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(2n)^3}\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24}$$
Zatem z twierdzenia o trzech ciągach
$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5+1}dx = \frac{7}{24}$$

Twierdzenie: Niech $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągłe i całkowalne w sensie Riemana i niech będzie jednostajnie zbieżne do funkcji f. Wówczas
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$$

Zadanie 6.
Podać przykład takiego ciągu funkcji $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ zbieżnego punktowo do funkcji ciągłej, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Rozwiązanie:
Niech

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{dla } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2 - nx & \text{dla } x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{dla } x \in \left(\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Wówczas $f_n \to 0$ na $[0,1]$, Dla każdego n zachodzi $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ oraz mamy $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Zadanie 7.
Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Rozwiązanie:
Zbadajmy zbieżność jednostajną $\frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}$ na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. mamy

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{na } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}} & \text{dla } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Zatem jako, że f_n jest ciągłe i granica punktowa f_n jest nieciągła, to f_n nie zbiega jednostajnie do f na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Jednak $f_n(x) = \frac{\sin^n}{\sqrt{1+x}}$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ dla każdego $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozbijmy całkę

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx \right) dx = 0$$

zatem

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx \right| = \left| \limsup_{n\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx \right|$$

Ponadto mamy

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx < \varepsilon$$

zatem

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}dx<\varepsilon$$

skąd

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}dx<\varepsilon$$

Więc z dowolności wyboru $\varepsilon>0$ mamy

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}dx\right|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}dx=0$$

Zadanie 8.
Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sqrt[3]{x^7}}^{1-\cos x}\ln(2+\tan^2 t)\ dt}{x^2}$$

Rozwiązanie:
Funkcja w całce jest ciągła w okolicy zera, zatem jako że całkujemy na przedziale o długości dążącej do zera, to cała całka dąży do zera. Licznik i mianownik dążą do zera, zatem z teguły de'Hospitala mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sqrt[3]{x^7}}^{1-\cos x}\ln(2+\tan^2 t)\ dt}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\tan^2(1-\cos x))\cdot\sin x-\ln(2+\tan^2\sqrt[3]{x^7})\cdot\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}}{2x}=\\&=\frac{\ln 2}{2}+0=\frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

Zadanie 9.
Wykazać, że jeśli f jest funkcją nieujemną i ciągłą na $[a,b]$ oraz $\int_a^b f(x)dx=0$, to f jest tożsamościowo równa 0.

Rozwiązanie:
Niech F to funkcja pierwotna f. Skoro $\int_a^b f(x)dx=0$, to $F(b)-F(a)=0\Leftrightarrow F(b)=F(a)$, Skoro f jest funkcją nieujemną i jest to pochodna funkcji F, to znaczy, że F jest niemalejąca. Zatem jest stale równa zero.

Zadanie 10.
Funkcja f jest określona dla $x>0$ i $x\neq 0$ wzorem

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\ dt$$

a) Wykaż, że f jest rosnąca i wypukła na każdym z przedziałów $(0,1)$ i $(1,\infty)$.

b) Oblicz $\lim_{x\to 1}f(x)$.

c) Określmy funkcję $\tilde{f}$ jako ciągłe przedłużenie f na $(0,\infty)$ t.j.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in (0,1) \cup (1,\infty) \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Wykaż, że $\tilde{f}$ jest różniczkowalna.

d) Zbadaj wypukłość funkcji $\tilde{f}$ na $(0,\infty)$

Rozwiązanie:

a) Policzmy pochodną

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

Dla $x \in (0,1)$ licznik i mianownik są ujemne, zatem pochodna jest dodatnia. Dla $x \in (1,\infty)$ licznik i mianownik są dodatnie, zatem pochodna jest dodatnia. Zatem funkcja jest rosnąca.

Policzmy drugą pochodną

$$\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - 1 + \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

Mianownik jest zawsze dodatni. Mamy ponadto $\ln x > \frac{x-1}{x}$, zatem dla $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$$\ln x + \frac{1}{x} - 1 > \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

Zatem druga pochodna jest dodatnia, czyli funkcja jest wypukła.

b)

$$\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \left|\begin{array}{c} u = \ln t \\ du = \frac{1}{t}dt \end{array}\right\|\begin{array}{c} t = e^u \\ dt = du \cdot e^u \end{array}\right| = \lim_{x\to 1}\int_{\ln x}^{\ln x^2} \frac{e^u}{u}\,du =$$

$$= \lim_{x\to 1}\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \ldots}{u}\,du = \ln 2$$

c) Funkcja $\tilde{f}$ będzie różniczkowalna jeśli jej pochodna prawostronna i lewostronna są sobie równe. Funkcja jest różniczkowalna na $(0,1) \cup (1,\infty)$, zatem wystarczy zbadać różniczkowalność w jedynce.

$$\tilde{f}'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\tilde{f}(x) - \ln 2}{x-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} \overset{H}{=} 1$$

Zatem funkcja jest różniczkowalna na $(0,\infty)$.

d) Zbadajmy wypukłość funkcj $\tilde{f}$. Funkcja jest wypukła na $(0,1) \cup (1,\infty)$ ponieważ jej druga pochodna jest dodatnia na tym przedziale. Pochodna $\tilde{f}'$ jest ciągła na $(0,\infty)$. Zbadajmy więc drugą pochodną funkcji $\tilde{f}$ w punkcie $x = 1$.

$$\tilde{f}''(1) = \lim_{x\to 1} f''(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - 1 + \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2}\cdot\frac{x}{2\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x\ln x} \overset{H}{=} \frac{1}{2(\ln x + 1)} = \frac{1}{2}$$

Zatem funkcja $\tilde{f}$ jest wypukła na $(0,\infty)$.

Ćwiczenia 22

Sumy Riemana, całkowalność w sensie Riemana

Twierdzenie: (Przybliżanie całki sumami całkowymi) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $\varepsilon > 0$. Istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

$x_i - x_{i-1} < \delta$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ to wówczas

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Twierdzenie: Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Zadanie 1.
Oblicz granice

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k^2+n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{k}{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \pi \sum\limits_{k=1}^{n^2} \frac{\sin\frac{1}{2n^2}\cos\frac{k\pi}{2n^2}}{4-\sin^2\frac{k\pi}{2n^2}}$

Rozwiązanie:

a) Niech

$$a_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^n + n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$$

Niech więc $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[0, 1]$, wówczas

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Skąd

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

b) Niech

$$b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Niech więc $f(x) = \frac{1}{1+x}$ na przedziale $[0,2]$, wówczas

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{2k}{m}\right)$$

skąd

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{m\to\infty} \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{2k}{m}\right) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{1+x}dx = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

d) Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \pi \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin\frac{1}{2n^2}\cos\frac{k\pi}{2n^2}}{4-\sin^2\frac{k\pi}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2n^2}} \cdot \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\pi}{2n^2} \cdot \frac{\cos\frac{k\pi}{2n^2}}{4-\sin^2\frac{k\pi}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\cos\frac{k\pi}{2n^2}}{4-\sin^2\frac{k\pi}{2n^2}}$$

Niech więc $f(x) = \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}$ na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \pi \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin\frac{1}{2n^2}\cos\frac{k\pi}{2n^2}}{4-\sin^2\frac{k\pi}{2n^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}dx$$

Policzmy funkcję pierwotną $f(x)$. Mamy

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}dx &= \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{4-t^2}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-\frac{t^2}{4}}dt = \left| \begin{matrix} u = \frac{t}{2} \\ du = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\left(\ln(u+1) - \ln(1-u)\right) + C = \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln(t+2) - \ln(2-t)\right) + C = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{\sin x + 2}{2-\sin x}\right) + C
\end{aligned}$$

Skąd

$$\lim_{n\to\infty} \pi \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin\frac{1}{2n^2}\cos\frac{k\pi}{2n^2}}{4-\sin^2\frac{k\pi}{2n^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}dx = \frac{1}{4}\cdot(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{4}$$

Definicja: Podziałem P przedziały $[a,b]$ nazywamy każdy skończony ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ taki, że

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n = b$$

Piszemy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zbiór wszystkich podziałów odcinka $[a,b]$ oznaczamy $\mathcal{P}$. Średnica podziału to $\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$. Punktowanie dla podziału P, to ciąg $\xi(P) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ taki, że $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots n$. Dla funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ podziału P i punktowania $\xi(P)$ sumą całkową nazywamy

$$S(P, f, \xi(P)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i$$

Definicja: Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, a $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}$ będzie ustalonym podziałem $[a, b]$. Sumy

$$G(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i, \qquad D(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i$$

nazywamy odpowiednio górną i dolną sumą Riemanna funkcji f dla podziału P.

