ANALIZA MATEMATYCZNA II.2

Marysia Nazarczuk

Błędy, uwagi, alternatywne rozwiązania, rozwiązania brakujących zadań
lub innych zadań proszę zgłaszać na maila mn417755@students.mimuw.edu.pl

Ćwiczenia 1

Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności

Twierdzenie: (Lebesgue'a o zbieżności) Niech $f_n : \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnych punktowo do $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

- Jeśli ciąg f_n jest nieujemny i rosnący, to znaczy $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ (ewentualnie f_n jest rosnący i f_1 jest całkowalna)
- Jeśli funkcję f_n są wspólnie ograniczone przez funkcję g całkowalną w sensie Lebesgue'a (tak zwaną majorantę) to znaczy $|f_n(x)| < g(x)$ dla każdego $x \in E$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \int_E f$$

W szczególności w drugim przypadku f jest funkcją całkowalną. W pierwszym przypadku mówimy o zbieżności monotonicznej, a drugim o zbieżności zmajoryzowanej.

Zadanie 1.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{1}{x^2 \ln(1 + \frac{x}{n})}\, dx$$

Rozwiązanie:
Niech

$$f_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2 \ln(1 + \frac{x}{n})}$$

zatem jako, że $\ln(1+a) \geq \frac{a}{1+a}$, to mamy

$$f_n(x) \leq \frac{1}{nx^2} \cdot \frac{1 + \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \frac{1 + \frac{x}{n}}{x^3} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

Funkcja ograniczająca jest całkowalna na $[1, +\infty)$, zatem możemy zastosować twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej. Granicą punktową jest

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2 \ln(1 + \frac{x}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 \ln(1 + \frac{x}{n})^n} = \frac{1}{x^3}$$

zatem f_n całkuje się do $\frac{1}{2}$.

Zadanie 2.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{nx + x^5 + 1}\, dx$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $f_n(x) = \frac{n}{nx+x^5+1}$ jest ciągiem rosnącym do $f(x) = \frac{1}{x}$, co nie jest całkowalne. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{nx + x^5 + 1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = +\infty$$

Zadanie 3.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\ln(x^n + 2^n)}{nx^2}\, dx$$

Rozwiązanie. *Niech $f_n(x) = \frac{\ln(x^n+2^n)}{nx^2}$. Aby obliczyć granicę punktową szacujemy:*

$$\frac{\ln\max\{x,2\}}{x^2} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\ln 2 + n\ln\max\{x,2\}}{nx^2}.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\ln\max\{x,2\}}{x^2}$$

Poprzednie oszacowania pokazują, że (całkowalną) majorantą jest

$$\frac{\ln 2}{x^2} + \frac{\ln\max\{x,2\}}{x^2}.$$

Stosujemy twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej i mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\ln(x^n+2^n)}{nx^2}dx = \int_1^\infty \frac{\ln\max\{x,2\}}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{\ln 2}{x^2}dx + \int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx =$$

$$\ln 2[-x^{-1}]_1^2 + \int_2^\infty \ln x(-x^{-1})'dx = \ln 2\cdot(-\frac{1}{2}+1) + \left[\ln x(-x^{-1})\right]_2^\infty - \int_2^\infty \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \left[-x^{-1}\right]_2^\infty = \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Zadanie 4.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{\exp(x^2+y^2+z^2)}{n\sin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n}\right)}\, d\lambda_3(x,y,z)$$

gdzie $A = \{(x,y,z) \mid 0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \sqrt[3]{z}\}$.

Rozwiązanie:
Używając podstawienia sferycznego mamy

$$\int_A \frac{\exp(x^2+y^2+z^2)}{n\sin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n}\right)}\, d^3(x,y,z) = \int_{r^2<\sin\beta} \frac{\exp(r^2)}{n\sin\left(\frac{r}{n}\right)}\cdot r^2\cos\beta\, d^3(r,\theta,\beta) =$$

$$= \int_{r^2<\sin\beta} \frac{\exp(r^2)}{\frac{\sin\left(\frac{r}{n}\right)}{\frac{r}{n}}} \cdot r\cos\beta \; d^3(r,\theta,\beta)$$

Mamy $\frac{\sin(n)}{n} \overset{n\to 0}{\to} 1$, zatem możemy ograniczyć funkcję podcałkową przez $2\cdot\exp(r^2)\cdot r\cos\beta$. Funkcja $f(\Phi)\cdot|\det\Phi|$ jest mierzalna, ponieważ jest ciągła i jest nieujemna, a zbiór $\Phi^{-1}(A)$ jest mierzalny, bo jest otwarty, zatem możemy zastosować twierdzenie Fubini'ego (mamy $z>0$, zatem $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$)

$$\int_{r^2<\sin\beta} 2\cdot\exp(r^2)\cdot r\cos\beta \; d^3(r,\theta,\beta) = 2\cdot\int_0^{2\pi} 1\, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta \cdot \int_0^{\sqrt{\sin\beta}} e^{r^2}\cdot r\; dr\; d\beta =$$

$$= 2\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\cdot\left(\frac{1}{2}e^{r^2}r\Big|_0^{\sqrt{\sin\beta}}\right)\, d\beta = 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin\beta}-1\right)\cdot\cos\beta\; d\beta = 2\cdot\pi(e-2)$$

stąd funkcja $2\cdot\exp(r^2)\cdot r\cos\beta$ jest całkowalna na rozważanym zbiorze, wiec na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, przejście graniczne pod znakiem całki jest dozwolone i stąd

$$\lim_{n\to\infty}\int_{r^2<\sin\beta} \frac{\exp(r^2)}{\frac{\sin\left(\frac{r}{n}\right)}{\frac{r}{n}}} \cdot r\cos\beta \; d^3(r,\theta,\beta) = \int_{r^2<\sin\beta} \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(r^2)}{\frac{\sin\left(\frac{r}{n}\right)}{\frac{r}{n}}} \cdot r\cos\beta \; d^3(r,\theta,\beta) =$$

$$= \int_{r^2<\sin\beta} \exp(r^2)\cdot r\cos\beta\; d^3(r,\theta,\beta) = \pi(e-2)$$

Zadanie 5.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(x^n+y^n)\; d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Po zamianie na współrzędne biegunowe (r,α) mamy

$$\int_{\{r^2\le 1\}} \frac{\ln(r^2)}{r}\cdot r^n\cdot(\cos^n\alpha+\sin^n\alpha)\cdot r\; d\lambda_2(r,\alpha)$$

Funkcję podcałkową możemy ograniczyć przez funkcję $\ln(r^2)\cdot 2r^n$, która jest ciągła i ograniczona, a więc jest całkowalna na zbiorze $[0,1]\times[0,2\pi]\ni(r,\alpha)$. Z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej możemy więc przejść do granicy punktowej i mamy

$$\int_{\{r^2\le 1\}} \frac{\ln(r^2)}{r}\cdot r^n\cdot(\cos^n\alpha+\sin^n\alpha)\cdot r\; d\lambda_2(r,\alpha) = 0$$

Zadanie 6.
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^z}{n^2\left(1-\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n}\right)\right)}\; d\lambda_3(x,y,z)$$

gdzie $A = \{(x, y, z) \mid z^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 3z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z > 0\}$.

Zadanie 7.
Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{e^{-z}(x+y)^{n+1}}{1+(x+y)^n}\ d\lambda_3(x, y, z)$$

gdzie $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < x + y,\ z > 0\}$.

Rozwiązanie. *Niech* $f_n(x, y, z) = \frac{e^{-z}(x+y)^{n+1}}{1+(x+y)^n}$. *Z założeń o* W *mamy* $x + y > 0$ *i wobec tego możemy łatwo policzyć granicę punktową:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y, z) = \begin{cases} 0 & x + y < 1 \\ (x+y)e^{-z} & x + y > 1 \end{cases}$$

Z definicji naszego zbioru W *otrzymujemy* $(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$. *Zatem funkcja graniczna jest całkowalna (zarówno* x *jak i* y *mają ograniczony zakres zmienności ze względu na wspomnianą nierówność). Oczywiście zachodzi również nierówność* $\frac{(x+y)^n}{1+(x+y)^n} \leqslant 1$, *więc funkcja* $(x + y)e^{-z}$ *jest majorantą. Stosując twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej zostaje nam do policzenia całka:*

$$\int_{\widetilde{W}} (x+y)e^{-z} dx dy dz,$$

gdzie $\widetilde{W} = \{(x, y, z) : (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2},\ x + y > 1,\ z > 0\}$. *Z twierdzenia Fubiniego możemy łatwo pozbyć się całkowania po* z*:*

$$\int_{\widetilde{W}} (x+y)e^{-z} dx dy dz = \left(\int_0^\infty e^{-z} dz\right) \int_V (x+y) dx dy = \int_V (x+y) dx dy,$$

gdzie $V = \{(x, y) : (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2},\ x + y > 1\}$. *Możemy teraz zastosować współrzędne biegunowe, ale bez problemu scałkujemy nasze wyrażenie po zbiorze* V *wprost z twierdzenia Fubiniego korzystając z własności geometrycznych naszego zbioru:*

$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{2}} (x+y) dy\right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(x\left(\sqrt{\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2} - (1-x)\right) + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^{\sqrt{\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{2}}\right) dx.$$

I tak dalej.

Zadanie 8.

Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \cdot e^{-4x-22y}\, d\lambda_2(x,y)$$

gdzie $A = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$.

Rozwiązanie. *Niech $f_n(x,y) = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n e^{-4x-22y}$. Korzystając ze znanych faktów z analizy 1 sprawdzamy łatwo, że ten ciąg jest rosnący (na zbiorze A) i zbiega do funkcji $e^{-3x-21y}$. Możemy wobec tego zastosować twierdzenie o zbieżności monotonicznej i policzyć:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n e^{-4x-22y} dxdy =$$
$$\int_A e^{-3x-21y} dxdy = \int_0^\infty e^{-3x}dx \cdot \int_0^\infty e^{-21y}dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{21} = \frac{1}{63},$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia Fubiniego.

Zadanie 9.
Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_a^b \frac{f(y)}{1+n^2(x-y)^2}\, dy = f(x)$$

oraz że zbieżność jest niemal jednostajna na (a,b), czyli jednostajna na każdym zwartym podzbiorze (a,b).

Zadanie 10.
Niech $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x < 2y < 4x,\ 1-y < 3x < 3-3x\}$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \sqrt[n]{x^{-3n}+y^{-3n}}\, d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie. *Niech*

$$f_n(x,y) = \sqrt[n]{x^{-3n}+y^{-3n}}.$$

Oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = \max\{x^{-3},y^{-3}\} = (\min\{x,y\})^{-3}.$$

Ponadto

$$f_n(x,y) = \sqrt[n]{x^{-3n} + y^{-3n}} \leqslant 2\left(\min\{x,y\}\right)^{-3}.$$

Rysując nasz zbiór lub rozwiązując stosowne nierówności sprawdzamy, że dla $(x,y) \in A$ *mamy* $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}$ *oraz* $\frac{1}{7} < y < \frac{2}{3}$. *Zatem funkcja* $2\left(\min\{x,y\}\right)^{-3}$ *jest całkowalna na* A *i możemy skorzystać z twierdzenia o zbieżności zmajoryzownej. Samo policzenie całki pozostawiam jako ćwiczenie.*

Zadanie 11.
Znaleźć granicę całek

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n^2 \cdot \left(1 - \cos(\frac{1}{n} \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2})\right)}\, d\lambda_3(x,y,z)$$

gdzie $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

Rozwiązanie. *Niech* $f_n(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right)}$. *Dla uproszczenia, niech* $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Liczymy granicę:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n^2(1-\cos\frac{r}{n})} = \frac{r}{2n^2\sin^2\frac{r}{2n}} = \frac{r}{\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{r}{2n}}{\frac{r^2}{4n^2}}} \to \frac{2}{r}.$$

W naszym zbiorze $r \in (0,1)$, *więc do oszacowania* $f_n(r)$ *zastosoujemy znaną z analizy 1 nierówność* $\sin x \geqslant \frac{\pi}{2}x$, *co daje*

$$f_n(r) = \frac{r}{2n^2\sin^2\frac{r}{2n}} \leqslant \frac{r}{2n^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{2n}\right)^2} = \frac{8}{\pi^2 r}.$$

Ta ostatnia funkcja jest całkowalna, więc możemy zastosować twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej, aby otrzymać:

$$\lim_{n\to\infty}\int_V \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right)}dxdydz = 2\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz.$$

Teraz stosujemy podstawienie sferyczne i mamy:

$$2\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r}\cdot r^2\cos\beta d\beta d\alpha dr = 4\pi\int_0^1 rdr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\beta d\beta =$$
$$= 4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = 4\pi.$$

Zadanie 12.
Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykaż, że

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^\infty \frac{y \cdot f(x)}{x^2 + y^2}\ dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

Ćwiczenia 2

Różniczkowanie pod znakiem całki

Twierdzenie: (Różniczkowanie pod znakiem całki) Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym, $I \subseteq \mathbb{R}$ otwartym podzbiorem prostej $\mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja $f : I \times A \to \mathbb{R}$ ma następujące własności:

- dla każdego $t \in I$ funkcja $f(t, \cdot) : A \to \mathbb{R}$ jest całkowalna
- funkcja $f(t, \mathbf{x})$ jest różniczkowalna względem zmiennej t
- istnieje funkcja całkowalna $g : A \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $t \in I$ zachodzi $|\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x})| \leq g(x)$

Wówczas możemy różniczkować f pod znakiem całki, to znaczy

$$\frac{d}{dt}\left[\int_A f(t, \mathbf{x})\ d\lambda^n(\mathbf{x})\right] = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x})\ d\lambda^n(\mathbf{x})$$

Zadanie 1.
Udowodnij twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Rozwiązanie:
Z liniowości całki mamy

$$\frac{d}{dt}\left[\int_A f(t, \mathbf{x})\ d\lambda^n(\mathbf{x})\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_A f(t+h, \mathbf{x})\ d\lambda^n(\mathbf{x}) - \int_A f(t, \mathbf{x})\ d\lambda^n(\mathbf{x})\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_A \frac{f(t+h, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x})}{h}\ d\lambda^n(\mathbf{x})$$

Granicą punktową funkcji podcałkowej jest $\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x})$. Z twierdzenia o wartości średniej

$$\frac{f(t+h, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x})}{h} = \frac{\partial}{\partial t} f(t', \mathbf{x})$$

dla pewnego $t' \in [t, t+h]$. Z założenia mamy majorantę $|\frac{\partial}{\partial t} f(t', \mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$, skąd na mocy twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, możemy wykonać przejście graniczne otrzymując tezę.

