ANALIZA MATEMATYCZNA II.1

Marysia Nazarczuk

Ćwiczenia 1

Normy w $\mathbb{R}^n$, iloczyn skalarny

Definicja: Normą w przestrzeni X (typowo $X = \mathbb{R}^n$) nazywamy funkcję $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

1. dla każdego $\mathbf{x} \in X$ zachodzi $||\mathbf{x}|| \geq 0$, przy czym $||\mathbf{x}|| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = 0$ (dodatnia określoność)
2. dla każdego $\mathbf{x} \in X$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi $||\lambda \cdot \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$ (dodatnia jednorodność)
3. dla każdego $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ zachodzi $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (nierówność trójkąta)

Definicja: Dla $\mathbf{x} = |x_1, \ldots, x_n| \in \mathbb{R}^n$ i $p \in [1, +\infty]$, p-normą $\mathbf{x}$ nazywamy

$$||\mathbf{x}||_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{gdy } p < +\infty \qquad \text{oraz} \qquad ||\mathbf{x}||_\infty := \max_i |x_i|$$

Dla $p = 2$ mówimy zazwyczaj o normie euklidesowej.

Twierdzenie: (Nierówność Holdera) Dla $p, q > 1$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^n |x_n \cdot y_n| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Zadanie 1.
Wykaż, że norma euklidesowa $||\cdot||_2$ spełnia aksjomaty normy.

Rozwiązanie:
Chcemy pokazać, że funkcja $F(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ spełnia aksjomaty normy.

1. Mamy $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \geq 0$ przy czym $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$
2. Mamy $\sqrt{(\lambda \cdot x_1)^2 + \ldots + (\lambda \cdot x_n)^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
3. Mamy

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$2x_1x_2 + \ldots + 2x_ny_n \leq 2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności Holdera.

Zadanie 2.
Wykaż, że $||\cdot||_1$ i $||\cdot||_\infty$ są normami.

Rozwiązanie:
Musimy wykazać, że funkcja $F(x_1,\ldots,x_n)=|x_1|+\ldots+|x_n|$ spełnia aksjomaty normy

1. Mamy $|x_1|+\ldots+|x_n|\geq 0$, przy czym $|x_1|+\ldots+|x_n|=0 \Leftrightarrow x_1=\ldots=x_n=0$
2. Mamy $|\lambda\cdot x_1|+\ldots+|\lambda\cdot x_n|=|\lambda|\cdot(|x_1|+\ldots+|x_n|)$
3. Mamy $|x_1+y_1|+\ldots+|x_n+y_n|\leq|x_1|+|y_1|+\ldots+|x_n|+|y_n|=|x_1|+\ldots+|x_n|+|y_1|+\ldots+|y_n|$

Zatem $||\cdot||_1$ jest normą.

Musimy wykazać, że funkcja $F(x_1,\ldots,x_n)=\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$ spełnia aksjomaty normy

1. Mamy $\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}\geq 0$, bo moduł jest dodatni, przy czym $\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x_1|=\ldots=|x_n|=0$.
2. Mamy $\max\{|\lambda x_1|,\ldots,|\lambda x_n|\}=|\lambda|\cdot\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$
3. Mamy $\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i+y_i|\leq\max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|+|y_i|)\leq\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|+\max\limits_{1\leq i\leq n}|y_i|$

Zatem $||\cdot||_\infty$ jest normą.

Zadanie 3.
Sprawdź, czy następująca funkcja jest normą w $\mathbb{R}^n$

a) $f(x,y)=\sqrt{16x^2+y^2}$

b) $f(x,y)=\sqrt{16x^2+y^2}+|x+y|$

c) $f(x,y)=\sqrt[5]{5|x|^5+|y|^5}+|y|$

d) $f(x,y)=\sqrt[5]{|x|^5+|y|^2}$

Rozwiązanie:

a) Sprawdźmy, czy $f(x,y)=\sqrt{16x^2+y^2}$ spełnia aksjomaty normy

   1. Oczywiście $f(x,y)=\sqrt{16x^2+y^2}\geq 0$, przy czym $f(x,y)=\sqrt{16x^2+y^2}=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$ oraz $y=0$.
   2. Mamy
   $$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{16(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}=|\lambda|\sqrt{16x^2+y^2}=|\lambda|f(x,y)$$
   3. Musimy udowodnić nierówność
   $$\sqrt{16(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\leq\sqrt{16x_1^2+y_1^2}+\sqrt{16x_2^2+y_2^2}\Leftrightarrow$$
   $$16(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\leq 16x_1^2+y_1^2+16x_2^2+y_2^2+2\sqrt{16x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{16x_2^2+y_2^2}\Leftrightarrow$$
   $$32x_1x_2+2y_1y_2\leq 2\sqrt{(16x_1^2+y_1^2)(16x_2^2+y_2^2)}\Leftrightarrow$$

$$1024x_1^2x_2^2 + 128x_1x_2y_1y_2 + 4y_1^2y_2^2 \leq 1024x_1^2x_2^2 + 64x_1^2y_2^2 + 64x_2^2y_1^2 + 4y_1^2y_2^2 \Leftrightarrow$$
$$2x_1x_2y_1y_2 \leq (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

co jest prawdziwe.

Zatem funkcja jest normą.

b) Sprawdźmy, czy $f(x,y) = \sqrt{16x^2+y^2} + |x+y|$ spełnia aksjomaty normy

1. Oczywiście $f(x,y) = \sqrt{16x^2+y^2} + |x+y| \geq 0$, przy czym $f(x,y) = \sqrt{16x^2+y^2} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{16x^2+y^2} = 0$ oraz $|x+y| = 0$, czyli $x = 0$ oraz $y = 0$.
2. Mamy
$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{16(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} + |\lambda x + \lambda y| = |\lambda| \left(\sqrt{16x^2+y^2} + |x+y|\right) = |\lambda| f(x,y)$$
3. Musimy udowodnić nierówność
$$\sqrt{16(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} + |(x_1+x_2) + (y_1+y_2) \leq$$
$$\leq \sqrt{16x_1^2+y_1^2} + |x_1+x_2| + \sqrt{16x_2^2+y_2^2} + |y_1+y_2|$$
W tym celu pokażemy, że zachodzą dwie nierówności
$$\sqrt{16(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{16x_1^2+y_1^2} + \sqrt{16x_2^2+y_2^2} \Leftrightarrow$$
$$16(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 \leq 16x_1^2 + y_1^2 + 16x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{16x_1^2+y_1^2} \cdot \sqrt{16x_2^2+y_2^2} \Leftrightarrow$$
$$32x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 2\sqrt{(16x_1^2+y_1^2)(16x_2^2+y_2^2)} \Leftrightarrow$$
$$1024x_1^2x_2^2 + 128x_1x_2y_1y_2 + 4y_1^2y_2^2 \leq 1024x_1^2x_2^2 + 64x_1^2y_2^2 + 64x_2^2y_1^2 + 4y_1^2y_2^2 \Leftrightarrow$$
$$2x_1x_2y_1y_2 \leq (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$
co oczywiście jest prawdziwe, oraz
$$|(x_1+x_2) + (y_1+y_2) \leq |x_1+x_2| + |y_1+y_2|$$
co jest po prostu zwykłą nierównością trójkąta.

Zatem funkcja jest normą.

c) Sprawdźmy, czy $f(x,y) = \sqrt[5]{5|x|^5 + |y|^5} + |y|$ spełnia aksjomaty normy

1. Oczywiście $f(x,y) = \sqrt[5]{5|x|^5 + |y|^5} + |y| \geq 0$, przy czym $f(x,y) = \sqrt[5]{5|x|^5 + |y|^5} + |y| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ oraz $y = 0$.
2. Mamy
$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[5]{5|\lambda x|^5 + |\lambda y|^5} + |\lambda y| = |\lambda| \left(\sqrt[5]{5|x|^5 + |y|^5} + |y|\right) = |\lambda| f(x,y)$$

3. Musimy udowodnić nierówność
$$\sqrt[5]{5|x_1+x_2|^5+|y_1+y_2|^5}+|y_1+y_2| \leq \sqrt[5]{5|x_1|^5+|y_1|^5}+|y_1|+\sqrt[5]{5|x_2|^5+|y_2|^5}+|y_2|$$
W tym celu pokażemy, że zachodzą dwie nierówności
$$\sqrt[5]{5|x_1+x_2|^5+|y_1+y_2|^5} \leq \sqrt[5]{5|x_1|^5+|y_1|^5}+\sqrt[5]{5|x_2|^5+|y_2|^5} \Leftrightarrow$$
$$\left|\left|\left(\sqrt[5]{5}(x_1+x_2),\ y_1+y_2\right)\right|\right|_5 \leq \left|\left|\left(\sqrt[5]{5}x_1, y_1\right)\right|\right|_5+\left|\left|\left(\sqrt[5]{5}x_2, y_2\right)\right|\right|_5$$
co jest prawdziwe, oraz
$$|y_1+y_2| \leq |y_1|+|y_2|$$
co jest po prostu zwykłą nierównością trójkąta.

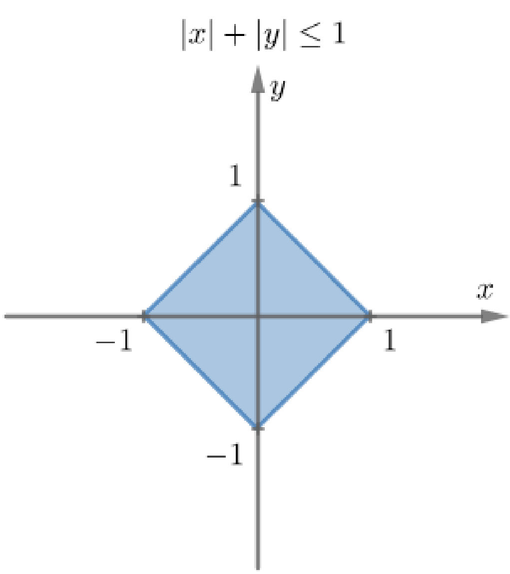
Zatem funkcja jest normą.

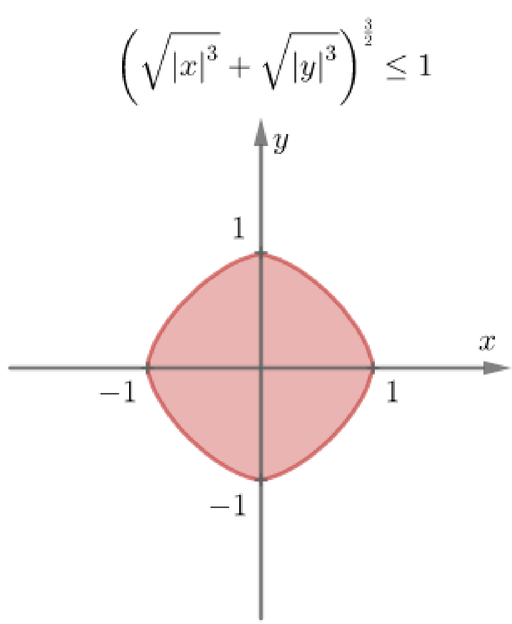
d) Nie jest to norma, ponieważ nie jest spełniony warunek dodatniej jednorodności w aksjomatycznej definicji normy. Mamy
$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[5]{|\lambda x|^5+|\lambda y|^2} \neq |\lambda|\sqrt[5]{|x|^5+|y|^2} = |\lambda| \cdot f(x,y)$$

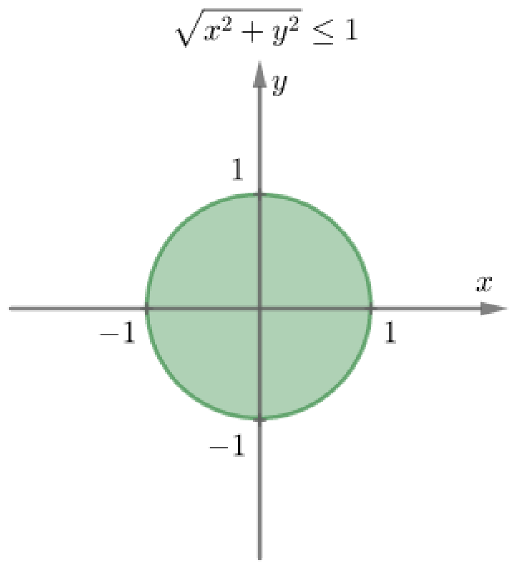
Definicja: Kulą jednostkową w normie $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór
$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$$

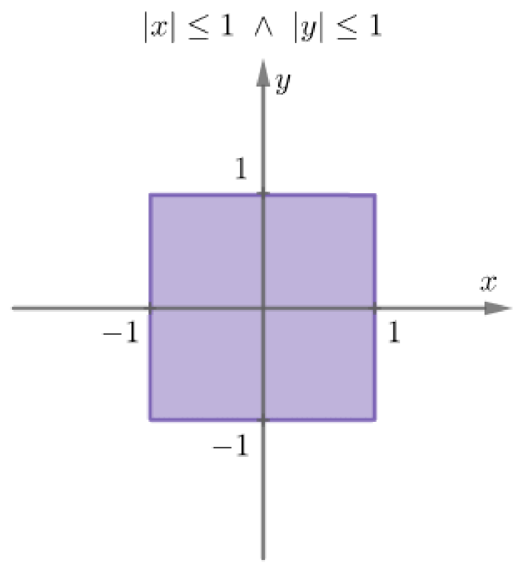
Zadanie 4.
Naszkicuj kule jednostkowe w $\mathbb{R}^2$ w normie $||\cdot||_p$ dla $p = 1, \frac{3}{2}, 2, \infty$.

Rozwiązanie:
Musimy naszkicować kule w $\mathbb{R}^2$ spełniające odpowiednio warunki







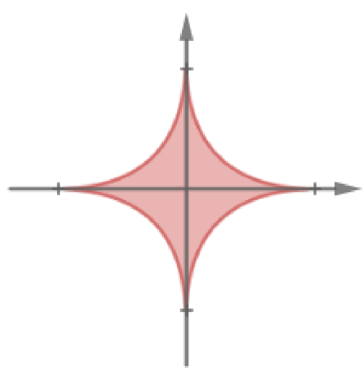


Zadanie 5.
Niech $||\cdot||$ będzie dowolną normą w $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że kula jednostkowa $B = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid ||\alpha|| \leq 1\}$ jest zbiorem wypukłym. Wywnioskuj stąd, że $||\cdot||_{\frac{1}{2}}$ nie jest normą.

Rozwiązanie:
Weźmy $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ leżące wewnątrz kuli B, czyli $||\mathbf{x}|| \leq 1$ oraz $||\mathbf{y}|| \leq 1$. Chcemy aby punkt $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda\mathbf{y})$ leżał wewnątrz kuli B, czyli aby prawdziwa była nierówność $||\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\ \mathbf{y}|| \leq 1$. Mamy

$$||\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}|| \leq |\lambda|||\mathbf{x}|| + |(1-\lambda)|||\mathbf{y}|| \leq |\lambda| + |1-\lambda| = 1$$

Zatem kula B jest zbiorem wypukłym, bo każda kombinacja wypukła punktów z kuli nadal się w niej znajduje. Funkcja $||\cdot||_{\frac{1}{2}}$ nie jest normą, ponieważ kula nie jest zbiorem wypukłym.



Zadanie 6.
Znajdź normę na $\mathbb{R}^2$, o ile istnieje, w której kula jednostkowa jest prostokątem $[-1,1]\times[-3,3]$.

Rozwiązanie:
Niech norma zadana będzie wzorem $||(x_1,x_2)|| = \max\left\{|x_1|, \frac{1}{3}|x_2|\right\}$, wówczas kula jednostkowa w danej normie jest prostokątem $[-1,1]\times[-3,3]$.

Zadanie 7.

Znajdź, o ile istnieje, normę na $\mathbb{R}^2$ w której kula jednostkowa jest trójkątem równobocznym o środku w $(0,0)$, którego jednym z wierzchołków jest $(1,0)$.

Rozwiązanie:
Nie istnieje taka norma, ponieważ gdyby istniała taka norma, to nie byłaby jednorodna (punkt $(0,1)$ należy do kuli, natomiast punkt $(0,-1)$ nie należy do kuli).

Zadanie 8.
(charakteryzacja kul w dowolnej normie) Niech $B \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem zwartym (domkniętym i ograniczonym), wypukłym, którego $\mathbf{0}$ jest punktem wewnętrznym (to znaczy $\mathbf{0}$ leży w B wraz z pewnym swoim otoczeniem) i symetrycznym względem $\mathbf{0}$ (to znaczy $\mathbf{x} \in B \Leftrightarrow -\mathbf{x} \in B$). Wykaż, że B jest kulą jednostkową dla pewnej normy.

Rozwiązanie:
Zadajmy „normę” takim wzorem, aby na krawędzi zbioru dała wartość 1, natomiast w pozostałych punktach by skalowała się z mnożeniem przez skalar. Niech

$$||\mathbf{x}|| = \inf \left\{ a \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \frac{1}{a} \cdot \mathbf{x} \in B \right\}$$

Pokażemy, że tak zadana funkcja jest normą.

1. Zauważmy, że $||-\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}|| > 0$, ponieważ zbiór B jest symetryczny względem zera. Zatem funkcja jest dodatnio określona.

2. Mamy

$$\lambda \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{a} \cdot x \in B \right\} = \left\{ \lambda a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{a} \cdot x \in B \right\} = \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{a} \cdot (\lambda x) \in B \right\}$$

   zatem $\lambda \cdot ||\mathbf{x}|| = ||\lambda \cdot \mathbf{x}||$. Zatem zachodzi dodatnia jednorodność.

3. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, wówczas $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}, \frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||} \in B$. Kombinacja wypukła tych dwóch punktów również należy do tego zbioru, ponieważ B jest zbiorem wypukłym. Zatem $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||} \in B$, bo

$$\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||} = \frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||+\mathbf{y}||} \cdot \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} + \frac{||\mathbf{y}||}{||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||}$$

   Stąd mamy $||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \in \left\{ a \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \frac{1}{a} \cdot \mathbf{x}+\mathbf{y} \in B \right\}$, czyli

$$||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \geq \inf \left\{ a \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \frac{1}{a} \cdot \mathbf{x}+\mathbf{y} \in B \right\} = ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||$$

   Czyli funkcja spełnia nierówność trójkąta.

Zatem $||\cdot||$ jest normą. Jako, że również zachodzi równość

$$B = \{\mathbf{x} \mid ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$$

to zbiór B jest kulą jednostkową dla normy $||\cdot||$.

Ćwiczenia 2

Normy w $\mathbb{R}^n$, iloczyn skalarny

Zadanie 1.
Niech $||\cdot||$ będzie normą w $\mathbb{R}^n$, zaś $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ izomorfizmem liniowym. Wykaż, że funkcja $F(\mathbf{x})=||L\mathbf{x}||$ również jest normą w $\mathbb{R}^n$.

Rozwiązanie:
Musimy sprawdzić czy funkcja spełnia aksjomaty normy

1. Oczywiście $F(\mathbf{x})\geq 0$, ponieważ norma $||\cdot||$ jest nieujemna. Skoro L to izomorfizm, to każdy wektor zerowy przechodzi na wektor zerowy, czyli $F(\mathbf{x})=0\Leftrightarrow \mathbf{x}=0$.
2. Funkcja jest liniowa, ponieważ izomorfizm jest liniowy.
3. Z liniowości L mamy $||L(\mathbf{x}+\mathbf{y})||=||L\mathbf{x}+L\mathbf{y}||$, czyli z nierówności trójkąta mamy
$$||L(\mathbf{x}+\mathbf{y})||=||L\mathbf{x}+L\mathbf{y}||\leq ||L\mathbf{x}||+||L\mathbf{y}||$$

Zatem funkcja F jest normą w $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 2.
Czy poniższe funkcje zadają normy w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$?

a) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+5y^3}$

b) $f(x,y)=\sqrt[5]{5|x|^5+2|y|^5}$

c) $f(x,y,z)=|x|+2|z|$

d) $f(x,y)=\exp(x^2+y^2)$

e) $f(x,y,z)=\sqrt[4]{x^4+y^4}+|z|$

Rozwiązanie:

a) Nie, bo dla $\mathbf{a}=(-1,0)$ mamy $f(\mathbf{a})=-1$, czyli nie jest spełniona dodatnia określoność.

b) Wektorowi (x,y) przyporządkowujemy wektor $(\sqrt[5]{5}x,\sqrt[5]{5}y)$, zatem f jest normą, bo $||\cdot||_5$ jest normą.

c) Nie, bo dla $\mathbf{c}=(0,1,0)$ mamy $f(\mathbf{c})=0$, czyli nie jest spełniona dodatnia określoność.

d) Nie, bo dla $\mathbf{d}=(0,0)$ mamy $f(\mathbf{d})=e^0=1$, czyli nie jest spełniona dodatnia określoność.

e) Dodatnia określoność i jednorodność są oczywiste. Sprawdźmy nierówność trójkąta
$$\sqrt[4]{|x_1+x_2|^4+|y_1+y_2|^4}+|z_1+z_2|\leq\sqrt[4]{|x_1|^4+|y_1|^4}+\sqrt[4]{|x_2|^4+|y_2|^4}+|z_1|+|z_2|$$
przy czym nierówności pochodzą od nierówności trójkąta dla normy $||\cdot||_4$ oraz $||\cdot||_1$.

Zadanie 3.
Wykaż, że dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność $||\mathbf{x}||_p \leq ||\mathbf{x}||_q$, gdy $p > q$.

Rozwiązanie:
Skoro $\frac{p}{q} > 1$. Niech F to $\frac{p}{q}$-norma. Wówczas dla $\mathbf{x} = (x_1^q, \ldots, x_n^q)$ mamy z nierówności trójkąta dla normy

$$F((x_1^q, \ldots, x_n^q)) = F((x_1^q, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n^q)) \leq F((x_1^q, 0, \ldots, 0)) + \ldots + F((0, \ldots, 0, x_n^q))$$

czyli po rozpisaniu mamy

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i^q|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \leq \sum_{i=1}^n \left((|x_i|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{q}{p}} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^q \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Skąd mamy tezę.

Zadanie 4.
Udowodnij, że $\lim\limits_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p = ||\mathbf{x}||_\infty$.

Rozwiązanie:
Mamy nierówności

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n} \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim\limits_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p = ||\mathbf{x}||_\infty$.

Definicja: Iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję dwuargumentową $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach

1. jest dwuliniowa, czyli $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$ oraz $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ dla każdego λ
2. jest symetryczna, czyli $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
3. jest dodatnio określona, czyli $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0$ o ile $\mathbf{x} \neq 0$

Normę pochodzącą od iloczynu skalarnego $\langle\ ,\ \rangle$ definiujemy jako $||\mathbf{x}|| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$.

Norma euklidesowa w $\mathbb{R}^n$, a więc $||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$ pochodzi od standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$. Z własności iloczynu skalarnego wynika, że każda inna norma pochodząca od pewnego iloczynu skalarnego jest postaci $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}A\mathbf{x}^T}$, gdzie $A = A^T$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Z własności takich macierzy wnioskujemy, że w pewnej bazie ortonormalnej norma taka ma postać $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}$, gdzie $\lambda_i > 0$ to (rzeczywiste i dodatnie) własności własne macierzy iloczynu skalarnego A. Stąd kula jednostkowa o takiej normie to pewna elipsoida.

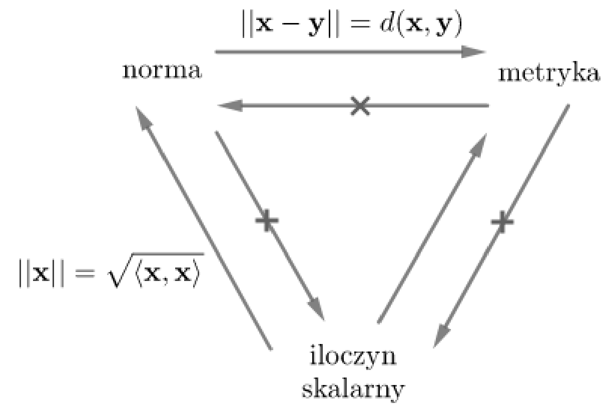
Definicja: Metryką w $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (symetria)
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (nierówność trójkąta)

Metryka jest zawsze nieujemna, ponieważ

$$0 = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 2d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Metryka, norma i iloczyn skalarny są ze sobą ściśle powiązane



Zadanie 5.
Udowodnij, że jeśli norma $||\cdot||$ pochodzi od iloczynu skalarnego, to spełnione są równości

a) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$

b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2\right)$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$$

b) Mamy

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle =$$

$$= 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

skąd po podzieleniu stronami przez 4 otrzymujemy tezę.

Zadanie 6.
Udowodnij, że jeśli norma $||\cdot||$ spełnia, dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tożsamość

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$$

to pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego.

Rozwiązanie:
Niech $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zadane będzie wzorem $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2\right)$. Sprawdźmy, czy $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest iloczynem skalarnym

1. (Dwuliniowość) Musimy udowodnić, że $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Mamy

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 = 2||\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 \Leftrightarrow ||\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 = 2||\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2$$

oraz

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 = 2||\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{x}||^2 \Leftrightarrow ||\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 = 2||\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 + 2||\mathbf{x}||^2 - ||\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2$$

zatem

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 = ||\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - \frac{1}{2}||\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 - \frac{1}{2}||\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2$$

Analogicznie

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2 = ||\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - \frac{1}{2}||\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2 - \frac{1}{2}||\mathbf{y}-\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\Bigg((||\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - \frac{1}{2}||\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 - \\
&\quad -\frac{1}{2}||\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2) - (||\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - \\
&\quad -\frac{1}{2}||\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2 - \frac{1}{2}||\mathbf{y}-\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2)\Bigg) = \\
&= \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2 + \right. \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(||\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2\right) + \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\left(||\mathbf{y}-\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2\right)\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{z}||^2\right) + \left(||\mathbf{y}+\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{y}-\mathbf{z}||^2\right) = \\
&= F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{z})
\end{aligned}$$

Dalej musimy udowodnić, że $F(\lambda\, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Dla $\lambda \in \mathbb{Z}$ równość jest oczywista i wynika z prostej indukcji. Dla $\lambda \in \mathbb{Q}$ mamy $\lambda = \frac{p}{q}$, czyli

$$F\left(\frac{p}{q}\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = p \cdot F\left(\frac{1}{q}\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = p \cdot \frac{q}{q} \cdot F\left(\frac{1}{q}\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = \frac{p}{q} \cdot F\left(q \cdot \frac{1}{q}\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = \frac{p}{q} \cdot F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

F jest funkcją ciągłą, bo F jest zdefiniowane za pomocą normy, a każda norma w $\mathbb{R}^n$ jest ciągła. Zatem równość $F(\lambda\, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zachodzi dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$. Czyli funkcja jest liniowa ze względu na pierwszą współrzędną. Analogicznie pokazujemy, że jest liniowa ze względu na drugą współrzędną.

2. (Symetryczność) Sprawdźmy czy funkcja jest symetryczna. Mamy

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - |-1|||\mathbf{y}-\mathbf{x}||^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{y}-\mathbf{x}||^2\right) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Zatem funkcja jest symetryczna.

3. (Dodatnio określoność) Sprawdźmy, czy funkcja jest dodatnio określona. Mamy

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{x}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{x}||^2\right) = ||\mathbf{x}||^2 \geq 0$$

Zatem funkcja jest dodatnio określona.

Funkcja F jest więc iloczynem skalarnym. Dodatkowo funkcja ta generuje normę $||\cdot||$.

Wniosek: Jeśli norma nie spełnia tożsamości równoległoboku, to nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

Zadanie 7.

Rozstrzygnij, dla jakich $p \in [1, +\infty]$ norma $||\cdot||_p$ pochodzi od iloczynu skalarnego.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że dla $\mathbf{x} = (1, 1)$ i $\mathbf{y} = (-1, 1)$ nie zachodzi tożsamość równoległoboku dla normy $||\cdot||_p$, $p \neq 2$. Mamy $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p = (0^p + 2^p)^{\frac{1}{p}} = 2$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_p = (2^p + 0^p)^{\frac{1}{p}} = 2$, $||\mathbf{x}||_p = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{2}$ oraz $||\mathbf{y}||_p = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{2}$, zatem dla $p \neq 2$ mamy

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = 8 \neq 4\sqrt[p]{4} = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$$

Zatem p-norma nie pochodzi od iloczynu skalarnego dla $p \neq 2$. Dla $p = 2$ pochodzi.

Zadanie 8.

Udowodnij, że kula jednostkowa w dowolnej normie na $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym, otwartym, ograniczonym oraz symetrycznym względem zera.