Definicja: Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Liczby

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} G(P, f) \qquad \sup_{P \in \mathcal{P}} D(P, f)$$

nazywamy odpowiednio górną i dolną całką Riemana funkcji f na odcinku $[a, b]$.

Jeśli $M = \sup |f|$, to dla dowolnego podziału $P \in \mathcal{P}$ zachodzi

$$-M(b-a) \leq D(P, f) \leq G(P, f) \leq M(b-a)$$

Twierdzenie: Jeśli P_1 jest zagęszczeniem P, a funkcja f jest ograniczona na $[a, b]$, to

$$D(P, f) \leq D(P_1, f) \qquad G(P_1, f) \leq G(P, f)$$

Zadanie 3.
Oblicz granicę

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4n^2} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{16n^2 - (4j-2)^2}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4n^2} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{16n^2 - (4j-2)^2} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{4n}{4n^2} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{4j-2}{4n}\right)^2} = \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2}
\end{aligned}$$

Jest to suma całkowalna dla funkcji $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Długość przedziału to 1, gdyż mamy n części o długości $\frac{1}{n}$.

- Przedział: $[0, 1]$

- Podział $\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k=0,1,\ldots,n}$
- Punktowanie w środkach

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{16n^2-(4j-2)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c} x=\sin t \\ dx=\cos t\ dt \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t+1)\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos x\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Definicja: Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ograniczona i

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} G(P,f) = \sup_{P\ in\mathcal{P}} D(P,f)$$

to mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna. Kładziemy wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_{P\in\mathcal{P}} G(P,f) = \sup_{P\ in\mathcal{P}} D(P,f)$$

Twierdzenie: Funkcja ograniczona f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje podział $P\in\mathcal{P}$ taki, że $G(P,f)-D(P,f)<\varepsilon$.

Twierdzenie: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemana wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon>0$ zachodzi

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})\right| < \varepsilon$$

Twierdzenie: Każda funkcja $f\in C([a,b])$ jest całkowalna w sensie Riemanna. Jej całka Riemanna i całka Newtona są równe.

Zadanie 4.
Sprawdź, że funkcja $\int_0^1 f(x)dx$ gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x=\frac{1}{n}\ n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemana na $[0,1]$. Wyznacz $\int_0^1 f(x)dx$.

Rozwiązanie:
Niech P to będzie dowolny podział

$$D(P,f)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]}f(x)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}0\cdot(x_i-x_{i-1})=0$$

Chcemy pokazać, że $\inf G(P,f)=0$ dla pewnego P. Weźmy więc podział

$$P_n:\quad 0,\ \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2},\ \ldots,\frac{1}{3}-\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{n^2},\ 1-\frac{1}{n^2},\ 1$$

Wówczas dla punktowania z lewej mamy przedziały

$$\left[0,\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right],\ \left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n^2},\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}\right],\ \left[1-\frac{1}{n^2},1\right]$$

zatem $\sup f=1$. Dla punktowania z prawej mamy przedziały

$$\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n^2}\right],\ \left[\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2},\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n^2}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2},1-\frac{1}{n^2}\right]$$

zatem $\sup f=0$. Mamy więc

$$G(P_n,f)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}(n-1)+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{2n}{n^2}=\frac{3}{n}$$

skąd

$$0\le\inf G(P,f)\le\inf G(P_n,f)=\inf\left\{\frac{3}{n}\right\}=0$$

Zatem

$$\inf G(P,f)=\sup D(P,f)=0$$

czyli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna. Zachodzi więc $\int_0^1 f(x)dx=0$.

Zadanie 5.
Wykaż, że funkcja Dirichleta

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemana na $[0,1]$.

Zadanie 6.
Wykaż, że funkcja Riemana

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ lub } x=0\\ \frac{1}{q} & \text{dla } x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{N},\ NWD(p,q)=1\end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemana na $[0,1]$.

Ćwiczenia 23

Całka niewłaściwa

Definicja: Jeśli $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna (w sensie Riemanna) na każdym odcinku $[a, b]$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$, to

$$\int_a^\infty f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Jeśli ta granica jest skończona, to całkę nazywamy zbieżną.

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna (w sensie Riemanna) na każdy odcinku $[a, c]$ dla $a < c < b$, oraz istnieje granica $\lim\limits_{c\to b} \int_a^c f(x)dx$, to

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)dx$$

Jeśli ta granica jest skończona, to całkę nazywamy zbieżną.

Przykłady:

1. Niech $f(x) = e^{-x}$ dla $x \in [0, +\infty)$. Dla dowolnej liczby $y > 0$ jest

$$\int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^b = 1 - e^{-b}$$

Mamy $1 - e^{-b} \to 1$ dla $b \to +\infty$, zatem

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

2. Niech $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ dla $x \geq 1$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\int_1^b f(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \ln x|_1^b = \ln b & \text{dla } \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{dla } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Jeśli $\alpha = 1$, to granica całek $\int_1^b f(x)dx$ przy $b \to \infty$ jest nieskończona, gdyż $\ln b \to \infty$ dla $b \to \infty$. Całka niewłaściwa $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ jest zatem rozbieżna. Jeśli $s \neq 1$, to granica całek $\int_1^b f(x)dx$ przy $b \to \infty$ jest skończona wtedy u tylko wtedy, gdy funkcja potęgowa $b^{1-\alpha}$ ma granicę skończoną przy $b \to \infty$, a więc gdy wykładnik $1 - \alpha < 0$. Wówczas dla takich α mamy

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Dla wszystkich pozostałych $\alpha \in \mathbb{R}$ całka $\int_1^\infty f(x)dx$ jest rozbieżna.

3. Niech $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ dla $x \geq 0$. Dla każdego $b > 0$ mamy
$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x|_0^b = \arctan b$$
Zatem
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$
Jako, że $f(x)$ jest parzysta, to
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to-\infty} (-\arctan b) = \frac{\pi}{2}$$
Zatem
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}dx + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \pi$$

Definicja: Jeśli funkcja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła lub ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a+\varepsilon, b]$, gdzie $0 < \varepsilon < b-a$, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna, gdy istnieje skończona granica
$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$$
Jeśli ta granica nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka jest rozbieżna.

Przykład:

1. Niech $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^s}dx$, wówczas
$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}dx = \begin{cases} \ln x|_\varepsilon^1 = \ln \frac{1}{\varepsilon} & \text{dla } s = -1 \\ \frac{x^{1+s}}{1+s}\ |_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1+s}}{1+s} & \text{dla } s \neq -1 \end{cases}$$
Gdy $s = -1$, to $\ln \frac{1}{\varepsilon} \to +\infty$ dla $\varepsilon \to 0^+$. Dla $s \neq -1$ zbieżność rozpatrywanej całki jest równoważna istnieniu skończonej granicy ε^{1+s} przy $\varepsilon \to 0^+$, czyli $s > -1$.

Twierdzenie: Jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale domkniętym zawartym w (a, b), to całkę $\int_a^b f(x)dx$ nazywamy zbieżną wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są całki $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$ dla pewnego (równoważnie każdego) $c \in (a, b)$.

Zadanie 1.
Oblicz całkę lub wykaż, że jest rozbieżna:

a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx$

c) $\int_0^{e^{-1}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

d) $\int_0^{\infty} \sin x dx$

e) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

f) $\int_3^5 \frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(x-5)}} dx$

Zadanie 2.
Oblicz całkę lub wykaż, że jest rozbieżna

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\ dx$$

Rozwiązanie:
Znajdźmy najpierw funkcję pierwotną całki $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\ dx$.