Zadanie 2.
Dla $t > 0$ i

$$F(t) = \int_0^1 \ln(x^2 + t^2)\ dx \quad \text{oraz} \quad f(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2 + t^2)\ dx$$

sprawdź, że $F'(t) = f(t)$. Sprawdź, czy w rozważanej sytuacji spełnione są założenia twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Rozwiązanie:
Pierwszą całkę policzymy, całkując przez części

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^1 \ln(x^2+t^2)\ dx = \left\| \begin{array}{c|c} f=\ln(x^2+t^2) & g=x \\ df = \frac{2x}{x^2+t^2}\ dx & dg = dx \end{array} \right\| = \\
&= x\cdot \ln(x^2+t^2)\ \Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot \frac{2x}{x^2+t^2}\ dx = \ln(1+t^2) - 2\int_0^1 1 - \frac{t^2}{x^2+t^2}\ dx = \\
&= \left\| \begin{array}{c} y = \frac{x}{t} \\ dy = \frac{1}{t}dx \end{array} \right\| = \ln(1+t^2) - 2 + 2\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{1}{y^2+1} t\ dy = \ln(1+t^2) - 2 + 2t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}$$

Policzmy teraz drugą całkę

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\ln(x^2+t^2)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}\cdot 2t\ dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}\cdot\frac{2}{t}\ dx = \left\| \begin{array}{c} y = \frac{x}{t} \\ dy = \frac{1}{t}dx \end{array} \right\| = \\
&= \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{2}{t}\cdot t\ dy = 2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}$$

Różniczkowanie pierwszego wyrażenia da nam

$$F'(t) = \frac{2t}{1+t^2} + 2\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + 2t\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

Zatem oczywiście $F'(t) = f(t)$. W rozważanej sytuacji spełnione są (lokalnie) założenia twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki. Jeśli $t_1 > t > t_0 > 0$, to wówczas

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\ln(x^2+t^2)\right| = \left|\frac{2t}{x^2+t^2}\right| < \frac{2t_1}{t_0^2}$$

Prawa strona jest funkcją całkowalną zmiennej x na przedziale $[0,1]$, stąd na każdym ograniczonym przedziale $(t_0,t_1)\subseteq\mathbb{R}_+$ możemy różniczkować pod znakiem całki, a więc możemy różniczkować na całym $\mathbb{R}_+$.

Zadanie 3.
Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna i jej pochodna f' jest ograniczona na $[a,b]$. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wykaż, że

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$$

Rozwiązanie:
Rozważmy całkę $\int_a^{b-h}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ dx$. Granicą punktową funkcji podcałkowej jest oczywiście $f'(x)$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \sup\limits_{z\in[a,b]}|f'(z)|$, co jest funkcją całkowalną.

Możemy więc przejść do granicy pod znakiem całki

$$\lim_{h\to 0}\int_a^{b-h}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ dx = \int_a^b f'(x)$$

Z drugiej strony z całkowego twierdzenia o wartości średniej i ciągłości f na $[a, b]$ mamy

$$\int_a^{b-h} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ dx = \frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b} f(x)\ dx - \int_a^{b-h} f(x)\ dx\right) \xrightarrow{h\to 0} f(b)-f(a)$$

Zadanie 4.
Oblicz całkę

$$\int_0^\infty e^{-x}\cdot\frac{1-\cos tx}{x}\ dx$$

Rozwiązanie:
Niech $f(t,x) = e^{-x}\cdot\frac{1-\cos tx}{x}$. Jest to funkcja ciągła zmiennej x na $\mathbb{R}_+\cup\{0\}$. Dla $x\in[0,1]$ funkcja przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0,1]$, więc jest ograniczona, natomiast dla $x>1$ mamy $f(t,x) < 2e^{-x}$, zatem f jest ograniczone przez funkcje całkowalną, czyli jest to funkcja całkowalna. Funkcja f jest też różniczkowalna względem zmiennej t. Po zróżniczkowaniu mamy $\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) = e^{-x}\sin(tx)$, co majoryzuje się przez funkcję całkowalna e^{-x}. Możemy więc zastosować twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)\ dx = \int_0^\infty e^{-x}\sin(tx)\ dx = \frac{e^{-x}\cdot(t\cos(tx)+\sin(tx))}{1+t^2}\Big|_0^\infty = \frac{t}{1+t^2}$$

Dla $t=0$ szukana całka ma wartość 0, zatem mamy

$$\int_0^\infty e^{-x}\cdot\frac{1-\cos tx}{x}\ dx = F(t) = F(0)+\int_0^t F'(x)\ dx = 0+\int_0^t \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{\ln(1+t^2)}{2}$$

Zadanie 5.
Dla $a>0$ określamy funkcję

$$g(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\ dx$$

Wyznacz $g(a)$ wzorem jawnym.

Zadanie 6.
Oblicz wartość całki $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx$ używając twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki do funkcji

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}\ dx$$

Zadanie 6.
Wyznacz funkcję $I(a) = \int_0^\infty \exp\left(-x^2 - a^2\frac{1}{x^2}\right)\ dx$, gdzie $a\in[0,\infty)$.

Ćwiczenia 3

Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie: (Fubini'ego) Niech $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a (lub niech będzie funkcją mierzalną nieujemną). Wówczas funkcja $x \mapsto f(x,y)$ jest λ_n-mierzalna dla punktów w $y \in \mathbb{R}^k$, zaś funkcja $y \mapsto f(x,y)$ jest λ_k-mierzalna dla punktów w $x \in \mathbb{R}^n$. Ponadto

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f\ d\lambda_{n+k} = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\ d\lambda_n(x) \right)\ d\lambda_k(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\ d\lambda_k(y) \right)\ d\lambda_n(x)$$

Innymi słowy całkowanie po parze zmiennych (x, y) sprowadza się do iterowania całkowania (w dowolnej kolejności) po każdej ze zmiennych z osobna.

Uwaga: Całkowalność funkcji $y \mapsto f(x,y)$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\ f\lambda_k(y)$ jest częścią tezy twierdzenia.

Zadanie 1.
(Zasada Cavalieriego) Dla nieujemnej funkcji mierzalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > t\})\ dt$$

Rozwiązanie:
Niech $A = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < t < f(x)\}$. Zbiór A można przedstawić jako $A = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0, f(x) - t > 0\}$, gdzie funkcje $(x,t) \mapsto t$ oraz $(x,t) \mapsto f(x) - t$ są mierzalne, zatem funkcja $(x,t) \mapsto (f(x) - t, t)$ jest mierzalna, skąd $\mathbb{1}_A$ jest mierzalny i nieujemny. Z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{1}_A\ d\lambda_{n+1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x,t)\ dt \right)\ d\lambda_n(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{(0,f(x)} 1\ dt \right)\ d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ d\lambda_n(x)$$

Z drugiej strony

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{1}_A\ d\lambda_{n+1} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x,t)\ d\lambda_n(x) \right)\ dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < t < f(x)\}\right)\ dt =$$

$$= \int_{(0,\infty)} \lambda_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > t\}\right)\ dt\ =$$

$$= \int_0^\infty \lambda_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(t) > t\right)\ dt$$

Zadanie 2.
Dla funkcji mierzalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz $p \leq 1$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\lambda_n(x) = p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > t\} \, dt$$

Rozwiązanie:
Funkcja $|f(x)|^p$ jest nieujemna i mierzalna, zatem

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \lambda_n \left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)|^p > t\}\right) \, dt =$$

$$= \int_0^\infty \lambda_n \left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > t^{\frac{1}{p}}\}\right) \, dt = \begin{vmatrix} t = s^p \\ dtps^{p-1} \, ds \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^\infty \lambda_n \left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > s\}\right) ps^{p-1} \, ds$$

Zadanie 3.
Obliczyć pole koła o promieniu r, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{x^2+y^2<r^2} \, d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Zbiór E możemy opisać jako $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$, czyli jako zbiór punktów wewnątrz koła o promieniu r i środku w punkcie $(0,0)$. Funkcja $1_{x^2+y^2<r^2}$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną na całej płaszczyźnie, więc spełnia warunki twierdzenia Fubiniego. Możemy zatem zastosować to twierdzenie i zamienić całkę podwójną na dwie całki pojedyncze:

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{x^2+y^2<r^2} \, d\lambda_2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{x^2+y^2<r^2} \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} 1_{x^2+y^2<r^2} \, dy \right) \, dx$$

Ponieważ funkcja $1_{x^2+y^2<r^2}$ jest niezerowa tylko dla $x^2 + y^2 < r^2$, to możemy ograniczyć całkowanie tylko do obszaru koła o promieniu r i środku w punkcie $(0,0)$. Możemy więc zapisać:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} 1_{x^2+y^2<r^2} \, dy \right) \, dx = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dy \right) \, dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

Aby obliczyć tę całkę, możemy zrobić podstawienie $x = r \sin \theta$, co daje nam:

$$\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^2 \cos^2 \theta d\theta = \pi r^2$$

Zatem miara zbioru E wynosi πr^2.

Zadanie 4.
Dla funkcji całkowalnej f wyprowadzić równość

$$2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)\ dy\ dx = \left(\int_a^b f(x)\ dx\right)^2$$

Rozwiązanie:
Skoro $f(x)$ jest całkowalna, to $g(x,y)=f(x)f(y)$ też. Z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)\ dy\ dx = \int_a^b\int_a^y f(x)f(y)\ dx\ dy = \int_a^b\int_a^x f(x)f(y)\ dy\ dx$$

Suma tych całek wynosi

$$\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\ dy\ dx = \left(\int_a^b f(x)\ dx\right)^2$$

Zadanie 5.
Niech $A\subseteq\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem dodatniej miary λ_n. Pokazać, że rzut ortogononalny na dowolną k-wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbb{R}^n$ ma dodatnią miarę λ_k.

Zadanie 6.
Wykazać, że $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$

Rozwiązanie:
Policzmy całkę $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ d\lambda_2(x,y)$. Z twierdzenia Fubieniego (funkcja jest nieujemna i mierzalna) mamy

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ d\lambda_2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\ dx\ dy = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\ dx\ dy = \left|\begin{array}{c} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \\ \det D\varphi = r\end{array}\right| =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\ dr\ d\alpha = \left|\begin{array}{c} u=r^2 \\ du=2r\ dr\end{array}\right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{2}\ du\ d\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-u}\Big|_0^{\infty}\right)\ d\alpha =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\alpha = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Inny sposób policzenia $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ d\lambda_2(x,y)$ to skorzystanie z twierdzenia Fubiniego i zasady Cavalieriego. Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ d\lambda_2(x,y) = \int_0^{\infty}\lambda_2\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2}>t\}\right)\ dt =$$

$$= \int_0^1\lambda_2\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2}>t\}\right)\ dt + \int_1^{\infty}\lambda_2\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2}>t\}\right)\ dt$$

Dla $t>1$ zbiór $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2}>t\}$ jest pusty, zatem

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ d\lambda_2(x,y) = \int_0^1\lambda_2\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2}>t\}\right)\ dt$$

Mamy $e^{-(x^2+y^2)} > t \Leftrightarrow \ln(e^{-(x^2+y^2)}) > \ln t \Leftrightarrow -(x^2+y^2) > \ln t \Leftrightarrow x^2+y^2 < -\ln t$, zatem dla $t < 1$ zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2} > t\}$ to koło o promieniu $\sqrt{-\ln t}$, skąd

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \lambda_2\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2} > t\}\right)\, dt = \int_0^1 \pi \cdot \left(\sqrt{-\ln t}\right)^2\, dt =$$

$$= -\pi \in_0^1 \ln t\, dt = -\pi \cdot t\,(\ln t - 1)\Big|_0^1 = -\pi \cdot (-1-0) = \pi$$

Mamy też

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\right) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\right)^2$$

Skąd $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Zadanie 7.
Wyznaczyć wartość całki iterowanej

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}$$

poprzez podstawienie $x = yt$ w wewnętrznej całce i zastosowanie twierdzenia Fubiniego.