Zadanie 9.

Udowodnij nierówność trójkąta dla p-norm (nierówność Minkowskiego). Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$, wówczas $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p \leq ||\mathbf{x}||_p + ||\mathbf{y}||_p$.

Rozwiązanie:
Użyjemy nierówności Holdera. Z nierówności trójkąta mamy

$$\sum |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

Z nierówności Holdera mamy

$$\begin{aligned} \sum |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \quad \leq \quad & \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \\ & + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

czyli

$$\sum |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Skąd

$$\left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ćwiczenia 3

Normy w $\mathbb{R}^n$, iloczyn skalarny

Zadanie 1.

(punkty na brzegu kuli to punkty o normie równiej jeden) Rozważmy pewną normę $||\cdot||$ w $\mathbb{R}^n$ i jej kulę jednostkową $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Dla ustalonego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ rozważmy promień $\mathcal{R} = \{t \cdot \mathbf{x} \mid t > 0\}$. Pokaż, że wówczas istnieje dokładnie jeden wektor $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}$ taki, że $\mathbf{x}_0 \in \partial B$. Ponadto $||\mathbf{x}_0|| = 1$ i jeśli $\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x}_0$, to $||\mathbf{x}|| = a$.

Rozwiązanie:

Skoro $\mathcal{R}$ i B to zbiory wypukłe, to $\mathcal{R} \cap B$ to odcinek łączący punkt 0 z pewnym punktem $\mathbf{x}_0$. Norma rośnie liniowo na $\mathcal{R}$ oraz $||\mathbf{y}|| \leq 1$ dla $\mathbf{y} \in \mathcal{R} \cap B$ i $||\mathbf{y}|| > 1$ dla $y \in \mathcal{R} \setminus B$. Stąd $||\mathbf{x}_0|| = 1$ i jest to jedyny punkt na półprostej $\mathcal{R}$. Jeśli $\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x}_0$, to $||\mathbf{x}|| = ||a \cdot \mathbf{x}_0|| = a \cdot ||\mathbf{x}_0| = a$.

Zadanie 2.

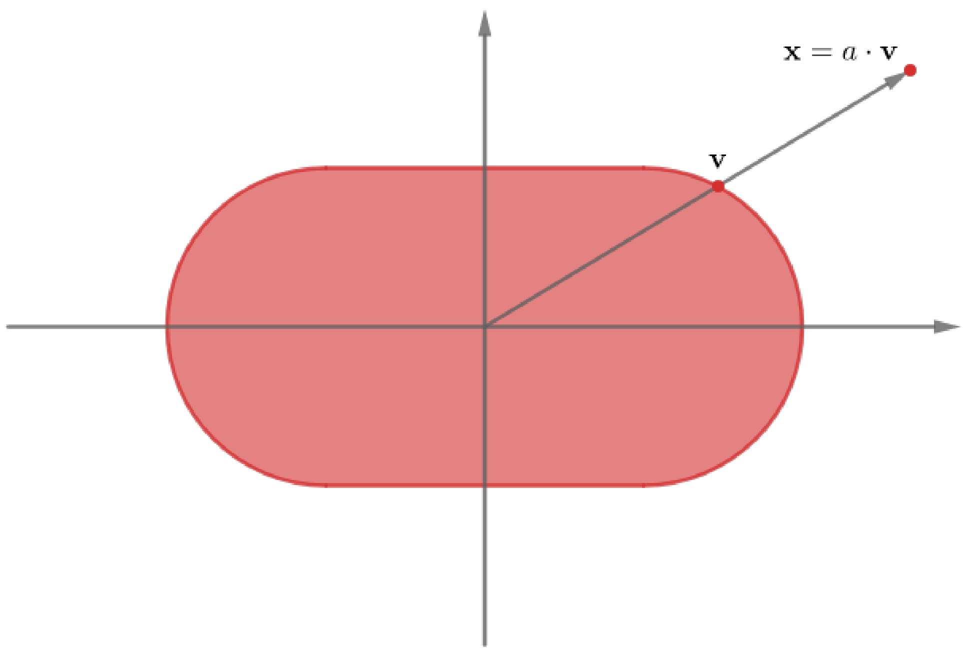
Kula jednostkowa pewnej normy $||\cdot||$ w $\mathbb{R}^2$ opisana jest następująco

$$B = [-1, 1] \times [-1, 1] \cup \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid (x + 1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Wyznacz normy wektorów $(1, 0)$, $(0, 5)$ i $(9, 3)$. Wykaż, że rozważana norma nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

Rozwiązanie:

Jeśli wektor $\mathbf{v}$ leży na brzegu B, to $||\mathbf{v}|| = 1$. Zatem jeśli przedstawimy wektor $\mathbf{x}$ w postaci $\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v} \in \partial B$, to $||\mathbf{x}|| = a$.



$$||(1, 0)|| = \frac{1}{2} \cdot ||(2, 0)|| = \frac{1}{2} \quad \text{bo} \quad (2, 0) \in \partial B$$

$$||(0, 5)|| = 5 \cdot ||(0, 1)|| = 5 \quad \text{bo} \quad (0, 1) \in \partial B$$

Aby wyznaczyć punkt $\mathbf{v}$ taki, że $(9,3) = a \cdot \mathbf{v}$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x & \text{równanie prostej wyznaczonej przez wektor } (9,3) \\ (x-1)^2 + \frac{1}{5}x^2 = 1 & \text{równanie półokręgu} \end{cases}$$

Rozwiązaniem będzie $x = 0$ lub $x = \frac{9}{5}$ (pierwszy przypadek odrzucamy), skąd

$$||(9,3)|| = 5 \cdot \left|\left|\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)\right|\right| = \quad \text{bo} \quad \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right) \in \partial B$$

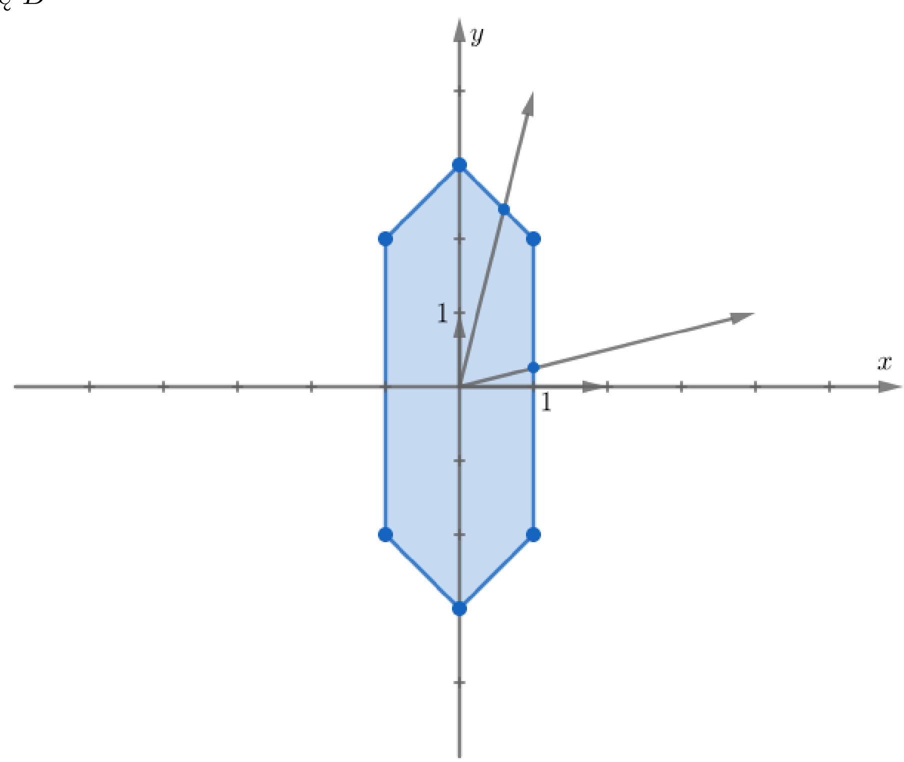
Pokażemy teraz, że norma nie pochodzi od iloczynu skalarnego. Niech $\mathbf{x} = (1,0)$ i $\mathbf{y} = (0,1)$. Wtedy $(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) = (1, \pm 1) \in \partial B$ oraz

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = 1^2 + 1^1 \neq 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2\right)$$

Nie jest więc spełniona tożsamość równoległoboku, więc norma nie może pochodzić od iloczynu skalarnego.

Zadanie 3.
Niech $|| \cdot ||$ będzie normą w $\mathbb{R}^2$, w której kula jednostkowa jest wielokątem o wierzchołkach $(1,2), (0,3), (-1,2), (-1,-2), (0,-3)$ oraz $(1,-2)$. Oblicz normy wektorów $(2,0), (0,1), (4,1)$ i $(1,4)$. Rozstrzygnij, czy rozważana norma pochodzi od iloczynu skalarnego.

Rozwiązanie:
Narysujmy kulę B



Przedstawmy każdy wektor w postaci $\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x}_0$, gdzie $\mathbf{x}_0 \in \partial B$. Mamy

$$(2,0) = 2 \cdot (1,0), \ (0,1) = \frac{1}{3} \cdot (0,3), \ (4,1) = 4 \cdot \left(1, \frac{1}{4}\right) \text{ oraz } (1,4) = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

Przy czym oczywiście $(1,0),(0,3),\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{5},\frac{12}{5}\right)\in\partial B$. Zatem

$$||(2,0)||=2\cdot||(1,0)||=2,\ ||(0,1)||=\frac{1}{3}\cdot||(0,3)||=\frac{1}{3}$$

$$||(4,1)||=4\cdot\left|\left|\left(1,\frac{1}{4}\right)\right|\right|=4 \text{ oraz } ||(1,4)||=\frac{5}{3}\cdot\left|\left|\left(\frac{3}{5},\frac{12}{5}\right)\right|\right|$$

Dla wektora $\mathbf{x}=(1,1)\in\partial B$ oraz $\mathbf{y}=(-1,2)\in\partial B$ mamy $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(0,3)\in\partial B$ oraz $\mathbf{x}-\mathbf{y}=(2,-1)=2\cdot\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, gdzie $\left(1,-\frac{1}{2}\right)\in\partial B$. Wówczas mamy

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2=1^2+2^2\neq 2\cdot 1^2+2\cdot 1^2=2||\mathbf{x}||^2+2||\mathbf{y}||^2$$

Zatem norma nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

Zadanie 4.
Niech $A\in M_n(\mathbb{R})$ będzie rzeczywistą n-wymiarową macierzą symetryczną (czyli $A=A^T$) i niech $\langle\mathbf{x},\,\mathbf{y}\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Wykaż, że

a) Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym macierzy A są ortogonalne w iloczynie $\langle\cdot,\cdot\rangle$

b) A ma tylko rzeczywiste wartości własne

c) A ma n parami ortogonalnych wektorów własnych o rzeczywistych wartościach własnych

Wniosek: Kula jednostkowa w normie pochodzącej od iloczynu skalarnego to elipsoida o osiach (kierunkach głównych) wzajemnie ortogonalnych.

Zadanie 4.
Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ zadany jest macierzą $\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$. Przez $||\cdot||$ oznaczmy normę pochodzącą od tego iloczynu, a przez $||\cdot||_2$ standardową normę euklidesową. Oblicz

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}\frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||_2}\quad\text{oraz}\quad\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}\frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||_2}$$

Rozwiązanie:
Sposób I: Norma $||\mathbf{x}||$ dla $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ dana będzie wzorem

$$||\mathbf{x}||=\sqrt{x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2}$$

Chcemy więc znaleźć supremum i infimum funkcji

$$F(x_1,x_2)=\sqrt{\frac{x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2}{x_1^2+x_2^2}}$$

Dla $x_1 = 0$ mamy $F(x_1, x_2) = \sqrt{5}$. Dla $x_2 = 0$ mamy $F(x_1, x_2) = 1$. Załóżmy więc, że $x_1 \neq 0$ oraz $x_2 \neq 0$. Wówczas

$$F(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}} = \sqrt{\frac{\frac{x_1^2}{x_2^2} + 4\frac{x_1}{x_2} + 5}{\frac{x_1^2}{x_2^2} + 1}}$$

Niech $a = \frac{x_1}{x_2}$, wówczas

$$f(a) = \sqrt{\frac{a^2 + 4a + 5}{a^2 + 1}}$$

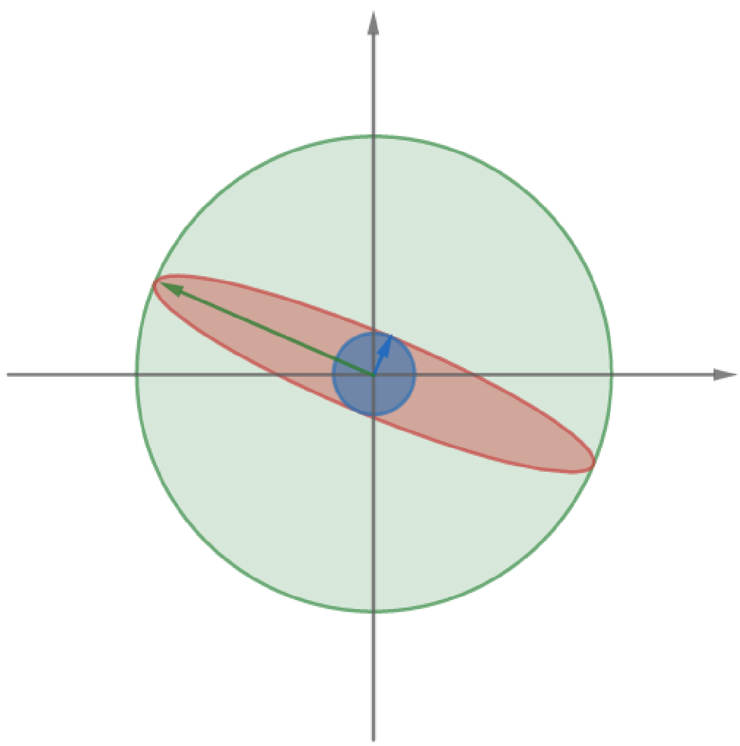
Supremum tej funkcji jest równe $a = -1 + \sqrt{2}$, natomiast infimum jest równe $a = -1 - \sqrt{2}$. Mamy więc

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||_2} = \max\left\{\sqrt{5}, F\left((-1 + \sqrt{2})x_2, x_2\right)\right\} = \max\left\{\sqrt{5}, \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

oraz

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||_2} = \max\left\{1, F\left((-1 - \sqrt{2})x_2, x_2\right)\right\} = \max\left\{1, \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Sposób II: Niech norma pochodząca od iloczynu skalarnego to $|| \cdot ||_A$. Niech $F(\mathbf{v}) = \frac{||\mathbf{v}||_A}{||\mathbf{v}||_2}$. Jeśli $F(\mathbf{v}) = a$, to również $F(5 \cdot \mathbf{v}) = a$. Przyjmijmy więc, że długość promienia $\mathbf{v}$ w normie $|| \cdot ||_A$ to 1, czyli rozważmy kulę jednostkową w normie $|| \cdot ||_A$ o promieniu 1. Szukamy na tej kuli takiego punktu $\mathbf{v}$, że norma euklidesowa tego punktu jest największa lub najmniejsza (tak naprawdę chcemy znaleźć największą lub najmniejszą wartość odwrotności).



Geometrycznie zadanie sprowadza się do znalezienia promienia r okręgu wpisanego i promienia R okręgu opisanego na elipsie (elipsa to kula jednostkowa w normie $|| \cdot ||_A$). Wówczas

$$\inf = \frac{1}{R} \leq F(\mathbf{v}) \leq \frac{1}{r} = \sup$$

Sposób III: Niech A to macierz symetryczna dodatnio określona. Istnieje wówczas baza ortonormalna $\{v_1, v_2\}$ będąca bazą własną A. Wtedy $||\mathbf{v}||_A = \lambda a^2 + \mu b^2$, gdzie $\mathbf{v} = av_1 + bv_2$ i $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \sim A$. Wówczas

$$||\mathbf{v}||_2 = \langle av_1 + bv_2, av_1 + bv_2 \rangle = a^2 \langle v_1, v_1 \rangle + 2ab\langle v_1, v_2 \rangle + b^2 \langle v_2, v_2 \rangle = a^2 + b^2$$

Wówczas

$$\frac{||\mathbf{v}||_A}{||\mathbf{v}||_2} = \sqrt{\frac{\lambda a^2 + \mu b^2}{a^2 + b^2}}$$

wartości graniczne tego wyrażenia należą to μ i λ, skąd supremum i infimum to μ lub λ. Wystarczy więc policzyć wartości własne dla macierzy A.

Ćwiczenia 4

Granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Definicja: Powiemy, że ciąg punktów $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ zbiega do $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$, gdy $||\mathbf{x}_k - \mathbf{g}|| \to 0$. Nie jest ważne jaką normę w $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy. Wynika to z twierdzenia o równoważności norm w przestrzeniach euklidesowych.

Definicja: Rozważmy odwzorowanie $F : A \to \mathbb{R}^m$ określone na zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}^n$ powiemy, że F jest ciągłe w punkcie $\mathbf{x}_0 \in A$, gdy zachodzi jeden z równoważnych warunków

1. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że nierówność $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| \leq \delta$ pociąga za sobą nierówność $||F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)|| \leq \varepsilon$ (wersja Cauchy'ego)
2. Dla każdego ciągu $\mathbf{x}_k \in A$ jeśli $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$, to $F(\mathbf{x}_k) \to F(\mathbf{x}_0)$ (wersja Heine'go)

Własności odwzorowań ciągłych: Odwzorowania ciągłe pomiędzy przestrzeniami euklidesowymi mają analogiczne własności jak funkcje ciągłe jednej zmiennej rzeczywistej o ile dana operacja ma sens w konkretnej sytuacji można je dodawać, mnożyć, dzielić (oby nie przez zero), mnożyć przez skalary i składać pozostając w klasie odwzorowań ciągłych.

Ponadto prawdziwe pozostają **Twierdzenie Weierstrassa**: funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy, oraz **Twierdzenie Heine'go-Cantora**: funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 1.
Udowodnij, że funkcje $D, M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określone jako $D(x,y) = x+y$ oraz $M(x,y) = x \cdot y$ są ciągłe.

Rozwiązanie:
Niech $(x_n, y_n) \to (a_1, a_2)$, czyli $x_n \to a_1$ oraz $y_n \to a_2$, skąd

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a_1 + a_2 = D(a_1, a_2)$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a_1 \cdot a_2 = M(a_1, a_2)$$

Zadanie 2.
Zbadaj istnienie granicy funkcji

a) $\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ w $(x,y) = (0,0)$

b) $\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ w $(x,y) = (0,0)$

c) $\frac{x^5+y^4}{x^4+y^2}$ w $(x,y) = (0,0)$

d) $\frac{xy}{x^2+y^2}$ w $(x,y) = (0,0)$

e) y^x na zbiorze $A = \{(x,y) : y > 0$ w $(x,y) = (0,0)$

f) $\frac{x^3y^2}{y^4+x^2}$ w $(x,y) = (0,0)$

Rozwiązanie:

a) Mamy $\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = x \cdot \frac{x}{|x|+|y|} + y \cdot \frac{y}{|x|+|y|}$. Pierwszy z czynników w składnikach dąży do zera, natomiast drugi jest ograniczony przez 1, zatem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0 + 0 = 0$

b) Weźmy $x_n = y_n = \frac{1}{n}$, wówczas $\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$. Dla $x_n = \frac{1}{n}$ oraz $y_n = \frac{1}{2n}$ mamy $\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \frac{\frac{1}{4n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{16n^4}} = \frac{4}{17}$, zatem granica nie istnieje

c) Mamy $\frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} = x\frac{x^4}{x^4+y^4} + y^2\frac{y^2}{x^4+y^2}$. Pierwszy z czynników w składnikach dąży do zera, natomiast drugi jest ograniczony przez 1, zatem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} = 0 + 0 = 0$

d) Weźmy $x_n = y_n = \frac{1}{n}$, wówczas $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$. Dla $x_n = \frac{2}{n}$ oraz $y_n = \frac{1}{n}$ mamy $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}$, zatem granica nie istnieje.

e) Weźmy $x_n = \frac{1}{n}$ oraz $y_n = \frac{1}{a^n}$, wówczas $y^x = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$. Biorąc różne a otrzymujemy różne granice, zatem granica wyrażenia y^x nie istnieje.

f) Mamy

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^2}{y^4+x^2}\right| = \frac{|x|^3y^2}{y^4+x^2} \leq \frac{|x|^3y^2 + y^6|x|}{y^4+x^2} = y^2|x| \cdot \frac{x^2+y^4}{y^4+x^2} = |x|y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Zatem granicą wyrażenia $\frac{x^3y^2}{y^4+x^2}$ w $(x,y) = (0,0)$ jest 0.

Zadanie 3.

Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jest następująco

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y = x^2 \text{ i } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}$$

Sprawdź, że f nie jest ciągła w $(0,0)$, mimo że istnieją granice iterowane $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$. Sprawdź, że f w obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ ma granicę.

Rozwiązanie:
Dla $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$ mamy $f(x_n, y_n) \to 1$, ale $f(0,0) = 0$. Dalej $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ oraz $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$. Wzdłuż każdej prostej, czyli dla $y = ax$ mamy $f(x, ax) = 0 \to 0$.

Zadanie 4.
Rozważmy funkcję
$$f(x,y)=\begin{cases} x+y\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$
Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ oraz $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Rozwiązanie:
Mamy
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} x=0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)= \text{ nie istnieje, ponieważ nie istnieje granica } \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \text{ ponieważ } \sin\frac{1}{x} \text{ jest ograniczony przez 1 co do modułu}$$

Zadanie 5.
Zbadaj istnienie granic $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ oraz $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, gdzie

a) $f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

b) $f(x,y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$

Rozwiązanie:

a) Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} 1+x=1$ oraz $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} y-1=-1$

b) Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, a ta granica nie istnieje. Mamy $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 1=1$

Zadanie 6.
Funkcja $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ma granicę w $(x,y)=(0,0)$. Wykaż, że jeśli granice $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} F(x,y)$ oraz $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} F(x,y)$ istnieją, to
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} F(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} F(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$$

Ćwiczenia 4

Granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1.
Zbadaj istnienie granic w $(x,y)=(0,0)$ dla funkcji

a) $\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$

b) $\frac{x^3+y^4}{x^2+y^4}$

c) $x^2\ln(x^2+2y^2)$

d) $x\ln(x^2+2y^2)$

e) $(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

f) $\frac{\ln(\cos x-y^2)}{x^2+2y^2}$

g) $\frac{xy}{|x|+y^2}$

Rozwiązanie:

c) Mamy $x^2\ln(x^2+2y^2)=(x^2+2y^2)\ln(x^2+2y^2)\cdot\frac{x^2}{x^2+2y^2}$. Wyrażenie $(x^2+2y^2)\ln(x^2+2y^2)$ dąży do zera, natomiast $\frac{x^2}{x^2+2y^2}$ jest ograniczone przez 1, zatem granicą wyrażenia $x^2\ln(x^2+2y^2)$ jest 0.

f) Mamy

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\cos x-y^2)}{x^2+2y^2} &= \frac{\ln(\cos x-y^2)}{\cos x-y^2-1}\cdot\frac{\cos x-y^2-1}{x^2+2y^2}=\\ &= \frac{\ln(\cos x-y^2)}{\cos x-y^2-1}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+2y^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)-\right.\\ &\quad\left.-\left(\frac{y^2}{x^2+2y^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)\right)=\\ &= \frac{\ln(\cos x-y^2)}{\cos x-y^2-1}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+2y^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Wyrażenie $\frac{\ln(\cos x-y^2)}{\cos x-y^2-1}$ dąży do 1, wyrażenie $\frac{\cos x-1}{x^2}$ dąży do $-\frac{1}{2}$, zatem jako że $\frac{x^2}{x^2+2y^2}$ jest ograniczone przez 1, to $\frac{x^2}{x^2+2y^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$ dąży do zera. Stąd granicą wyrażenia $\frac{\ln(\cos x-y^2)}{x^2+2y^2}$ jest $-\frac{1}{2}$.

Zadanie 2.
Zbadaj ciągłość funkcji

$$\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{gdy } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{gdy } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Zbadaj ciągłość funkcji wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$.

Rozwiązanie:
Weźmy $x_n = \frac{1}{n}$ oraz $y_n = \frac{1}{n^2}$, wówczas

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Zbadajmy teraz ciągłość funkcji wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$. Dla prostej $x=0$ mamy $f(x,y) = f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0$. Dla $y = ax$ mamy

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{x^2\cdot ax}{x^4+a^2x^2} = \frac{ax}{x^2+a^2} \overset{x\to 0}{\to} 0$$

Zatem funkcja jest ciągła wzdłuż prostych przechodzących przez $(0,0)$.

Zadanie 3.
Oblicz granicę

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x+y)^2}{x^2+y^2} &= \frac{1-\cos(x+y)^2}{(x+y)^4}\cdot\frac{(x+y)^4}{x^2+y^2} = \\ &= \frac{1-\cos(x+y)^2}{(x+y)^4}\cdot\frac{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Wyrażenie $\frac{1-\cos(x+y)^2}{(x+y)^4}$ dąży do $\frac{1}{2}$, natomiast wyrażenie $\frac{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}{x^2+y^2}$ dąży do zera (bo jest to suma wyrażeń $a\cdot\frac{b^2}{b^2+c^2}$, gdzie a dąży do zera, a $\frac{b^2}{b^2+c^2}$ jest ograniczone przez 1). Zatem granicą wyrażenia $\frac{1-\cos(x+y)^2}{x^2+y^2}$ jest 0.

Zadanie 4.
Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x+e^y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Rozwiązanie:
Przekształćmy wyrażenie

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x+e^y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\ln\frac{x+e^y}{e^{x+y}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln\frac{x+e^y}{e^{x+y}}}{\frac{x+e^y}{e^{x+y}}-1}\cdot\frac{\frac{x+e^y}{e^{x+y}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \frac{\ln\frac{x+e^y}{e^{x+y}}}{\frac{x+e^y}{e^{x+y}}-1}\cdot\left(\frac{x}{e^{x+y}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1-e^x}{e^x\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \\ &= \frac{\ln\frac{x+e^y}{e^{x+y}}}{\frac{x+e^y}{e^{x+y}}-1}\cdot\frac{1}{e^x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\frac{1}{e^y}-\frac{e^x-1}{x}\right)\end{aligned}$$

Mamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\frac{x+e^y}{e^{x+y}}}{\frac{x+e^y}{e^{x+y}}-1} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^x} = 1$$

ponadto $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ jest ograniczone przez 1, zatem jako że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^y} - \frac{e^x-1}{x} = 0 \text{ bo } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^y} = 1 \text{ oraz } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

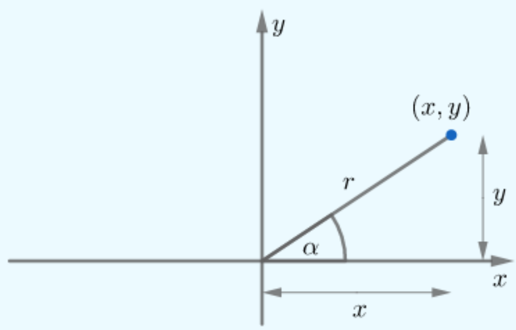
to mamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x+e^y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Definicja: (Współrzędne biegunowe) Każdy punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ możemy jednoznacznie opisać podając jego odległość od początku układu współrzędnych r oraz kąt α jaki wektor $[x,y]$ tworzy z osią OX

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

gdzie $r \in \mathbb{R}_+$ oraz $\alpha \in [0,2\pi)$. Parę (r,α) nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu (x,y). Zauważmy, że $(x,y) \to (0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r \to 0$ niezależnie od kąta α.



Zadanie 5.
Zbadaj istnienie granic

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)^2}{x^2+y^2}$

Rozwiązanie:

a) Po zlogarytmowaniu mamy

$$\begin{aligned} \left|\ln(x^2+y^2)^{x^2y^2}\right| &= \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| = \left| \begin{matrix} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{matrix} \right| = \\ &= r^4(\cos\alpha\sin\alpha)^2\left|\ln(r^2)\right| \le r^4|\ln(r^2)| \overset{r\to 0}{\to} 0 \end{aligned}$$

Skąd $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$

b) Mamy

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x+y)^2}{x^2+y^2} &= \left|\begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{array}\right| = \frac{1-\cos(r\cos\alpha + r\sin\alpha)^2}{r^2} = \\ &= \frac{1-\cos(r^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha))}{r^2} = \\ &= \frac{1-\cos(r^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha))}{r^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha)} \cdot (1+2\sin\alpha\cos\alpha)\end{aligned}$$

$2\sin\alpha\cos\alpha$ jest ograniczone co do modułu przez 3, natomiast

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(r^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha))}{r^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha)} = 0$$

zatem granicą szukanego wyrażenia będzie 0.