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\ dx \quad = \left| \begin{array}{c} f = \ln x \\ df = \frac{1}{x}\ dx \end{array} \right\| \begin{array}{c} dg = \frac{x}{(x^2+1)^3}\ dx \\ g = \frac{1}{4(x^2+1)^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\ dx$$

Policzmy całkę $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\ dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\ dx \quad &= \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\ dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t(t+1)^2}\ dt = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t} \right)\ dt = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln t = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2x^2+2} + \ln x \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\ dx \quad &= \quad -\frac{\ln x}{4(x^2+1)^2} - \frac{1}{8} \ln(x^2+1) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4} \ln x = \\ &= \quad \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^2+1} + \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \frac{2 \ln x}{(x^2+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Dalej mamy

$$\lim_{x \to \infty} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\ dx = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^2+1} + \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \frac{2 \ln x}{(x^2+1)^2} \right) = \frac{1}{8} \left(0 + \ln(1) + 0 \right) = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^2+1}+\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)-\frac{2\ln x}{(x^2+1)^2}\right)=\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x^2}{(x^2+1)\cdot x^{\frac{2}{(x^2+1)^2}}}\right)=\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{(x^2+1)\cdot x^{\frac{2}{(x^2+1)^2}-2}}\right)=\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\ln\frac{1}{(0+1)\cdot 1}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\ln(1)=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Zatem

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx = 0-\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$$

Zadanie 3.
Zbadaj zbieżność podanych całek

a) $\int_0^1 \frac{\tan x}{x}dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$

c) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$

d) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(\ln x)}dx$

e) $\int_0^{\pi} \ln(1+\cos x)dx$

f) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$

Zadanie 4.
Zbadaj dla jakich α zbieżna jest całka $\int_0^1 x^\alpha dx$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^\alpha dx = \lim_{a\to 0^+}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\alpha+1}-\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \begin{cases}\frac{1}{\alpha+1} & \text{dla } \alpha>-1\\ +\infty & \text{dla } \alpha<-1\end{cases}$$

Dla $\alpha=-1$ mamy

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\ln x|_a^1 = +\infty$$

Zatem całka jest zbieżna dla $\alpha>-1$.

Twierdzenie: Niech $f : [a, \infty) \to [a, \to \infty)$, gdzie $a \geq 0$ będzie funkcją nierosnącą. Następujące warunki są równoważne:

- Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna
- Szereg $S = \sum\limits_{n=\lfloor a+1}^{\rfloor} \infty f(n)$ jest zbieżny

Twierdzenie: (Kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych) Jeśli f, g są nieujemne i ciągłe na przedziale $[a, \infty)$ i istnieją $a_1 \geq a$ i $C > 0$ takie, że $C \cdot f(x) \geq g(x)$ dla wszystkich $x > a_1$, to ze zbieżności całki $\int_a^\infty f(x)dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^\infty g(x)dx$, natomiast z rozbieżności calki $\int_a^\infty g(x)dx$ wynika rozbieżność całki $\int_a^\infty f(x)dx$.

Zatem jeśli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

gdzie $0 \neq |g| < \infty$, to całki $\int_a^\infty f(x)dx$ i $\int_a^\infty g(x)dx$ są jednocześnie zbieżne, lub jednocześnie rozbieżne.

Zadanie 5.
Zbadaj dla jakich α zbieżna jest całka $\int_0^1 (-\ln x)^\alpha dx$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_0^1 (-\ln x)^\alpha dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-\ln x)^\alpha dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-\ln x)^\alpha dx$$

Zbadajmy zbieżność każdej z całek osobno. Całka $\int_0^{\frac{1}{2}} (-\ln x)^\alpha dx$ jest na pewno zbieżna dla $\alpha < 0$, ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} (-\ln x)^\alpha = 0$, czyli funkcja $(-\ln x)^\alpha$ jest ograniczona na $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, zatem całka jest zbieżna. Dla $\alpha = 0$ mamy

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (-\ln x)^\alpha dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1dx = \frac{1}{2}$$

zatem całka jest zbieżna. Dla $\alpha > 0$ weźmy funkcję $\frac{1}{x^\beta}$ dla $\beta > 0$, wówczas

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(-\ln x)^\alpha}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta} = 0$$

Zatem dla dostatecznie małych x-ów mamy

$$(-\ln x)^\alpha < \frac{1}{x^\beta}$$

dla dowolnego α. Zatem ze zbieżności całki $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx$ wynika zbieżność całki $\int_0^1 (-\ln x)^\alpha dx$. Biorąc $\beta = \frac{1}{2}$, całka $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ jest zbieżna, zatem zbieżna jest również całka $\int_0^1 (-\ln x)^\alpha dx$ dla dowolnego $\alpha > 0$.

Zbadajmy teraz zbieżność całki $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\ln x)^{\alpha}\ dx$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\ln x)^{\alpha}\ dx = \left| \begin{array}{c} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-\ln(1+t))^{\alpha}\ dt$$

Dla małych t mamy $(-\ln(1+t))^{\alpha} \approx (-t)^{\alpha}$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-t)^{\alpha}\ dt = \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}$$

Zatem z kryterium porównawczego badana całka jest zbieżna dla $\alpha > -1$.

Zatem ostatecznie, całka $\int_0^1(-\ln x)^{\alpha}dx$ jest zbieżna dla $\alpha > -1$.

Zadanie 6.
Dla jakich α, β zbieżna jest całka $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}(-\ln x)^{\beta}}dx$

Zadanie 7.
Zbadaj zbieżność całek

a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ w zależności od parametru α

d) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx$

e) $\int_1^{\infty} \ln^{\alpha} x \frac{\sin x}{x}dx$ w zależności od parametru α

Zadanie 8.
Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n}dx$

c) $\int_0^{\infty} x^2\cos(e^x)dx$

Zadanie 9.
Zbadaj zbieżność całki

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2-\pi^2}}dx$$

Ćwiczenia 24

Całka niewłaściwa

Twierdzenie: (O wartości średniej dla całki) Załóżmy, że $f, h \in C([a,b])$ i $h \geq 0$. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a,b]$, że

$$f(\xi) \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)dx$$

Załóżmy, ze $f, g \in C([a,b])$, a ponadto g jest funkcją monotoniczną. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a,b]$, że

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

Zadanie 1.

Załóżmy, że f jest funkcją monotoniczną na $(0,1)$ i całka niewłaściwa $\int_0^1 f(x)dx$ istnieje. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x)dx$$

Zadanie 2.

Oblicz

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n^3} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2n^3}\right)}{n^2\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n^3}\right)}$

Zadanie 3.

Wykaż, że jeśli całka niewłaściwa z funkcji nieujemnej jest ograniczona to jest zbieżna. Podaj przykład funkcji zmieniającej znak, której całka jest ograniczona, ale nie jest zbieżna.

Zadanie 4.

Zbadaj zbieżność całek

a) $\int_0^1 \frac{\sin x \ln(1+\sqrt{x})}{1-\cos x}dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \ln(1+\sqrt{x})}{1-\cos x}dx$

c) $\int_0^1 \frac{(1-x)\ln\cos\frac{\pi x}{2}}{x^2\sqrt{x}}$

d) $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$

Zadanie 5.

Wykaż następujący warunek Cauchy'ego zbieżności całek: Niech f będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na każdym ograniczonym podprzedziale przedziału $[a, \infty)$. Na to aby całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)dx$ była zbieżna potrzeba i wystarcza, by dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istniało $a_0 > a$ takie, że dla dowolnych $a_1, a_2 > a_0$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx < \varepsilon$$

Zadanie 6.

Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną

a) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$

b) $\int_1^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n}dx$

c) $\int_0^\infty x^2 \cos e^x dx$

Zadanie 7.