Rozwiązanie:
Funkcja $e^{-x^2-y^2}$ jest mierzalna i nieujemna. Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \begin{vmatrix} x = yt \\ dx = y\, dt \end{vmatrix} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(yt)^2-y^2} y\, dt\, dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(yt)^2-y^2} y\, dy\, dt =$$

$$\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-y^2(t^2+1)}}{2(t^2+1)}\Big|_0^{\infty}\right) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2(t^2+1)}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\arctan(t)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 8.
Oblicz całkę

$$\int_{[-1,1]^2} \left(1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3\right)\, d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_{[-1,1]^2} \left(1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3\right)\, d\lambda_2(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3\right)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x + \frac{x^2y}{2} + \frac{x^3y^2}{3} + \frac{x^4y^3}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} dy = \int_{-1}^{1} 2\cdot\left(1 + \frac{y^3}{3}\right)\, dy =$$

$$= 2\cdot\left(y + \frac{y^3}{3\cdot 3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 4\cdot\left(1 + \frac{1}{3!}\right) = \frac{40}{9}$$

Zadanie 9.
Dany jest wielomian $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i współczynnikach z przedziału $[-1, 1]$. Wykazać, że

$$\int_{[-1,1]^2} p(xy)\ d\lambda_2(x, y) \leq 8$$

Czy stałą 8 można poprawić?

Rozwiązanie:

$$\int_{[-1,1]^2} p(xy)\ d\lambda_2(x, y) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} a_0 + a_1xy + a_2x^2y^2 + \ldots + a_nx^ny^n\ dx\ dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(a_0x + a_1\frac{x^2y}{2} + a_2\frac{x^3y^2}{3} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}y^n}{n+1} \right) \Big|_{-1}^{1}\ dy =$$

$$= 2 \cdot \int_{-1}^{1} a_0 + \frac{a_2}{3}y^2 + \frac{a_4}{5}y^4 + \ldots + \frac{a_k}{k+1}y^k\ dy =$$

$$= 4 \cdot \left(a_0 + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_4}{5!} + \ldots + \frac{a_k}{(k+1)!} \right) \leq$$

$$\leq 4 \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{(k+1)!} \right) \leq 4 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \leq 4 \cdot (e-1) \leq 8$$

Możemy zauważyć, że $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots \leq \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots$, zatem

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots \right) \leq \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ldots = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} = e - 2$$

skąd

$$1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots \leq \frac{e-2}{2} + 1 = \frac{e}{2}$$

czyli

$$\int_{[-1,1]^2} p(xy)\ d\lambda_2(x, y) \leq 4 \cdot \frac{e}{2} = 2e \leq 6$$

Zadanie 10.
Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ d\lambda_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Skorzystamy z rozwinięcia w $\frac{1}{1-t}$ szereg potęgowy $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$ dla $t \in [0, 1)$. Mamy

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ dx\ dy = \int_{[0,1]^2} \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n\ dx\ dy$$

Mamy

$$\int_{[0,1]^2} \sum_{n=0}^{N} (xy)^n\ dx\ dy = \sum_{n=0}^{N} \int_{[0,1]^2} (xy)^n\ dx\ dy$$

W granicy $N \to \inf$ równość również jest prawdziwa na moce twierdzenia o zbieżności monotonicznej. Mamy więc

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ dx\ dy = \int_{[0,1]^2} \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n\ dx\ dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]^2} (xy)^n\ dx\ dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^n \right) \cdot \left(\int_0^1 y^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Zadanie 11.
Niech $0 < a < b$. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\ dx$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_a^b e^{-tx}\ dt = -\frac{e^{-tx}}{x}\bigg|_a^b = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

zatem z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\ dx = \int_0^{\infty} \int_a^b e^{-tx}\ dt\ dx = \int_a^b \int_0^{\infty} e^{-tx}\ dx\ dt =$$

$$= \int_a^b -\frac{e^{-tx}}{t}\bigg|_0^{\infty} = \int_a^b \frac{1}{t} = \ln \frac{b}{a}$$

Zadanie 12.
Oblicz całkę $\int_A f\ d\lambda_2$, gdzie

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x\}$ oraz $f(x,y) = (1-x+y)e^{-x}$

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x,\ x^2 y \leq 16\}$ oraz $f(x,y) = 1$

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$ oraz $f(x,y) = \frac{1}{x\sqrt{y}}$

d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq y\}$ oraz $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Rozwiązanie:

a) Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\int_A f(x,y)\ d\lambda_2(x,y) = \int_0^{\infty} \int_0^{2x} (1-x+y)e^{-x}\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \left((1-x)e^{-x} \cdot \left(\int_0^{2x} dy \right) + e^{-x} \cdot \left(\int_0^{2x} y\ dy \right) \right)\ dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\left((1-x)\cdot 2x + \frac{(2x)^2}{2}\right)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\cdot 2x\, dx = 2\int_0^\infty xe^{-x}\, dx$$

Mamy

$$\int xe^{-x}\, dx = \left\| \begin{array}{c|c} f' = e^{-x} & f = -e^{-x} \\ g = x & g' = 1 \end{array} \right\| = -e^{-x}\cdot x - \int -e^{-x}\, dx =$$

$$= -e^{x}\cdot x - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

skąd

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = 2\cdot\left(-e^{-x}(x+1)\right)\Big|_0^\infty = 2$$

b) Mamy $x^2 y \le 16 \Leftrightarrow y \le \frac{16}{x^2}$. Zbiór A to obszar ograniczony przez oś OX oraz krzywe $y = 2x$ i $y = \frac{16}{x^2}$, które przecinają się w punkcie takim, że $2x = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x = 2$. Wówczas

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^2 2x\, dx + \int_2^\infty \frac{16}{x^2}\, dx = 2\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 16\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_2^\infty = 4 + 16\cdot\frac{1}{2} = 12$$

c) Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^1\int_0^x \frac{1}{x\sqrt{y}}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot 2\cdot \sqrt{y}\Big|_0^x\, dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 4\cdot\sqrt{x}\Big|_0^1 = 4$$

d) Zbiór A jest kulą o środku w $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ i promieniu $\frac{1}{4}$. Mamy $x^2 + y^2 \le y \Leftrightarrow x^2 \le y - y^2 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{y-y^2}, \sqrt{y-y^2}]$. Korzystając z twierdzenia Fubieniego mamy więc

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^1\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

Mamy

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 + y^2 \\ du = 2x\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} = \sqrt{x^2+y^2}$$

zatem

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{y-y^2+y^2} - \sqrt{y-y^2+y^2}\right)\, dy = 0$$

Zadanie 13.

a) Niech A zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym przez parabole $y = x^2$ i prostą $x + y = 2$. Obliczyć

$$\int_A 6x + 2y^2\, d\lambda_2(x,y)$$

b) Niech B będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$. Obliczyć

$$\int_B xy^2 \, d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczmy punkty przecięcia paraboli i prostej $x^2 = 2 - x \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0$, skąd $x = 1$ lub $x = -2$. Rozważmy zbiór $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-2,1), y \leq 2 - x\}$. Wówczas $B = A \cup (B \setminus A)$, skąd

$$\int_B f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) + \int_{B\setminus A} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_B f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) - \int_{B\setminus A} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y)$$

Mamy

$$\int_B f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_{-2}^{1}\int_0^{2-x} 6x + 2y^2 \; dy\; dx = \frac{13}{2}$$

oraz

$$\int_{B\setminus A} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_{-2}^{1}\int_0^{x^2} 6x + 2y^2 \; dy\; dx = \frac{-143}{14}$$

skąd $\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \frac{13}{2} + \frac{143}{14} = \frac{117}{7}$

b) Postępujemy jak w poprzednim podpunkcie. Krzywe $y = x^3$ i $y = x^2$ przecinają się w punkcie $x = 0$ i $x = 1$, skąd

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \int_0^{x^3} xy^2 \; dy\; dx - \int_0^1 \int_0^{x^2} xy^2 \; dy\; dx = \frac{1}{33} - \frac{1}{24} = -\frac{1}{88}$$

Zadanie 14.
Oblicz całki

a) $\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{\frac{y}{x}} \; dy\; dx$

b) $\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} \; dx\; dy$

c) $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} \; dy\; dx$

d) $\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} \; dx\; dy$

Zadanie 15.
Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku przecięcia dwóch (nieskończonych) walców o promieniu 1 i prostopadle przecinających się osiach.

Rozwiązanie:
Zbiór A, którego objętość chcemy policzyć to $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\}$. Objętość można policzyć na dwa sposoby

- Dla ustalonych x, y warunki $x^2 + y^2 < 1$ i $y^2 + z^2 < 1$ sprowadzają się do nierówności $|z| < \min(\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}) := M$, które są określone gdy $x, y \in (-1,1)$. Wtedy

$$\lambda_3(A) = \int_{(-1,1)^2} \int_{-M}^{M} 1 \; dz \; d\lambda_2(x,y) = 2 \cdot \int_{(-1,1)^2} \int_{0}^{M} 1 \; dz \; d\lambda_2(x,y) =$$

$$= 2 \cdot \int_{(-1,1)^2} M \; d\lambda_2(x,y) = 8 \cdot \int_{(0,1)^2} \min(\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}) \; d\lambda_2(x,y) =$$

$$= 16 \cdot \int_{\{(x,y)\in(0,1)^2 \;|\; x<y\}} \sqrt{1-y^2} \; d\lambda_2(x,y) = 16 \cdot \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1-y^2} \; dx \; dy =$$

$$= 16 \cdot \int_0^1 y\sqrt{1-y^2} \; dy = 16 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

- Dla ustalonego z, rozważmy (x, y) ze zbioru $\left(-\sqrt{1-z^2}, \sqrt{1-z^2}\right)^2 := K$, wtedy

$$\lambda_3(A) = \int_{-1}^{1} \lambda_2(K) \; dz = \int_{-1}^{1} 4 \cdot (1-z^2) \; dz = 8 \cdot \int_0^1 (1-z^2) \; dz = 8 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{16}{3}$$

Zadanie 16.
Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = e^x$, $y = \frac{1}{5}x$, $x + y = 1$, $x = 4$.

Rozwiązanie. *Z rysunku wynika, że zakres całkowania po x to $[0,4]$. Od $x = 0$ do przecięcia prostych $y = \frac{1}{5}x$ oraz $y = 1 - x$ (w punkcie $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$) zamienna y przebiega obszar od prostej $y = 1 - x$ do wykresu funkcji $y = e^x$. Od $x = \frac{5}{6}$ do $x = 4$ zmienna y przebiega obszar między prostą $y = \frac{1}{5}x$, a wykresem funkcji $y = e^x$. Zatem szukane pole wynosi*

$$\int_0^{\frac{5}{6}} \int_{1-x}^{e^x} dydx + \int_{\frac{5}{6}}^{4} \int_{\frac{x}{5}}^{e^x} dydx =$$

$$\int_0^{\frac{5}{6}} (e^x - 1 + x)dx + \int_{\frac{5}{6}}^{4} (e^x - \frac{x}{5})dx = e^{\frac{5}{6}} - 1 - \frac{5}{6} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{6}} + (e^4 - e^{\frac{5}{6}}) - \left[\frac{x^2}{10}\right]_{\frac{5}{6}}^{4} =$$

$$= \ldots$$

Zadanie 17.
Niech $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi o zwartym nośniku. Wyprowadzić zwór na całkowanie przez części:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) \; dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \; dx \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n$$

Wywnioskować stąd równości

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Delta f(x) \; dx = -\int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|^2 \; dx \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta f(x)|^2 \; dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 f(x)|^2 \; dx$$

w których Δ oznacza operator Laplace'a $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$

Zadanie 18.
Noga grzyba ma kształt walca (o średnicy 1 i wysokości 2), a na niej leży symetrycznie kapelusz grzyba, będący półkulą (o promieniu R). Przy założeniu, że grzyb jest bryłą jednorodną, a jego środek leży na styku nogi i kapelusza, znaleźć promień R.

Zadanie 19.
Oblicz całkę $\int_{[1,2]]\times[0,3]} e^{2x-y} d^2(x,y)$.