Ćwiczenia 5

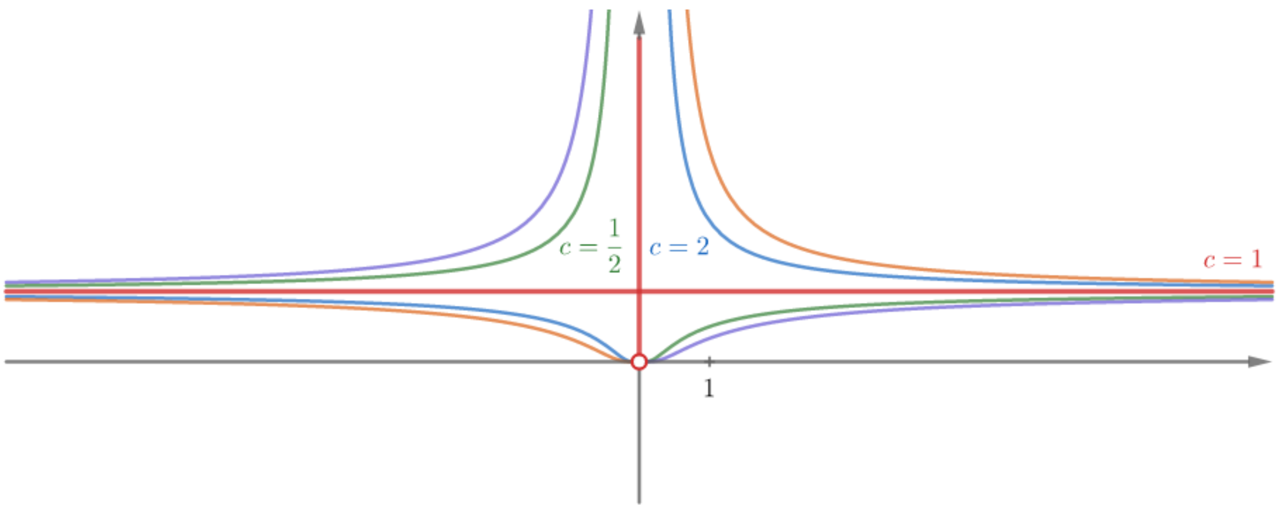
Granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Definicja: Poziomice funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ to zbiór punktów $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = c \text{ dla } c \in \mathbb{R}\}$ lub inaczej $f^{-1}(c)$.

Zadanie 1.
Funkcję $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiujemy wzorem $F(x,y) = y^x$. Naszkicuj wykres poziomicowy F i zbadaj istnienie granic dla $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} F(x,y)$$

Rozwiązanie:
Dla $c = 0$ mamy $y^x = 0$, co nie jest prawdziwe dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$, zatem nie istnieją takie punkty. Dla $c = 1$ mamy $y^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ lub $y = 1$. Dla $c = 2$ mamy $y^x = 2 \Leftrightarrow y = 2^{\frac{1}{x}}$ dla $x \neq 0$. Zatem mamy funkcję jednej zmiennej $y(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. Mamy $y'(x) \leq 0$ oraz $y''(x) > 0$ dla $x > -\frac{\log 2}{2}$. Dalej mamy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$ oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. Podobnie postępujemy dla dowolnego $c > 1$, z tym że dla $c > 2$ mamy $c^{\frac{1}{x}} > 2^{\frac{1}{x}}$, czyli krzywe będą nad niebieską krzywą, natomiast dla $c < 2$ mamy $c^{\frac{1}{x}} < 2^{\frac{1}{x}}$, zatem krzywe będą pod niebieską krzywą. Dla $c < 1$ mamy $\frac{1}{c} > 1$, zatem $c^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{c}\right)^{-\frac{1}{x}}$, więc wykres będzie odbiciem funkcji względem osi OY.



Wywnioskujmy teraz istnienie lub brak $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$ dla $a \neq 0$, bo wiemy, że dla $a = 0$ granica nie istnieje (widać to też ładnie na rysunku - zbiegając po dowolnej poziomicy do zera widzimy różne wartości). Niech $a > 0$, wówczas granica będą poziomicami coraz mniejszych wartości, zatem

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0$$

Dla $a < 0$ granica to poziomice coraz większych wartości, zatem

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = +\infty$$

Zadanie 2.
Znajdź funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla której funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$\begin{cases} \frac{\sin(x^3-y^3)e^{x+y}}{x-y} & \text{dla } x \neq y \\ g(x) & \text{dla } x = y \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą.

Rozwiązanie:
Funkcja ta jest na pewno ciągła poza punktami postaci (a, a). Zbadajmy więc granicę w punkcie (a, a)

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{\sin((x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \cdot e^{x+y} \cdot (x^2+xy+y^2) = e^{2a} \cdot 3a^2$$

Zatem aby $f(x, y)$ była ciągła, to $g(x) = e^{2x} \cdot 3x^2$.

Zadanie 3.
Zbadaj istnienie granicy funkcji $f(x, y) = \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1}$ w punktach prostej $x + y - 1 = 0$.

Rozwiązanie:
Jeśli licznik się nie zeruje, to granica na pewno nie istnieje. Interesują nas więc takie punkty, w których zeruje się licznik, a więc $y = 0$ lub $\sin(\pi x) = 0$, czyli $x \in \mathbb{Z}$. Łącząc to z warunkiem $x + y - 1 = 0$, otrzymujemy punkty postaci $(k, 1 - k)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawmy $x = k + z$ oraz $y = 1 - k + t$, wówczas $(x, y) \to (k, k - 1) \Leftrightarrow (z, t) \to (0, 0)$. Zatem granica wynosi

$$\lim_{(z,t)\to(0,0)} F(z, t) = \lim_{(z,t)\to(0,0)} \frac{(1-k+t)(-1)^k \sin(z\pi)}{z+t} = \lim_{(z,t)\to(0,0)} (1-k+t) \cdot (-1)^k \cdot \pi \cdot \frac{\sin(z\pi)}{x\pi} \cdot \frac{z}{z+t}$$

Granica tego wyrażenia nie istnieje (dla $k \neq 1$), ponieważ nie istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$. Dla $k = 1$ łatwo znaleźć kontrprzykład. Dla $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ oraz $y_n = 0$ granica wynosi 0, natomiast dla $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ oraz $y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ mamy

$$\frac{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1} = (n+1)\sin\frac{\pi}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \pi$$

Zatem również w $(1, 0)$ granica nie istnieje.

Zadanie 4.
Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \exp\left(\frac{-y}{x^2}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Zbadajmy ciągłość funkcji w punktach $(0, a)$ dla dowolnego a. Dla $a < 0$ mamy

$$f\left(\frac{1}{n}, a\right) = \frac{a}{n} e^{-an^2} \overset{n\to\infty}{\to} -\infty \quad \text{oraz} \quad f\left(0, a - \frac{1}{n}\right) = 0$$

Zatem dla $a < 0$ funkcja nie jest ciągła. Dla $a > 0$ mamy $\lim_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y) = 0$, co jest w miarę oczywiste. Zatem dla $a > 0$ funkcja jest ciągła. Dla $a = 0$ mamy

$$f\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}e^n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$$

Zatem funkcja jest ciągła wszędzie poza punktami postaci $(0, a)$, gdzie $a \leq 0$.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y} & \text{gdy } y \neq x^3 \\ 1 & \text{gdy } y = x^3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Funkcja jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x^3 = y\}$. Zbadajmy więc ciągłość dla $y = x^3$, czyli w punktach (x_0, x_0^3). W tym celu policzmy granicę funkcji w punkcie (x_0, x_0^3). Weźmy ciąg $\left(x_0 + \frac{1}{n}, x_0^3 + \frac{1}{n}\right) \to (x_0, x_0^3)$, wówczas

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}, x_0^3 + \frac{1}{n}\right) = \frac{x_0 + \frac{1}{n} - x_0^3 - \frac{1}{n}}{(x_0 + \frac{1}{n})^3 - (x_0^3 + \frac{1}{n})} = \frac{x_0 - x_0^3}{3x_0^2 \cdot \frac{1}{n} + 3x_0 \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

Jeśli $x_0 \neq x_0^3 \Leftrightarrow x_0 \notin \{0, 1, -1\}$, to mamy

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}, x_0^3 + \frac{1}{n}\right) = \pm\infty$$

zatem funkcja nie jest ciągła w puntach (x_0, x_0^3) dla $x_0 \notin \{0, 1, -1\}$. Rozważmy teraz $x_0 \in \{0, 1, -1\}$, wówczas

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}, x_0^3 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

skąd funkcja nie jest również ciągła w puntach (x_0, x_0^3) dla $x_0 \in \{0, 1, -1\}$. Zatem funkcja nie jest ciągła w żadnym punkcie (x_0, x_0^3).

Twierdzenie: Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane będzie wzorem $F = (f_1, \ldots, f_m)$, gdzie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. F jest ciągłe (różniczkowalne) w punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda ze składowych f_i jest ciągła (różniczkowalna) w a.

Zadanie 6.
Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ opisanej wzorem

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{1+z^2}, \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{gdy } (x,y,z) \neq 0 \\ (0,0) & \text{gdy } (x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Mamy $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy}{1+z^2} = 0$ oraz $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$, zatem

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$$

czyli funkcja f jest ciągła.

Definicja: (Własność Darboux) Rozważmy zbiór spójny $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i funkcje ciągłą $F : A \to \mathbb{R}$. Jeśli dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ istnieją punkty $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ takie, że $F(\mathbf{x}) < c < F(\mathbf{y})$, to istnieje $\mathbf{z} \in A$ taki, że $F(\mathbf{z}) = c$.

Zadanie 7.
Niech f będzie funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze

$$A = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid ||v||_2 = 1\} \ \cup \ \{v \in \mathbb{R}^2 \mid ||v - (2,0)||_1 \le 1\}$$

taką, że $f(-1,0) = -1$, $f(3,0) = 17$. Wykaż, że istnieje punkt $\mathbf{a} \in A$ taki, że $f(a) = 1$. Czy istnieje funkcja f o podanych własnościach taka, że taki punkt $\mathbf{a}$ jest tylko jeden?

Rozwiązanie:
Zbiór A jest spójny, zatem istnieje $\mathbf{a} \in A$ takie, że $f(\mathbf{a}) = 1$. To wynika z twierdzenia Darboux. Jeśli $f(1,0) = 1$, to wówczas taki punkt może być tylko jeden (na przykład gdy f jest monotoniczna).

Zadanie 8.
Rozważmy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieją punkty $v, w \in \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f(v) > 0 > f(w)$$

Wykaż, że f ma własność nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Rozwiązanie:
Istnieje nieskończenie wiele zbiorów spójnych do których x i w należą. Funkcja na każdym takim zbiorze jest ciągła, zatem w każdym zbiorze istnieje pewien punkt, w którym funkcja się zeruje. Wynika to z własności Darboux. Stąd f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Zadanie 9.
Podaj przykład funkcji $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, która ma dokładnie dwa punkty nieciągłości, ale w obcięciu do każdej prostej w $\mathbb{R}^3$ jest ciągła.

Rozwiązanie:
Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

wówczas wiemy, że f jest nieciągła w zerze oraz jest ciągła wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$. Funkcja ta jest również ciągła wzdłuż każdej innej prostej nieprzechodzącej przez punkt $(0,0)$. Przesuńmy tę funkcję o wektor $\overrightarrow{u} = [7,9]$, wówczas $\tilde{f} = f(x-7, y+9)$ jest nieciągła w punkcie $(7,9)$. Stąd funkcja

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \text{ lub } (x,y) = (7,9) \\ f(x,y) + \tilde{f}(x,y) & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \text{ i } (x,y) \neq (7,9) \end{cases}$$

jest nieciągła w punktach $(0,0)$ i $(7,9)$, natomiast jest ciągła wzdłuż każdej prostej.

Zadanie 10.
Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0^- \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{y \to 0} f(0,y) = f(0,0) < +\infty.$$

Wykaż, że funkcja f jest ciągła w zerze.

Rozwiązanie:
Niech

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to 0}} f(x,y) \overset{(1)}{=} \lim_{\substack{x \to 0^- \\ y \to 0}} f(x,y) \overset{(2)}{=} \lim_{y \to 0} f(0,y) \overset{(3)}{=} f(0,0) < +\infty.$$

Załóżmy, że $f(0,0) = 0$, wówczas z (1) istnieje δ_1 takie, że dla każdego $||(x,y)|| \leq \delta_1$ i $x > 0$ mamy $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$. Z (2) istnieje δ_2 takie, że dla każdego $||(x,y)|| \leq \delta_2$ i $x < 0$ mamy $|f(x,y)| < \varepsilon$. Z (3) istnieje δ_3 takie, że dla każdego $||(0,y)|| \leq \delta_3$ mamy $|f(x,y)| < \varepsilon$. Zatem biorąc $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ mamy dla każdego (x,y) takiego, że $||(x,y)|| \leq \delta_0$, nierówność $|f(x,y)| < \varepsilon$, co dowodzi ciągłości funkcji f w zerze.

Ćwiczenia 6

Pochodna funkcji wielu zmiennych

Definicja: Pochodną kierunkową funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie a w kierunku wektora v definiujemy jako

$$\partial_v f(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot v)-f(a)}{h} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a+t\cdot v)$$

Często piszemy po prostu f'_v. W szczególnym przypadku, gdy różniczkujemy w kierunku wektora bazowego e_i, mówimy o i-tej pochodnej cząstkowej

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{v_i} f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot e_i)-f(a)}{h}$$

Wprost z definicji wynika, że pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ liczymy tak jak zwykłą pochodną, czyli różniczkujemy daną funkcję po zmiennej x_i, traktując wszystkie pozostałe zmienne jako parametry.

Zadanie 1.
Oblicz pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = x\cos y$, $g(x,y) = x^y$, $h(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$ oraz $k(x,y) = |xy|$.

Rozwiązanie:
Policzmy pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = x\cos y$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin y$$

Policzmy pochodne cząstkowe funkcji $g(x,y) = x^y$. Mamy $x^y = e^{y\ln x}$, zatem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \ln x \cdot x^y$$

Policzmy pochodne cząstkowe funkcji $h(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$. Mamy

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Policzmy pochodne cząstkowe funkcji $k(x,y) = |xy|$.

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = |y| \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = |x| \cdot \frac{y}{|y|}$$

Gdy $x = 0$ lub $y = 0$, to mamy problem, ponieważ wzorek się psuje. Policzmy z definicji pochodne cząstkowe w $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,a) = \frac{\partial}{\partial x} f(0+x,a) = \frac{\partial}{\partial x}|xa| \quad \text{nie istnieje}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,a) = \frac{\partial}{\partial y} f(0,a+y) = \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \frac{\partial}{\partial x} f(a+x,0) = \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \frac{\partial}{\partial y} f(a,0+y) = \frac{\partial}{\partial y}|ya| \quad \text{nie istnieje}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} f(0+x,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0+y) = 0$$

Zadanie 2.
Wyznacz (jeśli istnieją) pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Rozwiązanie:
W punktach $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0,0)$ pochodne cząstkowe na pewno istnieją i wynoszą

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2z$$

Musimy teraz policzyć pochodne cząstkowe w zerze z definicji. Z symetrii wystarczy, że policzymy $\frac{\partial}{\partial x} f$ w zerze

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = 0$$

Zadanie 3.
Rozważmy funkcję

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y = x^2, x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}$$

Sprawdź, że funkcja F ma pochodne cząstkowe w $(0,0)$ (podobnie jak wszystkie pochodne kierunkowe), lecz mimo to nie jest ciągła w $(0,0)$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że funkcja ta nie jest ciągła w zerze. Policzmy więc jej pochodne cząstkowe. Jak patrzymy na f wzdłuż osi OX, to widzimy, że funkcja jest stała, zatem $\frac{\partial}{\partial x} f(x,0) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Podobnie jak patrzymy na f wzdłuż osi OY, to widzimy, że funkcja jest stała, zatem $\frac{\partial}{\partial y} f(0,y) = 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$. Ogólnie wzdłuż dowolnego wektora v mamy

$$d_v f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h \cdot v) - f(0,0)}{h} = 0$$

Zadanie 4.
Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z) = e^x \sin y + e^y \sin(2z) + e^z \sin(3x)$$

Zadanie 5.
Oblicz pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$.

Zadanie 6.
Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dla której w każdym punkcie istnieje pochodna kierunkowa f'_w względem pewnego niezerowego wektora w. Czy istnieje pochodna kierunkowa względem wektora $v = 2w$?

Rozwiązanie:
Mamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x - hv) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot 2w) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2 \cdot \frac{f(x + 2 \cdot hw) - f(x)}{2 \cdot h}$$

Biorąc $h' = 2h$ mamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x - hv) - f(x)}{h} = \lim_{h' \to 0} 2 \cdot \frac{f(x - h'w) - f(x)}{h'} = 2f'_w$$

Zatem ta pochodna istnieje i jest równa dwukrotności pochodnej f'_w.

Zadanie 7.
Wyznacz pochodną kierunkową względem wektora $w = [2,1]$ w punkcie $(a,b) \neq (0,0)$ dla

$$f(x,y) = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$f'_w = \lim_{h\to 0} \frac{((a+2h)^4 + (b+h)^4)^{\frac{1}{4}} - (a^4+b^4)^{\frac{1}{4}}}{h}$$

Wówczas z reguły de l'Hospitala dla $L(h) = ((a+2h)^4 + (b+h)^4)^{\frac{1}{4}} - (a^4+b^4)^{\frac{1}{4}}$ mamy

$$\begin{aligned} f'_w &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{dL}{dh}}{\frac{d}{dh}h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}\left((a+2h)^4 + (b+h)^4\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4(a+2h)^3 \cdot 2 + 4(b+h)^3)}{1} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{8(a+2h)^3 + 4(b+h)^3}{4((a+2h)^4 + (b+h)^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2a^3+b^3}{(a^4+b^4)^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Zadanie 8.
Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wyznacz pochodną kierunkową w zerze względem dowolnego wektora w.

Rozwiązanie:
Wiemy, że f nie jest ciągła w zerze. Niech $w = [\alpha, \beta]$, wówczas

$$f'_w(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\alpha, h\beta)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^3\alpha^2\beta}{h^2(\alpha^2 + h^2\beta^4)} = \beta$$

Zatem pochodna kierunkowa istnieje w zerze względem dowolnego wektora w.

Zadanie 9.
Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ w punkcie $(3,1)$ w kierunku wektora $[-1,2]$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \partial_{[-1,2]} f(3,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((3,1) + h[-1,2]) - f(3,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(3-h)^3 + (1+2h)^3} - \sqrt[3]{28}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{3} \cdot ((3-h)^3 + (1+2h)^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3(3-h)^2 \cdot (-1) + 3(1+2h)^2 \cdot 2) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3(3-h)^2 + 6(1+2h)^2}{3((3-h)^3 + (1+2h)^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{-3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2}{3 \cdot (3^1 + 1^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{7}{\sqrt[3]{28^2}} \end{aligned}$$

Zadanie 10.
Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, której obie pochodne cząstkowe istnieją i są ograniczone na $\mathbb{R}^2$. Wykaż, że f jest funkcją Lipschitzowską na $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że istnieją pochodne cząstkowe funkcji f istnieją i są ograniczone, czyli $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial y} f$ istnieją

i są ograniczone, zatem istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right| \leq M$ oraz $\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right| \leq M$. Chcemy pokazać, że funkcja f jest Lipschitzowska, czyli dla $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| \leq L \cdot ||\mathbf{p} - \mathbf{q}||$$

Niech więc $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$. Dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ istnienie $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ jest równoważne temu, że funkcja jest różniczkowalna (jako funkcja jednej zmiennej) wzdłuż dowolnej prostej równoległej do osi OX. Dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ istnienie $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ jest równoważne temu, że funkcja jest różniczkowalna (jako funkcja jednej zmiennej) wzdłuż dowolnej prostej równoległej do osi OY. Zatem funkcja $x \to f(x, q_2)$, gdzie $y = q_2$ to prosta równoległa do osi OX przechodząca przez punkt $\mathbf{q}$, jest różniczkowalna i ma ograniczoną pochodną czyli jest Lipschitzowska. Również funkcja $y \to f(p_1, y)$, gdzie $x = p_1$ to prosta równoległa do osi OY przechodząca przez punkt $\mathbf{p}$, jest różniczkowalna i ma ograniczoną pochodną czyli jest Lipschitzowska. Niech $\mathbf{r}$ to punkt przecięcia prostych $x = p_1$ i $y = q_2$, wówczas z nierówności trójkąta mamy

$$|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| = |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{q})| \leq |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{r})| + |f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{q})| \leq$$

$$\leq M \cdot ||\mathbf{p} - \mathbf{r}|| + M \cdot ||\mathbf{r} - \mathbf{q}|| = M(||\mathbf{p} - \mathbf{r}|| + ||\mathbf{r} - \mathbf{q}||) = M \cdot ||\mathbf{p} - \mathbf{q}||_1 \leq C_2 \cdot M \cdot ||\mathbf{p} - \mathbf{q}||_2$$

przy czym w ostatnich nierównościach korzystamy z równoważności norm. Stąd f jest Lipschitzowska ze stałą $C_2 \cdot M$.

Ćwiczenia 7

Pochodna funkcji wielu zmiennych

Widzimy, że istnienie pochodnych cząstkowych to kiepska definicja różniczkowalności, ponieważ funkcja może mieć wszystkie pochodne cząstkowe i kierunkowe, ale nie musi być ciągła.

Definicja: Rozważmy odwzorowanie $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Różniczka odwzorowania F w punkcie $\mathbf{a}$ to odwzorowanie liniowe $dF(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ przybliżające do wyrazów rzędu 2 odwzorowanie F w otoczeniu punktu $\mathbf{a}$, to znaczy

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{||F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - dF(\mathbf{a}) \cdot [\mathbf{h}]||}{||\mathbf{h}||} = 0$$

Przekształcenie dF jest na przykład macierzą rozmiarów $m \times n$, zaś $[h]$ macierzą rozmiaru $n \times 1$.

Własności:

- **(różniczkowalność funkcji współrzędnościowych)** z definicji wynika, że odwzorowanie $F = (f_1, \ldots, f_m)$ jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji f_a dla $a = 1, \ldots, m$ jest różniczkowalna. Analogicznie sytuacja ma miejsce w przypadku ciągłości odwzorowania wielu zmiennych.

- **(związek z pochodnymi cząstkowymi I)** jeśli różniczka funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie $\mathbf{a}$ istnieje, to istnieją też jej wszystkie pochodne cząstkowe i kierunkowe w tym punkcie. Ponadto
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})[\mathbf{e}_i] \quad \text{oraz} \quad \partial_v f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})[\mathbf{v}]$$

- **(związek z pochodnymi cząstkowymi II)** dla odwzorowania $F = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ różniczkowalnego w $\mathbf{a}$, odwzorowanie liniowe $dF(\mathbf{a})$ jest zadane przez macierz pochodnych cząstkowych
$$dF(\mathbf{a})[h_1, \ldots, h_n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \nabla f_1(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle \end{bmatrix}$$

- **(związek z pochodną jednej zmiennej)** pochodna $g'(a)$ funkcji jednej zmiennej $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie a wyznacza następującą różniczkę (odwzorowanie liniowe z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$) $dg(a) : h \mapsto g'(a)h$.

Wnioski: Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Kandydatem na pochodną badanej funkcji jest przekształcenie liniowe

$$df(\mathbf{a})[h_1 e_1 + \ldots + h_n e_n] = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \ldots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f, \mathbf{h} \rangle$$

Jeśli już mamy kandydata, to musimy sprawdzić, czy to faktycznie jest pochodna. Zasadniczo są dwa sposoby

1. Zbadać czy zachodzi równość

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})h_i}{\sqrt{h_1^2+\ldots+h_n^2}}=0$$

2. Jeśli w otoczeniu danego punktu a funkcja f ma określone wszystkie swoje pochodne cząstkowe i jeśli dodatkowo wszystkie te pochodne są ciągłe w punkcie a, to f jest różniczkowalna w a (to nie jest warunek konieczny).

Definicja: Odwzorowanie $F=(f_1,\ldots,f_k):U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, którego wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_a}{\partial x_i}$ (gdzie $a=1,\ldots,k$ i $i=1,\ldots,n$) istnieją i są ciągłe w U nazywamy odwzorowaniem klasy C^1 w U.

Zadanie 1.
Zbadać różniczkowalność w punkcie $(0,0)$ funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Zbadać różnoczkowalność powyższej funkcji w pozostałych punktach dziedziny. Czy jej pochodne cząstkowe są ciągłe w $(0,0)$?

Rozwiązanie:
Policzmy najpierw pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $(0,0)$. Policzymy je z definicji

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

Zatem kandydatem na pochodną jest przekształcenie zerowe $df(h,s)=0$. Sprawdźmy, czy to jest pochodna z definicji

$$\frac{f(h,s)-f(0,0)-df(h,s)}{\sqrt{h^2+s^2}}=\frac{hs}{\sqrt{h^2+s^2}}\sin\left(\frac{1}{h^2+s^2}\right)\overset{(h,s)\to(0,0)}{\to}0$$

A zatem funkcja jest różniczkowalna w zerze i jej pochodna w tym punkcie to przekształcenie zerowe. Sprawdźmy jeszcze ciągłość pochodnych cząstkowych w zerze. Mamy dla $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+xy\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^2\cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+xy\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^2\cdot 2y$$

Pierwszy składnik dąży do zera, natomiast drugi nie ma granicy przy $(x,y)\to(0,0)$. Zatem nie mamy w tym przypadku ciągłości pochodnych cząstkowych, mimo iż funkcja jest różniczkowalna.

Zadanie 2.
Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ w całej dziedzinie.

Rozwiązanie:
Mamy

$$f'_x = \frac{x^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}} \qquad f'_y = \frac{y^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}$$

Są to funkcje ciągłe poza prostą $y=-x$, zatem na mocy twierdzenia o warunkach wystarczających różniczkowalności, wnioskujemy że wszędzie poza prostą $y=-x$ funkcja f jest różniczkowalna. Zbadajmy różniczkowalność na prostej $y=-x$. Zacznijmy od policzenia pochodnych cząstkowych w danym punkcie $(a,-a)$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,-a)+(h,0)) - f(a,-a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(a+h)^3-a^3}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3+2ah^2+3a^2h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{1+3\frac{a}{h}+3\frac{a^2}{h^2}} = \begin{cases} 1 & \text{dla } a=0 \\ +\infty & \text{dla } a\neq 0 \end{cases}$$

Analogicznie mamy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,-a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a=0 \\ +\infty & \text{dla } a\neq 0 \end{cases}$$

Dla $a\neq 0$ funkcja nie ma skończonej pochodnej cząstkowej, zatem nie jest różniczkowalna. W $(0,0)$ pochodne cząstkowe istnieją i są równe 1. Zatem kandydatem na pochodną jest przekształcenie $df(s,t) = \langle \nabla f(0,0), [s,t]\rangle = \langle [1,1],[s,t]\rangle = s+t$. Sprawdźmy z definicji czy to jest faktycznie pochodna, a więc czy granicą poniższego wyrażenia jest zero

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{f(0+s,0+s)-f(0,0)-df(s,t)}{\sqrt{s^2+t^2}} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{s^3+t^3}-0-(s+t)}{\sqrt{s^3+t^3}}$$

Zauważmy, że dla $s=t$ mamy $\frac{\sqrt[3]{2s^3}-2s}{\sqrt{2s^2}} \neq 0$, a więc df nie jest pochodna i f nie jest różniczkowalne w zerze.

Zadanie 3.
Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Funkcja ta jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$. Policzmy więc pochodne cząstkowe w zerze.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} = 0$$

Zatem kandydatem na różniczkę w $(0,0)$ będzie $df(s,t)=0$. Sprawdźmy zatem czy funkcja jest różniczkowalna w zerze

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-df(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||}=\lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{|f(\alpha,\beta)-0-0|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=0$$

Funkcja jest różniczkowalna w zerze, więc jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 4.
Zbadaj różniczkowalność funkcji w punkcie $(0,0,0)$

$$f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+2y^3+3z^3}$$

Rozwiązanie:
Policzmy pochodne cząstkowe w $(0,0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^3}}{h}=1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{2h^3}}{h}=\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}f(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{3h^3}}{h}=1$$

Zatem kandydat na różniczkę to $df(\alpha,\beta,\gamma)=(1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3})$. Dalej dla $\mathbf{h}=(\alpha,\beta,\gamma)$ mamy

$$\frac{|f(x+\mathbf{h})-f(x)-df(\mathbf{h})|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\frac{\sqrt[3]{\alpha^3+2\beta^3+3\gamma^3}-0-(\alpha+\sqrt[3]{2}\beta+\sqrt[3]{3}\gamma)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

Dla $(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ mamy granicę

$$\frac{\sqrt[3]{6}-1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}\neq 0$$

Wskazaliśmy więc podciąg zbieżny do zera na którym granica jest różna od zera. Zatem funkcja nie jest różniczkowalna w zerze.