Oblicz całki

a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

b) $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)dx$

Ćwiczenia 25

Powtórzenie wiadomości

Zadanie 1.
Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie ciągła i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Wykazać, że istnieje $x_0>0$, takie że dla każdego $x>x_0$ zachodzi $f(x)>f(x_0)$.

Rozwiązanie:
Załóżmy przeciwnie, że takie x_0 nie istnieje, czyli dla każdego x istnieje takie $y>x$, że $f(x)\geq f(y)$. Znajdziemy więc taki rosnący ciąg (y_n), że ciąg $f((y_n))$ jest malejący. Granicą malejącego ciągu nie może być $+\infty$. Zatem funkcja nie może być rozbieżna do nieskończoności.

Zadanie 2.
Niech f spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$. Wykazać, że $g(x)=f(x)\sin x$ spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ograniczona.

Rozwiązanie:
Skoro f spełnia warunek Lipschitza, to istnieje takie L_1, że dla każdych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi

$$|f(x)-f(y)|\leq L_1\cdot|x-y|$$

$\Leftarrow$ Załóżmy, że f jest ograniczona. Istnieje więc M takie, że dla każdego $x\in\mathbb{R}$ zachodzi $f(x)<M$. Chcemy pokazać, że g jest lipszycowska. Mamy

$$|g(x)-g(y)|=|f(x)\sin x-f(y)\sin y|=|\sin x(f(x)-f(y))+f(y)(\sin x-\sin y)|\leq$$

$$\leq|\sin x(f(x)-f(y))|+|f(y)(\sin x-\sin y)|\leq|f(x)-f(y)|+|M|\cdot|(\sin x-\sin y)|$$

Wiadomo, że funkcja sin jest lipszycowsko ciągła, zatem $|\sin x-\sin y|\leq L_2\cdot|x-y|$. Mamy więc

$$|g(x)-g(y)|\leq L_1\cdot|x-y|+|M|\cdot L_2\cdot|x-y|=(L_1+|M|\cdot L_2)\cdot|x-y|$$

Biorąc $L=(L_1+|M|\cdot L_2)$ otrzymujemy

$$|g(x)-g(y)|\leq L\cdot|x-y|$$

zatem g jest lipszycowsko ciągła.

Zadanie 3.
Wykazać, że dla dowolnych $0\leq\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

$$3\alpha\tan\alpha+2\beta\tan\beta+\gamma\tan\gamma\geq(3\alpha+2\beta+\gamma)\tan\left(\frac{3\alpha+2\beta+\gamma}{6}\right)$$

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy funkcję $f(x)=x\tan x$. Zbadajmy jej wypukłość

$$f'(x)=\tan x+x(1+\tan^2 x)$$

$$f''(x)=1+\tan^2 x+1+\tan^2 x+x\cdot 2\cdot\tan x\cdot(1+\tan^2 x)=2(1+\tan^2 x)(1+x\tan x)$$

Dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ wyrażenie $2(1+\tan^2 x)(1+x\tan x)$ przyjmuje wartości dodatnie, zatem funkcja $f(x)$ jest wypukła.

Z nierówności Jensena dla $f(x) = x\tan x$ z wagami $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$ i $a_3 = \frac{1}{6}$ oraz $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$ mamy

$$f\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{6}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{6}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{6}\right) \leq \frac{\alpha}{2}\tan\alpha + \frac{\beta}{3}\tan\beta + \frac{\gamma}{6}\tan\gamma$$

Po pomnożeniu przez 6 otrzymujemy nierówność z tezy.

Zadanie 4.
Wyznaczyć kres dolny i kres górny funkcji

$$f(x) = x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

na przedziale $(0, +\infty)$.

Rozwiązanie:
Dla $x > 0$ $f(x) > 0$, ponadto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

zatem kres dolny funkcji to 0.
Wyznaczmy przedziały monotoniczności funkcji

$$f'(x) = \left(1-\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) + x\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}(x+1)^2}\right) = 1-\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

Funkcja jest rosnąca, gdy $f'(x) \geq 0$, zatem aby zbadać monotoniczność funkcji, trzeba pokazać, że

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{(x+1)^3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2(x+1)} \leq \sqrt{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} \leq \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4(x+1)^2} \leq \frac{1}{x(x+1)}$$

co oczywiście jest prawdziwe. Policzmy granice w nieskończoności

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

zatem kres górny tej funkcji to $\frac{1}{2}$.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a i b, dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\cos x & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{1-\cos x}{x\sin x} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi, +\infty)$.

Rozwiązanie:
Zbadajmy ciągłość funkcji w zerze.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x\cos x + \sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}$$

Zatem funkcja jest ciągła dla $b = \frac{1}{2}$. Ponadto funkcja jest różniczkowalna na $(0, +\infty)$ oraz $(-\infty, 0)$. Policzmy granice jednostronne $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$. Mamy

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} a - b\sin x = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2(1-\cos x) - x\sin x}{2x^2\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2-2\cos x - x\sin}{2x^3} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-2\cos x - x\sin x}{2x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x\cos x}{6x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin x}{12x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{12} = 0$$

Zatem f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

czyli gdy $a = 0$. Zatem funkcja jest różniczkowalna na $(-\pi, +\infty)$ dla $a = 0$ i $b = \frac{1}{2}$.

Zadanie 6.
Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciagła na $\mathbb{R}$ i różniczkowalna. Wykazać, że jeśli pochodna funkcji f, funkcja $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nie ograniczona, to nie jest ona jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Rozważmy taki ciąg (x_n), że $f'(x_{n+1}) > f'(x_n) + 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $f'(x_1) > 1$. Taki ciąg istnieje, ponieważ f' jest nieograniczona. Wówczas mamy $f'(x_n) > n$. Załóżmy więc przeciwnie, że f' jest nieograniczona i f' jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje $\delta > 0$ taka że $|x-y| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Zatem jeśli $|x_{n+1} - y| < \delta$, to $|f'(x_{n+1}) - f'(y)| < \varepsilon$. Niech $f'(x_{n+1}) > f'(y)$, wówczas

$$f'(x_{n+1}) - f'(y) < \varepsilon \Leftrightarrow f'(y) > f'(x_{n+1}) - \varepsilon > f'(x_n) + 1 - \varepsilon > n + 1 - \varepsilon$$

biorąc $\varepsilon = 1$ mamy

$$f'(y) > n$$

Rozważmy ciąg (y_n) taki, że $y_n \in \left(x_n + \frac{\delta}{2n}, x_n + \frac{\delta}{2}\right)$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy

$$f(y_n) - f(x_n) > f'(c_n)(y_n - x_n) > f'(c_n) \cdot \frac{\delta}{2n} > \frac{\delta}{2}$$

Bo dla pewnej liczby $c_n \in (x_n, y_n)$ mamy $f'(c_n) > n$. Przeczy to jednak jednostajnej ciągłości funkcji f na $\mathbb{R}$. Zatem f' nie jest jednostajnie ciągła i nieograniczona.

Zadanie 7.
Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(\tan x)-\arctan(\sin x)}{\tan(\arcsin x)-\sin(\arctan x)}$ lub wykazać, że granica nie istnieje.

Rozwiązanie:
Rozwińmy w szereg Maclaurina funkcje

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(\tan x)-\arctan(\sin x)}{\tan(\arcsin x)-\sin(\arctan x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)+\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^3}{6}+o(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3}{3}+o(x^4)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)+\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3}{3}+o(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)-\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^3}{6}+o(x^4)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)+\frac{x^3}{6}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-\frac{x^3}{3}\right)}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)+\frac{x^3}{3}\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)-\frac{x^3}{6}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^4)}{x^3+o(x^4)} = 1$$

Zadanie 8.
Czy istnieje funkcja $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ taka, że w każdym punkcie $x\in\mathbb{Q}$ funkcja f ma ścisłe minimum?

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy funkcję

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \neq \mathbb{Q} \\ 1-\frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q},\quad p,q\in\mathbb{Z}, p\perp q, q>0 \end{cases}$$

innymu słowy $F(x) = 1 - f(x)$, gdzie f to funkcja Riemana. Wówczas w każdym punkcie $x \in \mathbb{Q}$ funkcja f ma ścisłe minimum.