Rozwiązanie:

$$\int_{[1,2]]\times[0,3]} e^{2x-y} d^2(x,y) = \int_1^2 \int_0^3 e^{2x-y} dy dx = \int_1^2 e^{2x}\ dx \cdot \int_0^3 e^{-y}\ dy =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_1^2 \cdot \left(-\frac{1}{e^y}\right)\Big|_0^3 = \left(\frac{e^4-e^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{e^3}+\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2e}\cdot(e^5-e^3-e^2+1)$$

Zadanie 20.
Oznaczmy sybmolem $A_{a,b}$ kwadrat $[a,a+1]\times[b,b+1] \subseteq R^2$ i zdefiniujmy funkcję $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ następująco

$$f := \chi_{A_{0,0}} - \chi_{A_{0,1}} + \chi_{A_{1,1}} - \chi_{A_{1,2}} + \chi_{A_{2,2}} - \chi_{A_{2,3}} + \ldots$$

Czy prawdą jest, że

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dx\ dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dy\ dx$$

Czy wynik jest zgodny z twierdzeniem Fubini'ego?

Zadanie 21.
Oblicz całkę z funkcji $f(x,y) = (ax+by)$ na zbiorze $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2 < y,\ y^2 < x\}$.

Rozwiązanie:
Zbiór A jest ograniczony i otwarty, zatem jest mierzalny. Ponadto f jest ciągła, zatem jest mierzalna na $\mathbb{R}^2$. Stąd również f jest mierzalna na A. Funkcja f jest również nieujemna na danym zbiorze, więc możemy skorzystać z twierdzenia Fubini'ego. Ustalmy więc x i patrzmy jak zmienia się y. Zmienia się on od x^2 do $\sqrt{x}$, bo $x^2 < y < \sqrt{x}$. A zatem

$$A_x = \{(x,y) \mid y \in (x^2, \sqrt{x})\}$$

Ten zbiór jest niepusty o ile $x^2 < \sqrt{x}$, a więc $x \in (0,1)$. Mamy więc

$$\int_A f(x,y)\ d^2(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{A_x} ax+by\ dy\ dx = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} ax+by\ dy\ dx =$$
$$= \int_0^1 ax(\sqrt{x}-x^2) + \frac{1}{2}by^2\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\ dx = \int_0^1 ax^{\frac{3}{2}} - ax^3 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}bx^4\ dx =$$
$$= \frac{2}{5}ax^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{4}bx^2 - \frac{1}{10}bx^5\Big|_0^1 = a\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right) + b\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right) = \frac{3}{20}(a+b)$$

Zadanie 22.
Oblicz miarę zbioru

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x,\ 0 < y,\ x + y < 1,\ 0 < z < x^2 + y^2\}$$

Rozwiązanie:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} 1\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y^2\ dy\ dx = \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{1}{3} \cdot (1-x)^3\ dx =$$
$$= \int_0^1 x^2 - x^3 + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3}\ dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Zadanie 23.
Niech $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1,\ 0 < x + y < 1,\ 0 < z < \frac{1}{x+y+1}\}$. Oblicz całkę

$$\int_A \frac{1}{(x+y+1)^2}\ d^3(x, y, z)$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_A f(x, y, z)\ d^3(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \cdot \chi_A\ d^3(x, y, z)$$

Funkcja f jest mierzalna na A wtedy, gdy $f \cdot \chi_A$ jest mierzalne, bo w założeniach twierdzenia Fubini'ego całkujemy funkcję mierzalną na $\mathbb{R}^3$, więc żeby swobodnie przejść do funkcji na A musimy sprawdzić, że χ_A, czyli A jest mierzalne, bo wówczas $f \cdot \chi_A$ jest mierzalne jako iloczyn funkcji mierzalnych. Zbiór A jest oczywiście mierzalny, zatem możemy zastosować twierdzenie Fubini'ego. Będziemy całkować kolejno po z, y i x

$$\int_A \frac{1}{(x+y+z)^2}\ d^3(x, y, z) = \int_0^1 \int_{-x}^{1-x} \int_0^{\frac{1}{x+y+1}} \frac{1}{(x+y+z)^2}\ dz\ dy\ dx =$$
$$= \int_0^1 \int_{-x}^{1-x} \frac{1}{(x+y+1)^2} \int_0^{\frac{1}{x+y+1}} dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{-x}^{1-x} \frac{1}{(x+y+z)^2} \cdot z\Big|_0^{\frac{1}{x+y+1}}\ dy\ dx =$$
$$= \int_0^1 \int_{-x}^{1-x} \frac{1}{(x+y+1)^3}\ dy\ dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x+y+1)^2}\Big|_{-x}^{1-x}\ dx =$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right)\ dx = \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8}$$

Zadanie 24.
Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0,\ y>1,\ z>1\}} \frac{x}{1 + (xyz)^4}\ d^3(x, y, z)$$

Rozwiązanie:
Zbiór $A = \{x > 0,\ y > 1,\ z > 1\}$ jest otwarty, zatem jest borelowski czyli mierzalny. Funkcja

$f = \frac{x}{1+(xyz)^4}$ jest ciągła i nieujemna na A, zatem możemy skorzystać z twierdzenia Fubini'ego. Mamy

$$\int_A \frac{x}{1+(xyz)^4}\ d^3(x,y,z) = \int_{\{y>1,\ z>1\}} \left(\int_{\{x>0\}} \frac{x}{1+(xyz)^4}\ dx \right) d^2(y,z) =$$

$$= \int_{\{y>1,\ z>1\}} \frac{1}{2(yz)^2} \left(\int_0^\infty \frac{2xy^2z^2}{1+((xyz)^2)^2}\ dx \right) d^2(y,z) = \left\| \begin{array}{c} u = (xyz)^2 \\ du = 2x(yz)^2\ dx \end{array} \right\| =$$

$$= \int_{\{y>1,\ z>1\}} \frac{1}{2(yz)^2} \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\ du \right) d^2(y,z) = \int_{\{y>1,\ z>1\}} \frac{\frac{\pi}{2}}{2(yz)^2}\ d^2(y,z) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(\int_1^\infty \frac{1}{y^2} \left(\int_1^\infty \frac{1}{z^2}\ dz \right) \right) dy = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\int_1^\infty \frac{1}{y^2} \left((-1) \cdot \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} - 1 \right) \right) \right) dy =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^\infty \frac{1}{y^2}\ dy = \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 25.
Oblicz całkę

$$\int_{\{0<y<2x\}} (1-x+y)e^{-x}\ d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\int_A f(x,y)\ d\lambda_2(x,y) = \int_0^\infty \int_0^{2x} (1-x+y)e^{-x}\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^\infty \left((1-x)e^{-x} \cdot \left(\int_0^{2x} dy \right) + e^{-x} \cdot \left(\int_0^{2x} y\ dy \right) \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \left((1-x)\cdot 2x + \frac{(2x)^2}{2} \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot 2x\ dx = 2\int_0^\infty xe^{-x}\ dx$$

Mamy

$$\int xe^{-x}\ dx = \left\| \begin{array}{c|c} f' = e^{-x} & f = -e^{-x} \\ g = x & g' = 1 \end{array} \right\| = -e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x}\ dx =$$

$$= -e^{x} \cdot x - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

skąd

$$\int_A f(x,y)\ d\lambda_2(x,y) = 2 \cdot \left(-e^{-x}(x+1) \right) \Big|_0^\infty = 2$$

Zadanie 26.
Niech $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \in \mathbb{R}^k$ będzie ustalonym wektorem. Niech $f(x) = e^{-w\cdot x}$ i niech $A = [0,\infty)^k$ (iloczyn kartezjański k półprostych). Obliczyć $\int_A f\ d\lambda_k$.

Rozwiązanie. *Funkcja jest nieujemna, więc z twierdzenia Fubiniego:*

$$\int_A f d\lambda_k = \prod_{l=1}^{k} \left(\int_0^\infty e^{-xw_l} dx \right) = \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{w_l},$$

o ile wszystkie $w_l \neq 0$. *W przeciwnym razie całka jest rozbieżna.*

Ćwiczenia 4
Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie: (O zamianie zmiennych w całce) Niech $\Phi : E \to \Phi(E)$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 pomiędzy zbiorami otwartymi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\Phi(E) \subseteq \mathbb{R}^n$. Niech $f : \Phi(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją całkowalną (lub mierzalna i nieujemna) na $\Phi(E)$, wówczas

$$\int_{\Phi(E)} f(\mathbf{x})\ d\lambda_n(\mathbf{x}) = \int_E f(\Phi(\mathbf{y})) \cdot |\det d_{\mathbf{y}}\Phi|\ d\lambda_n(\mathbf{y})$$

Uwaga: Całkowalność funkcji $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ jest częścią tezy twierdzenia.

Podstawienie biegunowe

W przypadku, gdy obszar całkowania A jest kołem, wycinkiem koła, pierścieniem lub wycinkiem pierścienia wygodnie jest nam wprowadzić tzw. współrzędne biegunowe. Określmy dyfeomorfizm $\varphi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus (0,\infty) \times \{0\}$ wzorem $\varphi(r,\alpha) = (x, y)$ gdzie

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

czyli $\varphi(r,\alpha) = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}$, wówczas $D\varphi(r,\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{bmatrix}$, czyli $|\det D\varphi(r,\alpha)| = r$, skąd

$$\int_A f(x,y)\ dx\ dy = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \cdot r\ dr\ d\alpha$$

Podstawienie sferyczne

W $\mathbb{R}^3$ w przypadku kul itp wygodnie jest używać podstawienia sferycznego. Określmy dyfeomorfizm wzorem $\varphi(r,\alpha,\beta) = (x, y, z)$, gdzie

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\beta \\ y = r\cos\alpha\sin\beta \\ z = r\sin\alpha \end{cases}$$

czyli $\varphi(r,\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} r\cos\alpha\cos\beta \\ r\cos\alpha\sin\beta \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}$, wówczas $D\varphi(r,\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\cos\beta & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & -r\sin\alpha\sin\beta & r\cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix}$,
czyli $|\det D\varphi(r,\alpha,\beta)| = r^2 \cdot \cos\alpha$

Podstawienie walcowe

Zaś w przypadku brył obrotowych wygodne jest używanie podstawienia walcowego. Określmy dyfeomorfizm wzorem $\varphi(r,\alpha,t)=(x,y,z)$, gdzie

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = t \end{cases}$$

wówczas $|\det D\varphi(r,\alpha,t)| = r$

Zadanie 1.
Obliczyć całkę

$$\int_D x^2+y^2 \; d\lambda_3(x,y,z) \qquad \text{gdzie} \qquad D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4,\; z\geq 0\}$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy z podstawienia sferycznego

$$\varphi(r,\alpha,\beta)=(r\cos\alpha\cos, r\cos\alpha\sin\beta, r\sin\beta)$$

wówczas

$$\varphi^{-1}(D)=\{(r,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi)\mid 1\leq r^2\leq 4,\; \sin\alpha\geq 0\}$$

oraz

$$\int_D x^2+y^2 \; d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(D)} r^2\cdot\cos^2\alpha\cdot r^2\cdot\cos\alpha \; d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_1^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^4\cos^3\alpha \; d\beta\; d\alpha\; dr = 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\alpha\; d\alpha\cdot \frac{r^5}{5}\Big|_1^4$$

Mamy $\frac{r^5}{5}\Big|_1^4 = \frac{1023}{5}$ oraz

$$\cos^3(x)=\cos(x)\cdot\cos^2(x)=\cos(x)\cdot(1-\sin^2(x))=\cos(x)-\cos(x)\cdot\sin^2(x)$$

Następnie, całka może być zapisana jako sumy dwóch całek:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3(x)\; dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\; dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\cdot\sin^2(x)\; dx$$

Pierwsza całka jest łatwa do obliczenia i wynosi $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ Druga całka może być obliczona z użyciem podstawienia $t=\sin(x)$, wtedy $dx=\frac{dt}{\cos(x)}$. W efekcie, druga całka sprowadza się do

$$\int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Stąd, wynik całkowania $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$ wynosi

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\sin^2(x)dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 2.
Obliczyć objętość figury powstałej w wyniku figury pod wykresem funkcji $y = x^2$, $x \in [1,2]$ wokół osi x.

Rozwiązanie:
Ta bryła to

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 2,\ \sqrt{y^2+z^2} \leq x^2\}$$

Z twierdzenia Fubiniego

$$\int_A 1 d\lambda_3(x,y,z) = \int_1^2 \int 1_A\ d\lambda_2(y,z)\ dx = \int_1^2 \lambda_2(A \cap (\mathbb{R}^2 \times \{x\}))\ dx =$$

$$= \int_1^2 \pi \cdot (x^2)^2\ dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{31}{5}\pi$$

Zadanie 3.
Niech A będzie figurą pod wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ na przedziale $x = [1,\infty)$, a B bryłą obrotową powstałą przed obrót A wokół osi x. Wykazać, że $\lambda_2(A) = \infty$, ale $\lambda_3(B) < \infty$.