Zadanie 5.
Zbadać różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+xy}-1}{y} & \text{dla } x\neq y \text{ i } xy>-1\\ \frac{x}{2} & \text{dla } y=0\end{cases}$$

Rozwiązanie:
Dziedziną funkcji jest zbiór $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy>-1\}$. Policzmy pochodne cząstkowe poza prostą $y=0$.

$$f'_x=\frac{1}{2\sqrt{xy+1}}$$

$$f'_y = \frac{-xy + 2\sqrt{xy+1} - 2}{2y^2\sqrt{xy+1}}$$

Są to funkcje ciągłe dla $y \neq 0$. Dla $y = 0$ pochodne cząstkowe policzymy z definicji

$$f'_x(a,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a+h}{2} - \frac{a}{2}}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f'_y(a,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a,h) - f(a,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+ah}-1}{h} - \frac{a}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\left(1 + \frac{ah}{2} - \frac{(ah)^2}{8} + o(h^2)\right) - 2 - ah}{2h^2} = -\frac{a^2}{8} \end{aligned}$$

Zbadajmy ciągłość pochodnej cząstkowej po x-ach

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{1}{2\sqrt{xy+1}} = \frac{1}{2} = f'_x(a,0)$$

Zatem pochodna cząstkowa f'_x jest ciągła. Zbadajmy ciągłość pochodnej cząstkowej po y-ach

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(a,0)} f'_y(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{-xy + 2\sqrt{xy+1} - 2}{2y^2\sqrt{xy+1}} = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{-xy + 2\sqrt{xy+1} - 2}{2x^2y^2\sqrt{xy+1}} \cdot x^2 = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-t + 2\sqrt{t+1} - 2}{2t^2\sqrt{t+1}} \cdot a^2 = \lim_{t\to 0} \frac{-t + 2\cdot(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)) - 2}{2t^2(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2))} \cdot a^2 = \\ &= -\frac{a^2}{8} = f'_y(a,0) \end{aligned}$$

Zatem pochodne cząstkowe są ciągłe w całej dziedzinie, skąd funkcja f jest różniczkowalna.

Zadanie 6.
Wyznacz punkty różniczkowalności funkcji

$$g(x,y,z) = \begin{cases} xyz\exp(\frac{z}{x^2+y^2}) & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ćwiczenia 8

Pochodna funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1.
Zbadać różniczkowalność w dziedzinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$ funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{y} & \text{dla } y \neq 0 \text{ i } xy > -1 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Dla $y \neq 0$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+xy} \cdot y = \frac{1}{1+xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\ln(1+xy)}{y^2} + \frac{1}{y(1+xy)} \cdot x = \frac{xy - (1+xy)\ln(1+xy)}{y^2(1+xy)}$$

Są to funkcje ciągłe poza prostą $y = 0$, zatem poza tą prostą funkcja jest różniczkowalna. Na prostej $y = 0$ pochodne cząstkowe liczymy z definicji

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,0+h) - f(a,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+ah)}{h} - a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+ah) - ah}{(ah)^2} \cdot a^2 = -\frac{a^2}{2}$$

Mamy ciągłość pochodnej cząstkowej f'_x, ponieważ

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{1}{1+xy} = 1 = f'_x(a,0)$$

Zbadajmy teraz ciągłość pochodnej cząstkowej po y

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f'_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{xy - (1+xy)\ln(1+xy)}{y^2(1+xy)} = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{xy - (1+xy)\ln(1+xy)}{x^2y^2(1+xy)} \cdot x^2 =$$

$$= -\frac{a^2}{2} = f'_y(a,0)$$

przy czym korzystaliśmy tu z granicy

$$\frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} = \frac{t - (1+t)(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2(1+t)} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{t^2(1+t)} \xrightarrow{t\to 0} -\frac{1}{2}$$

Obie pochodne są ciągłe w całej dziedzinie, zatem f jest różniczkowalna w całej dziedzinie.

Zadanie 2.
Niech $f(x,y) = y^x$ będzie zdefiniowana na zbiorze $A = \{(x,y) \mid y > 0\}$. Czy w punkcie $(3,2)$ istnieje pochodna względem wektora $[4,-1]$?

Rozwiązanie:
Funkcja y^x jest różniczkowalna w punkcie $(3,2)$, zatem istnieje każda pochodna kierunkowa. Mamy

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \log y \cdot y^x & xy^{x-1} \end{bmatrix}$$

wówczas

$$f'_{[4,-1]}(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\log 2 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 32\log 2 - 12$$

Zadanie 3.
Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+|x-y|}$$

Rozwiązanie:
Sprawdzamy różniczkowalność w punktach takich, że $x = y$, ponieważ w pozostałych punktach funkcja jest różniczkowalna. Policzmy pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial y}$ w (a,a)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a,a+h) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a(a+h)}{1+h} - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah - a^2h}{h(1+h)} = a - a^2$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a,a-h) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a(a-h)}{1+h} - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-ah - a^2h}{h(1+h)} = -a - a^2$$

Zatem pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ nie istnieje w punktach takich, że $x = y$ innych niż $(0,0)$, czyli nie jest różniczkowalna w punktach $(a,a) \neq (0,0)$. Zbadajmy więc różniczkowalność w $(0,0)$. Kandydat na różniczkę to $df(\alpha,\beta) = 0$. Niech $\mathbf{h} = (\alpha,\beta) \to (0,0)$

$$\frac{|f(\mathbf{h}) - f(0) - df(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||} = \frac{\frac{\alpha\beta}{1+|\alpha-\beta|} - 0 - 0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq \frac{|\alpha\beta|}{|\alpha|} = |\beta|$$

Skoro $|\beta| \to 0$, to również

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{|f(\mathbf{h}) - f(0) - df(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||} = 0$$

Zatem funkcja jest różniczkowalna w zerze.

Zadanie 4.
Zbadaj różniczozkwalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}(e^{xy} - 1) & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Funkcja f jest różniczkowalna poza prostą $y = 0$. Sprawdźmy więc różniczkowalność na tej prostej, czyli w punktach $(a,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a,0) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,0) - f(a,0)}{x-a} = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}f(a,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(a,y)-f(a,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{ay}-ay-1}{y^2} = \\ &= \left| \, e^{ay} \overset{\text{Taylor}}{=} 1+ay+\tfrac{1}{2}(ay)^2+o(a^2y^2) \, \right| = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}a^2y^2+o(a^2y^2)}{y^2} = \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe istnieją wszędzie w punktach $(a,0)$ i kandydat na różniczkę to $[1, \frac{1}{2}a^2]$. Sprawdźmy to z definicji dla $h=(\alpha,\beta)$

$$\frac{\left| f((0,0)+h)-f(0,0)-\begin{bmatrix}1 & \frac{a^2}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\frac{1}{\beta}\left(e^{(a+\alpha)\beta}-1\right)-a-\alpha-\frac{1}{2}a^2\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} =$$

$$= \left| \, e^{(a+\alpha)\beta} \overset{\text{Taylor}}{=} 1+(a+\alpha)\beta+\tfrac{1}{2}(a+\alpha)^2\beta^2+o((a+\alpha)^2\beta^2) \, \right| =$$

Wnioski: Z powyższych rozważań wynika, że standardowa procedura badania różniczkowalności danej funkcji $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ jest następująca:

1. Liczymy gradient $\nabla f = \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$. Jeśli się da, to robimy rachunkowo, jeśli nie liczymy z definicji

2. W punktach, w których któraś pochodna cząstkowa nie istnieje nie ma różniczkowalności. W pozostałych punktach odwzorowanie liniowe $\mathbf{h}\mapsto\langle\nabla f,\mathbf{h}\rangle$ jest kandydatem na różniczkę

3. Aby sprawdzić czy faktycznie jest to różniczka mamy dwie drogi postępowania:

   (a) z definicji: możemy policzyć czy granica

   $$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})h_i}{\sqrt{h_1^2+\ldots+h_n^2}} = 0$$

   istnieje

   (b) możemy sprawdzić, czy pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są określone w otoczeniu danego punktu i ciągłe w tym punkcie. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to funkcja jest różniczkowalna. Jeśli pochodne cząstkowe nie są ciągłe, bądź nie istnieją w otoczeniu danego punktu, to musimy różniczkowalność badać dalej

Do tej pory patrzyliśmy na funkcje $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, więc teraz rozszerzamy nasze funkcje i patrzymy na funkcje $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$. Niech $F=(f_1,\dots,f_k)$ dla $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Twierdzenie: $F=(f_1,\dots,f_k)$ jest różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego i funkcja f_i jest różniczkowalna.

Definicja: Dla odwzorowania $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ różniczkowalnego w $\mathbf{a}$, odwzorowanie liniowe $dF(\mathbf{a})$ jest zadane przez macierz pochodnych cząstkowych

$$dF(\mathbf{a})[h_1, \dots, h_n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \nabla f_1(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle \end{bmatrix}$$

Macierz tej postaci nazywamy macierzą Jacobi'ego.

Zadanie 5.
Oblicz różniczkę odwzorowania walcowego $F : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$f(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

Rozwiązanie:
Niech $f_1(r, \theta, z) = r\cos\theta$, $f_2(r, \theta, z) = r\sin\theta$ i $f_3(r, \theta, z) = z$. Wówczas

$$\nabla f_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe (jako funkcje r, θ, z), zatem f_1, f_2, f_4 są różniczkowalne i stąd F jest różniczkowalne

$$M(d_{(r,\theta,z)}, f) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest to macierz Jacobiego odwzorowania f. Pochodna to przekształcenie liniowe zadane przez tę macierz.

Zadanie 6.
Oblicz różniczkę odwzorowania sferycznego $f : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$

$$f(r, \varphi, \theta) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta, \sin\varphi, r\sin\theta)$$

Rozwiązanie:
Niech $f_1((r, \varphi, \theta) = r\cos\theta\cos\varphi$, $f_2(r, \varphi, \theta) = r\cos\theta, \sin\varphi$ oraz $f_3(r, \varphi, \theta) = r\sin\theta)$, wówczas

$$M(d_{(r,\varphi,\theta)}, f) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\theta \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Jest to macierz naszej pochodnej (macierz Jacobi'ego).

Ćwiczenia 9

Pochodna funkcji wielu zmiennych

Różniczkowanie złożenia funkcji

Twierdzenie: Rozważmy odwzorowania różniczkowalne $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ i $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$. Wówczas różniczka złożenia $G(F) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ to złożenie różniczek

$$dG(F)(\mathbf{p}) = dG(F(\mathbf{p})) \circ dF(\mathbf{p})$$

Wzór ten jest uogólnieniem wzoru $g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$. W notacji macierzowej, jeśli $F = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, to

$$dF(\mathbf{p})[h_1, \dots, h_n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \nabla f_1(\mathbf{p}), \mathbf{h} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\mathbf{p}), \mathbf{h} \rangle \end{bmatrix}$$

Wobec tego macierz pochodnej złożenia F z $G = (g_1, \dots, g_s) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ jest równa iloczynowi macierzy

$$d(G(F(\mathbf{p}))) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(F(\mathbf{p})) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(F(\mathbf{p})) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(F(\mathbf{p})) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial y_1}(F(\mathbf{p})) & \frac{\partial g_s}{\partial y_2}(F(\mathbf{p})) & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial y_k}(F(\mathbf{p})) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

W powyższych wzorach współrzędne w $\mathbb{R}^n$ oznaczyliśmy przez $(x_1, \dots, x_n)$ zaś, dla rozróżnienia, współrzędne w $\mathbb{R}^k$ oznaczyliśmy przez $(y_1, \dots, y_k)$.

Zadanie 1.
Zdefiniujmy funkcję $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jako złożenie $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}^3$ oraz $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danych wzorami

$$f(x, y) = (x - y, x + y, 2\sqrt{xy}) \qquad g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + x^2)$$

czyli $F(x, y) = g(f(x, y))$. Oblicz $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$M(d_{(x,y,z)}, g) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{bmatrix}$$

oraz

$$M(d_{(x,y)}, f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \end{bmatrix}$$

Policzmy teraz pochodną złożenia

$$M(d_{(x,y)}, g(f)) = M(d_{f(x,y)}, g) \cdot M(d_{(x,y)}, f)$$

Mamy $f(x,y) = (x-y, x+y, 2\sqrt{xy})$, więc

$$M(d_{f(x,y)}, g) = M(d_{(x-y,x+y,2\sqrt{xy})}, g) = \begin{bmatrix} \frac{x-y}{(x+y)^2} & \frac{x+y}{(x+y)^2} & \frac{2\sqrt{xy}}{(x+y)^2} \end{bmatrix}$$

Skąd mamy

$$M(d_{(x,y)}, F) = \begin{bmatrix} \frac{x-y}{(x+y)^2} & \frac{x+y}{(x+y)^2} & \frac{2\sqrt{xy}}{(x+y)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x-y}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{(x+y)^2} + \frac{2y}{(x+y)^2} & -\frac{x-y}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{(x+y)^2} + \frac{2x}{(x+y)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x+2y}{((x+y)^2} & \frac{2x+2y}{(x+y)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x+y} & \frac{2}{x+y} \end{bmatrix}$$

Policzmy teraz złożenie funkcji $F(x,y) = g(f(x,y)) = g(x-y, x+y, 2\sqrt{xy}) = \ln(2(x+y)^2)$. Wówczas mamy

$$M(d_{(x,y)}, F) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x+y} & \frac{2}{x+y} \end{bmatrix}$$

czyli twierdzenie o pochodnej złożenia rzeczywiście działa.

Zadanie 2.

Oblicz różniczkę odwzorowania $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ w punkcie $(0,0,0)$ danego wzorem

$$F(x,y,z) = G(e^y + \cos x, e^{\sin z}, e^{x+y} \sin z)$$

jeśli różniczka $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ w punkcie $(2,1,0)$ zadana jest macierzą

$$dG(2,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Niech

$$H(x,y,z) = (e^y + \cos x, e^{\sin z}, e^{x+y} \sin z)$$

Mamy

$$dF(x,y,z) = dG(H(x,y,z)) \cdot dH(x,y,z)$$

Mamy $H(0,0,0) = (2,1,0)$, zatem

$$dG(H(x,y,z)) = dG(2,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalej mamy

$$dH(x,y,z) = \begin{bmatrix} -\sin x & e^y & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sin z} \cos z \\ e^{x+y} \sin z & e^{x+y} \sin z & e^{x+y} \cos z \end{bmatrix}$$

skąd

$$dH(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem mamy

$$dF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Reguła łańcuchowa

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ i $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ oraz niech współrzędne w $\mathbb{R}^n$ to $(x_1, \ldots, x_n)$ natomiast współrzędne w $\mathbb{R}^k$ to $(y_1, \ldots, y_k)$. Chcemy obliczyć na przykład wyrażenie $\frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(g \circ f)$. Mamy

$$d(g(f))(x) = dg(f(x)) \cdot df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial g}{\partial y_k} \end{bmatrix}_{f(x)} \cdot \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Zatem szukana pochodna to (bierzemy drugą kolumnę z $df(x)$)

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x)$$

bo liczymy

$$\frac{\partial}{\partial x_2} g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Zadanie 3.
Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Oblicz pochodną funkcji jednej zmiennej $F(t) = (f(t, t^2, t^3, \ldots, t^n))^2$.

Rozwiązanie:
Niech $g(t) = (t, \ldots, t^n)$ i $h(s) = s^2$. Wówczas $F(t) = h(f(g(t)))$. Mamy więc

$$F'(t) = h'(f(g(t))) \circ 2 \cdot f(g(t)) \circ f'(g(t)) \circ g'(t) =$$

$$= 2 \cdot f(t, \ldots, t^n) \circ f'(t, \ldots, t^n) \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ \vdots \\ nt^{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot f(t, \ldots, t^n) \circ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(t, \ldots, t^n)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ \vdots \\ nt^{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= 2f(t, \ldots, t^n) \circ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \ldots, t^n) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(t, \ldots, t^n) \cdot nt^{n-1} \right)$$

Zadanie 4.
Funkcja różniczkowalna $f : U \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ jest zadana wzorem $f(x, y) = g\left(\frac{x^2}{y}\right)$ dla pewnej funkcji różniczowalnej $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Wykaż, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ funkcja f spełnia tożsamość

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Rozwiązanie:
Mamy
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right) = g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\cdot\frac{2x}{y}$$
oraz
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y}\right) = g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)$$
Skąd
$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = x\cdot g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\cdot\frac{2x}{y} + 2y\cdot g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right) = 0$$

Ćwiczenia 10

Stożki styczne i geometryczne własności gradientu

Definicja: Rozważmy dowolny podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz ustalmy punkt $\mathbf{p} \in M$. Stożkiem stycznym (przestrzenią styczną) do M w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy zbiór

$$T_{\mathbf{p}}M := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{x_n \in M \setminus \{\mathbf{p}\},\ x_n \to \mathbf{p}} \ \frac{x_n - \mathbf{p}}{||x_n - \mathbf{p}||} \to \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \right\} \cup \{0\}$$

Stożek styczny opisuje infinitezymalne kierunki, w których można wyjść z punktu $\mathbf{p}$ poruszając się wewnątrz zbioru M. Zauważmy, że wprost z definicji wynika, że jeśli $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$, to również $\lambda \cdot \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (zbiory o takiej własności nazywamy stożkami).

Czasami wygodnie jest rozpatrywać stożek styczny $T_{\mathbf{p}}M$ jako zaczepiony w punkcie $\mathbf{p}$, a więc zbiór $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}M$. Będziemy mówili wówczas o afinicznym stożku stycznym.

Zadanie 1.
Wyznacz stożek styczny do zbioru $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ w punktach $(1, 1)$ i $(0, 0)$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $(x, y) \in K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \pm y$. Rozważmy dowolny ciąg $(x_n, y_n) \in K$ zbieżny do $(1, 1)$. Dla dostatecznie dużych n musi zachodzić $x_n = y_n$. Wobec tego jednostkowe wektory z $T_{(1,1)}K$ skonstruujemy jako możliwe granice ciągów

$$\frac{(x_n - 1, x_n - 1)}{\sqrt{(x_n - 1)^2 + (x_n - 1)^2}} = \operatorname{sgn}(x_n - 1) \cdot \frac{[1, 1]}{\sqrt{2}} \xrightarrow{x_n \to 1} \pm \frac{[1, 1]}{\sqrt{2}}$$

Stąd wnioskujemy, że stożek styczny $T_{(1,1)}K$ to prosta $\mathbb{R} \cdot [1, 1]$. Rozważmy dowolny ciąg $(x_n, y_n) \in K$ zbieżny do $(0, 0)$. Wówczas możliwe są obie sytuacje $x_n = y_n$ i $x_n = -y_n$. Wobec tego wektory jednostkowe w $T_{(0,0)}K$ skonstruujemy jako możliwe granice ciągów

$$\frac{(x_n, \pm x_n)}{\sqrt{(x_n)^2 + (\pm x_n)^2}} = \operatorname{sgn}(x_n) \cdot \frac{[1, \pm 1]}{\sqrt{2}} \xrightarrow{x_n \to 1} = \pm \frac{[1, \pm 1]}{\sqrt{2}}$$

Wnioskujemy stad, że stożek styczny $T_{(0,0)}K$ to suma dwóch prostych $\mathbb{R} \cdot [1, 1] \cup \mathbb{R} \cdot [-1, 1]$.

Zadanie 2.
Wyznacz stożek styczny do zbioru $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x^3\}$ w punkcie $(0, 0)$.

Rozwiązanie:
Rozważmy ciąg $(x_n, y_n) \in M$ zbieżny do $(0, 0)$. Chcemy wyznaczyć możliwe granice ciągów

$$\frac{(x_n, y_n)}{\sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2}} \xrightarrow{(x_n, y_n) \to (0,0)} [a, b]$$

W ten sposób wyznaczymy wszystkie wektory jednostkowe w stożku stycznym $T_{(0,0)}M$. Z tego że $(x_n, y_n) \in M$ wynika że $y_n^2 \leq x_n^3$, czyli

$$\begin{cases} -x_n^{\frac{3}{2}} \leq y_n \leq x_n^{\frac{3}{2}} \\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

Dla $y_n = \pm x_n^{\frac{3}{2}}$ mamy

$$\frac{(x_n, \pm x_n^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{(x_n)^2 + (\pm x_n^{\frac{3}{2}})^2}} = \frac{(1, \pm\sqrt{x_n})}{\sqrt{1+x_n}} \xrightarrow{x_n \to 0} [1,0]$$

Elementami naszej przestrzeni stycznej jest więc wektor $[1,0]$ jego dodatnie wielokrotności i zero, czyli w sumie cała półprosta

$$\{[a,0] \mid a \geq 0\}$$

Wnioski: Ogólnie jak rozwiązujemy takie zadania

1. Znajdujemy kandydata K na rozwiązanie
2. Pokazujemy, że $T_{\mathbf{p}}M \subseteq K$
3. Sprawdzamy, że $K \subseteq T_{\mathbf{p}}M$, a więc że każdy element K umiem zrealizować jako granicę odpowiedniego ciągu elementów zbioru M

Twierdzenie: Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ różniczkowalną w punkcie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ taką że $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$. Oznaczmy $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{a})$. Wówczas dla dowolnego wektora $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $||\mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}||$ zachodzi nierówność

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \leq \partial_{\mathbf{w}} f(\mathbf{a}) \leq \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$$

Innymi słowy gradient $\nabla f(\mathbf{a})$ wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w punkcie $\mathbf{a}$ a minus gradient $-\nabla f(\mathbf{a})$ kierunek najszybszego spadku funkcji w puncie $\mathbf{a}$.

Okazuje się, że (przy założeniu niezdegenerowania) gradient wyznacza stożek styczny do poziomicy funkcji. Co więcej w takiej sytuacji stożek styczny okazuje się być przestrzenią liniową.

Twierdzenie: (Gradient jest prostopadły do poziomicy) Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ różniczkowalną w punkcie $\mathbf{p}$, ciągłą w otoczeniu $\mathbf{p}$ i taką, że $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$. Wówczas przestrzeń styczna do poziomicy f przechodzącej przez $\mathbf{p}$, czyli do zbioru $M_{\mathbf{p}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p})\}$ w punkcie $\mathbf{p}$ to przestrzeń wektorów prostopadłych do gradientu $\nabla f(\mathbf{p})$

$$T_{\mathbf{p}}M_{\mathbf{p}} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{v}, \nabla f(\mathbf{p}) \rangle = 0\}$$

Jest to podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^n$ *ko*-wymiaru 1.

Zadanie 3.

Napisać równanie afinicznej prostej stycznej w punkcie $\mathbf{p} = (2, -3)$ do krzywej opisanej równaniem $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 19 = 0$.

Rozwiązanie:

Zbiór $M = \{(x,y) \mid x^4 + xy + y^2 - 19 = 0\}$ jest poziomicą funkcji $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 19$.

Policzmy przestrzeń styczną do M w punkcie $(2,-3)$. Policzmy $\nabla f(2,-3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^3 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

Skąd

$$\nabla f(2,-3) = [29,-4]$$

Funkcja f jest różniczkowalna i ciągła wszędzie $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$, czyli założenia twierdzenia są spełnione. Zatem przestrzeń styczna do M w punkcie $\mathbf{p}$ to

$$\{(x,y) \mid \langle [29,-4],[x,y] \rangle = 0\}$$

Styczna ma więc równanie

$$29x - 4y = 0$$

$T_{\mathbf{p}}M$ jest zaczepiona w zerze. Jeśli chcemy mieć przestrzeń styczną zaczepioną w $\mathbf{p}$, to musimy tę przestrzeń przesunąć $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}M$. Afiniczna prosta styczna do naszej krzywej ma zatem równanie

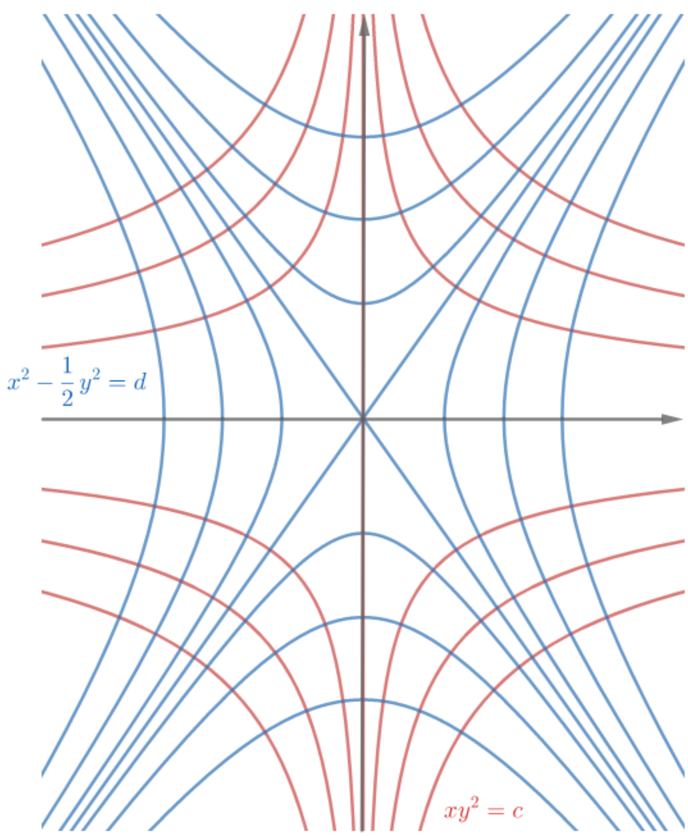
$$29x - 4y = c$$

przy czym $c = 29 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 70$, bo punkt $\mathbf{p}$ musi należeć do tej prostej. Skąd ostatecznie mamy

$$29x - 4y = 70$$

Zadanie 4.
Wykaż, że poziomice funkcji $f(x,y) = xy^2$ i $g(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ są wzajemnie ortogonalne.

Rozwiązanie:



Gradienty rozważanych funkcji wynoszą odpowiednio $\nabla f = [y^2, 2xy]$ i $\nabla g = [2x, -y]$. Łatwo więc sprawdzić, ze są one wzajemnie ortogonalne

$$\langle [y^2, 2xy], [2x, -y] \rangle = 2x \cdot y^2 + 2xy(-y) = 0$$

W punktach w których te gradienty się nie zerują (a więc $y \neq 0$ dla f i $(x, y) \neq (0, 0)$ dla g) poziomice funkcji f i g są prostopadłe do odpowiednich gradientów. Ponieważ gradienty są wzajemnie prostopadłe i są prostopadłe do poziomic, to poziomice są wzajemnie prostopadłe.

Zadanie 5.
Niech $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y + z = 1\}$. Wyznacz wszystkie punkty $(x, y, z) \in A$ w których wektor $[1, 1, 1]$ jest styczny do A. Czy istnieje prosta przechodząca przez $(0, 0, 0)$ i prostopadła do A w jakimś jego punkcie?

Rozwiązanie:
Zbiór A jest poziomicą funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y + z$, której gradient wynosi $\nabla f = [2x, 1, 1] \neq 0$, więc spełnione są założenia twierdzenia o przestrzeni stycznej do poziomicy. Przestrzeń styczna do A w punkcie (x, y, z) to przestrzeń prostopadła do gradientu, zatem wektory styczne do A to wektory prostopadłe do wektora $[2x, 1, 1]$. Jeśli wektor $[1, 1, 1]$ ma być styczny do A, to musi być spełnione równanie

$$\langle [2x, 1, 1], [1, 1, 1] \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Punkt (x, y, z) ma leżeć w zbiorze A, więc $y = -z$, zatem punkty takie że wektor $[1, 1, 1]$ jest w nich styczny do A to punkty ze zbioru

$$\{[-1, a, -a] \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Prosta łącząca punkt $(0, 0, 0)$ z pewnym punktem $(x_0, y_0, z_0) \in A$ jest prostopadła do A, czyli do $T_{(x_0,y_0,z_0)}A$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoległa do gradientu f w tym punkcie. Pytanie sprowadza się zatem do rozstrzygnięcia, czy dla jakiegoś $(x_0, y_0, z_0) \in A$ wektor $[x_0, y_0, z_0]$ jest równoległy do $\nabla f = [2x_0, 1, 1]$, czyli czy istnieje λ takie że

$$\lambda[x_0, y_0, z_0] = 2[x_0, 1, 1]$$

Kandydatem będzie $\lambda = 2$, ale wówczas punkt $(2x_0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ musi należeć do A. Mamy

$$(2x_0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 8x_0^2 + 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Punkt $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ należy do A, zatem prosta spełniająca warunki zadania istnieje i jest dokładnie jedna.