Zadanie 9.
Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest wypukła oraz $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) < \infty$. Czy funkcja f może być rosnąca?

Rozwiązanie:
Załóżmy, że f jest rosnąca i ograniczona. Ma więc granicę. Zatem jej iloraz różnicowy dąży do zera. Skoro f jest rosnąca, to jej pochodna jest dodatnia. Zatem iloraz różnicowy dąży do zera po liczbach dodatnich, czyli maleje. Funkcja f jest zatem wklęsła.

Twierdzenie: (Diniego) Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem zwartym oraz $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i $n \in \mathbb{N}$. Jeśli

1. ciąg f_n jest monotoniczny
2. ciąg f_n jest punktowo zbieżny do f

to jest jednostajnie zbieżny do f.

Zadanie 10.
Niech ciąg $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadany wzorem $f_n(x) = \underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin(x))\ldots))}_{n \text{ razy}}$. Zbadać zbieżność jednostajną i niemal jednostajną tego ciągu na prostej.

Rozwiązanie:
Niech $f_n(x) = \sin^n(x)$ oznacza n-krotne złożenie funkcji sin. $\sin^n$ jest ciągły i okresowy o okresie 2π, zatem rozważmy funkcje $f_n : [0, 2\pi] \to [0, 1]$. Na przedziale $[0, 2\pi]$ zachodzi nierówność $\sin x < x$, zatem dla ustalonego x ciąg $\sin^n$ jest ściśle malejący. Jako, że jest również ograniczony, to jest zbieżny. Niech $g = \lim_{n\to\infty} \sin^n(x)$, wówczas $g = \sin(g) \Rightarrow g = 0$. Zatem $f_n \to 0$. Przedział $[0, 2\pi]$ jest zbiorem zwartym, funkcja f_n jest monotoniczna oraz jest punktowo zbieżna do zera, zatem z twierdzenia Diniego ciąg f_n jest jednostajnie zbieżny do zera.

Zadanie 11.
Zbadać zbieżność jednostajną na prostej ciągu $f_n(x) = x(1 + x^2)^{-n}$.

Rozwiązanie:
Ciąg funkcyjny $f_n(x)$ jest funkcją nieparzystą, zatem wystarczy zbadać zbieżność jednostajną na przedziale $[0, +\infty)$. Zbadajmy zbieżność punktową

$$\lim_{n\to\infty} x(1 + x^2)^{-n} = 0$$

Zbadajmy zbieżność jednostajną. W tym celu policzymy pochodną, by znaleźć maksimum funkcji $f_n(x)$

$$f_n'(x) = (1 + x^2)^{-n} - x \cdot 2x(1 + x^2)^{-n-1} = (1 + x^2)^{-n-1}(1 + x^2(1 - 2n))$$

zatem

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x^2(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2n - 1}}$$

W tym punkcie funkcja osiąga maksimum. Dalej mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}(1 + \frac{1}{2n-1})^{-n} = 0 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Zatem ciąg jest jednostajnie zbieżny do zera.

Zadanie 12.
Zbadać zbieżność jednostajną na prostej ciągu $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x^{2n}}\right)$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że funkcja jest parzysta, zatem wystarczy zbadać zbieżność jednostajną na przedziale

$[0, +\infty)$. Zbadajmy zbieżność punktową

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{1+x^{2n}}\right) = \begin{cases} \ln(1) & \text{dla } x > 1 \\ \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \text{dla } x = 1 \\ \ln(2) & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

Zatem jako, że ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji nieciągłej, to nie jest zbieżna jednostajnie.

Zadanie 13.
Czy funkcja $f(x) = \ln(2 + \sin x)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie:
Funkcja jest ciągła, okresowa i ograniczona, zatem jest lipszycowsko ciągła. Stąd wynika, że jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 14.
Zbadać jednostajną ciągłość funkcji $\exp(1 + x^3)$ na zbiorach: $[0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$ oraz $(-\infty, 0]$.

Rozwiązanie:
Dla $x > 1$ mamy $e^{1+x^3} > e^x$. Funkcja e^x nie jest ciągła jednostajnie, zatem e^{1+x^3} również nie jest ciągłe jednostajnie. Funkcja nie jest więc ciągła na zbiorze $[0, +\infty)$ oraz $\mathbb{R}$. Zbadajmy ciągłość jednostajną na $[0, 1]$

$$\lim_{x\to 1} e^{1+x^3} = e^2 \qquad \lim_{x\to 0} e^{1+x^3} = e$$

Zatem jako, że funkcja ma skończone granice, to jest ciągła jednostajnie na $[0, 1]$. Zbadajmy ciągłość jednostajną na $(-\infty, 0]$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{1+x^3} = 0$$

Zatem również na przedziale $(-\infty, 0]$ funkcja jest ciągła jednostajnie.

Twierdzenie: Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f_n : A \to \mathbb{R}$ $g_n : A \to \mathbb{R}$ i $\forall_{x\in A} f_n(x) \geq 0$. Załóżmy, też, że dla każdego $x \in A$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący. Jeżeli

(Abel) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ jest jednostajnie zbieżny i funkcja f_n jest ograniczona

lub

(Dirichlet) Sumy częściowe szeregu $\sum\limits_{n=1}^{m} g_n$ są wspólnie ograniczone, a ciąg (f_n) jednostajnie dąży do zera

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ jest jednostajnie zbieży.

Zadanie 15.
Wykazać niemal jednostajną zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln^2 n}{n^2+1} \cos(\pi n x)$ na $(0, 1)$.

Rozwiązanie:
Pokażemy, że funkcja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x \ln^2 x}{x^2+1}$ jest ograniczona. Oczywiście $f(x) \geq 0$.

Ponadto
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$
oraz
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{\ln^2 x}{x} = 1\cdot 0 = 0$$
Zatem $f(x)$ jest ograniczona, ponieważ jest ciągła. Weźmy dowolny przedział $I=[a,b]\subseteq(0,1)$. Mamy
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$
zatem dla każdego $x\in I$ zachodzi
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi x) = \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}\cos\frac{(n+1)\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$$
zatem szereg jest ograniczony. Sumy szeregu $\sum\cos(n\pi x)$ są ograniczone, ponadto $\frac{n\ln^2 n}{n^2+1}$ jest jednostajnie zbieżne do 0. Zatem z twierdzenia Dirichleta szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln^2 n}{n^2+1}\cos(\pi nx)$ jest zbieżny jednostajnie. Zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln^2 n}{n^2+1}\cos(\pi nx)$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $(0,1)$.

Zadanie 16.
Niech $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ będą dane wzorem
$$f_n(x) = x^2 + n^\alpha x\exp(-nx^2)$$
Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na $[0,1]$ w zależności od $\alpha>0$.

Rozwiązanie:
Zbadajmy zbieżność punktową
$$\lim_{n\to\infty} x^2 + \frac{xn^\alpha}{e^{nx^2}} = x^2$$
Aby zbadać zbieżność jednostajną wystarczy pokazać, że $g_n(x) = \frac{xn^\alpha}{e^{nx^2}}$ zbiega jednostajnie do 0. Zbadajmy więc zbieżność jednostajną g_n w zależności od parametru α. Liczymy pochodną
$$g_n'(x) = \frac{n^\alpha e^{nx^2} - xn^\alpha 2nxe^{nx^2}}{e^{2nx^2}} = \frac{n^\alpha(1-2x^2n)}{e^{nx^2}}$$
Zatem
$$g_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2n = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$
Liczymy granice w krańcach przedziału i w ekstremum
$$g_n(0) = 0 \overset{n\to\infty}{\to} 0$$
$$g_n(1) = \frac{n^\alpha}{e^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

oraz

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{n^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2n}}}{e^{\frac{1}{2}}} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha < \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{dla } \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2e}} & \text{dla } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zatem ciąg jest zbieżny jednostajnie do 0 dla $\alpha < \frac{1}{2}$.