Rozwiązanie:
Ta bryła to

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x,\ \sqrt{z^2+y^2} \leq \frac{1}{x}\}$$

Z podstawienia walcowego $\varphi(r,\alpha,t) = (t, r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ mamy

$$\varphi^{-1}(B) = \{(r,\alpha,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [1,\infty), \alpha \in (0,2\pi), r \in (0,\frac{1}{t})\}$$

Przekształcenie $\varphi : \varphi^{-1}(B) \to B \setminus (\partial B \cup \{y=0\}) =: B'$ jest dyfeomorfizmem, ale $\partial B \cup \{y=0\}$ jest zbiorem miary zero, więc objętość B' jest taka sama jak B. Mamy

$$\lambda_3(B) = \int_B 1\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{B'} 1\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(B)} 1 \cdot |\det|D\varphi(r,\alpha,t)|\ d\lambda_3(r,\alpha,t) =$$

$$= \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{t}} 1 \cdot r\ dr\ d\alpha\ dt = 2\pi \cdot \int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{t}} r\ dr\ dt = 2\pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{2t^2}\ dt =$$

$$= 2\pi \cdot (-\frac{1}{2t})\Big|_1^\infty = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Mamy

$$\lambda_2(B) = 2\pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\ dx > 2\pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx = \ln x\Big|_1^\infty = \infty$$

Zadanie 4.
Wykazać, że
$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ d\lambda_2(x,y) = \frac{\pi^2}{6}$$

Rozwiązanie:
Przy podstawieniu $x = u+v$ oraz $y = u-v$ mamy $|\det D\varphi| = 2$ oraz $\varphi^{-1}([0,1]^2)$ to kwadrat o wierzchołkach w $(0,0)$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$ oraz $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, gdyż $u = \frac{x+y}{2}$ oraz $y = \frac{x-y}{2}$. φ jest oczywiście dyfeomorfizmem, zaś $\frac{1}{1-xy}$ jest mierzalna i nieujemna na $[0,1]^2$, zatem z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy
$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ d\lambda_2(x,y) = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\ dx\ dy =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-u}^{u} \frac{2}{1-(u^2-v^2)}\ dv\ du + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{u-1}^{1-u} \frac{2}{1-(u^2-v^2)}\ dv\ du =$$
$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{u} \frac{1}{1-(u^2-v^2)}\ dv\ du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{1-u} \frac{1}{1-(u^2-v^2)}\ dv\ du =$$
$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_0^u\ du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_0^{1-u}\ du =$$
$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\ du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\ du$$
W pierwszej całce zastosujemy teraz podstawienie $u = \sin\theta$, zaś w drugiej $u = \cos\theta$. Wtedy w pierwszej całce $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$, zaś w drugiej całce $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Mamy więc
$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ d\lambda_2(x,y) = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\ du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\ du =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\arctan(\tan\theta)}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\ d\theta + 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{\arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\sin\theta}\cdot(-\sin\theta)\ d\theta =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\ d\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\ d\theta =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\ d\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\ d\theta =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\ d\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\theta}{2}\ \ d\theta = 4\cdot\frac{\pi^2}{36\cdot 2} + 2\cdot\frac{\pi^2}{9\cdot 2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Zadanie 5.
Oblicz całkę
$$\int_{\{x^2+y^2\le y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Korzystając z podstawienia biegunowego $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ mamy

$$\int_{\{x^2+y^2\leq y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\lambda_2(x,y) = \int_{r\leq \sin\alpha} \frac{r\cos\alpha}{r}\cdot r\; d\lambda_2(r,\alpha) =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin\alpha} r\cos\alpha\; dr\; d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{2}\, d\alpha$$

Mamy

$$\int \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\; d\alpha = \left\| \begin{array}{c|c} g' = \cos\alpha & g = \sin\alpha \\ f = \sin^2\alpha & f' = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array} \right\| = \sin^3\alpha - \int 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\; d\alpha$$

zatem $\int \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\; d\alpha = \frac{1}{3}\sin^3\alpha$, skąd

$$\int_{\{x^2+y^2\leq y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{2}\, d\alpha = \frac{\sin^3}{3}\Big|_0^{\pi} = 0$$

Zadanie 6.
Rozważmy zbiór $A = (0,1)\times(0,\frac{\pi}{2})$ oraz przekształcenie $\Phi : A \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\Phi(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y) =: (u,v)$$

Uzasadnić, że Φ jest dyfeomorfizmem na swój obraz, opisać ów obraz, a następnie dokonać zamiany zmiennych $(x,y)\mapsto(u,v)$ w całce

$$\int_A \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}\cos^2 y\sin^2 y}\, d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Dla $\Phi(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$ mamy

$$D\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{bmatrix}$$

więc $|\det D\Phi(x,y) = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x} \neq 0$, zatem Φ jest lokalnie dyfeomorfizmem. Można sprawdzić, że obrazem Φ jest zbiór

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid 1 < x^2+y^2 < e^2\}$$

bo dla ustalonego x wykres funkcji $(x,y)\mapsto(e^x\cos y, e^x\sin y)$ jest wycinkiem okręgu o promieniu e^x. Pokażemy, że $\Phi : A\to B$ jest różnowartościowe. Niech $\Phi(x_1,y_1) = \Phi(x_2,y_2)$, czyli $e^{x_1}\cos y_1 = e^{x_2}\cos y_2$ oraz $e^{x_1}\sin y_1 = e^{x_2}\sin y_2$, skąd

$$\frac{\cos y_2}{\cos y_1} = \frac{\sin y_2}{\sin y_1} \Leftrightarrow \cos y_2\cdot\sin y_1 = \cos y_1\cdot\sin y_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(y_1+y_2)+\sin(y_1-y_2)}{2} = \frac{\sin(y_2+y_1)+\sin(y_2-y_1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(y_1 - y_2) = \sin(y_2 - y_1) \Leftrightarrow \sin(y_1 - y_2) = -\sin(y_1 - y_2)$$

Stąd $\sin(y_1 - y_2) = 0$, ale skoro $y_1, y_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 := y$. Wtedy $e^{x_1} \cos y = e^{x_2} \cos y \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$, czyli $x_1 = x_2$. Zatem Φ jest funkcją różnowartościową. To dowodzi istnienie Φ^{-1}. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej skoro $\det D\Phi \neq 0$ wszędzie, to $\Phi^{-1} \in C^1$, więc Φ jest dyfeomorfizmem. Z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy więc

$$\int_A \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x} \cos^2 y \sin^2 y} \, d\lambda_2(x,y) = \int_{\Phi^{-1}(\Phi(A))} \frac{|\det D\Phi(x,y)|}{1 + e^{4x} \cos^2 y \sin^2 y} \, d\lambda_2(x,y) =$$

$$= \int_{\Phi(A)} \frac{1}{1 + u^2 v^2} \, d\lambda_2(u,v) = \int_B \frac{1}{u^2 v^2} \, d\lambda_2(x,y)$$

Zadanie 7.
Uzasadnić, że przekształcenie $\Phi : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\Phi(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) =: (u,v)$$

jest dyfeomorfizmem na swój obraz, opisać Φ oraz dokonać zamiany zmiennych $(x,y) \mapsto (u,v)$ w całce

$$\int_{[0,1]^2} \sqrt[3]{x^4 - 6x^2y^2 + y^4} \, d\lambda_2(x,y)$$

Zadanie 8.
Dana jest krzywa bez samoprzecięć $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ klasy C^2 parametryzowana długością łuku. Oznaczmy wektor normalny $N(t) = (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ i rozważmy obszar

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot N(t) \mid t \in (a,b), \ |s| < r\}$$

Wyznaczyć pole obszaru Γ_r. Jak ma się on do długości krzywej γ?

Bez samoprzecięć oznacza, że γ jest funkcją różnowartościową. Przez krzywą klasy C^2 rozumiemy, że pochodne γ', γ'' istnieją oraz są ograniczone. Parametryzacja długością łuku to inne określenie na warunek $|\gamma'(t)| = 1$ dla wszystkich t.

Zadanie 9.
Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie obszarem wypukłym, którego brzeg $\partial\Omega$ jest obrazem 1-okresowej funkcji $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ klasy C^2. Załóżmy ponadto, że $|\gamma'(t)| = 1$ oraz że krzywizna $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$ jest dodatnia dla każdego t.

a) Wyprowadzić równość $\kappa(t) = |\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)|$

b) Uzasadnić, że $\int_0^1 \kappa(t) \, dt = 2\pi$

c) Dla zadanego (można przyjąć, że odpowiednio małego) $r > 0$ wyznaczyć pole obszaru

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot \gamma'(t) \mid t \in [0,1], \ s \in [0,r]\}$$

Rozwiązanie:

a) Zróżniczkujmy warunek $|\gamma'(t)| = 1$. Mamy

$$\gamma_1'\gamma_1'' + \gamma_2'\gamma_2'' = 0 \Leftrightarrow \gamma'(t) \perp \gamma''(t)$$

zatem $(\gamma_1', \gamma_2') = k \cdot (\gamma_2'', -\gamma_1'')$ dla pewnego $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wtedy

$$(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma_1' \cdot k \cdot \gamma_2'' + \gamma_2' \cdot (-k) \cdot \gamma_1'' = 1 \Leftrightarrow \gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t) = \frac{1}{k}$$

Mamy też

$$|\gamma''|^2 = (\gamma_1'')^2 + (\gamma_2'')^2 = \frac{1}{k^2} \cdot (\gamma_1')^2 + \frac{1}{k^2} \cdot (\gamma_2')^2 = \frac{1}{k^2}$$

skąd

$$|\gamma''| = |\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)| = \kappa(t)$$

b) Policzmy pochodną kąta $\alpha(t) = \arctan\left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}\right)$. Mamy

$$\frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}\right)^2 + 1} \cdot \frac{\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)}{(\gamma_2')^2} =$$

$$= \frac{\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)}{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2} = \gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)$$

zatem

$$\kappa(t) = \left|\frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}\right)\right|$$

skąd (pochodna ma stały znak, bo krzywa jest klasy C^2 i druga pochodna się nie zeruje)

$$\int_0^1 \kappa(t)\ dt = \int_0^1 \left|\frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}\right)\right|\ dt =$$

$$= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}\right)\ dt\right| = \left|\arctan\left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}\right)\Big|_0^1\right| = 2\pi$$

Ostatnia równość bierze się stąd, że wektor jednostkowy $\gamma'(t)$ na przedziale $t \in [0,1]$ dokonuje obrotu o 2π.

c) Niech $\varphi(t,s) = \gamma(t) + s \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1(t) + s\gamma_1'(r) \\ \gamma_2(t) + s\gamma_2'(r)\end{pmatrix}$, wtedy $D\varphi(t,s) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t) + s\gamma_1''(r) & \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) + s\gamma_2''(r) & \gamma_2'(t)\end{pmatrix}$, czyli $\det D\varphi(t,s) = s(\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t))$. Mamy więc

$$\lambda_3(\Gamma_r) = \int_{\Gamma_r} d\lambda_2(x,y) = \int_{(0,1)\times(0,r)} |\det D\varphi(t,s)|\ d\lambda_2(t,s) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^r s \cdot |\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)|\ ds\ dt =$$

$$= \frac{r^2}{2} \cdot \int_0^1 |\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)|\ dt = \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2$$

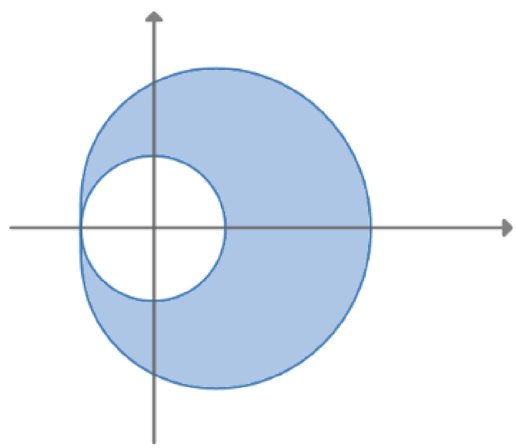
Pozostaje pokazać, ze φ to dyfeomorfizm

$$\det D\varphi = s(\gamma_1''(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2''(t)) = \frac{1}{k} \cdot \left((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2\right) = \frac{1}{k} \cdot 1 = \frac{1}{k} \neq 0$$

Fakt: Zachodzi równość
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \; d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 10.
Oblicz pole obszaru płaszczyzny ograniczonego od wewnątrz okręgiem jednostkowym, zaś od zewnątrz krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 2 + \cos\theta$.

Rozwiązanie:
Punkt p należący do danego zbioru spełnia nierówności $1 < p < 2 + \cos\theta$, gdzie p to odległość od punktu $(0,0)$. Zatem
$$\int_A 1 \; d\lambda_2(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_1^{2+\cos\theta} r \; dr \; d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cdot\cos^2\theta\right) \; d\theta =$$
$$= 3\pi + 0 + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta \; d\theta = 3\pi + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$



Zadanie 11.
Wyznaczyć całkę
$$\int_A (x^2+y^2) \; d\lambda_2(x,y) \qquad \text{gdzie} \qquad A = \{1 < x^2 - y^2 < 2, \; 2 < xy < 4, x, y \geq 0\}$$

Rozwiązanie:
Wygodnie byłoby skorzystać z podstawienia $\varphi(x,y) = (s,t)$, gdzie
$$\begin{cases} s = x^2 - y^2 \\ t = xy \end{cases}$$
bo wówczas $\varphi(A) = (1,2)\times(2,4)$. Jednak wyznaczenie φ^{-1} może być problematyczne.