Ćwiczenia 11

Badanie ekstremów funkcji

Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : A \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Szukamy kresów albo ekstremów (lokalnych) funkcji f na zbiorze A. Jeśli f ma ekstremum lokalne w $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}A$, to w szczególności $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ (bo mamy ekstremum w obcięciu do prostej). Podejrzane punkty to te w których $\nabla f = (0, 0, 0)$ oraz te w których nie umiemy różniczkować (brzeg, „nieskończoność”).

Twierdzenie: (Zasada Fermata) Jeśli funkcja różniczkowalna $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze otwartym U ma ekstremum (lokalne) w punkcie $\mathbf{p} \in U$, to $\nabla F(\mathbf{p}) = 0$. Takie punkty nazywamy punktami krytycznymi funkcji F.

Wniosek: (Metoda policyjna znajdowania ekstremów (lokalnych)) Rozważmy funkcję $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określoną na pewnym zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Interesują nasz (lokalne) ekstrema funkcji F na A. Typujemy podejrzanych:

1. Punkty zerowania się gradientu F (punkty krytyczne)
2. Wszystkie punkty patologiczne: punkty nieróżniczkowalności F, punkty brzegowe A itp

Oczywiście to że ktoś jest podejrzany nie znaczy, że jest od razu winny. (Co więcej, nawet bycie jedynym podejrzanym tego nie oznacza. Na przykład gdy A nie jest zwarty, to nawet gdy F jest różniczkowalna w każdym punkcie $\mathrm{int}A$, może nie przyjmować swoich kresów w A) Trzeba zatem rozstrzygnąć, czy podejrzani są faktycznie winni.

Zadanie 1.
Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$ na kuli $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\nabla f = [2x + y \quad 4y + x]$$

Pochodna się zeruje gdy

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Mamy

$$f(0, 0) = 0 \leq \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = x^2 + xy + 2y^2$$

Zatem w $(0, 0)$ mamy infimum. Supremum funkcji f musi znajdować się na brzegu, bo wiemy z twierdzenia Weierstrassa, że oba kresy są przyjmowane na naszym zbiorze (bo K jest zwarty i f jest ciągła). Brzeg kuli opisany jest równaniem $x^2 + y^2 = 1$, zatem na brzegu mamy

$$f(x, y) = f(\cos\alpha, \sin\alpha) = 1 + \cos\alpha \sin\alpha + \sin^2\alpha := g(\alpha)$$

Liczymy pochodną g

$$g'(\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$$

zatem $g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 0$, czyli $\tan 2\alpha = -1$, skąd $2\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Daje nam to $\alpha \in \frac{\pi}{8}\{3, 7, 111, 15\}$. Skąd otrzymujemy $g\left(\frac{3}{8}\pi\right) = g\left(\frac{11}{8}\pi\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $g\left(\frac{7}{8}\pi\right) = g\left(\frac{15}{8}\pi\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wnioskujemy stąd, że supremum (czyli maksimum) jest równe $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadanie 2.
Znajdź kresy funkcji $f(x, y) = (3x + 2y)e^{-4x^2-y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie:
Policzmy gradient funkcji

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot e^{-4x^2-y^2} + (3x + 2y) \cdot e^{-4x^2-y^2} \cdot (-8x) = e^{-4x^2-y^2} \cdot (3 + (3x + 2y) \cdot (-8x))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot e^{-4x^2-y^2} + 2y \cdot e^{-4x^2-y^2} \cdot (-2y) + 3x \cdot e^{-4x^2-y^2} \cdot (-2y) = e^{-4x^2-y^2} \cdot (2 - 4y^2 - 6xy)$$

Znajdźmy punkty zerowania się pochodnej

$$\begin{cases} 3 + (3x + 2y) \cdot (-8x) = 0 \\ 2 + (3x + 2y) \cdot (-2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = \frac{3}{8x} \\ 3x + 2y = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3y = 8x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{8}{3}x$$

Mamy więc $3 + (3x + \frac{16}{3}x) \cdot (-8x) = 0$, czyli $9 - 72z^2 - 128x^2 = 0 \Leftrightarrow 200x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{10\sqrt{2}}$.
Stąd otrzymujemy

$$\begin{cases} x = \pm\frac{3}{10\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{8}{10\sqrt{2}} \end{cases}$$

Dalej mamy

$$f\left(\pm\frac{3}{10\sqrt{2}}, \pm\frac{8}{10\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{25}{10\sqrt{2}} := \pm c$$

Pozostaje rozstrzygnąć, czy podejrzani to na pewno supremum i infimum funkcji. Zauważmy, że

$$\lim_{||(x,y)|| \to \infty} f(x, y) = 0$$

(co łatwo uzasadnić na przykład używając współrzędnych biegunowych). Zatem dla ustalonego ε takiego, że $c > \varepsilon > 0$, istnieje R takie że dla $x^2 + y^2 \geq R$ mamy $|f(x, y)| < \varepsilon$. Kula $K = B(0, R)$ jest zwarta, zatem na mocy twierdzenia Weierstrassa $f|_K$ przyjmuje swoje kresy na K. $f|_K$ swoje kresy może przyjąć, albo w punktach zerowania się gradientu, albo na brzegu. Ale na brzegu mamy wartości mniejsze od ε co do modułu, zatem kres $f|_K$ jest przyjmowany w punktach zerowania się gradientu. Zatem $f|_K$ przyjmuje kresy w punktach

$$\left(\pm\frac{3}{10\sqrt{2}}, \pm\frac{8}{10\sqrt{2}}\right)$$

Ponieważ poza kulą f przyjmuje wartości mniejsze niż ε co do modułu, to $\sup f = \sup f|_K$ i analogicznie z infimum.

Ćwiczenia 12

Badanie ekstremów funkcji

Zadanie 1.
Niech $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0\}$. Znaleźć w zbiorze A punkt którego odległość od punktu $(2, 4, 0)$ jest najmniejsza.

Rozwiązanie:
Odległość punktu (x, y, z) od punktu $(2, 4, 0)$ wynosi

$$d((2,4,0),(x,y,z)) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + z^2} \overset{\text{bo w } A}{=} \sqrt{2(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2} = \\ = \sqrt{2((x-1)^2 + (y-2)^2 + 7)}$$

To wyrażenie osiąga wartość najmniejszą dla $x = 1$ i $y = 2$, wówczas z tego że punkt (x, y, z) ma należeć do A wynika, że $z = \pm 3$.

Przy sposobie z różniczkowaniem, można wpaść w pułapki

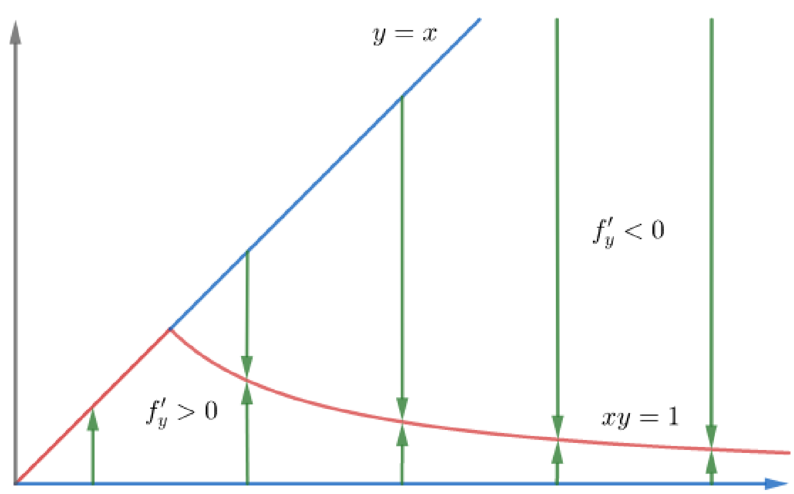
1. wszystkie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ są dopuszczalne
2. rozwiązując równanie $\nabla f = [0, 0]$ znajdziemy podejrzanych i musimy uzasadnić, że faktycznie są to punkty dające minimum.

Zadanie 2.
Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x+1} e^{-xy}$ na zbiorze $A = \{(x, y) \mid 0 \le y \le x\}$.

Rozwiązanie:
Policzmy gradient funkcji f

$$\nabla f(x, y) = e^{-xy} \begin{bmatrix} \frac{xy(2-x+xy+x^2y)}{(x+1)^2} & \frac{x^2(1-xy)}{(x+1)} \end{bmatrix}$$

Warunek $f'_y = 0$ prowadzi do $xy = 1$ lub $x = 0$. Jeśli $x = 0$, to również $f'_x = 0$. Jeśli $xy = 1$, to $x^2y + x(y-1) - 2 = x - x - 1 = -1$ i wówczas $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{-1}}{(x+1)^2} \neq 0$ - nie mamy więc punktów krytycznych. Mamy $f(0, 0) = 0$ oraz $f \ge 0$, zatem w $(0, 0)$ mamy minimum funkcji f. Pochodna f'_y mówi o zachowaniu się $f(x, y)$ przy ustalonym x.



Zauważmy, że f'_y jest dodatnia dla $xy < 1$ i ujemna dla $xy > 1$. Wobec tego, dla ustalonego x_0 funkcja $y \mapsto f(x_0, y)$ rośnie o ile $u < \frac{1}{x_0}$ i maleje gdy $y > \frac{1}{x_0}$. Stąd kres górny jest przyjmowany na zbiorze

$$B := \{(x,x) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid xy = 1 \text{ i } x \geq 1\} \quad \text{(czerwona krzywa)}$$

Analogicznie, kres dolny jest przyjmowany na zbiorze

$$\{(x,0) \mid x > 0\} \cup \{(x,x) \mid x > 1\} \quad \text{(niebieska krzywa)}$$

Zatem znalezienie kresu górnego sprowadza się do znalezienia kresu na zbiorze B. Mamy

$$f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+1} \cdot e^{-1} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{1}{r}$$

oraz

$$f(a,a) = \frac{a^3}{a+1} e^{-a^2}$$

Możemy policzyć pochodną tej funkcji i zauważyć, że jest rosnąca dla $a \in [0,1]$, zatem kres górny $f(a,a)$ to $f(1,1) = \frac{1}{2e}$. Stąd supremum funkcji jest równe $\frac{1}{e}$.

Zadanie 3.
Pokazać, że funkcja $f(x,y) = (x - y^2)(3x - y^2)$ po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ ma minimum lokalne w $(0,0)$. Czy f ma minimum lokalne w $(0,0)$?

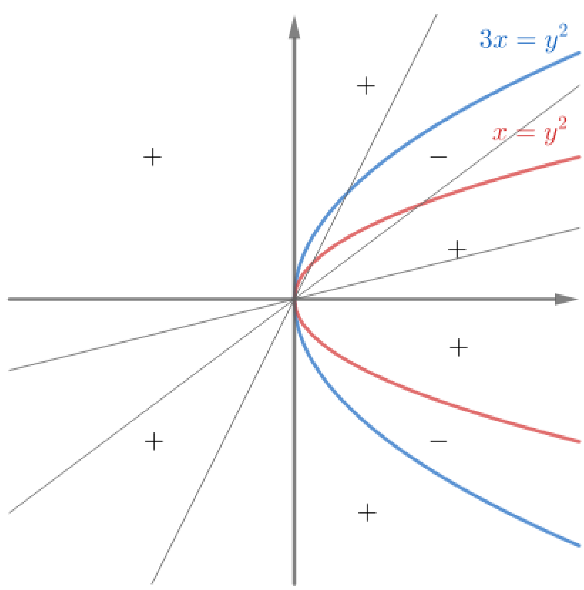
Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$f\left(\frac{2}{3}y^2, y\right) = \frac{1}{3}y^4 < f(0,0) = 0$$

Ponieważ nierówność jest prawdziwa dla dowolnego y, to f nie ma minimum lokalnego w zerze. Dalej wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ mamy

$$f(x, ax) = (x - a^2x^2)(3x - a^2x^2) = 3x^2 - 4a^2x^3 + a^4x^4 := g(x)$$

Stąd $g'(0) = 0$ i $g''(0) = 6$, więc w zerze mamy minimum lokalne. Należy jeszcze sprawdzić prostą $x = 0$, na której mamy $f(0,y) = y^4$ - ta funkcja również ma minimum w zerze.



Funkcja f w obszarze oznaczonym $+$ jest dodatnia, natomiast w obszarze oznaczonym $-$ jest ujemna. Każda prosta przechodząca przez $(0,0)$, w okolicach zera, znajduje się w obszarze $+$, zatem w zerze ma minimum lokalne.

Zadanie 4.
Oblicz kresy funkcji $f(x,y) = \frac{x\ln(1+y)}{2x^2+y^2}$ na zbiorze $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y \leq 1\}$.

Ćwiczenia 13

Wzór Taylora i ekstrema lokalne

Rozważmy odwzorowanie różniczkowalne $f : U \to \mathbb{R}^m$ określone na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Jego pochodna w ustalonym punkcie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ to odwzorowanie liniowe $d_{\mathbf{x}}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a więc $d_{\mathbf{x}}f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, gdzie symbolem $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ oznaczamy przestrzeń odwzorowań liniowych między przestrzeniami $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Możemy zatem traktować przyporządkowanie $U \ni \mathbf{x} \mapsto d_{\mathbf{x}}f$ jako odwzorowanie o wartościach w $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$df : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Ponieważ $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest sama przestrzenią liniową (izomorficzną z $\mathbb{R}^{n \cdot m}$), możemy pytać się o ciągłość i różniczkowalność df. Pochodna $d^2_{\mathbf{x}}f := dx(df)$ (druga pochodna f w punkcie $\mathbf{x}$) będzie odwzorowaniem liniowym

$$d^2_{\mathbf{x}}f : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \qquad \text{a więc} \qquad d^2_{\mathbf{x}}f \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, R^m))$$

Dalej możemy rozważyć odwzorowanie

$$d^2 f : U \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, R^m)), \qquad \mathbf{x} \mapsto d^2_{\mathbf{x}}f$$

które można próbować różniczkować kolejny raz w podobny sposób otrzymując wyrażenie $d^3_{\mathbf{x}}f \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, R^m)))$ itd.

Jak widać, sprawy zaczynają się mocno komplikować. Na szczęście możemy interpretować przestrzeń $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, R^m))$ jako przestrzeń odwzorowań 2-liniowych z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i w związku z tym traktować 2-pochodną w punkcie $\mathbf{x}$ jako odwzorowanie 2-liniowe

$$d^2_{\mathbf{x}}f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Analogicznie kolejne pochodne f w $\mathbf{x} \in U$ będą odwzorowaniami wieloliniowymi z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$d^s_{\mathbf{x}}f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{s} \to \mathbb{R}^m$$

W praktyce wyższe pochodne funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ łatwo wyrazić przez kolejne pochodne cząstkowe

$$d_{\mathbf{x}}f[\mathbf{h}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})h_i$$

$$d^2_{\mathbf{x}}f[\mathbf{h}, \mathbf{h}] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})h_i h_j$$

$$d^3_{\mathbf{x}}f[\mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}] = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x})h_i h_j h_k$$

gdzie $\mathbf{h} = [h_1, \ldots, h_n] \in \mathbb{R}^n$ oznacza dowolny wektor.

Definicja: Odwzorowanie $f : U \to \mathbb{R}^m$ określone na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$, które jest k-krotnie różniczkowalne w punktach U i dodatkowo jego k-ta pochodna $d^k f$ jest funkcją ciągłą, nazywamy odwzorowaniem klasy X^k. Przestrzeń wszystkich takich odwzorowań oznaczamy symbolem $C^k(U, \mathbb{R}^m)$.

W praktyce odwzorowanie $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^s$ jest klasy C^k gdy każda z funkcji współrzędnościowych f_j dla $j = 1, \ldots, m$ ma określone wszystkie pochodne cząstkowe do k-tego rzędu, a więc $\frac{\partial^s f_j}{\partial x_{i1} \ldots \partial x_{is}}(\mathbf{x})$, gdzie $s \le k$ i pochodne te są ciągłymi funkcjami $\mathbf{x} \in U$.

Twierdzenie: (Schwarza) W przypadku funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^2 (to założenie można osłabić) okazuje się, że wartości drugich pochodnych cząstkowych nie zależą od kolejności w jakiej wykonujemy różniczkowanie, to znaczy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{dla dowolnych } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Twierdzenie: (Wzór Taylora) Rozważmy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ klasy C^k określoną na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Wówczas w otoczeniu punktu $\mathbf{x}_0 \in U$ możemy przybliżyć f następującym wzorem Taylora k-tego rzędu

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + d_{\mathbf{x}_0} f[\mathbf{h}] + \frac{1}{2!} d^2_{\mathbf{x}_0} f[\mathbf{h}, \mathbf{h}] + \ldots + \frac{1}{s!} d^k_{\mathbf{x}_0} f[\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}] + o(||\mathbf{h}||^k)$$

W powyższym wzorze $d^s_{\mathbf{x}_0} f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{s} \to \mathbb{R}$ oznacza s-tą pochodną f w x_0 rozumianą jako odwzorowanie s-liniowe z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$.

Z praktycznego punktu widzenia wygodnie jest zapisać powyższy wzór przy pomocy pochodnych cząstkowych

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \quad &= \quad f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i_1} \frac{\partial f}{\partial x_{i1}}(\mathbf{x}_0) h_{i_1} + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\mathbf{x}_0) h_{i_1} h_{i_2} + \ldots + \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i1} \ldots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) h_{i_1} \ldots h_{i_k} + o(||\mathbf{h}||^k) \end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe pełnią w powyższym wzorze rolę współczynników wielomianowego przybliżenia funkcji $\mathbf{h} \mapsto h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$.

Na analizie I za pomocą wyższych pochodnych umieliśmy badać lokalne ekstrema funkcji. Podobnie jest dla funkcji wielu zmiennych. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^2 i niech $\nabla f(x_0) = [0, \ldots, 0]$. Wówczas

1. jeśli $d_{\mathbf{x}_0} f[\mathbf{h}, \mathbf{h}] > 0$ dla $\mathbf{h} > 0$ to wtedy f ma w $\mathbf{x}_0$ minimum lokalne

2. jeśli f ma w $\mathbf{x}_0$ minimum lokalne, to $d^2 f[\mathbf{h}, \mathbf{h}] \ge 0$ dla dowolnego $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

Badając rozwinięcie Taylora drugiego rzędu otrzymamy proste kryterium badania ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych.

Twierdzenie: Rozważmy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ klasy C^2 określoną na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Niech $\mathbf{p} \in U$ będzie jej punktem krytyczny (to znaczy $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$). Macierzą Hese'go f w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy macierz kwadratową symetryczną (twierdzenie Schwarza) złożoną z drugich pochodnych cząstkowych f w $\mathbf{p}$, to znaczy

$$H(f)(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) \right)_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Jeśli macierz $H(f)(\mathbf{p})$ jest

1. dodatnio określona, $H(f)(\mathbf{p}) > 0$, to f ma w $\mathbf{p}$ minimum lokalne
2. ujemnie określona, $H(f)(\mathbf{p}) < 0$, to f ma w $\mathbf{p}$ maksimum lokalne
3. nieokreślona, to f nie ma w $\mathbf{p}$ ekstremum lokalnego
4. w przypadku pół dodatniej określoności $H(f)(\mathbf{p}) \geq 0$ (odpowiednio pół ujemnej określoności $H(f)(\mathbf{p}) \leq 0$) nie możemy wykluczyć istnienia lokalnego minimum (odpowiednio maksimum), ale musimy taki przypadek dokładniej zbadać.

Przypomnijmy, że określoność macierzy kwadratowej i symetrycznej A możemy badać przy użyciu kryterium Sylvestera badając znak kolejnych minorów głównych $A_1, \ldots, A_n$

Twierdzenie: (Kryterium Sylvestera) Niech $A_1, \ldots, A_n$ to minory główne macierzy A, wówczas

1. jeśli $\det A_1 > 0$, $\det A_2 > 0$, ..., $\det A_n > 0$ to A jest dodatnio określona
2. jeśli $(-1) \det A_1 > 0$, $(-1)^2 \det A_2 > 0$, ..., $(-1)^n \det A_n > 0$ to A jest ujemnie określona
3. jeśli wyznacznik dowolnego minora głównego macierzy A jest nieujemny, to A jest pół dodatnio określona
4. jeśli wyznacznik dowolnego minora głównego macierzy $-A$ jest nieujemny, to A jest pół ujemnie określona
5. jeśli nie zachodzi żadne z powyższych, to A jest nieokreślona

Zadanie 1.
Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich ma ona lokalne minima, maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum.

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y^4$

b) $f(x,y,z) = 3xy = xz + yz - 2x^3$

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

d) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

e) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

f) $f(x,y,z) = xy^2z^3(6 - x - 2y - 3z)$

Rozwiązanie:

a) Różniczka funkcji f wynosi

$$\nabla f(x,y) = [2x + 3y^2, \quad 6xy + 4y^3]$$

zatem równanie na punkty krytyczne to

$$\begin{cases} 2x + 3y^2 = 0 \\ 6xy + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Skąd łatwo wyliczyć, że $(x,y) = (0,0)$. Macierz drugiej pochodnej wynosi

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 6y \\ 6y & 12y^2 \end{bmatrix}$$

zatem

$$H(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz pół dodatnio określona, zatem nie możemy wykluczyć istnienia minimum lokalnego. Mamy

$$f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y^4 = \left(x + \frac{3}{2}y^2\right)^2 - \frac{5}{4}y^4$$

W okolicach zera funkcja będzie przyjmowała zarówno wartości dodatnie jak i ujemne, zatem nie mamy ekstremum lokalnego.

b) Różniczka funkcji f wynosi

$$\nabla f(x,y,z) = [3y + z - 6x^2, \quad 3x + z, \quad x + y]$$

zatem równanie na punkty krytyczne to

$$\begin{cases} 3y + z - 6x^2 = 0 \\ 3x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Skąd łatwo wyliczyć, że $(x,y,z) = (0,0,0)$ lub $(x,y,z) = (-1,1,3)$. Macierz drugiej pochodnej wynosi

$$H(f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} -12x & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zatem

$$H(f)(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad H(f)(-1,1,3) = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

W punkcie $(0,0,0)$ wyznaczniki kolejnych minorów głównych są równe odpowiednio $0, -9, 6$, natomiast w punkcie $(-1,1,3)$ są równe $12, -9, -6$. Zatem w każdym z tych przypadków macierz jest nieokreślona, więc nie mamy ekstremum lokalnego w żadnym punkcie krytycznym.

c) Różniczka funkcji f wynosi

$$\nabla f(x,y,z) = [2x+2, \quad 2y+4, \quad 2x+6]$$

zatem równanie na punkty krytyczne to

$$\begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y+4=0 \\ 2x+6=0 \end{cases}$$

Skąd łatwo wyliczyć, że $(x,y,z) = (-1,2,3)$. Macierz drugiej pochodnej wynosi

$$H(f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

zatem

$$H(f)(-1,2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz dodatnio określona, zatem mamy tu minimum lokalne.

d) Różniczka funkcji f wynosi

$$\nabla f(x,y) = [3x^2+3y^2-15, \quad 6xy-12]$$

zatem równanie na punkty krytyczne to

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-15=0 \\ 6xy-12=0 \end{cases}$$

Skąd $(x-y)^2 = 1$ oraz $(x+y)^2 = 9$. Otrzymujemy cztery rozwiązania $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$ oraz $(-2,-1)$. Macierz drugiej pochodnej to

$$H(f)(x,y) = 6 \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Z kryterium Sylvestera otrzymujemy, że w $(-2,-1)$ mamy maksimum lokalne, w punktach $(1,2)$ i $(-1,-2)$ nie mamy ekstremum lokalnego, natomiast w punkcie $(2,1)$ mamy lokalne minimum.

Zadanie 2.
Wykaż, że funkcja $f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ ma nieskończenie wiele maksimów lokalnych, chociaż nie ma żadnego minimum lokalnego.

Rozwiązanie:
Różniczka funkcji f wynosi

$$\nabla f(x, y) = [-(1 + e^y)\sin x, \quad e^y(\cos x - 1 - y)]$$

zatem równanie na punkty krytyczne to

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x - 1 - y = 0 \end{cases}$$

czyli w szczególności $x = n\pi$, co (zależnie od parzystości n) prowadzi do znalezienia wszystkich punktów krytycznych $(2k\pi, 0)$ oraz $((2k + 1)\pi, -2)$. Macierz Hessego w tych punktach wynosi

$$H(f)(2k\pi, 0) = \begin{bmatrix} -(1 + e^0)1 & 0 \\ 0 & e^0(-3) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad H(f)((2k + 1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} (1 + e^0)1 & 0 \\ 0 & e^{-2}(-) \end{bmatrix}$$

Pierwsza macierz jest ujemnie określona, zatem mamy lokalne maksimum, natomiast druga macierz jest nieokreślona, zatem nie mamy lokalnego ekstremum.

Zadanie 3.
Wyznacz wielomian Taylora stopnia 2 funkcji $f(x, y) = \exp(xy^2) - \ln(1 + xy)$ w punkcie $(0, 0)$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2}y^2 - \frac{y}{1 + xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy^2}2xy - \frac{x}{1 + xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = e^{xy^2}y^4 + \frac{y^2}{(1 + xy)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = e^{xy^2}4(xy)^2 + 2xe^{xy^2} + \frac{x^2}{(1 + xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2ye^{xy^2} + 2ye^{xy^2}y^2 - \frac{1}{(xy + 1)^2}$$

skąd mamy

$$f(0, 0) = 1,\ f'_x(0, 0) = 0,\ f'_y(0, 0) = 0,\ f''_{xx}(0, 0) = 0,\ f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0) = -1,\ f''_{yy}(0, 0) = 0$$

Skąd ostatecznie otrzymujemy

$$f((0, 0) + (h, s)) = 1 + 0 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hs + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}s^2\right) + o(||[h, s]||^2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(0 + 2hs + 0) + o(||[h, s]||^2) = 1 - hs + o(||[h, s]||^2)$$

Nie jest to wygodny sposób. Pytanie czy da się szybciej?

Zadanie 4.
Wyznacz wielomian Taylora stopnia 3 funkcji $f(x,y) = \exp(xy^2) - \ln(1+xy)$ w punkcie $(0,0)$.