Twierdzenie: Niech dla $n \in \mathbb{N}$ funkcje $b_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'$ jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$ i dla pewnego $x \in [a, b]$ zbieżny jest szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$ a jego suma jest funkcją różniczkowalną. Co więcej

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'$$

Zadanie 17.

Wykazać, że funkcja określona jako suma szeregu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^6}{x^6 + n^6}$$

jest dobrze określona i ma ciągłą pochodną na zbiorze $[0, \infty)$.

Rozwiązanie:

Chcemy zbadać, czy dla $x \in [0, \infty)$, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^6}{x^6+n^6}$ jest zbieżny

$$\frac{\frac{x^6}{x^6+n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{n^6 x^6}{n^6\left(1 + \frac{x^6}{n^6}\right)} \overset{n\to\infty}{\to} x^6$$

zatem na mocy kryterium porównawczego, szereg ten jest zbieżny. Zatem funkcja jest dobrze określona. Zbadajmy, czy funkcja jest różniczkowalna na przedziale $[0, b]$ dla $b > 0$. W tym celu zbadajmy zbieżność jednostajną szeregu pochodnych

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^6}{x^6 + n^6}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n^6 x^5}{(x^6 + n^6)^2}$$

Mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n^6 x^5}{(x^6 + n^6)^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n^6 b^5}{n^{12}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6b^5}{n^6}$$

Zatem jako że szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ jest zbieżny, to na mocy kryterium Weierstrassa, zbieżny jest niemal jednostajnie na przedziale $[0, +\infty)$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n^6x^5}{(x^6+n^6)^2}$. Zatem funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna na $[0, +\infty)$. Teraz skorzystamy z tego, że granica niemal jednostajnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Zatem pochodna $f(x)$ jest ciągłą na $[0, \infty)$.

Zadanie 18.
Niech funkcja f będzie określona szeregiem potęgowym:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \text{gdzie} \quad b_n = \sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}$$

a) Wyznaczyć wszystkie punkty zbieżności tego szeregu,

b) Wyznaczyć funkcję f wzorem jawnym przez funkcje elementarne

c) Znaleźć funkcję F, taką że $F'(x) = f(x)$

d) Znając funkcję F obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)(n+2)}$

Rozwiązanie:

a) Punkty zbieżności tego szeregu wyznaczymy ze wzoru Cauchy'ego-Hadamarda

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b_n}{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$$

Zatem szereg jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$. Dla $x = 1$ szereg wygląda następująco

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

Zatem z twierdzenia o nawiasowaniu mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right)$$

Jako, że $\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right)$ jest zbieżny do zera, to z kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny. Analogicznie mamy dla $x = -1$. Zatem punkty zbieżności szeregu to $[-1, 1]$.

b) Na przedziale $(-1, 1)$ funkcja f jest różniczkowalna. Zatem pochodną funkcji obliczymy różniczkując wyraz po wyrazie

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+x) \cdot x^{2n} = \frac{1+x}{1+x^2}$$

Całkując funkcję f' mamy

$$f(x) = \int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Jako, że $f(0) = 0$, toteż $C = 0$, skąd

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

c) Znajdźmy funkcję pierwotną dla $f(x)$

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= \left| \begin{matrix} f = \arctan x \\ g = x \end{matrix} \right\| \begin{matrix} f' = \frac{1}{x^2+1} \\ g' = 1 \end{matrix} \right| = x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x dx = \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2} \ln(1+x)^2 &= \left| \begin{matrix} f \ln(1+x^2) \\ g = \frac{x}{2} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} f' = \frac{2x}{1+x^2} \\ g' = \frac{1}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x}{2} \ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{x}{2} \ln(1+x^2) - x + \arctan x + C\end{aligned}$$

Zatem na przykład $F(x) = (1+x) \arctan x + \frac{x-1}{2} \ln(1+x^2) - x$

d) Jako, że

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

oraz $F'(x) = f(x)$, toteż całkując wyraz po wyrazie w szeregu mamy

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{b_n}{n+1} x^{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

Zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)(n+2)} = F(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Zadanie 19.
Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, nieparzystą i okresową o okresie 4. Zbadać, czy szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f\left(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (-1)^{n+1} x\right)}{\sqrt{n^2 + \cos x}}$$

jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Przyjrzyjmy się kolejnym wyrazom licznika

$$f(2-x),\ f(2+x),\ f(4-x),\ f(4+x),\ f(6-x),\ f(6+x),\ \ldots$$

Jako, że f jest nieparzyste, czyli $f(x) = -f(-x)$, to mamy

$$f(2-x) = -f(x-2) = -f(x-2+4) = -f(x+2)$$

$$f(4-x) = -f(x-4) = -f(x-4+4+4) = f(x+4)$$

$$f(6-x) = f(6-x-4) = f(2-x)$$

$$\ldots$$

Niech więc $f(2-x)=a$ oraz $f(4-x)=b$, wówczas kolejne wyrazy mianownika to

$$a,\ -a,\ b,\ -b,\ a,\ -a,\ b,\ -b,\ \ldots$$

Aby pokazać, że szereg jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$, skorzystamy z kryterium Dirichleta. Sumy częściowe $\sum_{n=2}^{m} f\left(2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+(-1)^{n+1}x\right)$ są ograniczone, zatem wystarczy pokazać, że $\frac{1}{\sqrt{n^2+\cos x}}$ zbiega jednostajnie do zera. Ciąg ten zbiega punktowo do zera. Zbadajmy więc zbieżność jednostajną. W tym celu policzymy pochodną by znaleźć ekstrema

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{n^2+\cos x}}=\frac{\sin x}{2(n^2+\cos x)^{\frac{3}{2}}}$$

Dla $n>1$ mamy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$. Dla $x=2k\pi$ funkcja osiąga minima, ponieważ $\cos x=1$. Dla $x=\pi+2k\pi$ funkcja osiąga maxima, ponieważ $\cos x=-1$. Zatem dla tych punktów, w których funkcja osiąga maxima, mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}=0$$

zatem funkcja $\frac{1}{\sqrt{n^2+\cos x}}$ jest jednostajnie zbieżna do 0, czyli szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f\left(2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+(-1)^{n+1}x\right)}{\sqrt{n^2+\cos x}}$$

jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.

Zadanie 20.
Niech $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{1-x^2}$. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-\sin f(x))}{x^4}$.

Rozwiązanie:
Chcemy policzyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{\sin^2 x}-1}{1-\sin^2 x}-\sin\left(\frac{e^{x^2}-1}{1-x^2}\right)}{x^4}$$

Skorzystamy z wielomianów Taylora

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

$$\sin^2 x = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\begin{aligned} e^{\sin^2 x} &= e^{x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=1+\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)+\frac{\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)^2}{2}= \\ &= 1+\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)+\frac{x^4}{2}+o(x^4)=1+x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\end{aligned}$$

$$e^{\sin^2 x} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$1 - \sin^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\frac{e^{\sin^2 x} - 1}{1 - \sin^2 x} = \frac{x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = x^2 + \frac{7x^4}{6} + o(x^4)$$

Dalej mamy

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\frac{e^{x^2} - 1}{1 - x^2} = \frac{x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{1 - x^2} = x^2 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\sin\left(\frac{e^{x^2} - 1}{1 - x^2}\right) = \sin\left(x^2 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4)\right) = x^2 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4)$$

Zatem

$$\frac{e^{\sin^2 x} - 1}{1 - \sin^2 x} - \sin\left(\frac{e^{x^2} - 1}{1 - x^2}\right) = x^2 + \frac{7x^4}{6} + o(x^4) - x^2 - \frac{3x^4}{2} + o(x^4) = -\frac{1}{3}x^4$$

Skąd mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{\sin^2 x}-1}{1-\sin^2 x} - \sin\left(\frac{e^{x^2}-1}{1-x^2}\right)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3}x^4}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

Zadanie 21.
Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1\right)$.