- Mamy jednak
$$D\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\det D\varphi(x,y)| = 2(x^2+y^2)$$

oraz $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$, więc stosując twierdzenie o zamianie zmiennych ("od drugiej strony") mamy

$$\int_A x^2+y^2 \, d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\int_A |\det D\varphi(x,y)| \, d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi^{-1}(\varphi(A))} |\det D\varphi(x,y)| \, d\lambda_2(x,y) =$$

$$\overset{\text{zamiana zmiennych}}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi(A)} 1 \, d\lambda_2(s,t) = \frac{1}{2}\cdot\int_{(1,2)\times(2,4)} 1 \, d\lambda_2(s,t) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

- Da się jednak wyznaczyć funkcję odwrotną. Niech $s = x^2 - y^2 = xy\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$ i oznaczmy $y - \frac{1}{u} = \frac{s}{t}$. Stąd można wyznaczyć u i wówczas $us = x^2$ oraz $\frac{s}{u} = y^2$.
- Można skorzystać z danego postawawienia i zauważyć, że $t + 2si = (x+yi)^2$, wtedy

$$A = \{z = x = yi \mid x, y \geq 0, \ \mathrm{Re}(z^2) \in (1,2), \ \mathrm{Im}(z^2) \in (2,4)\}$$

Zadanie 12.
Niech A będzie macierzą kwadratową, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją zadaną wzorem $f(t) = \det(I + tA)$. Wyprowadzić równość $f'(0) = \mathrm{tr}A$.

Rozwiązanie:
Z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny mamy

$$\det(I + t\cdot A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1} =$$
$$= (a_{11}t + 1)\cdot\det A_{11} - a_{21}t\cdot\det A_{21} + \ldots =$$
$$= (a_{11}t+1)\cdot(a_{22}t+1)\cdot\ldots\cdot(a_{22}t+1) + o(t^2) =$$
$$= 1 + a_{11}t + a_{22}t + \ldots a_{nn}t + o(t^2)$$

Zatem
$$\frac{d}{dt}\det(I + t\cdot A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} + o(t) = \mathrm{tr}(A) + o(t)$$

Zadanie 13.
Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną, za $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funkcją gładką o zwartym nośniku

a) Uzasadnić, że przekształcenie $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem $\Phi_t(x) = x + t\cdot\varphi(x)$ jest dyfeomorfizmem dla t z pewnego przedziału $(-t_0, t_0)$. Wyznaczyć pochodną $\det D\Phi_t(x)$ względem t w punkcie $t = 0$.

b) Wykazać, że pochodną funkcji

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x + t\cdot\varphi(x)) \, dx$$

w punkcie $t = 0$ jest

$$f'(0) = -\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x)\right) \, dx$$

Rozwiązanie:
Dla dowolnej macierzy A macierz $I + t \cdot A$ jest odwracalna, bo dla małych t $\det(I + t \cdot A) \approx 1$. Co więcej

$$\frac{d}{dt}\det(I + t \cdot A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} + o(t) = \mathrm{tr}(A) + o(t)$$

a) Skoro φ jest gładka, to $\Phi_t(x) \in C^1$. Ustalmy x i sprawdźmy czy różniczka $D\Phi_t(x)$ jest izomorfizmem liniowym

$$D\Phi_t(x) = I + t \cdot D\varphi(x)$$

dla małych t jest to macierz odwracalna, więc się zgadza. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej, w otoczeniu x, funkcja Φ_t jest bijekcją oraz istnieje funkcja $\Phi_t^{-1} \in C^1$. Zatem $\Phi_t(x)$ jest lokalnie dyfeomorfizmem. Niech $x \neq y$, wtedy

$$|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| = |(x + t \cdot \varphi(x)) - (y + t \cdot \varphi(y))| = |(x - y) + t \cdot (\varphi(x) - \varphi(y))| \overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq} |x - y| - t \cdot |\varphi(x) - \varphi(y)| \overset{(2)}{\geq} |x - y| - t \cdot C \overset{(3)}{>} 0$$

Przy czym $\overset{(1)}{\leq}$ to nierówność trójkąta, nierówność $\overset{(2)}{\leq}$ wynika z $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C$ dla pewnego C, bo φ ma zwarty nośnik i jest gładka, zaś ostatnia nierówność $\overset{(3)}{\leq}$ jest prawdziwa o ile $t < \frac{|x-y|}{C}$. Stąd Φ_t jest różnowartościowa wszędzie. Jest również subiektywna, bo poza pewną kulą zachowuje się jak funkcja identycznościowa. Zatem $\Phi_t(x)$ jest dyfeomorfizmem. Mamy

$$\frac{d}{dt}\det\Phi_0(x) = \mathrm{tr}(D\varphi(x)) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x)$$

b) F jest funkcją całkowalną, zaś Φ_t jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, zatem z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x + t \cdot \varphi(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot |\det D\Phi_t^{-1}|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \frac{1}{|\det D\Phi_t|}\, dx$$

zatem (wyznacznik jest dodatni, więc możemy pominąć moduły)

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \frac{1}{\det D\Phi_t}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{\det D\Phi_t}\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \frac{-\frac{d}{dt}\det D\Phi_t}{(\det D\Phi_t)^2}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \frac{(D\Phi_t) + o(t)}{(1 + t \cdot \mathrm{tr}(D\Phi_t) + o(t^2))^2}\, dx$$

skąd

$$\frac{d}{dt}f'(0) = -\int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \frac{\mathrm{tr}(D\varphi(x)) + 0}{(1 + 0 + 0}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \mathrm{tr}(D\varphi(x))\, dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x)\right)\, dx$$

Zadanie 14.
Kula jednostkowa $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ została przecięta płaszczyzną $\{z=a\}$. Oblicz objętość powstałych części.

Rozwiązanie:
Korzystając z twierdzenia Fubini'ego mamy

$$V = \int_a^R \left(\int_{\{x^2+y^2<R^2-z^2\}} d^2(x,y) \right) dz = \left\| \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \det\Phi = r \end{array} \right\| = \int_a^R \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\ dr\ d\theta \right) dz =$$

$$= \int_a^R \left(\int_0^{2\pi} \frac{R^2-z^2}{2}\ d\theta \right) dz = \int_a^R \pi(R^2-z^2)\ dz = \pi \left(R^2 \cdot z - \frac{1}{3}z^3 \right) \Big|_a^R =$$

$$= \pi \left(R^2(R-a) + \frac{1}{3}(R^3-a^3) \right) = \pi(R-a) \left(\frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{3}Ra + \frac{1}{3}a^2 \right)$$

Zadanie 15.
Oblicz miarę zbioru

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0<x,\ 0<y, \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2,\ 1 \leq xy \leq 2 \right\}$$

Rozwiązanie:
Niech dyfeomorfizm Φ zadany będzie wzorem

$$\Phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{y}{x}, xy \right)$$

czyli stosujemy podstawienie $s = \frac{y}{x}$ oraz $t = xy$. Równoważnie mamy $x = \sqrt{\frac{t}{s}}$ oraz $y = \sqrt{st}$, czyli dyfeomorfizm Φ dany będzie wzorem

$$\Phi(s,t) = \left(\sqrt{\frac{t}{s}}, \sqrt{st} \right)$$

Jakobian dyfeomorfizmu Φ wynosi

$$d\Phi = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \cdot s^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} \cdot s^{-\frac{3}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot s^{-1} + \frac{1}{4} \cdot s^{-1} = \frac{1}{2s}$$

Zatem mamy

$$\int_A 1\ d^2(x,y) = \int_{\Phi^{-1}} 1 \cdot \det\Phi(s,t)\ d^2(s,t) = \int_{\Phi^{-1}(A)} \frac{1}{2s}\ d^2(s,t)$$

Dalej mamy

$$\Phi^{-1}(A) = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0<s,\ 0<t,\ \frac{1}{2} < s < 2,\ 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

zatem

$$\int_A 1\ d^2(x,y) = \int_{[\frac{1}{2},2]\times[1,2]} \frac{1}{2s}\ d^2(s,t) = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2s}\ ds \cdot \int_1^2 1\ dt = \frac{1}{2}\ln s\ \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \cdot 1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2} \right) = \ln 2$$

Zadanie 16.
Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||x+y| < 1,\ y > 0\}$. Oblicz całkę

$$\int_A x \exp(-y^2)\ d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Niech dyfeomorfizm Φ będzie zadany wzorem

$$\Phi^{-1}(x,y) = (x+y, y) \ \text{ lub równoważnie } \ \Phi(s,t) = (s-t, t)$$

czyli stosujemy podstawienie $s = x+y$ oraz $t = y$. Jakobian dyfeomorfizmu Φ wynosi

$$d\Phi_{(s,t)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Mamy więc dla $f(x,y) = x\exp(-y^2)$ z twierdzenia Fubini'ego

$$\int_A f(x,y)\ d^2(x,y) = \int_{\{|s|<1, t>0\}} (s-t)\exp(-t^2) \cdot 1\ d^2(s,t) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 (s-t)\exp(-t^2)\ ds\ dt =$$

$$= \int_0^\infty \exp(-t^2)\left(\frac{1}{2}s^2 - st\right)\Big|_{-1}^1\ dt = -\int_0^\infty 2t\exp(-t^2)\ dt = \ldots = -1$$

Oczywiście $f(\Phi)$ jest całkowalna na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |s| < 1, t > 0\}$, ponieważ $|s-t| \leq |s|+|t| \leq 1+t$, a funkcja $(1+t)\exp(-t^2)$ jest całkowalna na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |s| < 1, t > 0\}$.

Zadanie 17.
Oblicz całkę

$$\int_A \ln(x+y)(x-2y)^2\ d\lambda^2(x,y)$$

gdzie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ to równoległobok o wierzchołkach $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$ i $(0,1)$.

Rozwiązanie:
Niech $\Phi(x,y) = (x+y, x-2y)$, czyli stosujemy podstawienie $s = x+y$ oraz $t = x-2y$. Wówczas jeśli

$$A = \text{ równoległobok o wierzchołkach } (1,0), (3,1), (2,2) \text{ i } (0,1)$$

to

$$\Phi(A) = \text{ prostokąt o wierzchołkach } (1,1), (4,1), (4,-2), (1,-2)$$

Niech $f(x,y) = \ln(x+y)(x-2y)^2$. Z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy

$$\int_A f(x,y)\ d^2(x,y) = \int_A g(\Phi(x,y)) \cdot |\det\Phi(x,y)|\ d^2(x,y) = \int_{\Phi(A)} g(s,t)\ d^2(s,t)$$

dla pewnej funkcji g. Jakobian odwzorowania Φ wynosi

$$|\det\Phi(x,y)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = |-3| = 3$$

zatem mamy równość

$$f(x,y) = \ln(x+y)\cdot(x-2y)^2 = g(\Phi(x,y))\cdot 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(x+y)\cdot(x-2y)^2 = g(x+y, x-2y)\cdot 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g(s,t) = \frac{1}{3}\cdot\ln(s)\cdot t^2$$

skąd

$$\int_A f(x,y)\ d^2(x,y) = \int_{\Phi(A)} g(s,t)\ d^2(s,t)$$

Z twierdzenia Fubini'ego mamy więc

$$\int_{\Phi(A)} g(s,t)\ d^2(s,t) = \int_{-2}^{1}\int_{1}^{4} \ln(s)\cdot\frac{1}{3}\cdot t^2\ ds\ dt = (s\ln s - s)\Big|_1^4 \cdot \frac{t^3}{9}\Big|_{-2}^{1} = 8\ln 2 - 3$$

Zadanie 18.
Wyznacz jakobian przekształcenia sferycznego

$$\Phi(r,\theta,\beta) = (r\cos\theta\cos\beta,\ r\sin\theta\cos\beta,\ r\sin\beta)$$

i użyj uzyskanego wyniku do policzenia objętości kuli trójwymiarowej $B(0,R)\subseteq\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie:
Jakobian przekształcenia sferycznego wynosi

$$d\Phi(r,\theta,\beta) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\beta & -r\sin\theta\cos\beta & -r\cos\theta\sin\beta \\ \sin\theta\cos\beta & r\cos\theta\cos\beta & -r\sin\theta\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{bmatrix}$$

A jego wyznacznik jest równy $\det\Phi = -r^2\cos\beta$. Możemy więc obliczyć objętość kuli

$$V = \int_{x^2+y^2+z^2<R^2} 1\ d^3(x,y,z) = \int_{r^2<R^2} r^2\cos\beta\ d^3(r,\theta,\beta) = \int_0^R r^2\ dr\cdot\int_0^{2\pi} 1\ d\theta\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\beta\ d\beta =$$

$$= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Zadanie 19.
Oblicz miarę zbioru

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 \le 4(x^2-y^2)\}$$

Rozwiązanie:
Korzystając ze współrzędnych biegunowych $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ mamy

$$\varphi^{-1}(D) = \{(r,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times(0,2\pi) \mid r^4 \le 4r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\} =$$

$$= \{(r,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times(0,2\pi) \mid r^2 \le 4\cos(2\alpha)\}$$

Osttnia nierówność zachodzi gdy, $\cos(2\alpha) \geq 0$, czyli $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi] =: A$. Wtedy

$$\int_D 1 \; d\lambda_2(x,y) = \int_{\varphi^{-1}(D)} r \; d\lambda_2(r,\alpha) = \int_A \int_0^{2\sqrt{\cos(2\alpha)}} r \; dr \; d\alpha = \int_A \frac{4\cos(2\alpha)}{2} \; d\alpha =$$

$$= \int_A 2\cos(2\alpha) \; d\alpha \sin(2\alpha)\Big|_A = 4$$

Zadanie 20.
Oblicz całkę

$$\int_{|x-y|<1} \exp(-|x+y|) \; d\lambda_2(x,y)$$

Zadanie 21.
Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0,\ y>0\}} \frac{xy-1}{y} \exp(-x-2y) \; d\lambda_2(x,y)$$

Zadanie 22.
Oblicz miarę zbioru

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0,\ xy < z,\ x^4 + y^4 < x^2 z\}$$

Zadanie 23.
Oblicz całkę

$$\int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x + y + 2\sqrt{xy} \; dy \; dx$$

a) Używając zamiany zmiennych $x = s \cdot \cos^4(t)$, $y = s \cdot \sin^4(t)$

b) Używając zamiany zmiennych $t = \sqrt{x},\ s = \sqrt{y}$.