Rozwiązanie:
Mamy
$$\exp(xy^2) = 1 + xy^2 + r_1(xy^2) \quad \ln(1+xy) = xy + r_2(x^2y^2)$$
oraz
$$\frac{r_1(xy^2)}{||(x,y)||^3} = \frac{r_1(xy^2)}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$
$$\frac{r_2(x^2y^2)}{||(x,y)||^3} = \frac{r_2(x^2y^2)}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$
Zatem
$$\exp(xy^2) = 1 + xy^2 + o(||(x,y)||^3) \quad \ln(1+xy) = xy + o(||(x,y)||^3)$$
A ponieważ rozwinięcie w wielomian Taylora jest jednoznaczne, to ostatecznie mamy
$$f(x,y) = \exp(xy^2) - \ln(1+xy) = 1 + xy^2 - xy + o(||(x,y)||^3)$$

Ćwiczenia 14

Wzór Taylora i ekstrema lokalne

Zadanie 1.
Oblicz wielomian Taylora stopnia 3 w punkcie $\mathbf{a}$ funkcji

a) $f(x,y,z) = e^x + y + z$, $\mathbf{a} = (0,0,0)$

b) $f(x,y,z) = xyz$, $\mathbf{a} = (1,-1,2)$

c) $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $\mathbf{a} = (1,1)$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$e^{x+y+z} - xyz = 1 + \frac{x+y+z}{1!} + \frac{(x+y+z)^2}{2!} + \frac{(x+y+z)^3}{3!} + r(x+y+z) - xyz$$

Gdzie $\frac{r(x+y+z)}{(x+y+z)^3} \overset{x+y+z\to 0}{\longrightarrow} 0$. Sprawdźmy, czy r jest rzędu $o(||(x,y,z)||^3)$. Mamy

$$\frac{r(x+y+z)}{||(x,y,z)||^3} = \frac{r(x+y+z)}{(x+y+z)^3} \cdot \frac{(x+y+z)^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \to 0$$

b) Mamy

$$\nabla f(x,y,z) = [yz, \quad xz, \quad xy] \quad \text{oraz} \quad H(f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{gathered} f'''_{xxx} = 0, \quad f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = 0, \quad f'''_{xxz} = f'''_{xzx} = f'''_{zxx} = 0 \\ f'''_{yyy} = 0, \quad f'''_{yyx} = f'''_{yxy} = f'''_{xyy} = 0, \quad f'''_{yyz} = f'''_{yzy} = f'''_{zyy} = 0 \\ f'''_{zzz} = 0, \quad f'''_{zzx} = f'''_{zxz} = f'''_{xzz} = 0, \quad f'''_{zzy} = f'''_{zyz} = f'''_{yzz} = 0 \\ f'''_{xyz} = f'''_{xzy} = f'''_{yxz} = f'''_{yzx} = f'''_{zxy} = f'''_{zyx} = 1 \end{gathered}$$

Skąd

$$\begin{gathered} f((1,-1,2) + (a,b,c)) = -2 + (-2)\cdot a + 2\cdot b + (-2)\cdot c + \\ + \frac{1}{2!}\cdot(2\cdot 2\cdot ab + 2\cdot(-1)\cdot ac + 2\cdot 1\cdot bc) + \frac{1}{3!}\cdot 6\cdot abc + o((||(a,b,c)||^3) = \\ = -2 - 2a + 2b - c + 2ab - ac + 2bc + abc + o((||(a,b,c)||^3) \end{gathered}$$

Inny sposób, to odwołanie się to definicji rozwinięcia Taylora

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \text{ wielomian } (\mathbf{h}) + \text{ reszta } (\mathbf{h})$$

Mamy

$$f(1+a, -1+b, 2+c) = (1+a)(-1+b)(2+c) = -2 - 2a + 2b - c + 2ab - ac + 2bc + abc$$

jest to równość ścisła, a więc w szczególności szukane rozwinięcie Taylora.

c) Mamy

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}, \quad -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right] \qquad \text{oraz} \qquad H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} -2\frac{y}{x^3} & -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} & 2\frac{x}{y^3} \end{bmatrix}$$

oraz

$$f'''_{xxx} = 6\frac{y}{x^4}, \quad f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = -2\frac{1}{x^3}, \quad f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx} = 2\frac{1}{y^3}, \quad f'''_{yyy} = -6\frac{x}{y^4}$$

Skąd

$$f((1,1)+(h,s)) = 0 + 2h - 2s + \frac{1}{2!}\left(-2h^2 + 2\cdot 0\cdot hs + 2s^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(6h^3 + 3\cdot(-2)h^2 s + 3\cdot 2hs^2 - 6s^3\right) + o(||(h,s)||^3) =$$
$$= 2h - 2s - h^2 + s^2 - h^3 - s^3 - h^2 s + hs^2 + o(|h|^3 + |s|^3)$$

Innym sposobem mamy

$$f((1,1)+(h,s)) = \frac{1+h}{1+s} - \frac{1+s}{1+h} = (1+h)\cdot(1-s+s^2-s^3+o(s^3)) - (1+s)(1-h+h^2-h^3+o(h^3)) =$$
$$= 2h - 2s - h^2 + s^2 - h^3 - s^3 - h^2 s + hs^2 + o(|h|^3 + |s|^3)$$

Mając rozwinięcie Taylora możemy wyznaczyć odpowiednie pochodne funkcji. Na przykład wartość $f''_{yz}(0,0,0)$ jest to współczynnik przy wyrazie yz w rozwinięciu Taylora.

Zadanie 2.
Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna taka, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \tan(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = 0$$

Oblicz $f''_{xy}(0,0)$.

Rozwiązanie:
Z definicji małego o, daną równość możemy zinterpretować jako

$$f(x,y) - \tan(x)\sin(y) = o(x^2+y^2) \Leftrightarrow f(x,y) = \tan(x)\sin(y) + o(x^2+y^2)$$

To oznacza, że wielomian Taylora drugiego stopnia wyrażenia po prawej i lewej są takie same. Z drugiej strony mamy

$$\tan(x)\cdot\sin(y) = (x + o(x^2))(y + o(y^2)) = xy + o(x^2+y^2) = xy + o(||(x,y)||^2)$$

Wielomian Taylora drugiego stopnia z $f(x,y)$ w $(0,0)$ jest równy

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2) + o(||(x,y)||^2)$$

Stąd mamy $f''_{xy}(0,0) = 1$ oraz $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 0$.

Zadanie 3.
Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $\cos(x+y) + a\tan(xy)$ ma w punkcie $(0,0)$ lokalne maksimum, dla jakich lokalne minimum, a dla jakich nie ma w $(0,0)$ ekstremum lokalnego.

Rozwiązanie:
Łatwo sprawdzić, że $(0,0)$ jest punktem krytycznym niezależnie od a. Chcemy zbadać charakter tego punktu krytycznego. Wielomian Taylora stopnia 2 w okolicach zera to

$$f(x,y) := \cos(x+y) + a\tan(xy) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + axy = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + (a-1)xy$$

Rozwinięcie nie ma wyrazów liniowych, zatem mamy punkt krytyczny (bo $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$). Stąd wynika, że $f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = -1$ oraz $f''_{xy}(0,0) = a-1$. Macierz Hessego wygląda więc następująco

$$H(f)(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & a-1 \\ a-1 & -1 \end{bmatrix} := A$$

Mamy $\det A_1 = -1 < 0$ oraz $\det A_2 = 1-(a-1)^2 = -a^2+2a = a(2-a)$. Dla $a \in (0,2)$ mamy $\det A_2 > 0$, zatem macierz A jest ujemnie określona i mamy maximum lokalne. Dla $a \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ mamy $\det A_2 < 0$ i wówczas macierz A jest nieokreślona czyli nie mamy ekstremum lokalnego. Dla $a = 0$ lub $a = 2$ mamy $\det A_2 = 0$. Dla $a = 0$ mamy funkcję $\cos(x+y)$ i w zerze przyjmuje ona wartość 1. Jest to największa wartość jaką osiąga cosinus, zatem mamy maksimum (nieścisłe, bo na prostej $y = -x$ również mamy 1). Dla $a = 2$ mamy funkcję

$$\cos(x+y) + 2\tan(xy) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{4!} + 2xy + 2 \cdot \frac{1}{3}x^3y^3 + o(||(x,y)||^4) =$$

$$= 1 - \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{4!} + o(||(x,y)||^4)$$

Wielomian

$$w(x,y) := 1 - \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{4!}$$

nie ma lokalnego maksimum w $(0,0)$ ponieważ kładąc $x = y$ mamy $1 + \frac{(2x)^4}{4!} > 1 = w(0,0)$. Samo spojrzenie na wyrazy stopnia 2 sugeruje, że warto zbadać funkcję dla $y = x$. Wtedy $f(x,x) = \cos(2x) + 2\tan(x^2)$ i badając tę funkcję po jednej zmiennej, możemy wykluczyć istnienie maksimum w zerze (trzeba badać czwartą pochodną, bo pierwsze trzy znikają).

Ćwiczenia 15

Twierdzenie o funkcji uwikłanej, rozmaitości, ekstrema warunkowe

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $M \subseteq \mathbb{R}^n$ to powierzchnia k-wymiarowa. Chcemy znaleźć metody badania funkcji $f|_M$. Chcemy wiedzieć jak opisywać powierzchnie k-wymiarowe w $\mathbb{R}^n$. Na przykład równanie $x^2 + y^2 + z^1 = 1$ to równanie sfery w $\mathbb{R}^3$. Równanie $2x + y + z = 0$ to równanie płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$. Zatem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

to równanie okręgu powstałego z przecięcia płaszczyzny i sfery. Twierdzenie oo funkcji uwikłanej mówi kiedy układ $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ldots = f_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ daje się rozwiązać względem zmiennych $\mathbf{y}$. Będziemy mówili, że $\mathbf{x}$ to zmienne niezależne, a $\mathbf{y}$ to zmienne zależne. Intuicyjnie k równań w przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ powinno opisywać zbiór n-wymiarowy. Będzie tak, o ile f_i są funkcjonalnie niezależne i niezdegenerowane względem zmiennych zależnych $\mathbf{y}$.

Twierdzenie: (O funkcji uwikłanej). Niech $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy punkt $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ taki, że $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$. Załóżmy, że różniczka $d_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ (różniczka F względem zmiennych zależnych $\mathbf{y}$ w punkcie $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$) jest nieosobliwa.

$$\nabla F = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{d_{\mathbf{x}} F} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \end{bmatrix}}_{d_{\mathbf{y}} F}$$

Wówczas istnieje pewne otoczenie $U \ni (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ i odwzorowanie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1, takie że $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ rozwiązuje równanie $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ w U. To znaczy dla dowolnego $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$ równanie $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$.

Przykład: Niech $x^2 + y^2 = 1$ równanie te da się lokalnie (poza otoczeniem punktów $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, bo $\nabla f = [2x, 2y]$) rozwikłać jako funkcję $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Uwaga: Zauważmy, że odwzorowanie g spełnia tożsamość $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ w otoczeniu punktu $(\mathbf{x}_0)$. Różniczkując ją względem $\mathbf{x}$ można uzyskać wiedzę o pierwszej różniczce $D_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})$:

$$d_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + d\mathbf{y} F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \circ d_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = 0$$

W szczególności jeśli regularność F jest wyższa niż C^1 możemy też podnieść regularność g. Kolejne różniczkowania pozwalają obliczyć wyższe pochodne g.

Zadanie 1.
Pokazać, że w otoczeniu $(1, 1)$ równanie

$$y^3 + x^2 - 2xy = 0$$

może być jednoznacznie rozwiązane ze względu na y i że otrzymana funkcja $y = \varphi(x)$ jest klasy C^1 w otoczeniu 1. Oblicz $\varphi'(1)$.

Rozwiązanie:
Niech $F(x,y) = y^3 + x^2 - 2xy$. Mamy równanie $F(x,y) = 0$. Chcemy odzyskać y jako funkcję x w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1,1)$. Sprawdźmy czy w tym punkcie $d_yF(1,1) \neq 0$, czyli czy różniczka jest nieosobliwa. Mamy

$$d_yF = 3y^2 - 2x \quad \text{zatem} \quad d_yF(1,1) = 1 \neq 0$$

Stąd, na mocy twierdzenie o funkcji uwikłanej, możemy wyznaczyć w otoczeniu $(1,1)$ y jako funkcję x, czyli $y = \varphi(x)$ klasy C^1. Sprawdźmy, co wiemy o pochodnej funkcji φ. Mamy

$$\varphi(x)^3 + x^2 + 2x\varphi(x) = 0$$

różniczkując po x dostajemy

$$0 = 3\varphi^2 \cdot \varphi'(x) + 2x - (2\varphi(x) + 2x \cdot \varphi'(x)) = \varphi'(x)(2\varphi(x)^2 - 2x) + 2x - 2\varphi(x)$$

Skąd

$$\varphi'(x) = \frac{2\varphi(x) - 2x}{3\varphi(x)^2 - 2x}$$

Wynika stąd, że dla $x = 1$ i $\varphi(1) = 1$ mamy równanie na pochodną

$$\varphi'(1) = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = 0$$

Zaważmy, że możemy też wyznaczyć wyższe pochodne odwzorowania φ. Wiemy, że

$$\varphi'(x) = \frac{2\varphi(x) - 2x}{3\varphi(x)^2 - 2x}$$

Stąd możemy poprawić regularność funkcji φ. Wiemy (na razie), że φ jest klasy C^1, ale z drugiej strony prawa strona wzoru powyżej jest też funkcją klasy C^1 (w otoczeniu $x_0 = 1$), ponieważ jest to złożenie elementarnych funkcji klasy C^1. A zatem lewa strona $\varphi'(x)$ jest klasy C^1, a więc $\varphi(x)$ jest klasy C^2. Teraz wiemy, że prawa strona jest klasy C^2, zatem lewa jest klasy C^3 itd. Ostatecznie $\varphi(x)$ jest klasy C^∞.

Zadanie 2.
Uzasadnić, że równanie $x \ln w + w \ln y = 0$ wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1,1)$ zmienną w jako funkcję pozostałych zmiennych $w = w(x,y)$ i że jest to funkcja klasy C^∞. Napisać wielomian Taylora stopnia 2 funkcji $w(x,y)$ w otoczeniu punktu $(1,1)$.

Rozwiązanie:
Niech $F(x,y,w) = x \ln w + w \ln y$. Równanie $F(1,1,w_0) = 0$ ma tylko rozwiązanie $w_0 = 1$, zatem $w(1,1) = 1$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{x}{w} + \ln y \quad \text{zatem} \quad \frac{\partial f}{\partial w}(1,1,1) = 1 \neq 0$$

Zatem możemy skorzystać z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Na mocy tego twierdzenia, możemy wyznaczyć w jako funkcję x i y w otoczeniu $(1,1)$. Oznaczmy $w := w(x,y)$ Różniczkując $x \ln w + w \ln y = 0$ po x i po y uzyskujemy

$$0 = \ln w + \frac{x}{w} w'_x + w'_x \ln y = w'_x \left(\frac{x}{w} + \ln y \right) + \ln w$$

$$0 = \frac{x}{w}w'_y + w'_y \ln y + \frac{w}{y} = w'_y\left(\frac{x}{w} + \ln y\right) + \frac{w}{y}$$

Stąd wnioskujemy, że

$$w'_x = \frac{-\ln w}{\frac{x}{w} + \ln y} \qquad w'_y = \frac{-w}{y\left(\frac{x}{w} + \ln y\right)}$$

Zauważmy, że jeśli w jest klasy C^1 w otoczeniu punktu $(1,1)$ to prawe strony równości też są klasy C^1 w otoczeniu $(1,1)$ jako złożenia funkcji klasy C^1. Stąd w'_x i w'_y są klasy C^1 i wobec tego w jest klasy C^2. Przez indukcję otrzymujemy, że w jest klasy C^∞. Wyższe pochodne uzyskujemy analogicznie:

$$w''_{xx} = \frac{-w'_x}{w\left(\frac{x}{w} + \ln y\right)} + \frac{\ln w}{\left(\frac{x}{w} + \ln y\right)^2}\left(\frac{1}{w} - \frac{x}{w^2}w'_x\right)$$

$$w''_{xy} = \frac{-w'_y}{w\left(\frac{x}{w} + \ln y\right)} + \frac{\ln w}{\left(\frac{x}{w} + \ln y\right)^2}\left(-\frac{x}{w^2}w'_y - \frac{1}{y}\right)$$

$$w''_{yy} = \frac{-w'_y}{y\left(\frac{x}{w} + \ln y\right)} + \frac{w}{y^2\left(\frac{x}{w} + \ln y\right)^2}\left[\left(\frac{x}{w} + \ln y\right) + y\left(-\frac{x}{w^2}w'_y - \frac{1}{y}\right)\right]$$

Skąd otrzymujemy $w''_{xx}(1,1) = 0$, $w''_{xy}(1,1) = 1$ oraz $w''_{yy}(1,1) = 2$. Zatem w otoczeniu $(1,1)$ wielomian Taylora funkcji $w(x,y)$ wynosi

$$w(x+1, y+1) = 1 - y + \frac{1}{2}(xy + 2y^2) + o(||(x,y)||^2) = 1 - y + \frac{1}{2}xy + y^2 + o(||(x,y)||^2)$$

Wniosek: Jeśli $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ w założeniu twierdzenia o funkcji uwikłanej jest klasy C^k, to i zależność uwikłana $y = g(x)$ jest klasy C^k.

Zadanie 3.
Uzasadnić, że równanie $z^5 - xz + y^2 = 0$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ wyznacza zmienną z jako funkcję pozostałych zmiennych $z = g(x,y)$ klasy C^∞. Napisać wielomian Taylora stopnia 2 funkcji g w otoczeniu punktu $(1,0)$.

Rozwiązanie:
Niech $F(x,y,z) = z^5 - xz + y^2$, wówczas $F(1,0,1) = 0$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5z^4 - x \qquad \text{zatem} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 4 \neq 0$$

Spełnione są założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, zatem istnieje $z(x,y) \in C^1$ (nawet C^∞). Mamy więc

$$F(x,y,z(x,y)) = z(x,y)^5 - xz(x,y) + y^2$$

Oznaczmy $z(x,y) = z$, wówczas

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 5z^4 \cdot z'_x - (z + xz'_z) \quad \Leftrightarrow \quad z'_x = \frac{z}{5z^4 - x} \overset{(1,0,1)}{=} \frac{1}{4}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 5z^4 \cdot z'_y - xz'_y + 2y \quad \Leftrightarrow \quad z'_y = \frac{-2y}{5z^4 - x} \overset{(1,0,1)}{=} 0$$

Dalej mamy

$$z''_{xx} = \frac{z'_x(5z^4 - x) - z \cdot (20z^3 \cdot z'_x - 1)}{(5z^4 - x)^2} \overset{(1,0,1)}{=} \frac{\frac{1}{4} \cdot 4 - 1 \cdot (20 \cdot \frac{1}{4} - 1)}{16} = -\frac{3}{16}$$

$$z''_{xy} = \frac{z'_y(5z^4 - x) - z \cdot (20z^3 \cdot z'_y)}{(5z^4 - x)^2} \overset{(1,0,1)}{=} 0$$

$$z''_{yy} = \frac{-2(5z^4 - x) + 2y \cdot (20z^3 \cdot z'_y)}{(5z^4 - x)^2} \overset{(1,0,1)}{=} \frac{-2 \cdot 4}{4^2} = -\frac{1}{2}$$

Skąd wielomian Taylora stopnia 2 funkcji $z(x,y)$ w otoczeniu $(1,0)$ to

$$z(1+s, 0+t) = z(1,0) + z'_x(1,0)s + z'_y(1,0)t + \frac{1}{2}\left(z''_{xx}(1,0)s^2 + 2z''_{xy}(1,0)st + z''_{yy}(1,0)t^2\right) +$$

$$+o(||(s,t)||^2) = 1 + \frac{1}{4}s + 0t - \frac{3}{32}s^2 - \frac{1}{2}st + o(||(s,t)||^2)$$

Ćwiczenia 16

Twierdzenie o funkcji uwikłanej, rozmaitości, ekstrema warunkowe

Rozmaitości zanurzone

Twierdzenie o funkcji uwikłanej mówi, że zbiór opisany równaniem $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$, gdzie $F=(f_1,\dots,f_k):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ jest klasy C^k, jest w otoczeniu punktu $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ wykresem odwzorowania $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ klasy C^k, o ile F nie jest niezdegenerowane w kierunku zmiennych zależnych, to znaczy pochodna $d_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ jest nieosobliwa.

Definicja: Zbiór $M\subseteq\mathbb{R}^{n+k}$, który lokalnie (w otoczeniu każdego punktu) wygląda jak wykres odwzorowania $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ klasy C^k nazywamy rozmaitością n-wymiarową klasy C^k zanurzoną w $\mathbb{R}^{n+k}$. (Nie interesuje nas, które ze współrzędnych w $\mathbb{R}^{n+k}$ pełnią rolę zmiennych zależnych, a które niezależnych)

Na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej, aby otoczenie punktu $\mathbf{p}_0$ należącego do zbioru $M=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+k}\mid F(\mathbf{v})=0\}$ było rozmaitością, wystarczy znaleźć pewien podział współrzędnych $\mathbb{R}^{n+k}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\ni(\mathbf{x},\mathbf{y})$ w którym spełnione jest założenie twierdzenia o funkcji uwikłanej. Do tego z kolei wystarcza, aby wiersze pełnej macierzy pochodnej dF były liniowo niezależne w każdym punkcie M.

Twierdzenie: (O submersji) Niech $F=(f_1,\dots,f_k):\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^k. Jeśli w każdym punkcie $\mathbf{p}$ zbioru $M=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+k}\mid F(\mathbf{v})=0\}$ (pełna) pochodna $d_{\mathbf{p}}F:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^k$ jest przekształceniem liniowym maksymalnego rzędu (równoważnie: jeśli w punkcie $\mathbf{p}\in M$ gradienty $\nabla f_1(\mathbf{p}),\dots,\nabla f_k(\mathbf{p})$ są liniowo niezależne) to M jest n-wymiarową rozmaitością zanurzoną.

Ponadto przestrzeń styczna do M w $\mathbf{p}$ to

$$T_{\mathbf{p}}M=\ker d_{\mathbf{p}}F=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+k}\mid d_{\mathbf{p}}F(\mathbf{v})=0\}$$

równoważnie

$$T_{\mathbf{p}}M=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+k}\mid \mathbf{v}\perp\nabla f_i(\mathbf{p})\text{ dla } i=1,\dots,k\}$$

Innymi słowy, jeśli chcemy przedstawić fragment zbioru $M=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\mid F(\mathbf{v})=0\}$ jako wykres pewnej funkcji klasy C^1 (i nie obchodzi nas względem których zmiennych odwracamy równanie $F(\mathbf{v})=0$), to wystarczy aby w macierzy $d_{\mathbf{p}}F$ jakiś minor $k\times k$ był odwracalny, czyli równoważnie wystarczy aby rząd macierzy $d_{\mathbf{p}}F$ był równy k (maksymalny możliwy).

Zbiór opisany pojedynczym równaniem $M=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\mid f(\mathbf{v})=0\}$, gdzie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^k, taką że $\nabla f(\mathbf{v})\neq 0$ w każdym punkcie $\mathbf{v}\in M$, jest rozmaitością $(n-1)$-wymiarową klasy C^k zanurzoną w $\mathbb{R}^n$. Ponadto $T_{\mathbf{p}}M=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\mid\langle\mathbf{v},\nabla f(\mathbf{p})\rangle\}$, to znaczy gradient jest prostopadły do poziomicy.

Zadanie 1.

Niech $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^3+y^3+z^4+xyz=4\}$. Wykaż, że M jest rozmaitością dwuwymiarową klasy C^1. Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(\sqrt[3]{3},0,-1)$.

Rozwiązanie:
Niech $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^4 + xyz - 4$, wtedy

$$\nabla F = [3x^2 + yz, \quad 3y^2 + xz, \quad 4z^3 + xy]$$

Chcemy sprawdzić, czy ta pochodna jest rzędu 1, bo wówczas działa twierdzenie o submersji. Jeśli wszystkie trzy pochodne się zerują i punkt należy do zbioru M, to spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4 \\ 3x^2 + yz = 0 \\ 3y^2 + xz = 0 \\ 4z^3 + xy = 0 \end{cases}$$

po pomnożeniu drugiego równania przez x, trzeciego przez y i czwartego przez z mamy

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4 \\ 3x^3 + xyz = 0 \\ 3y^3 + xyz = 0 \\ 4z^4 + xyz = 0 \end{cases}$$

Po dodaniu trzech ostatnich równań mamy

$$0 = 3x^3 + xyz + 3y^3 + xyz + 4z^4 + xyz = 3(x^3 + y^3 + z^4 + xyz) + z^4 = 12 + z^4$$

co jest niemożliwe, a więc dla każdego punktu z M zachodzi $\nabla F \neq [0,0,0]$. Na mocy twierdzenia o submersji M jest rozmaitością wymiaru $3 - 1 = 2$. Przestrzeń styczna do M w $(\sqrt[3]{3}, 0, -1)$ to zbiór

$$T_{(\sqrt[3]{3},0,-1)}M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{v}, \nabla F((\sqrt[3]{3}, 0, -1))\rangle = 0\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z), \ [3\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{3}, -4)\rangle = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3\sqrt[3]{9}x - \sqrt[3]{3}y - 4x = 0\}$$

Równanie płaszczyzny stycznej to $3\sqrt[3]{9}x - \sqrt[3]{3}y - 4x = 0$, skąd równanie afinicznej płaszczyzny stycznej to $3\sqrt[3]{9}x - \sqrt[3]{3}y - 4x = c$, gdzie c należy tak doprać, aby $(\sqrt[3]{3}, 0, -1)$ należał do tej płaszczyzny $c = 9 + 0 + 4 = 13$.

Zadanie 2.
Wykaż, że $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 4, \ x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$ jest rozmaitością 1-wymiarową. Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(2,1,1)$.

Rozwiązanie:
Niech $F(x,y,z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, wtedy

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = (4,6)\}$$

Sprawdźmy założenia twierdzenia o submersji

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

Chcemy pokazać, że w każdym punkcie zbioru M rząd tej macierzy jest równy 2. Dla $x = y = z$ wiersze macierzy są liniowo zależne. Sprawdźmy czy taki punkt może należeć do M. Jeśli by należał, to wówczas $3x = 4$ oraz $3x^2 = 6$, co sprowadzi do sprzeczności. A zatem w każdym punkcie $\mathbf{p}$ zbioru M rząd $d_{\mathbf{p}}F$ jest równy 2, więc M jest rozmaitością wymiaru $3-2=1$. W $(2,1,1)$ gradienty F wynoszą $(1,1,1)$ oraz $(4,2,2)$, zatem płaszczyzna styczna do M w $(2,1,1)$ będzie opisana równaniami

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4z+2y+2z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases}$$

Zadanie 3.
Udowodnić, że zbiór $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2x^2 + 2(z+1)xy + y^2e^z = 16\}$ jest rozmaitością 2-wymiarową. Znaleźć płaszczyznę styczną do S w punkcie $(3,2,0)$.

Rozwiązanie:
Niech $F(x,y,z) = z^2x^2 + 2(z+1)xy + y^2e^z - 16$, wówczas

$$\nabla F = \left[2xz^2 + 2y(1+z), \quad 2e^zy + 2x(1+z), \quad 2xy + e^zy^2 + 2x^2z\right]$$

Dalej

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ \nabla f(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2x^2 + 2(z+1)xy + y^2e^z - 16 = 0 \\ 2xz^2 + 2y(1+z) = 0 \\ 2e^zy + 2x(1+z) = 0 \\ 2xy + e^zy^2 + 2x^2z = 0 \end{cases}$$

Po pomnożeniu drugiego równania przez x i trzeciego przez y i po dodaniu mamy

$$0 = 2x^2z^2 + 2xy(1+z) + 2e^zy^2 + 2xy(1+z) = 2(z^2x^2 + 2(z+1)xy + y^2e^z) = 32$$

Mamy sprzeczność, zatem układ nie ma rozwiązania. Stąd S jest rozmaitością 2-wymiarową na mocy twierdzenia o sybmersji. Dalej mamy

$$\nabla F(3,2,0) = [4,10,16]$$

skąd równanie płaszczyzny stycznej do S w $(3,2,0)$ to

$$\langle [4,10,16],[x,y,z] \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 10y + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 5y + 8z = 0$$

Równanie afiniczne płaszczyzny to

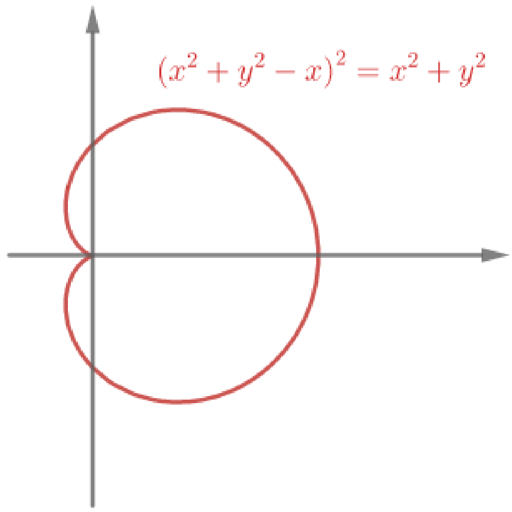
$$2x + 5y + 8z = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 0 \cdot 16 = 16$$

Zadanie 4.
Czy zbiór $S = \{(x,y,0) \mid (x^2+y^2-x)^2 = x^2+y^2\}$ jest rozmaitością? Niech M oznacza podzbiór $\mathbb{R}^3$ powstały przez obrót S wokół osi OX. Opisać zbiór M równaniem. Czy $M \setminus \{0\}$ jest rozmaitością?

Rozwiązanie:
Zbiór S jest poziomicą funkcji $F(x,y,z) = ((x^2+y^2+x)^2 - x^2 - y^2, z)$. Mamy

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 4x^3 - 6x^2 + 4xy^2 - 2y^2 & 3x^2y - 4xy - 2y + 3y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W punkcie $(0,0,0)$ odwzorowanie F nie spełnia założenia twierdzenia o submersji. Co więcej jeśli $F = (f_1, f_2)$, to ∇f_1 i ∇f_2 są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla f_1 \neq 0$, co prowadzi do jedynego rozwiązania $(x,y,z) = (0,0,0)$. Zatem $S \setminus \{(0,0,0)\}$ jest rozmaitością, bo spełnia założenia twierdzenia o submersji.