Rozwiązanie:
Gdy liczymy granicę, to otrzymujemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$. Ponadto x jak i $\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}$ są różniczkowalne, zatem możemy skorzystać z reguły de'Hospitala

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1\right)' \cdot 1$$

Policzmy więc pochodną wyrażenia $\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{d}{dx}e^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x^2}$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1\right)' \cdot 1 = \lim_{x\to 0} \frac{e}{(x+1)^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x^2}$$

Wyrażenie $\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{x}}}$ dąży do e przy $x \to 0$, natomiast wyrażenie $\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2}$ znowu jest symbolem nieoznaczonym $\frac{0}{0}$. Policzmy więc granicę wyrażenia $\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2}$ przy $x \to 0$, a następnie skorzystajmy z arytmetycznych własności granicy, by obliczyć szukaną granicę

$$\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2} = \frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-(x-x^2+o(x^2))}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

zatem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

skąd

$$\lim_{x\to 0}\frac{e}{(x+1)^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 22.

Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\sqrt[3]{x^7}}^{1-\cos x}\ln\left(2+\tan^2 t\right)dt}{x^2}$.

Rozwiązanie:

Dla $\delta \in \left(x^{\frac{7}{3}}, 1-\cos x\right)$ mamy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sqrt[3]{x^7}}^{1-\cos x}\ln\left(2+\tan^2 t\right)dt}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^{\frac{7}{3}}}^{\delta}\ln(2+\tan^2 t)dt+\int_{\delta}^{1-\cos x}\ln(2+\tan^2 t)dt}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\int_{\delta}^{x^{\frac{7}{3}}}\ln(2+\tan^2)dt}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\delta}^{1-\cos x}\ln(2+\tan^2 t)dt}{x^2}
\end{aligned}$$

Skoro dla $x \to 0$ mamy $x^{\frac{7}{3}} \to 0$ oraz $1-\cos x \to 0$, to również $\delta \to 0$. Zatem dolne i górne granice całkowania w obu całkach dążą do zera, wobec czego całe całki dążą do zera. Mamy więc doczynienia z granicą niewłaściwą postaci $\frac{0}{0}$, zatem możemy zastosować regułę de'Hospitala

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sqrt[3]{x^7}}^{1-\cos x}\ln(2+\tan^2 t)\ dt}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\tan^2(1-\cos x))\cdot\sin x-\ln(2+\tan^2\sqrt[3]{x^7})\cdot\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}}{2x} =\\
&= \frac{\ln 2}{2}+0 = \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

Zadanie 23.

Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4n^2}\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{16n^2-(4j-2)^2}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{16n^2-(4j-2)^2} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{4n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{4j-2}{4n}\right)^2} =\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2}
\end{aligned}$$

Jest to suma całkowalna dla funkcji $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Długość przedziału to 1, gdyż mamy n części o długości $\frac{1}{n}$.

- Przedział $[0,1]$
- Podział $P = \left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=0,1,\ldots,n}$, czyli $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$
- Punktowanie w środkach, czyli $\xi(P) = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, gdzie $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = \frac{2i-1}{2n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{16n^2-(4j-2)^2} &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \\
&= \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t\ dt \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)\ dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos x\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Zadanie 24.
Uzasadnić, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ prawdą jest, że

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx &= \left| \begin{array}{c} y = \frac{\pi}{2} - x \\ dy = -dx \end{array} \right| = -\int_{\pi}^{0} (\pi - y)f(\sin(\pi - y))dy = \int_0^{\pi} (\pi - y)f(\sin y)dy \\
&= \pi\int_0^{\pi} f(\sin y)dy - \int_0^{\pi} yf(\sin y)dy
\end{aligned}$$

Skąd

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Zadanie 25.
Dana jest funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \int_1^{x^2+1} f(t)dt\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x f(x^2+1)dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \int_1^{\ln x+1} f(t)dt\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x+1} f(\ln(x+1))dx - \int_0^1 f(x)dx$

Rozwiązanie:

a) Niech $F(x)$ to funkcja pierwotna $f(x)$, czyli $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, bo wówczas $F'(x) = f(x)$. Skorzystamy z całkowania przez części dla $f(x) = \int_1^{x^2+1} f(t)dt$ oraz $g'(x) = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \int_1^{x^2+1} f(t)dt\right) dx = \left(\int_1^{\frac{\pi^2}{4}+1} f(t)dt\right) \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\int_1^1 f(t)dt\right) \cdot (-\cos 0) -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot \left(\int_1^{x^2+1} f(t)dt\right)' dx$$

Zarówno pierwszy składnik jak i drugi składnik się zerują. Ponadto mamy

$$\left(\int_1^{x^2+1} f(t)dt\right)' = \big(F(x^2+1) - F(1)\big)' = (F(x^2+1))' = 2x \cdot f(x^2+1)$$

zatem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \int_1^{x^2+1} f(t)dt\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot 2xf(x^2+1)dx$$

b) Skorzystamy z całkowania przez części dla $f(x) = \int_1^{\ln(x+1)} f(t)dt$ oraz $g'(x) = \sin x$. Mamy

$$g' = f(\ln(x+1)) \cdot \frac{1}{x+1}$$

zatem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \int_1^{\ln(x+1)} f(t)dt\right) dx = -\cos x \int_1^{\ln(x+1)} f(t)dt \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x+1} \cdot f(\ln(x+1))dx =$$

$$= \int_1^0 f(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x+1} f(\ln(x+1))dx$$

Zadanie 26.

Niech $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[0,2]$ i różniczkowalną na $(0,1)$ oraz na $(1,2)$. Ponadto załóżmy, że

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = g \in \mathbb{R}$$

Udowodnić, że $f(x)$ jest różniczkowalna w $x = 1$ oraz $f'(1) = g$. Czy f jest klasy $C^1((0,2))$?

Rozwiązanie:

Aby udowodnić, że funkcja jest różniczkowalna w 1, pokażemy, że

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji $f(t)$ na przedziale $(1,x)$ wiemy, że funkcja jest ciągła i różniczkowalna, zatem istnieje takie $\xi(x) \in (1,x)$, że

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(\xi(x))$$

czyli jako, że $\xi(x) \overset{x\to 1^+}{\to} 1^+$, to mamy

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} f'(\xi(x)) = g$$

oraz analogicznie dla $f(t)$ na przedziale $(x,1)$ istnieje $\xi(x)\in(x,1)$, że

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(\xi(x))$$

skąd

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} f'(\xi(x)) = g$$

Zatem rzeczywiście

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

czyli funkcja jest różniczkowalna w $x=1$ oraz $f'(1)=g$.

Skoro $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$, to znaczy, że f' jest ciągła w 1.

Twierdzenie: Jeżeli $f:(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ jest ciągła oraz różniczkowalna na $(a-\varepsilon,a)$ oraz $(a,a+\varepsilon)$ i ponadto $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ istnieją i są skończone to f jest różniczkowalna w a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x)$$

Twierdzenie: (Twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów) W zbiorze $f([a,b])$ wartości funkcji ciągłej f na przedziale $[a,b]$ istnieje element najmniejszy $f(c)$ oraz element największy $f(d)$.

Zadanie 27.
Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = M$. Uzasadnić, że f przyjmuje maximum lub minimum w jakimś punkcie $x_0\in\mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Przypadek, gdy f jest stała jest przypadkiem trywialnym. Załóżmy więc, że f nie jest stała. Istnieje więc $x_0\in\mathbb{R}$, że $f(x_0)>M$ lub $f(x_0)<M$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $f(x_0)>M$. Skoro $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=M$, to istnieje takie $n_1\in\mathbb{R}$, $n_1>x_0$, że dla każdego $x>n_1$ zachodzi $|f(x)-M|<\varepsilon_1$ dla każdego $\varepsilon_1>0$. W szczególności $f(x_0)>f(x)$, zatem maximum nie będzie znajdować się na przedziale $[n_1,+\infty)$. Skoro $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=M$, to istnieje takie $n_2\in\mathbb{R}$, $n_2<x_0$, że dla każdego $x<n_2$ zachodzi $|f(x)-M|<\varepsilon_2$ dla każdego $\varepsilon_2>0$. W szczególności $f(x_0)>f(x)$, zatem maximum nie będzie przyjmowane na przedziale $(-\infty,n_2]$. Wobec czego na przedziale $[n_2,n_1]$ istnieje element największy i element najmniejszy, na podstawie twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów. Niech $x_1\in[n_2,n_1]$ to punkt w którym funkcja osiąga największą wartość na przedziale $[n_2,n_1]$, wówczas $f(x_1)>f(x_0)>f(x)$

dla $x \in (-\infty, n_2] \cup [n_1, +\infty)$. Mamy również $f(x_1) > f(x)$ dla $x \in [n_2, n_1]$, zatem $f(x_1)$ jest maximum funkcji f na $\mathbb{R}$.