Zadanie 24.
Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1,\ y > 0\}$. Oblicz całkę

$$\int_A x \exp(-y^2) \; d\lambda_2(x,y)$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy z zamiany zmiennych $s = y$, $t = x+y$, więc $\varphi(s,t) = (t-s, s)$, co jest odwzorowaniem liniowym o jakobianie równym 1. Zatem z twierdzenia Fubiniego

$$\int_A x \exp(-y^2) \; d\lambda_2(x,y) = \int_{\{|t|<1, s>0\}} (t-s) \cdot \exp(-s^2) \cdot 1 \; d\lambda_2(s,t) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{-1}^1 (t-s) \exp(-s^2)\ dt \right)\ ds = \int_0^\infty \left(\exp(-s^2) \left(\frac{1}{2}t^2 - st \right) \Big|_{-1}^1 \right)\ dt =$$

$$= -2 \cdot \int_0^\infty s \exp(-s^2)\ ds = -1$$

Zadanie 25.
Niech $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z^2 \leq 3(x^2+y^2),\ 0 \leq z \leq 2\}$. Obliczyć całkę

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d\lambda_3(x,y,z)$$

Rozwiązanie. *Stosujemy współrzędne sferyczne i dostajemy z drugiego warunku: $0 \leqslant r \sin\beta \leqslant 2$. W szczególności $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pierwszy warunek przy uwzględnieniu zakresu β daje:*

$$\cos\beta \leqslant \sin\beta \leqslant \sqrt{3}\cos\beta.$$

Po prostych obliczeniach dostajemy $\beta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$. Teraz już całkujemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{2}{\sin\beta}} r^3 \cos\beta dr d\beta d\alpha =$$

$$8\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\beta}{\sin^4\beta} d\beta = 8\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{1}{t^4} dt =$$

$$\frac{8\pi}{3} \cdot \left[-t^{-3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \ldots.$$

Zadanie 26.
Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > \sqrt{x^2+y^2}\}$. Obliczyć

$$\int_A z e^{-(x^2+y^2+z^2)}\ d\lambda_3(x,y,z)$$

Rozwiązanie. *Stosujemy podstawienie sferyczne i widzimy, że nierówność opisująca zbiór A przyjmuje postać:* $\sin\beta > \cos\beta$, *co daje* $\beta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. *Teraz całkujemy*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} r\sin\beta e^{-r^2}\cdot r^2\cos\beta drd\beta d\alpha =$$

$$2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\beta\cos\beta d\beta\right)\cdot\left(\int_0^{\infty} r^3e^{-r^2}dr\right) =$$

$$\pi\left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} udu\right)\cdot\left(\int_0^{\infty} te^{-t}dt\right) =$$

$$\pi\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\cdot 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Zadanie 27.
Znaleźć trójwymiarową miarę Lebesgue'a zbioru ograniczonego przez sześć powierzchni

$$z = x^2+y^2,\ xy = 2,\ xy = 3,\ y = 2x,\ y = 3x,\ z = 0$$

Rozwiązanie. *Zgodnie z rysunkiem należy obliczyć miarę następujących dwóch obszarów:*

$$\{(x,y,z) : 2x < y < 3x,\ 2 < xy < 3,\ 0 < z < x^2+y^2\} \text{ oraz}$$
$$\{(x,y,z) : 3x < y < 2x,\ 2 < xy < 3,\ 0 < z < x^2+y^2\}.$$

Zajmiemy się tylko pierwszym z nich. Trzeba teraz policzyć dwie całki potrójne:

$$\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}\int_{\frac{2}{x}}^{3x}\int_{0}^{x^2+y^2} dzdydx + \int_{1}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\int_{2x}^{\frac{3}{x}}\int_{0}^{x^2+y^2} dzdydx =$$

$$\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}\int_{\frac{2}{x}}^{3x}(x^2+y^2)dydx + \int_{1}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\int_{2x}^{\frac{3}{x}}(x^2+y^2)dydx =$$

$$\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}\left(x^2(3x-\frac{2}{x}) + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{2}{x}}^{3x}\right)dx + \int_{1}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(x^2(\frac{3}{x}-2x) + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{2x}^{\frac{3}{x}}\right)dx$$

Zadanie 28.
Niech $A = \{(x,y) \mid x^3+y^3-\frac{3}{2}xy = 0\}$. Znaleźć dwuwymiarową miarę Lebesgue'a ograniczonej składowej spójności zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Rozwiązanie. *Zgodnie z rysunkiem pole szukanego obszaru można opisać jako dwukrotność pola następującego zbioru:*

$$\left\{(x,y) : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x,\ x^3 + y^3 - \frac{3}{2}xy \leqslant 0\right\}.$$

We współrzędnych biegunowych $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ *dostajemy* $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ *oraz* $0 \leqslant r \leqslant \frac{3}{2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$. *Ostatecznie mamy do policzenia całkę:*

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{3}{2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}} r\,dr\,d\alpha.$$

Zadanie 29.

Obliczyć objętość bryły opisanej nierównością $(x^2+y^2+z^2)^2 \leq 2xyz$.

Rozwiązanie. *Stosujemy podstawienie sferyczne* $x = r\cos\alpha\cos\beta$, $y = r\sin\alpha\cos\beta$, $z = r\sin\beta$ *dla* $\alpha \in [-\pi,\pi]$, $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *oraz* $r > 0$. *Wówczas nierówność definiująca bryłę przybiera postać:*

$$r^4 \leqslant 2r^3 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta^2\sin\beta, \text{ czyli } r \leqslant \sin(2\alpha)\cos\beta^2\sin\beta.$$

Aby to miało sens, wyrażenie po prawej stronie musi być nieujemne, czyli $\sin(2\alpha)\cdot\sin\beta \geqslant 0$. *Są dwie możliwości:* $\alpha \in [0,\pi]$ *oraz* $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *albo* $\alpha \in [-\pi, 0]$ *i* $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. *Możemy wobec tego przystąpić do całkowania:*

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2\alpha)\cos\beta^2\sin\beta} r^2\cos\beta\,dr\,d\beta\,d\alpha + \int_{-\pi}^{0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{\sin(2\alpha)\cos\beta^2\sin\beta} r^2\cos\beta\,dr\,d\beta\,d\alpha =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(2\alpha)\cos^2\beta\sin\beta\right)^3\cos\beta\,d\beta\,d\alpha + \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sin(2\alpha)\cos\beta^2\sin\beta\right)^3\cos\beta\,d\beta\,d\alpha =$$

$$\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\alpha\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\beta\sin\beta\,d\beta\right)d\alpha + \frac{8}{3}\int_{-\pi}^{0}\sin^3\alpha\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^7\beta\sin\beta\,d\beta\right)d\alpha =$$

$$\frac{8}{3}\left(\int_0^{\pi}\sin^3\alpha\,d\alpha\right)\cdot\left(\int_0^1 u^7\,du\right) - \frac{8}{3}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin^3\alpha\,d\alpha\right)\cdot\left(\int_0^1 u^7\,du\right) =$$

$$2\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Zadanie 30.

Obliczyć

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan(\pi x) - \arctan(x)}{x}\,dx$$

Rozwiązanie. *Zapiszmy najpierw*

$$\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg} x = \int_x^{\pi x} \frac{1}{1+y^2} dy = \int_1^{\pi} \frac{x}{1+u^2x^2} du,$$

gdzie w ostatniej linijce zastosowaliśmy podstawienie $y = ux$. Wobec tego możemy napisać:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\int_1^{\pi} \frac{x}{1+u^2x^2} du \right) dx = \int_1^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2x^2} dx du =$$
$$\int_1^{\pi} \left[\frac{\operatorname{arctg}(ux)}{u} \right]_0^{\infty} du = \frac{\pi}{2} \int_1^{\pi} \frac{1}{u} du = \frac{\pi}{2} \ln \pi.$$

Przy zamianie kolejności całkowania skorzystaliśmy z twierdzenia Fubiniego, co było uprawnione, gdyż funkcja podcałkowa jest nieujemna.

Zadanie 31.
Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = y$.

Rozwiązanie:
Korzystając z podstawienia biegunowego $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ mamy

$$\varphi^{-1}(A) = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \pi) \mid r \le \sqrt{\sin \alpha}\}$$

zatem

$$\int_A 1 \, d\lambda_2(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{\sin \alpha}} r \, dr \, d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha}{2} \, d\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ćwiczenia 5

Środek ciężkości

Definicja: Średnią odległość liczymy z wykorzystaniem wzoru

$$\frac{\int_B d(p,0)\ d\lambda_3(p)}{\int_B 1\ d\lambda_3(p)}$$

gdzie $p \in B$, zaś $d(p,0)$ to odległość punktu p od początku układu współrzędnych.

Zadanie 1.

Obliczyć średnią odległość punktu trójwymiarowej kuli jednostkowej do jej środka.

Rozwiązanie:

Liczymy

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2<1\}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{(0,1)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)} r\cdot r^2\cdot\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cdot\cos\alpha\ dr\ d\alpha\ d\beta = \int_0^{2\pi} d\beta\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\ d\alpha\cdot\int_0^1 r^3\ dr = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{4} = \pi$$

oraz

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2<1\}} 1\ d\lambda_3(x,y,z) = \frac{4}{3}\cdot 1^3\cdot\pi = \frac{4}{3}\pi$$

zatem średnia odległość wynosi $\frac{\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{4}$.

Definicja: Środkiem ciężkości zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy punkt $s(A)$ o współrzędnych

$$s(A) = \frac{\int_A x\ d\lambda_n(x)}{\lambda_n(A)}$$

Zadanie 2.

Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o dodatniej i skończonej mierze Lebesgue'a, a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfizmem liniowym. Przekonać się, że L przeprowadza środek ciężkości E na środek ciężkości $L(E)$.

Rozwiązanie:

Niech x_E to środek ciężkości E oraz niech x_F to środek ciężkości F, przy czym $F := L(E)$. Mamy

$$\lambda_n(F) = |\det L|\cdot\lambda_n(E)$$

Przekształcenie L jest dyfeomorfizmem, więc korzystając z podstawienia $x = L(y)$ mamy

$$\int_F x\ d\lambda_n(x) = \int_E L(y)\cdot|\det DL(y)|\ d\lambda_n(y) = |\det L|\cdot\int_E L(y)\ d\lambda_n(y)$$

zatem

$$x_F = \frac{1}{\lambda_n(E)} \cdot \int_E L(y)\ d\lambda_n(y) \overset{\text{liniowość całki}}{=\!=\!=\!=\!=} L\left(\int_{\frac{1}{\lambda_n(E)}} \cdot \int_E x\ d\lambda_n(x)\right) = L(x_E)$$

Zadanie 3.
Znaleźć środek ciężkości półkuli trójwymiarowej.

Rozwiązanie:
Trójwymiarowa półkula to zbiór $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ we współrzędnych sferycznych to $\varphi^{-1}(A) = \{(r,\alpha,\beta) \mid 0 \leq r \leq 1, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \beta \in (-\pi,\pi)\}$. Objętość tego zbioru wynosi $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{2}{3}\pi$. Dalej mamy

$$\int_A x\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(A)} r\cos\alpha\cos\beta \cdot r^2\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 \cdot \cos\alpha \cdot \cos^2\beta\ dr\ d\alpha\ d\beta = 0$$

bo całka po β jest równa zero

$$\int_A y\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(A)} r\cos\alpha\sin\beta \cdot r^2\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta\sin\beta\ dr\ d\alpha\ d\beta = 0$$

tu również całka po β daje zero

$$\int_A z\ d\lambda_3(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(A)} r\sin\alpha \cdot r^2\cos\alpha\ d\lambda_3(r,\alpha,\beta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 \cdot \cos\alpha\sin\alpha\ dr\ d\alpha\ d\beta = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos\alpha\ d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 x\ dx = \frac{\pi}{4}$$

skąd środkiem ciężkości jest $\left(0, 0, \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2}{3}\pi}\right) = \left(0,0,\frac{3}{8}\right)$.