Weźmy punkt $(x_0, y_0) \in S$. Wiemy, że spełnia on równanie

$$(x_0^2 + y_0^2 - x_0)^2 - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

Punkty powstałe przez obrót (x_0, y_0) wokół osi OX to punkty postaci $(x_0, y_0\cos\theta, y_0\sin\theta)$, a więc punkty (x_0, y, z) spełniające równanie $y^2 + z^2 = y_0^2$. Wiemy, że y_0 spełnia równanie

$$(x_0^2 + y_0^2 - x_0)^2 - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

stąd (x_0, y, z) musi spełniać równanie

$$(x_0^2 + (y^2 + z^2) - x_0)^2 - x_0^2 - (y^2 + y^2) = 0$$

Niech więc $F(x,y,z) = (x^2 + (y^2+z^2) - x)^2 - x^2 - (y^2+z^2)$, wówczas (oznaczmy $t = (x^2+(y^2+z^2)-x)$)

$$\nabla F = \left[2t\cdot(2x-1) - 2x, \quad 2t\cdot 2y - 2y, \quad 2t\cdot 2z - 2z\right]$$

Pokażemy, że poza punktem $(0,0,0)$ spełnione są założenia twierdzenia o submersji. Mamy $\nabla F = 0$, gdy spełniony jest układ

$$\begin{cases} 2(x^2 + (y^2+z^2) - x)\cdot(2x-1) - 2x = 0 \\ 2(x^2 + (y^2+z^2) - x)\cdot 2y - 2y = 0 \\ 2(x^2 + (y^2+z^2) - x)\cdot 2z - 2z = 0 \end{cases}$$

Dodajemy do siebie stronami $xF_x + yF_y + zF_z = 0$ i zamieniamy $x^2+y^2+z^2$ na $(x^2+y^2+z^2-x)^2$. Mamy

$$(x^2 + (y^2+z^2) - x)\cdot 2(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2+z^2) - (x^2+(y^2+z^2)-x)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + (y^2+z^2) - x)(2(x^2+y^2+z^2) - x) - (x^2+y^2+z^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2-x)(2(x^2+y^2+z^2)-x)-(x^2+y^2+z^2-x)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2-x)((2(x^2+y^2+z^2)-x)-(x^2+y^2+z^2-x))=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2-z)(x^2+y^2+z^2)=0$$

Stąd albo $x^2+y^2+z^2=0$, czyli $x=y=z=0$, albo $x^2+y^2+z^2=0$, czyli (korzystając z równania opisującego M) również $x^2+y^2+z^2=0$. Zatem gradient zeruje się tylko wtedy, gdy $x=y=z=0$. Stąd $M\setminus\{(0,0,0)\}$ jest rozmaitością, bo spełnione są założenia twierdzenia o submersji.

Ćwiczenia 17

Twierdzenie o funkcji uwikłanej, rozmaitości, ekstrema warunkowe

Ekstrema warunkowe (metoda mnożników Lagrange'a)

Twierdzenie: (O ekstremach warunkowych) Rozważmy funkcję $g : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ i odwzorowanie $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$, oba klasy C^1 i niech $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\mathbf{v}) = 0|\}$. Jeśli funkcja $g|_M : M \to \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w punkcie $\mathbf{p} \in M$, to zachodzi jedna z dwóch sytuacji:

1. Gradienty $\nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$ są liniowo zależne (to znaczy F nie spełnia założeń twierdzenia o submersji w $\mathbf{p}$ i w konsekwencji nie wiemy, czy M jest rozmaitością w otoczeniu $\mathbf{p}$)

2. Gradient $\nabla g(\mathbf{p})$ jest kombinacją liniową gradientów $\nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$, to znaczy istnieją stałe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (zwane mnożnikami Lagrange'a) takie, że

$$\nabla g(\mathbf{p}) = \lambda_1 \nabla f_1(\mathbf{p}) + \ldots + \lambda_k f_k(\mathbf{p})$$

W obu przypadkach gradienty $\nabla g(\mathbf{p}), \nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$ są liniowo zależne.

Uwaga: W przypadku gdy gradienty $\nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$ są liniowo niezależne, przestrzeń styczna $T_{\mathbf{p}}M$ jest prostopadła do każdego z nich, a zatem warunek drugi w powyższym twierdzeniu oznacza, że $\nabla g(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}M$. Wynika stąd, że dla każdego $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ pochodna $\partial_{\mathbf{v}} g(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{v}, \nabla g(\mathbf{p}) \rangle = 0$, a więc w pierwszym rzędzie przybliżenia g nie zmienia się wzdłuż M w otoczeniu punktu p.

Zadanie 1.
Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = x$ w zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8,\ x + y = z\}$$

Rozwiązanie:
Zbiór A jest przecięciem płaszczyzny z elipsoidą, zatem jest zwarty. Z twierdzenia Weierstrassa kresy są więc na nim przyjmowane. Niech $f_1 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8$ oraz $f_2 = x = y - z$. Mamy

$$\nabla f_1 = \begin{bmatrix} 2x, & 4y, & 4z \end{bmatrix} \qquad \nabla f_2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1 \end{bmatrix}$$

Musimy zbadać, kiedy wektory ∇f, ∇f_1 oraz ∇f_2 są liniowo zależne. Wówczas będą to punkty podejrzane o bycie ekstremum. Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 4y & 4z \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

Wektory są liniowo zależne jeśli wyznacznik tej macierzy jest zerowy, czyli gdy $2z + 2y = 0$ skąd

$z = -y$. Szukany punkt musi leżeć w zbiorze A, zatem musi być spełniony układ równań

$$\begin{cases} z = -y \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8 \\ x + y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) \in \{(-2, 1, -1),\ (2, -1, 1)\}$$

Punkty $(-2, 1, -1)$ oraz $(2, -1, 1)$ są kandydatami na ekstrema, ale skoro ekstrema są osiągane na A, to są osiągane w tych punktach. Skoro $f(x, y, z) = x$, to minimum mamy w $(-2, 1, -1)$ a maksimum w $(2, -1, 1)$.

To samo zadanie można zrobić klasyczny, sposobem. Z twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a wiemy, że jeśli ∇f_1 i ∇f_2 są liniowo niezależne, to w punktach ekstremalnych powinniśmy mieć $\nabla g = a \cdot \nabla f_1 + b \cdot \nabla f_2$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Daje nam to układ równań

$$\begin{cases} 2ax + b = 1 \\ 4ay + b = 0 \\ 4az - b = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8 \end{cases}$$

Z drugiego i trzeciego równania otrzymujemy $4a(y + z) = 0$, zatem $y = -z$, ponieważ jeśli $a = 0$, to szybko dochodzimy do sprzeczności (bo z pierwszego równania $b = 1$, a z drugiego równania $b = 0$). Dodatkowo powinniśmy sprawdzić liniową niezależność ∇f_1 i ∇f_2. Te wektory są liniowo zależne gdy $z = 2y = -2z$, czyli $x = 2y$ oraz $z = -y$. Taki punkt nie należy do zbioru A, bo z czwartego równania mamy $0 = x + y - z = 4y$, a więc i $x = z = 0$, a to nie spełnia równania piątego.

Ćwiczenia 18

Twierdzenie o funkcji uwikłanej, rozmaitości, ekstrema warunkowe

Zadanie 1.
Wyznacz kresy funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^8 = 14\}$$

Rozwiązanie:
Niech $f_1 = x^2 + y^4 + z^8 - 14$, wówczas mamy

$$\nabla f = [yz, \quad xz, \quad xy] \qquad \nabla f_1 = [2x, \quad 4y^3, \quad 8z^7]$$

Jeśli ∇f i ∇f_1 są liniowo zależne, to $\nabla f = a \cdot \nabla f_1$, czyli

$$\begin{cases} 2x = yz \cdot a \\ 4y^3 = xz \cdot a \\ 8z^7 = xy \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^2 = xyz \cdot 4a \\ 8y^4 = xyz \cdot 2a \\ 8z^8 = xyz \cdot a \end{cases}$$

Skąd $x^2 = 4z^8$ i $y^4 = 2z^8$ i mamy

$$14 = x^2 + y^4 + z^8 = 4z^8 + 2z^8 + z^8$$

Zatem $z = \pm\sqrt[8]{2}$, skąd otrzymujemy rozwiązania

$$\begin{cases} z = \sqrt[8]{2} \\ y = \sqrt[4]{4} \\ x = \sqrt[8]{2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = \sqrt[8]{2} \\ y = \sqrt[4]{4} \\ x = -\sqrt[8]{2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = \sqrt[8]{2} \\ y = -\sqrt[4]{4} \\ x = \sqrt[8]{2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = \sqrt[8]{2} \\ y = -\sqrt[4]{4} \\ x = -\sqrt[8]{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -\sqrt[8]{2} \\ y = \sqrt[4]{4} \\ x = \sqrt[8]{2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\sqrt[8]{2} \\ y = \sqrt[4]{4} \\ x = -\sqrt[8]{2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\sqrt[8]{2} \\ y = -\sqrt[4]{4} \\ x = \sqrt[8]{2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\sqrt[8]{2} \\ y = -\sqrt[4]{4} \\ x = -\sqrt[8]{2} \end{cases}$$

Maksimum będzie przyjmowane w punktach, które spełniają pierwszy, czwarty, szósty lub siódmy układ równań, natomiast minimum będzie przyjmowane w punktach, które spełniają drugi, trzeci, piąty lub ósmy układ równań.

Zadanie 2.
Niech $f(x, y, z) = xy - z$. Znaleźć maksimum i minimum funkcji f na zbiorach

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^1 = 1\}$

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^1 = 1,\ x + y + z = 0\}$

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^1 \leq 1,\ x + y + z = 0\}$

Rozwiązanie:
Każdy ze zbiorów A, B, C jest zbiorem zwartym, zatem jako że f jest ciągłe, to z twierdzenia Weierstrassa kresy są przyjmowane.

a) Mamy $\nabla f = \begin{bmatrix} y, & x, & -1 \end{bmatrix}$. Niech $g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, wówczas $\nabla g_1 = 2\begin{bmatrix} x, & y, & z \end{bmatrix}$. Punkty podejrzane o ekstrema to te w których ∇g_1 oraz ∇f są liniowo zależne. Skoro $\nabla f \neq 0$, to ∇f i ∇g_1 są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla g_1 = a \cdot \nabla f$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Daje nam to układ równań

$$\begin{cases} 2x = a \cdot y \\ 2y = a \cdot x \\ 2z = -1 \cdot a \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ (bo } x, y, z \in A) \end{cases}$$

Skąd $x = y = 0$ i $z = \pm 1$ lub $a^2 = 4$ i wówczas dla $a = 2$ mamy $z = -1$, czyli $x = y = 0$, natomiast dla $a = -2$ mamy $z = 1$, czyli $x = y = 0$. Stąd jedynymi rozwiązaniami są $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$. W punkcie $(0, 0, 1)$ mamy minimum, natomiast w punkcie $(0, 0, -1)$ mamy maksimum.

b) Dokładamy równanie $g_2 = x + y + z$. Mamy $\nabla g_2 = [1, 1, 1]$. Stosujemy twierdzenie o mnożnikach, czyli sprawdzamy kiedy ∇f, ∇g_1 oraz ∇g_2 są liniowo zależne

$$0 = \det \begin{bmatrix} y & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - y^2 - y - xz + yz \Leftrightarrow 0 = (x - y)(1 + x + y - z)$$

Jeśli $x = y$, to wówczas jako że jesteśmy w zbiorze B, to spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $z = -2x$ i $6x^2 = 1$, a więc $x = \pm\frac{1}{6}$. Zatem ostatecznie $(x, y, z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. W tych punktach mamy

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Jeśli $x + y - z + 1 = 0$, to wobec $x + y + z = 0$, mamy $-2z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $(x, y, z) = \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}, \ \frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}, \ \frac{1}{2}\right)$. W tych punktach otrzymujemy

$$f\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}, \ \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{4}, \ \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

Stąd maksimum mamy w $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, a minimum w punktach $\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}, \ \frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}, \ \frac{1}{2}\right)$.

c) Możemy przedstawić C jako sumę zbiorów $B_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^1 = a, \ x+y+z = 0\}$ dla $a \in [0, 1]$. Liczymy jak w b) kresy f na każdym ze zbiorów B_a, a następnie znajdujemy maksimum i minimum po parametrze a.

Zadanie 3.
W zbiorze $C = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 3,\ xy + yz + zx = 0\}$ znajdź punkty najbardziej oddalone od osi OZ lub wykaż że taki punkt nie istnieje.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 9$$

Zatem $x^2 + y^2 \leq 9$. Jeśli miałoby zajść $x^2 + y^2 = 9$ (czyli byłaby to maksymalna odległość od osi OZ), to wówczas $z = 0$ i mamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Jako, że punkty $(3, 0, 0)$ i $(0, 3, 0)$ należą do C, to są to szukane punkty.

Ćwiczenia 19

Twierdzenie o funkcji odwrotnej, dyfeomorfizmy

Definicja: Odwzorowanie $F : U \to V$ pomiędzy podzbiorami otwartymi $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy dyfeomorfizmem gdy

- F jest bijekcją, a więc istnieje odwzorowanie odwrotne $F^{-1} : V \to U$
- F i F^{-1} są różniczkowalne (ponieważ różniczkowalność pociąga za sobą ciągłość, F jest jednocześnie homeomorfizmem)

W przypadku, gdy F i F^{-1} są różniczkowalne klasy C^k mówimy o dyfeomorfizmach klasy C^k.

Bezpośrednio z definicji i z reguły łańcuchowej wynika, że pochodna odwzorowania F^{-1} w punkcie $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ to przekształcenie odwrotne do pochodnej odwzorowania F w punkcie $\mathbf{x}$. Istotnie mamy:

$$F(F^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{oraz} \quad F^{-1}F(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \qquad \text{dla dowolnych } \ \mathbf{x} \in U, \ \mathbf{y} \in V$$

Różniczkując oba te wyrażenia i korzystając z reguły łańcuchowej mamy:

$$d_{F^{-1}(\mathbf{y})}F \circ d_{\mathbf{y}}F^{-1} = id \qquad \text{oraz} \qquad d_{F(\mathbf{x})}F^{-1} \circ d_{\mathbf{x}}F = id$$

kładąc $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ dostajemy, że przekształcenia liniowe $d_{\mathbf{x}}F$ i $d_{F(\mathbf{x})}F^{-1}$ są wzajemnie odwrotne. Wynika stąd, że pochodna dyfeomorfizmu jest odwracalnym przekształceniem liniowym.

Okazuje się, że dla odwzorowań klasy C^1 odwracalność pochodnej wystarcza aby lokalnie odwrócić odwzorowanie.

Twierdzenie: (O funkcji odwrotnej) Jeśli odwzorowanie $F : U \to V$ klasy C^1 ma w jakimś punkcie $\mathbf{p} \in U$ nieosobliwą pochodną $d_{\mathbf{p}}F$, to F jest w pewnym otoczeniu $\Omega \ni \mathbf{p}$ odwracalna i F^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $F(\mathbf{p})$. Innymi słowy, F jest lokalnym dyfeomorfizmem między Ω a $F(\Omega)$.

Jako wniosek mamy następujący fakt

Fakt: Niech odwzorowanie $F : U \to V$ klasy C^k będzie bijekcją pomiędzy zbiorami otwartymi $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Jeśli pochodna $d_{\mathbf{p}}F$ jest nieosobliwa w każdym punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ to F jest dyfeomorfizmem klasy C^k.

Fakt: (Grupowe własności dyfeomorfizmów) Dyfeomorfizmy mają własności grupowe:

- jeśli $F : U \to V$ jest dyfeomorfizmem to $F^{-1} : V \to U$ też jest dyfeomorfizmem
- jeśli $F : U \to V$ i $G : V \to W$ to dyfeomorfizmy, to złożenie $G(F) : U \to W$ to też dyfeomorfizm

Zadanie 1.
Oblicz różniczkę odwzorowania biegunowego $f : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$

$$f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$$

i sprawdź, że jest ono dyfeomorfizmem na obraz.

Rozwiązanie:
Mamy

$$df = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Mamy $\det df \neq 0 \Leftrightarrow r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \neq 0 \Leftrightarrow r \neq 0$. Funkcją odwrotną do f będzie

$$f^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2},\ \arctan\frac{y}{x}\right)$$

Dalej mamy

$$f(\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$$

Funkcja f jest bijekcją na swój obraz, ponadto f jest różniczkowalna klasy C^1, zatem z twierdzenia o funkcji odwrotnej f^{-1} też jest różniczkowalne. W szczególności f jest dyfeomorfizmem.

Zadanie 2.
Sprawdź, czy przekształcenie $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ na obraz.

Rozwiązanie:
Pochodna f wynosi

$$df = \begin{bmatrix} 2y & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy wynosi $-4(x^2 + y^2)$ i w dziedzinie jest niezerowy. Zatem df to macierz odwracalna, więc f spełnia twierdzenia o funkcji odwrotnej i stąd f to lokalny dyfeomorfizm. Funkcja f nie jest różnowartościowa, ponieważ $f(x, y) = f(-x, -y)$. Zatem f nie jest bijekcją na swój obraz i stąd nie jest dyfeomorfizmem na obraz.

Zbadajmy różnowartościowość f. Załóżmy, że $f(x, y) = f(a, b)$, bo wówczas

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

$$2xy = 2ab$$

Po podniesieniu do kwadratu mamy

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

$$4x^2y^2 = 4a^2b^2$$

skąd, po dodaniu do pierwszego równania dwa razy drugiego, mamy

$$(x^2 + y^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Łącząc to z wyjściowym równaniem, otrzymujemy $x^2 = a^2$, $y^2 = b^2$ oraz $xy = ab$, skąd $(x, y) = \pm(a, b)$. Zatem jeśli ograniczymy dziedzinę do dowolnego podzbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, który nie zawiera jednocześnie (x, y) oraz $(-x, -y)$, to f będzie dyfeomorfizmem na swój obraz.

Ćwiczenia 20

Twierdzenie o funkcji odwrotnej, dyfeomorfizmy

Zadanie 1.
Sprawdź, czy przekształcenie $f(x,y) = (e^{x+y} + e^{x-y},\ e^{x+y} - e^{x-y})$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2$ na obraz.

Rozwiązanie:
Zbadajmy różnowartościowość f. Mamy $f(x,y) = f(a,b)$, gdy

$$e^{x+y} + e^{x-y} = e^{a+b} + e^{a-b} \qquad e^{x+y} - e^{x-y} = e^{a+b} - e^{a-b}$$

Dodając i odejmując równości stronami mamy

$$e^{x+y} = e^{a+b} \qquad e^{x-y} = e^{a-b}$$

skąd, jako że $\exp(x)$ jest funkcją różnowartościową, mamy

$$x + y = a + b \qquad x - y = a - b$$

więc ostatecznie $(x,y) = (a,b)$. Funkcja f jest więc bijekcją na swój obraz. Dalej, macierz pochodnej f wynosi

$$df = \begin{bmatrix} e^{x+y} + e^{x-y} & e^{x+y} - e^{x-y} \\ e^{x+y} - e^{x-y} & e^{x+y} + e^{x-y} \end{bmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy

$$(e^{x+y} + e^{x-y})^2 + (e^{x+y} - e^{x-y})^2 = 4e^{x+y}e^{x-y} = 4e^{2x} \neq 0$$

zatem f jest dyfeomorfizmem.

Zadanie 2.
Skonstruuj dyfeomorfizm

a) odcinka $(0,1)$ na $\mathbb{R}$

b) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na otwartą kulę jednostkową $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

c) otwartego kwadratu $K = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ na $\mathbb{R}^2$

d) otwartego kwadratu $K = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ na otwarte koło $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

e) płaszczyzny bez punktu $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ na płaszczyznę bez koła $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

f) wnętrza trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ na kwadrat $K = \{(x,y) \mid |x| < 1,\ |y| < 1\}$

g) otwartego prostokąta $P = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 3\}$ na otwarte półkole $B' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$

h) zbioru $A = \{(x,y) \mid 0 < x < y\}$ na półpłaszczyznę $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

i) zbioru $B = \{(x,y) \mid x > 0,\ x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4}\}$

Rozwiązanie:

a) Dyfeomorfizm zadamy wzorem

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

Pochodna funkcji wynosi

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{(x-1)x}$$

i jest niezerowa na $(0, 1)$, zatem jako że f jest różnowartościowe, to f jest dyfeomorfizmem na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej.

c) Każdy z odcinków rozciągamy w poziomie na $\mathbb{R}$, a następnie każdy odcinek w pionie również rozciągamy na $\mathbb{R}$. Dyfeomorfizm zadany będzie wzorem

$$f(x, y) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right), \tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$$

Pochodna funkcji wynosi

$$df = \frac{\pi}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}y\right)} \end{bmatrix}$$

i jest niezerowa na $(-1, 1)^2$, zatem f jest dyfeomorfizmem.

d) Kwadrat ściśniemy wzdłuż osi OX otrzymując koło. Dyfeomorfizm zadamy wzorem

$$f(x, y) = \left(x\sqrt{1 - y^2}, y\right)$$

Pochodna tej funkcji wynosi

$$df = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - y^2}x & -\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i jest niezerowa dla $y \in (-1, 1)$. Zatem z twierdzenia o funkcji odwrotnej f jest dyfeomorfizmem.

e) Najprościej jest to zapisać we współrzędnych biegunowych

$$f(r, \theta) = (r + 1, \theta)$$

lub w kartezjańskich

$$f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}x, \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}y\right)$$

Jest to oczywiście dyfeomorfizm.

f) Najpierw rozciągamy trójkąt wzdłuż osi OX do kwadratu $(0, 1)^2$, a następnie odpowiednio skalujemy kwadrat i przesuwamy tak, aby środek miał w punkcie $(0, 0)$. Dyfeomorfizm będzie złożeniem więc dwóch dyfeomorfizmów

$$f = f_2 \circ f_1 \quad \text{gdzie} \quad f_1(x, y) = \left(\frac{x}{y}, y\right) \quad \text{oraz} \quad f_2(x, y) = (2x - 1, 2x - 1)$$

Oczywiście f_1 i f_2 to dyfeomorfizmy.

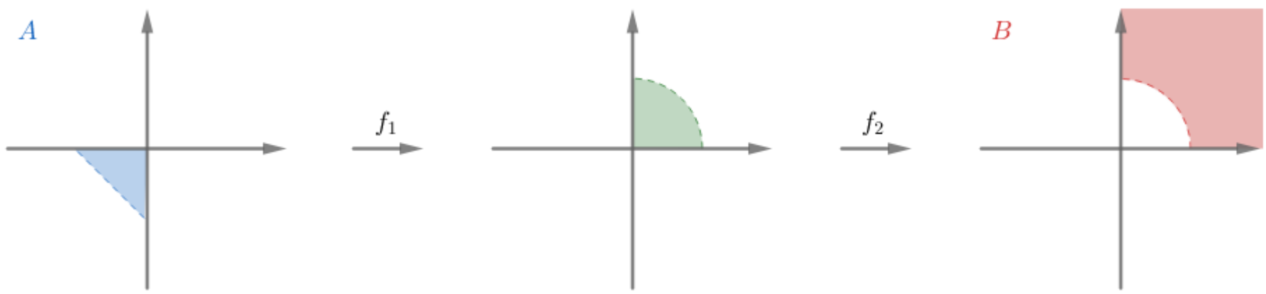
Zadanie 3.
Podać przykład odwzorowania będącego dyfeomorfizmem zbioru

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y < 0,\ x + y > -1\}$$

na zbiór

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v > 0,\ u^2 + v^2 > 1\}$$

Rozwiązanie:
Dyfeomorfizm będzie złożeniem dwóch dyfeomorfizmów. Pierwszy będzie przekształcała trójkąt na ćwiartkę koła, a drugi będzie inwersją względem okręgu jednostkowego, czyli będzie przekształcał ćwiartkę koła na jej dopełnienie.



Mamy

$$f_1(x, y) = \left(-x \cdot \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-y}, -y\right)$$

oraz

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Funkcja f_1 jest bijekcją, co wynika z konstrukcji. Macierz pochodnej wynosi

$$df_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{1-y^2}}{1-y} & \frac{x}{\sqrt{1-y^2}\cdot(1-y)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest to macierz nieosobliwa w rozważanej dziedzinie, zatem z twierdzenia o funkcji odwrotnej jest to dyfeomorfizm. Druga funkcja we współrzędnych biegunowych to

$$f_2(r, \theta) = \left(\frac{1}{r},\ \theta\right)$$

Z konstrukcji widać, że jest to dyfeomorfizm.

Ćwiczenia 21

Elementy teorii miary

Ciała i σ-ciała, miara i miara zewnętrzna

Definicja: Rozważmy zbiór X. Ciałem zbiorów nazywamy rodzinę podzbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ o następujących własnościach

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $X \setminus A \in \mathcal{F}$
3. jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ to $A \cup B \in \mathcal{F}$

Z powyższej definicji łatwo wynika, że każde ciało zbiorów jest zamknięte na branie skończonych sum i skończonych przecięć, a więc jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ to także $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$ oraz $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$.

Definicja: σ-ciałem zbiorów nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ o następujących własnościach

1. $\mathcal{F}$ jest ciałem zbiorów
2. jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$ to również $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Podobnie jak poprzednio łatwo pokazać, że σ-ciało zbiorów jest zamknięte na przeliczalne przecięcia. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną możemy zdefiniować $\mathcal{B}(X)$, czyli σ-ciało zbiorów borelowskich w X, czyli najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte w X.

Zadanie 1.
Wyznacz σ-ciało generowane przez rodzinę złożoną z dwóch danych podzbiorów przestrzeni topologicznej.

Rozwiązanie:
Oczywiście $\emptyset$, X A, B, $A \cup B$, $X \setminus A$, $X \setminus B \in \mathcal{F}$. Natychmiast otrzymujemy, że $X \setminus (A \cup B) \in \mathcal{F}$. Skoro $X \setminus A$ i $X \setminus B$ należą do $\mathcal{F}$, to również

$$X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) = A \cap B \in \mathcal{F}$$

Dalej mamy

$$X \setminus ((X \setminus B) \cup (A \cap B)) = B \setminus A \in \mathcal{F}$$

analogicznie $A \setminus B \in \mathcal{F}$. Stąd również

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B \in \mathcal{F}$$

Dopełnienia wszystkich tych zbiorów również należą do $\mathcal{F}$.

Zadanie 2.
Rozważmy zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i niech

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ lub } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym } \}$$

Rozwiązanie:
Zbiór pusty należy do $\mathcal{F}$, ponieważ jest zbiorem skończonym. Operacja dopełnienia przekształca zbiory skończone na zbiory ko-skończone (i na odwrót). Zatem $\mathcal{F}$ jest zamknięte na dopełnienia. Suma zbiorów skończonych jest skończona, suma zbiorów ko-skończonych jest ko-skończona oraz suma zbioru skończonego i ko-skończonego jest ko-skończona. Zatem $\mathcal{F}$ jest zamknięte na skończone sumy.

$\mathcal{F}$ nie jest σ-ciałem, ponieważ singletony liczb parzystych należą do $\mathcal{F}$, natomiast ich suma, czyli liczby parzyste, nie należy do $\mathcal{F}$.

Zadanie 3.
Wykaż, że rodzina sum (skończona lub nie) przedziałów postaci $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (gdzie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$) jest ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wykaż, że σ-ciało generowane przez tę rodzinę to σ-ciało zbiorów borelowskich.

Rozwiązanie:
Zbiór pusty to $(a, a]$. Dowolna suma przedziałów tej postaci jest również tej postaci (jeśli dwa przedziały nachodzą na siebie lub stykają się końcem to sumują się do większego odcinka tej postaci). Dopełnienie takiego zbioru do $\mathbb{R}$ jest również tej postaci. Zatem rodzina jest zamknięta na skończone operacja sumowania i dopełnień. Jest więc ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$.

Niech $\mathcal{F}$ to σ-ciało generowane przez rozważaną rodzinę. Każdy zbiór w $\mathcal{F}$ jest borelowski, bo każdy przedział $(a, b]$ jest borelowski (na przykład jako suma zbioru otwartego i domkniętego). Wobec czego $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dalej, zbiory borelowskie są generowane przez zbiory otwarte, a te z kolei są przeliczalnymi sumami odcinków otwartych (bo $\mathbb{R}$ jest przestrzenią ośrodkową). Zatem wystarczy pokazać, że każdy odcinek otwarty da się przestawić jako element rozważanego σ-ciała. Mamy

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{F}$$

skąd $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$.