Analogicznie dowodzimy, gdy $f(x_0) < M$.

Zadanie 28.
Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

Rozwiązanie:
Niech $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Wiemy, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = g$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ jest zbieżny na $(-e, e)$ na mocy twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda. Pozostaje zbadać jeszcze zbieżność szeregu dla $x = e$ oraz dla $x = -e$. Zbadajmy zbieżność szeregu w $x = e$. Niech b_n będzie n-tym wyrazem szeregu. Wówczas

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot e \geq \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1$$

zatem na mocy kryterium D'Alemberta, szereg ten jest rozbieżny. Zbadajmy zbieżność w $x = -e$. Mamy wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (-1)^n e^n$$

Dla dostatecznie dużych n, ciąg $\frac{n!}{n^n} e^n$ jest rosnący, zatem nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, czyli w $x = -e$ szereg jest rozbieżny. Zatem przedział zbieżności szeregu to $(-e, e)$.

Zadanie 29.
Udowodnić, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

Rozwiązanie:
Przypomnijmy, że

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln(1+1) = \ln 2$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \ldots\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Zadanie 30.
Zbadać zbieżność całek

a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

b) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$

Rozwiązanie:

a) Zbadajmy zbieżność funkcji podcałkowej $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$ w zerze i jedynce

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 1} -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

Zatem musimy zbadać zbieżność całki w zerze. Skorzystamy z kryterium porównawczego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

zatem jako, że całka $\int_0^1 \ln x$ jest zbieżna, to również całka $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ jest zbieżna.

b) Zbadajmy zbieżność funkcji podcałkowej $\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ w dwójce i nieskończoności

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} = +\infty$$

Podzielmy więc całkę na dwie całki

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx + \int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$$

i zbadajmy zbieżność każdej całki osobno. Zbadajmy zbieżność całki $\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$ w nieskończoności, korzystając z kryterium porównawczego

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}} = 1$$

zatem skoro całka $\int_5^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ jest zbieżna, to również całka $\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$ jest zbieżna. Zbadajmy teraz zbieżność całki $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$. Weźmy funkcję $\frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$ wówczas

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}}{\frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}} = 0$$

Zatem dla x-ów dostatecznie bliskich dwójce, mamy

$$\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} < \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

Zatem ze zbieżności całki $\int_2^5 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx$ wynika zbieżność całki $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$. Zatem zbieżna jest całka

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$$

Wobec czego zbieżna jest również całka

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$$

Zadanie 31.
Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^\alpha}{x^\beta+(1+x)^2}dx$ w zależności od parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Podzielmy całkę na dwie całki i zbadajmy zbieżność każdej całki osobno

$$\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^\alpha}{x^\beta+(1+x)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-x\ln x)^\alpha}{x^\beta+(1+x)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(-x\ln x)^\alpha}{x^\beta+(1+x)^2}dx$$

Zbadajmy zbieżność całki

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(-x\ln x)^\alpha}{x^\beta+(1+x)^2}dx$$

Funkcja podcałkowa jest stałego znaku i jest asymptotyczna w 1 z funkcją $(-\ln x)^\alpha$. Ta funkcja jest z kolei asymptotyczna z $(1-x)^\alpha$. Mamy

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^\alpha dx = \left| \begin{array}{c} t = 1-x \\ dt = -dx \end{array} \right| = -\int_{\frac{1}{2}}^0 t^\alpha dt$$

całka ta jest zbieżna dla $\alpha > -1$.

Zbadajmy zbieżność całki

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-x\ln x)^\alpha}{x^\beta+(1+x)^2}dx$$

Dla $\beta \geq 0$ funkcja podcałkowa jest stałego znaku i jest asymptotyczna z $(-x\ln x)^\alpha = |x\ln x|^\alpha$. Dla $\alpha \geq 0$ całka jest zbieżna, ponieważ funkcja podcałkowa jest ograniczona w zerze. Rozważmy więc $\alpha < 0$. Wówczas $|\ln x| \geq 1$ dla $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, zatem $x|\ln x| > x$. Na przedziale $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ mamy więc

$$|x\ln x|^\alpha = (x|\ln x|)^\alpha < x^\alpha$$

Zatem całka jest zbieżna wtedy, gdy zbieżna jest całka $\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha$, czyli gdy $\alpha > -1$.

Dla $\beta < 0$ funkcja podcałkowa jest stałego znaku i jest asymptotyczna z $(-\ln x)^\alpha \cdot x^{\alpha-\beta} = (x|\ln x|)^\alpha \cdot x^{-\beta}$. Dla $\alpha \geq 0$ całka jest zbieżna, ponieważ jej funkcja podcałkowa jest ograniczona w zerze. Dla $\alpha < 0$ mamy $(x|\ln x|)^{\alpha} \cdot x^{-\beta} < x^{\alpha-\beta}$, czyli całka jest zbieżna, gdy $\alpha - \beta > -1 \Leftrightarrow \alpha > \beta - 1$. Czyli w szczególności dla $\alpha > -1$ (bo $\beta < 0$).

Ostatecznie otrzymujemy, że całka jest zbieżna dla $\alpha > -1$ i β dowolnego.

Twierdzenie: (Nierówność Czybyszewa) Niech $p(x)$ będzie funkcją nieujemną, a $f(x)$ i $g(x)$ obie będą albo nierosnące, albo obie niemalejące. Wtedy zachodzi

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \cdot \int_a^b p(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)dx \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

Zadanie 32.
Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą. Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$3\int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx \geq 2\int_0^1 f(x)dx$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Czybyszewa dla $p(x) = 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ oraz $f(x) = f(x)$ na przedziale $[0,1]$ mamy

$$\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \sqrt{x}dx \leq \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx$$

Ponadto $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$ oraz $\int_0^1 dx = 1$, zatem

$$\int_0^1 f(x)dx \cdot \frac{2}{3} \leq \int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx \Leftrightarrow 3\int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx \geq 2\int_0^1 f(x)dx$$

Zadanie 33.
Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją ciągłą, a p pewną liczbą dodatnią. Zakładając, że poniższa całka jest zbieżna, wykazać, że

$$\int_0^\infty f(x^p + x^{-p})\frac{\ln x}{x}dx = 0$$

Rozwiązanie:
Podstawiamy $x = e^{\frac{u}{p}}$, gdzie u jest zmienną. Wtedy $u = p\ln x$, $dx = \frac{1}{p}e^{\frac{u}{p}}du = \frac{1}{p}xdu$, czyli $\frac{dx}{x} = \frac{1}{p}du$. Przy tym dla $x \to 0^+$ mamy $u \to -\infty$, a przy $x \to +\infty$ mamy $u \to +\infty$. Więc

$$\int_0^\infty f\left(x^p + x^{-p}\right)\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{p^2}\int_{-\infty}^\infty f(e^u + e^{-u})udu = \left|\ 2\cosh u = e^u + e^{-u}\ \right| = \frac{1}{p^2}\int_{-\infty}^\infty f(2\cosh u)udu$$

Funkcja $f(2\cosh u) \cdot u$ jest nieparzysta, zatem całka wynosi 0. Skąd

$$\int_0^\infty f(x^p + x^{-p})\frac{\ln x}{x}dx = 0$$