Ćwiczenia 22

Elementy teorii miary

Definicja: Rozważmy zbiór X. Miarą zewnętrzną na X nazywamy funkcję $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ o następujących własnościach

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. jeśli $A \subseteq B$ to $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotoniczność)
3. $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (przeliczalna podaddytywność)

Powiemy, że zbiór $A \subseteq X$ jest μ^*-mierzalny, gdy spełnia następujący warunek Caratheodoty'ego

$$\text{dla dowolnego } Z \subseteq X \text{ zachodzi } \mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

W szczególności łatwo pokazać, że jeśli $\mu^*(A) = 0$, to A jest μ^*-mierzalny. Rodzinę wszystkich podzbiorów μ^*-mierzalnych będziemy oznaczali symbolem $\mathcal{F}(\mu^*)$.

Definicja: Rozważmy σ-ciało $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. Miarą na $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ o następujących własnościach

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów parami rozłącznych to

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad \text{przeliczalna addytywność}$$

Twierdzenie: (Caratheodory'ego) Rozważmy miarę zewnętrzną μ^* na zbiorze X. Wówczas rodzina podzbiorów μ^*-mierzalnych $\mathcal{F}(\mu^*)$ jest σ-ciałem i ponadto miara zewnętrzna μ^* jest miarą na tym σ-ciele.

Zadanie 1.
Niech x będzie elementem zbioru X. Dla dowolnego podzbioru $A \subseteq X$ definiujemy

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in A \\ 0 & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$$

Wykaż, że δ_x jest miarą zewnętrzną i wyznacz σ-ciało zbiorów σ_x-mierzalnych.

Rozwiązanie:
Dla dowolnego $x \in X$, mamy $x \notin \emptyset$, zatem $\delta_x(\emptyset) = 0$. Ustalmy teraz $x \in X$, jeśli $x \in A$, to $x \in B$,

więc mamy $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$. Jeśli $x \notin A$ i $x \notin B$, to $\mu^*(A) = 0 = \mu^*(B)$. Natomiast jeśli $x \notin A$ i $x \in B$, to $\mu^*(A) = 0 < 1 = \mu^*(B)$. Dalej $\delta_x \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$ może być co najwyżej równe 1 z definicji δ_x. Jeśli $\delta_x \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = 1$, to istnieje i takie że $x \in A_i$, a zatem $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \geq 1$. Stąd δ_x jest miarą zewnętrzną.

Zadanie 2.
Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym podzbiorem. Zdefiniujmy dla $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu_X(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } X \subseteq A \\ 0 & \text{gdy } X \not\subseteq A \end{cases}$$

Rozstrzygnij, czy μ_X jest miarą zewnętrzną.

Rozwiązanie:
Mamy $\mu_X(\emptyset) = 0$ bo $X \neq\subseteq \emptyset$. Jeśli $A \subseteq B$, to albo $\mu_X(A) = 0$ i wówczas $\mu_X(A) \leq \mu_X(B)$, albo $\mu_X(A) = 1$, czyli $X \subseteq A$, wówczas $X \subseteq B$, czyli $\mu_X(B) = 1$, więc $\mu_X(A) \leq \mu_X(B)$. Dalej, jeśli $X = \{x\}$, to $\mu_X = \delta_x$, co oczywiście jest miarą zewnętrzną. Jeśli $|X| \geq 2$, to rozpatrzmy punkty a i b oraz podzbiory $A = X \setminus \{a\}$ oraz $B = X \setminus \{b\}$. Wówczas $\mu_X(A) = 0 = \mu_X(B)$, bo $X \not\subseteq A, B$. Z drugiej strony $A \cup B = (X \setminus \{a\}) \cup (X \setminus \{b\}) = X \setminus (\{a\} \cap \{b\}) = X \setminus \emptyset = X$, czyli $X \subseteq A \cup B$, skąd $\mu_X(A \cup B) = 1$. Zatem nie jest spełniona przeliczalna podaddytywność, czyli μ_X nie jest miarą zewnętrzną.

Ćwiczenia 23

Elementy teorii miary

Zbiory miary zero

Definicja: Kostką (bądź przedziałem) w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \prec x_i \prec b_i \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n\}$$

gdzie $\prec$ oznacza dowolną z nierówności $<$ lub $\leq$, zaś $a_i \leq b_i$ są liczbami rzeczywistymi. n-wymiarową miarą kostki nazywamy liczbę

$$\lambda_n(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiorem λ_n-miary zero, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina kostek $(I_s)_{s\in S}$ taka, że $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in S} I_s$ oraz $\sum\limits_{s\in S} \lambda_n(I_s) < \varepsilon$. Innymi słowy, zbiór miary zero to taki, który da się zamknąć w sumie kostek o dowolnie małej mierze.

Zadanie 1.
Wykaż, że następujące zbiory są λ_2-miary zero

a) punkt w $\mathbb{R}^2$

b) odcinek $[0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

c) prosta $x = 0$ w $\mathbb{R}^2$

d) prosta $x = y$ w $\mathbb{R}^2$

Rozwiązanie:

a) Wystarczy zamknąć punkt w kostce o boku długości ε.

b) Wystarczy zamknąć punkt w kostce o boku długości 1 i szerokości ε.

c) Bierzemy ciąg coraz dłuższych i chudszych pudełek, w których zawierają się zbiory $[n, n+1] \times \{0\}$. Takie pudełka to na przykład

$$[n, n+1] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^{|n|+1}}, \frac{\varepsilon}{2^{|n|+1}}\right]$$

suma ich miar wynosi $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|n|}} = 3\varepsilon$.

d) Bierzemy pokrycie jak w poprzednim przykładzie, a następnie każde pudełko dzielimy wzdłuż na kwadraty.

Zadanie 2.
Rozważmy przeliczalną rodzinę podzbiorów $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ w $\mathbb{R}^n$, z których każdy jest l_n-miary zero. Wykaż, że $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ jest również zbiorem l_n-miary zero.

Rozwiązanie:
Ustalmy $\varepsilon > 0$ i przeliczalne pokrycia $I_{i,k}$ zbiorów A_k o sumie miar mniejszej niż $\frac{\varepsilon}{2^k}$, wówczas $\bigcup_k \bigcup_i I_{i,k}$ jest przeliczalnym pokryciem $A = \bigcup_k A_k$ o sumie miar mniejszej niż $\sum\limits_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Zadanie 3.
Wykaż, że zbiór $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ jest λ_1-miary zero.

Rozwiązanie:
Mamy przeliczalną rodzinę punktów, z których każdy jest zbiorem miary zero.

Zadanie 4.
Wykazać, że jeśli zbiór $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ pokryjemy skończoną liczbą przedziałów, to suma długości tych przedziałów jest nie mniejsza niż 1.

Rozwiązanie:
Rozważmy skończoną rodzinę przedziałów $I_i = [a_i, b_i]$. Wówczas $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$ jest sumą rozłącznych przedziałów postaci $[\alpha_1, \beta_1] \cup \ldots \cup [\alpha_k, \beta_k]$. Mamy

$$\lambda_1(I) = \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - \alpha_j) \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Jeśli $\mathbb{Q} \cap (0,1) \subseteq I$, to dopełnienie I nie może zawierać żadnego niepustego przedziału, bo w każdym takim przedziale znajduje się liczba wymierna. Stąd $(0,1) \subseteq I$, a więc $1 \leq \lambda_1(I) \leq \sum\limits_i \lambda_1([a_i, b_i])$.

Zadanie 5.
Rozważmy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wykaż, że jej wykres $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zbiorem λ_2-miary zero.

Rozwiązanie:
Podzielmy wykres na przeliczalnie wiele kawałków, czyli niech A_i to wykres nad odcinkiem $[i, i+1]$ dla $i \in \mathbb{Z}$. Funkcja na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła i przyjmuje na nim swoje kresy. Skoro f jest jednostajnie ciągła, to dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|x - y| < \delta$ to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wówczas wykres $f|_{ii+1}$ możemy zamknąć w pudełka

$$I_k = \left[i + \frac{k}{m},\ i + \frac{k+1}{m}\right] \times \left[f\left(i + \frac{k}{m}\right) - \varepsilon,\ f\left(i + \frac{k}{m}\right) + \varepsilon\right]$$

gdzie $\frac{1}{m} \leq \delta$ i $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Suma miar tego pokrycia wynosi 2ε. Zatem wykres f nad $[i, i+1]$ jest λ_2-miary zero. Dodając przeliczalną liczbę takich zbiorów mamy tezę.

Ćwiczenia 24

Elementy teorii miary

Zadanie 1.
Rozważmy odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 i zbiór λ_n-miary zero $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Wykaż, że obraz $\Phi(A)$ również jest zbiorem λ_n-miary zero.

Rozwiązanie:
Możemy rozważyć Φ na zwartej kostce $K \subseteq \mathbb{R}^n$, bo $\mathbb{R}^n$ jest przeliczalną sumą takich kostek. Skoro K jest zwarte, to z twierdzenia o wartości średniej, dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ mamy

$$||\Phi(x) = \Phi(\mathbf{y})|| \leq C \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

gdzie $C = \sup\limits_{\mathbf{x} \in K} ||f\Phi(\mathbf{x})||$. Zbiór $A \cap K$ pokrywamy przeliczalną rodziną kostek równobocznych I_i o sumie miar mniejszej od ε i średnicach δ_i, czyli

$$\sum_i l_n(I_i) = \sum_i \alpha(\delta_i)^n n \leq \varepsilon$$

gdzie α jest pewną stałą (zależną od geometrii kostki n-wymiarowej). Obrazy kostek mają średnicę nie większą niż $C \cdot \delta_i$, więc można je zawrzeć w kostkach $\widetilde{I_i}$ o średnicy dwa razy większej. Stąd

$$\Phi(A \cap K) \subseteq \bigcup_i \widetilde{I_i}$$

gdzie

$$\sum_i l_n(\widetilde{I_i}) = \sum_i (2 \cdot C)^n \delta_i^n \leq (2 \cdot C)^n \cdot \varepsilon$$

Skąd $\Phi(A \cap K)$ jest l_n-miary zero.

Zadanie 2.
Wykaż, że zbiory $A = \{(x, y) \mid x - y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2,\ r \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ są λ_2-miary zero.

Rozwiązanie:
Zbiór A to przeliczalna suma prostych (bo są to proste o współczynniku wolnym wymiernym), zatem jest miary zero.

Pojedynczy okrąg jest miary zero jako suma dwóch wykresów funkcji ciągłej. Rozważanych okręgów jest przeliczalnie wiele, zatem ich suma jest miary zero.

Zadanie 3.
Niech C oznacza zbiór tych liczb z przedziału $[0, 1]$, które mają rozwinięcie dziesiętne, w którym nie występuje cyfra 3. Wykaż, że C jest zbiorem miary zero. Wykaż, że C jest mocy continuum.

Rozwiązanie:
Niech A_n to zbiór tych liczb, które nie mają trójki wśród pierwszych n wyrazów rozwinięcia dziesiętnego. Na przykład

$$A_1 = [0,\ 0.3) \cup [0.4,\ 1] \quad - \text{ jest zbiorem miary } \frac{9}{10}$$

$$A_2 = \bigcup_{i=0,\ i\neq 3}^{9} [0.i,\ 0,i3) \cup [0.i4,\ 0.(i+1)] \quad - \text{ jest zbiorem miary } \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

Wówczas $C \subseteq A_n \subseteq A_{n-1}$. Mamy więc

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{skąd} \quad \lambda_1(C) = \lambda_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$$

Zadanie 4.
Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb z przedziału $[0,1]$ mających rozwinięcie dwójkowe w którym cyfra 0 nie występuje dwa razy pod rząd. Wykaż, że A jest zbiorem λ_1-miary zero.

Rozwiązanie:
Zbiór A jest podzbiorem tych liczb z odcinka $[0,1]$ w których w rozwinięciu czwórkowym nie występuje cyfra zero. Ten zbiór jest oczywiście miary zero, zatem i zbiór A jest miary zero.

Zadanie 5.
Jaka jest 1-wymiarowa miara zbioru A tych liczb z przedziału $[0,1]$, które mają skończoną liczbę trójek w rozwinięciu dziesiętnym?

Rozwiązanie:

Ćwiczenia 25

Elementy teorii miary

Miara Lebesgue'a, zbiory mierzalne

Definicja: Miarą zewnętrzną Lebesgue'a $\lambda_n^* : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ definiujemy dla dowolnego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jako

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(P_i) \mid A \subseteq P_i,\ P_i \text{ to przedział} \right\}$$

a więc jest to kres dolny miar wszystkich pokryć zbioru A za pomocą przeliczalnej rodziny przedziałów, przy czym miarę przedziału liczymy w standardowy sposób.

Twierdzenie Caratheodory'ego pozwala w oparciu o λ_n^* zdefiniować n-wymiarową miarę Lebesgue'a λ_n określoną na σ-ciele zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a $\lambda_n : \mathcal{L}\ \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$.

Własności miary Lebesgue'a:

- Każdy zbiór mierzalny jest sumą mnogości ową zbioru borelowskiego i zbioru miary zero

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$$

- Każdy zbiór mierzalny możemy przybliżyć z dowolną dokładnością z góry zbiorem otwartym, a z dołu zbiorem domkniętym. A więc dla każdego $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiory $F \subseteq A \subseteq G$, przy czym F jest domknięty, a G jest otwarty takie, że

$$\lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon$$

- Każdy zbiór mierzalny możemy przybliżyć z góry zbiorem typu G_δ (przecięciem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych) a z dołu zbiorem typu F_δ (przeliczalnej sumy zbiorów domkniętych) z dokładnością do zbioru miary zero. A więc dla każdego $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ istnieją zbiory $F'A \subseteq G'$, przy czym F' jest typu F_δ, a G' jest typu G_δ takie że

$$\lambda_n(G' \setminus A) = 0 = \lambda(A \setminus F')$$

Zadanie 1.
Wykaż, że zbiór

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)} \right] \setminus \mathbb{Q}$$

jest borelowski i oblicz jego miarę Lebesgue'a.

Rozwiązanie:
Zbiór A jest borelowski, ponieważ przedziały i singletony z $\mathbb{Q}$ są domknięte, a więc zbiór A powstaje przez przeliczalne operacje teorio-mnogościowe na zbiorach domkniętych. Dalej, zbiór $\mathbb{Q}$ jest miary

zero, zatem jego usunięcie nie wpływa na miarę zbioru A. Przedziały $\left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}\right]$ są parami rozłączne i każdy z nich ma miarę $\frac{1}{\ln(n+1)}$, skąd korzystając z przeliczalnej addytywności, mamy

$$\lambda_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1\left(\left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = +\infty$$

Zadanie 2.
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wykaż, że zbiory

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid$ granica ciągu $f_n(x)$ jest liczbą wymierną $\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid$ ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny $\}$

są borelowskie.

Rozwiązanie:

a) Ustalmy $q \in \mathbb{Q}$. Ciąg funkcyjny $f_n(x)$ jest zbieżny do q wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_M\ \forall_{n\in\mathbb{N},\ n>M}\ |f_n(x) - q| < \varepsilon$$

W szczególności dana nierówność zachodzi dla $\varepsilon = \frac{1}{k}$ oraz możemy przyjąć, że $M \in \mathbb{N}$, wówczas mamy

$$\{x \mid f_n(x) \to q\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{M\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in M} \left\{x \mid |f_n(x) - q| < \frac{1}{k}\right\}$$

Każdy ze zbiorów $\left\{x \mid |f_n(x) - q| < \frac{1}{k}\right\}$ jest otwarty (wynika to z ciągłości f_n), zatem jako że wykonujemy przeliczalnie wiele operacji teoriomnogościowe, to $\{x \mid f_n(x) \to q\}$ jest borelowskim zbiorem. Stąd

$$A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \mid f_n(x) \to q\}$$

jest również zbiorem borelowskim jako przeliczalna suma zbiorów borelowskich.

b) Zbiór B możemy przedstawić jako

$$B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{M\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>M} \{x \mid f_n(x) > k\}$$

co jest zbiorem borelowskim, bo $\{x \mid f_n(x) > k\}$ jest zbiorem otwartym.

c) Z warunku Cauchy'ego wiemy, że ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ \exists_{M\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n>M}\ |f_n(x) - f_m(x)| M \frac{1}{k}$$

czyli zbiór C możemy przedstawić jako

$$C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{M\in N} \bigcap_{m,n>M} \left\{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

skąd również zbiór C jest borelowski.

Ćwiczenia 26

Elementy teorii miary

Funkcje mierzalne

Definicja: Funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \overline{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nazywamy mierzalną (w sensie Lebesgue'a) gdy dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zbiór

$$f^{-1}((a, +\infty]) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) > a\}$$

jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Własności:

- funkcja f jest mierzalna w sensie Lebesgue'a gdy dla każdego zbioru borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
- jeśli $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcją mierzalną, to złożenie $f(g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną
- jeśli $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne i $\lambda \in \mathbb{R}$, to również $\lambda f,\ f+g,\ f-g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$ (o ile $g \neq 0$ w $\mathbb{R}^n$), a także $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ są mierzalne
- jeśli $f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych to również $\sup_i\{f_i\}$, $\inf_i\{f_i\}$ są mierzalne
- jeśli $f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnym punktowo do funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ to również f jest funckją mierzalną

Ćwiczenia 27

Całka Lebesgue'a

W założeniach wielu twierdzeń dotyczących całki pojawia się warunek że rozważana funkcja jest całkowalna. Poniżej znajduje się kilka narzędzi, które pozwalają na sprawdzenie całkowalności danej funkcji mierzalnej $f : E \to \overline{R}$, gdzie $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Inaczej mówiąc, w przypadku funkcji mierzalnych nieujemnych, możemy liczyć całkę znanymi nam metodami (jako całka Riemanna lub korzystając z twierdzenia Fubiniego) nie przejmując się czy funkcja była całkowalna czy nie.

- Funkcja f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na E wtedy i tylko wtedy, gdy jej moduł $|f|$ jest całkowalny na E w sensie Lebesgue'a.

- Jeśli możemy ograniczyć f z góry i z dołu przez inną funkcję całkowalną g to f jest całkowalna. To znaczy, jeśli $|f| < g$ i g jest całkowalna to f też jest całkowalna. Wynika to łatwo z twierdzenia Labesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

- Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieujemna na przedziale $[a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (a lub b mogą być nieskończone) i całka Riemanna $\int_a^b f(x)dx$ jest skończona (odpowiednio nieskończona) to f jest całkowalna (odpowiednio niecałkowalna) w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$. Dla funkcji dowolnego znaku nie musi to być prawdą.

- Jeśli $f : \mathbb{R} \to \overline{R}$, gdzie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ jest mierzalna i nieujemna oraz $\int_E f \, d\lambda_n$ policzona z twierdzenia Fubiniego jest skończona (odpowiednio nieskończona) to f jest całkowalna (odpowiednio niecałkowalna) na E. W przypadku funkcji dowolnego znaku może się zdarzyć, że twierdzenie Fubini'ego daje skończoną wartość całki, ale funkcja jest niecałkowalna.

Przejścia graniczne w całce Lebesgue'a

Konstrukcja całki Lebesgue'a umożliwia przechodzenie do granicy pod znakiem całki o ile umiemy kontrolować ciąg funkcji podcałkowych.

Twierdzenie: (Lebesgue'a o zbieżności) Niech $f_n : \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnych punktowo do $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

- Jeśli ciąg f_n jest nieujemny i rosnący, to znaczy $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ (ewentualnie f_n jest rosnący i f_1 jest całkowalna)

- Jeśli funkcję f_n są wspólnie ograniczone przez funkcję g całkowalną w sensie Lebesgue'a (tak zwaną majorantę) to znaczy $|f_n(x)| < g(x)$ dla każdego $x \in E$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \int_E f$$

W szczególności w drugim przypadku f jest funkcją całkowalną. W pierwszym przypadku mówimy o zbieżności monotonicznej, a drugim o zbieżności zmajoryzowanej.

Zadanie 1.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx$$

Rozwiązanie:
Na odcinku $[0,1]$ mamy ciąg rosnący, więc możemy skorzystać z twierdzenia o zbieżności monotonicznej. Na odcinku $[1,+\infty)$ mamy funkcję malejącą punktowo do zera i począwszy od f_2 możemy te funkcje ograniczyć przez funkcję całkowalną $\frac{1}{x^2}$. Z twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności, możemy więc przejść z granicą pod całkę. Granicą punktową będzie więc funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 1 \\ 0 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

której całka wynosi 1.

Zadanie 2.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to 0} \int_0^\infty (1+x^{2n})^{-\frac{1}{n}} dx$$

Rozwiązanie:
Są to funkcje ciągłe, a więc i mierzalne. Zauważmy, że

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}} \leq \begin{cases} 1 & \text{dla } [0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

zatem możemy skorzystać z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Funkcja podcałkowa zbiega do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } [0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

jest to funkcja całkowalna (w niewłaściwym sensie Riemanna) i jej całka wynosi 2.

Zadanie 3.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) dx$$

Rozwiązanie:
Całki $\int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)dx$ są oczywiście stale równe 1, natomiast granicą punktową (po wciągnięciu n pod całkę) jest funkcja stale równa 0. Nie są spełnione więc założenia twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej.

Zadanie 4.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \chi_{[0,n]}(x) \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

Funkcja $f_n = \chi_{[0,n]}(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ jest mierzalna jako iloczyn funkcji mierzalnej i ciągłej. Granicą punktową f_n jest e^{-x}. Funkcja $\chi_{[0,n]}(x)$ jest rosnącym ciągiem funkcji, ponadto $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest również rosnące, zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, możemy przejść z granicą pod znak całki

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

Zadanie 5.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2\pi n}^{2\pi n}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp(-2x^2)dx$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2\pi n}^{2\pi n} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-2\pi n,2\pi n]}(x)f_n(x)dx$$

Funkcje f_n są ciągłe i χ jest mierzalna (bo przedziały są mierzalne), zatem iloczyn tych funkcji jest mierzalny. Graniczną punktową f_n jest

$$\exp(x^2)\cdot 1\cdot\exp(-2x^2) = \exp(-x^2)$$

jest to również majoranta funkcji. Funkcja $\exp(-x^2)$ jest całkowalna, ponieważ jest ograniczona przez funkcje całkowalne $\exp(-x^2) < \exp(-|x|)$ dla $|x| > 1$ oraz $\exp(-x^2) < 1$ dla $|x| < 1$. Możemy więc skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2\pi n}^{2\pi n} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\chi_{[-2\pi n,2\pi n]}(x)f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$$

Ćwiczenia 28

Całka Lebesgue'a

Twierdzenie Fubini'ego i twierdzenie o zamianie zmiennych

Twierdzenie: (Fubini'ego) Niech $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a (lub niech będzie funkcją mierzalną nieujemną). Wówczas funkcja $x \mapsto f(x, y)$ jest λ_n-mierzalna dla punktów w $y \in \mathbb{R}^k$, zaś funkcja $y \mapsto f(x, y)$ jest λ_k-mierzalna dla punktów w $x \in \mathbb{R}^n$. Ponadto

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\ d\lambda_n(x) \right)\ d\lambda_k(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)\ d\lambda_k(y) \right)\ d\lambda_n(x)$$

Innymi słowy całkowanie po parze zmiennych (x, y) sprowadza się do iterowania całkowania (w dowolnej kolejności) po każdej ze zmiennych z osobna.

Zadanie 1.
Oblicz całkę

$$\int_{[1,2]\times[0,3]} e^{2x-y} d^2(x, y)$$

Rozwiązanie:
Funkcja f jest ciągła (a więc mierzalna) i nieujemna, zatem możemy zastosować twierdzenie Fubini'ego. Mamy więc

$$\int_{[1,2]\times[0,3]} e^{2x-y} d^2(x, y) = \int_1^2 \left(\int_0^3 e^{2x-y} dy \right)\ dx = \int_1^2 e^{2x} dx \cdot \int_0^3 e^{-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^2 \cdot (-e^{-y}) \Big|_0^3 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) \cdot \left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

Zadanie 2.
Oblicz całkę

$$\int_{x^2+y^2\leq y} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} d^2(x, y)$$

Rozwiązanie:
Moduł funkcji podcałkowej jest ograniczony przez 1, a zbiór po którym całkujemy jest ograniczony i mierzalny (otwarty). Możemy więc ograniczyć rozważaną funkcję z góry przez funkcję charakterystyczną zbioru po którym całkujemy, bo jego miara jest skończona. Zatem możemy skorzystać z twierdzenia Fubini'ego. Nierówność $x^2+y^2 \leq y$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $y-y^2 > 0$, co prowadzi do $y \in (0, 1)$ i wówczas $x \in [-\sqrt{y-y^2}, \ \sqrt{y-y^2}]$. Stąd

$$\int_{x^2+y^2\leq y} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} d^2(x, y) = \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x^2+y^2} \ \Big|_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \right] dy = \int_0^1 0 dy = 0$$

Ćwiczenia 29

Całka Lebesgue'a

Twierdzenie: (O zamianie zmiennych w całce) Niech $\Phi : E \to \Phi(E)$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 pomiędzy zbiorami otwartymi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\Phi(E) \subseteq \mathbb{R}^n$. Niech $f : \Phi(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją całkowalną na $\Phi(E)$, wówczas

$$\int_{\Phi(E)} f(\mathbf{x})\ d\lambda_n(\mathbf{x}) = \int_E f(\Phi(\mathbf{y})) \cdot |\det d_{\mathbf{y}}\Phi|\ d\lambda_n(\mathbf{y})$$

Powyższe twierdzenie pozwala wyrazić całkę funkcji f zmiennych $\mathbf{x}$ w nowych zmiennych $\mathbf{y} = \Phi^{-1}(\mathbf{x})$. Przy okazji takiej zamiany zmiennych musimy odpowiednio zmienić zbiór po którym całkujemy i dopisać czynnik skalujący $|\det d\Phi|$, który mówi jak zmienia się miara przy dyfeomorfizmie.

Zadanie 3.
Oblicz całkę

$$\int_{x^2+y^2\leq y} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ d^2(x,y)$$

używając podstawienia biegunowego.

Rozwiązanie:
Niech $\Phi(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$, czyli stosujemy podstawienie biegunowe $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$, wówczas

$$A = \{(r,\theta) \mid r^2 < r\sin\theta\}$$

oraz

$$\Phi(A) = \{\Phi(r,\theta) \mid r^2 < r\sin\theta\} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r^2 < r\sin\theta\} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < y\}$$

Mamy więc dla $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\int_{\Phi(A)} f(x,y)d^2(x,y) = \int_A f(\Phi(r,\theta)) \cdot |\det d_{(r,\theta)}\Phi|\ d^2(r,\theta)$$

Jakobian przekształcenia biegunowego to

$$|\det d_{(r,\theta)}\Phi| = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\sin\theta \end{bmatrix} = r$$

zatem

$$\int_A f(\Phi(r,\theta)) \cdot |\det d_{(r,\theta)}\Phi|\ d^2(r,\theta) = \int_{r<\sin\theta} \frac{r\cos\theta}{r} \cdot r\ d^2(r,\theta) = \int_{r<\sin\theta} r\cos\theta\ d^2(r,\theta) =$$

$$= \int_0^\pi \left[\int_0^{\sin\theta} r\cos\theta\ dr\right]\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \cos\theta\ d\theta = \frac{1}{6}\sin^3\theta\Big|_0^\pi = 0$$

Zadanie 4.
Oblicz całkę

$$\int_{|x-y|<1} \exp(-|x_y|)\ d^2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Funkcja podcałkowa jest mierzalna (bo jest ciągła) i nieujemna, zatem możemy zastosować twierdzenie Fubini'ego. Podstawmy $z = x-y$ oraz $t = x+y$, wówczas $x = \frac{z+t}{2}$ oraz $y = \frac{t-z}{2}$. Mamy więc zamianę zmiennych $\Phi(z,t) = \left(\frac{z+t}{2}, \frac{t-z}{2}\right)$. Jakobian tego przekształcenia to $\frac{1}{2}$. Stosując twierdzenie o zamianie zmiennych mamy

$$\int_{|x-y|<1} \exp(-|x_y|)\ d\lambda^2(x,y) = \int_{|z|<1} \exp(-|t|) \cdot \frac{1}{2}\ d^2(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|)\ dt\ dz =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|t|)\ dt \cdot \int_{-1}^{1} dz = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\infty} \exp(-t)\ dt \cdot 2 = 2 \cdot (-\exp(-t))\Big|_0^{\infty} = 2 \cdot 1 = 2$$