Zadanie 4.
Niech $A \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem mierzalnym, ograniczonym, leżącym w półprzestrzeni $\{(x,y,z) \mid z > 0\}$. Niech $m = \lambda_3(A)$. Punkt (a,b,c) jest środkiem ciężkości zbioru A. Dane są liczby α i β, gdzie $0 < \alpha < \beta$. Dla $t > 0$ niech $f(t)$ oznacza miarę części zbioru A zawartej pomiędzy płaszczyznami o równaniach $z = \alpha t$, $z = \beta t$. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty}$$

Rozwiązanie:
Niech $A^z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in A\}$. Wówczas z zasady Caballieriego

$$c = \frac{1}{m} \cdot \int_A z\ d\lambda_3(x,y,z) = \frac{1}{m} \cdot \int_0^{\infty}\int_{A^z} z\ d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{m} \cdot \int_0^{\infty} z \cdot \lambda_2(A^z)\ dz$$

Niech $A_t = \{(x,y,z) \in A \mid \alpha t \le z \le \beta t\}$ i niech $f(t) = \lambda_3(A_t)$. Mamy

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \int_0^\infty \lambda_3(A_t)\,dt = \int_0^\infty \int_{\alpha t}^{\beta t} \lambda_2(A^z)\,dz\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} \lambda_2(A^z)\,dt\,dz = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \int_0^\infty z\,\lambda_2(A^z)\,dz = cm\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

Zadanie 5.
Dany jest kąt dwuścienny o rozwartości 2γ, gdzie $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, którego krawędź przechodzi przez środek kuli o promieniu a. Niech C będzie częścią kuli zawartą w tym kącie dwuściennym. Oblicz odległość środka ciężkości bryły C od krawędzi kąta.

Zadanie 6.
Niech $H = \{(x_1,\dots,x_k) \mid x_k = 0\} \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie podprzestrzenią "równikową" (izomorficzną/izometryczną z $\mathbb{R}^{k-1}$). Niech C będzie stożkiem, którego podstawą jest zbiór $B \subseteq H$, ograniczony, mierzalny, a wierzchołek leży w odległości h od H. W jakiej odległości od H leży środek ciężkości zbioru C?

Rozwiązanie. *Zgodnie ze wzorem na miarę stożka nad zbiorem mamy:*

$$\lambda_k(C) = \frac{h}{k}\lambda_{k-1}(B).$$

Ze względu na fakt, iż szukamy odległości punktu od płaszczyzny wystarczy zainteresować się ostatnią współrzędną środka ciężkości. Oznaczmy $B_{x_k} = \{(x_1,\dots,x_{k-1}) : (x_1,\dots,x_k) \in C\}$. *Wówczas ostatnia współrzędna środka ciężkości zbioru* C *wyraża się wzorem (stosujemy twierdzenie Fubiniego):*

$$\frac{1}{\lambda_k(C)} \int_C x_k d\lambda_k = \frac{1}{\lambda_k(C)} \int_0^h \int_{B_{x_k}} x_k d\lambda_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1}) dx_k = \frac{1}{\lambda_k(C)} \int_0^h x_k \lambda_{k-1}(B_{x_k}) dx_k.$$

Zbiór B_{x_k} *powstaje jako obraz zbioru* B *przy przekształceniu liniowym. Przesunięcie nie zmienia miary, a rozciągnięcie na poziomie* x_k *wynosi* $\frac{h-x_k}{x_k}$. *Zatem*

$$\lambda_{k-1}(B_{x_k}) = \left(\frac{h-x_k}{h}\right)^{k-1} \lambda_{k-1}(B).$$

Teraz wszystko podstawiamy i dostajemy

$$\frac{k}{h^k} \int_0^h x_k (h-x_k)^{k-1} dx_k = \frac{k}{h^k} \int_0^h (h-u) u^{k-1} du = \frac{h}{k+1}.$$

Jest to właśnie szukana odległość.

Zadanie 7.
Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego drutu w kształcie łuku krzywej (zwanej kardiodą) o równaniu $r = \frac{1}{2}(1+\cos t)$, gdzie $t \in [0,\pi]$, $x_1 = r\cos t$, $x_2 = r\sin t$.

Ćwiczenia 6

Całkowalność funkcji

W założeniach wielu twierdzeń dotyczących całki pojawia się warunek że rozważana funkcja jest całkowalna.

- Funkcja f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na E wtedy i tylko wtedy, gdy jej moduł $|f|$ jest całkowalny na E w sensie Lebesgue'a
- Jeśli możemy ograniczyć f z góry i z dołu przez inną funkcję całkowalną g, to f jest całkowalna. To znaczy, jeśli $|f| \leq g$ i g jest całkowalna to f też jest całkowalna. Wynika to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.
- Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieujemna na przedziale $[a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (a lub b mogą być nieskończone) i całka Riemanna $\int_a^b f(x)\,dx$ jest skończona (odpowiednio nieskończona) to f jest całkowalna (odpowiednio niecałkowalna) w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$. Ten fakt również łatwo udowodnić, korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej. Dla funkcji dowolnego znaku nie musi to być prawdą
- (Twierdzenie Tonelli'ego) Jeśli $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ jest mierzalna i nieujemna oraz $\int_E f\, d\lambda_n$ policzona z twierdzenia Fubini'ego jest skończona (odpowiednio nieskończona), to f jest całkowalna (odpowiednio niecałkowalna) na E. W przypadku funkcji dowolnego znaku może się zdarzyć, że twierdzenie Fubini'ego daje skończoną wartość całki, ale funkcja jest niecałkowalna.

Przypomnienie:

- $\int_0^1 x^\alpha\, dx < \infty$ dla $\alpha > -1$
- $\int_1^\infty x^\alpha\, dx < \infty$ dla $\alpha < -1$

Zadanie 1.
Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = |x|^\alpha$ jest całkowalna

a) na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$

b) na dopełnieniu kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$

Rozwiązanie:

a) Funkcja jest dodatnio określona i ciągła na zbiorze mierzalnym, zatem możemy użyć twierdzenia Fubini'ego. Dla $n = 1$ mamy

$$I_1 = \int_{-1}^1 |x|^\alpha\, dx = 2\int_0^1 x^\alpha\, dx$$

Funkcja jest więc całkowalna dla $\alpha > -1$. Dla $n = 2$ mamy

$$I_2 = \int_{x^2+y^2<1} \sqrt{x^2+y^2}^{\;\alpha}\, d^2(x,y) = \int_{r^2<1} r^\alpha \cdot r\, d^2(r,\theta) = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \cdot \int_0^1 r^{\alpha+1}\, dr$$

Funkcja jest więc całkowalna dla $\alpha + 1 > -1 \Leftrightarrow \alpha > -2$. Dla $n = 3$ mamy

$$I_3 = \int_{x^2+y^2+z^2<1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\ \alpha}\ d^3(x,y,z) = \int_{r^2<1} r^\alpha \cdot r^2 \cos\beta\ d^3(r,\theta,\beta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\ d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\ d\beta \cdot \int_0^1 r^{\alpha+2}\ dr$$

Funkcja jest więc całkowalna dla $\alpha + 2 > -1 \Leftrightarrow \alpha > -3$. Ogólnie dla n mamy n-wymiarowe podstawienie sferyczne $(r, \Omega) \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$. Niech $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \frac{\det \Phi}{r^{n-1}}$, wówczas mamy

$$I_n = \int_{B^n(0,1)} ||\mathbf{x}||^\alpha\ d^n\mathbf{x} = \int_{r^2<1} r^\alpha \cdot r^{n-1} \cdot f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\ d^n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} d\Omega \cdot \int_0^1 r^{\alpha+n-1}\ dr$$

Funkcja jest więc całkowalna dla $\alpha + n - 1 > -1 \Leftrightarrow \alpha > -n$.

Zadanie 2.
Uzasadnić, że funkcja $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ nie jest całkowalna na $[0,1]^2$.

Rozwiązanie:
Aby pokazać, że funkcja f jest niecałkowalna wystarczy pokazać, że $\int_{B_r \cap (0,1)^2} |f| = \infty$ dla pewnego r lub, że $\int_{\{x>y\} \cap (0,1)^2} f = \infty$. Mamy

$$\int_{(0,1)^2} |f| d\lambda_2(x,y) \geq \int_{B_1 \cap (0,1)^2} |f| d\lambda_2(x,y) = \int_{0<r<1,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}} \frac{r^2(|\cos^2\alpha - \sin^2\alpha|)}{r^2} \cdot r\ d\lambda_2(r,\alpha) =$$

$$= \int_{0<r<1,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos(2\alpha)|}{r}\ d\lambda_2(r,\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{r}\ dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(2\alpha)|\ d\alpha = \infty \cdot const = \infty$$

zatem f nie jest całkowalna.

Zadanie 3.
Rozstrzygnij, czy funkcja $f(x,y) = \frac{\ln x + \ln y}{1+x^2+y^2}$ jest całkowalna na zbiorach

a) $A = [0,1]^2$

b) $B = [0,1] \times [1, +\infty)$

c) $C = [1, +\infty)^2$

Rozwiązanie:
Oczywiście f jest funkcją mierzalną.

a) Mamy $|f(x,y)| = \frac{-\ln x - \ln y}{1+x^2+y^2} \leq -(\ln x + \ln y)$ zatem

$$\int_{[0,1]^2} |f(x,y)|\ d\lambda_2(x,y) \leq \int_{[0,1]^2} -(\ln x + \ln y)\ d\lambda_2(x,y) =$$

$$= -\int_0^1 \ln x\ dx - \int_0^1 \ln y\ dx = -2 \cdot x(\ln x - 1)\Big|_0^1 = 2 < \infty$$

zatem f jest całkowalna na $[0,1]^2$.

b) Mamy $|f(x,y)| = \left|\frac{\ln x}{1+x^2+y^2} + \frac{\ln y}{1+x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{\ln x}{1+x^2+y^2}\right| + \left|\frac{\ln y}{1+x^2+y^2}\right| = \frac{-\ln x + \ln y}{1+x^2+y^2}$, zatem

$$\int_{[0,1]\times[1,\infty)} |f(x,y)|\ d\lambda_2(x,y) \le \int_{[0,1]\times[1,\infty)} \frac{-\ln x + \ln y}{1+x^2+y^2}\ d\lambda_2(x,y) =$$

$$= \int_1^\infty \int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy + \int_1^\infty \int_0^1 \frac{\ln y}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy$$

Mamy

$$\int_1^\infty \int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy \le \int_1^\infty \int_0^1 \frac{-\ln x}{1+y^2}\ dx\ dy = \left(-\int_0^1 \ln x\ dx\right)\cdot\left(\int_1^\infty \frac{1}{1+y^2}\ dy\right) < \infty$$

oraz

$$\int_1^\infty \int_0^1 \frac{\ln y}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy \le \int_1^\infty \int_0^1 \frac{\ln y}{y^2}\ dx\ dy = \int_1^\infty \frac{\ln y}{y^2}\ dy = -\left(\frac{\ln y + 1}{y}\right)\Big|_1^\infty = 1 < \infty$$

zatem również

$$\int_1^\infty \int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy + \int_1^\infty \int_0^1 \frac{\ln y}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy < \infty$$

skąd f jest całkowalna na B

c) Zauważmy, że mamy $f(x,y) = \frac{\ln(xy)}{1+x^2+y^2} > \frac{1}{1+x^2+y^2}$ dla $xy > e$. Funkcja $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ jest niecałkowalna na $[1,\infty)^2$, zatem f też nie jest całkowalna.

Zadanie 4.
Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Definiujemy funkcję $\varphi(y) = \int_y^{y+1} f(x)\ dx$. Wykaż, że $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna oraz $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx$

Zadanie 5.
Traktrysę $\{(t - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + r^{-t}},\ \frac{2}{e^t + e^{-t}},\ 0) \mid t > 0\}$ obracamy wokół osi OX otrzymując trochoidę T. Znaleźć wszystkie liczby $a > 0$, dla których funkcja $(x,y,z) \to a^x$ jest całkowalna na T.

Zadanie 6.
Niech $L^p(\mathbb{R})$ dla $\infty > p \ge 1$ oznacza zbiór funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a f, dla których

$$||f||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\ d\lambda_n < \infty$$

Wykazaćże przestrzeń $L^p(\mathbb{R})$ jest zupełna z metryką $D(f,g) = ||f-g||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Ćwiczenia 7
Sploty

Definicja: Rozważmy funkcje całkowalne $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Splotem funkcji f i g nazywamy funkcję $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\ d^n(\mathbf{y})$$

Splot $f * g$ może być dobrze określoną funkcją również gdy na przykład tylko jedna z rozważanych funkcji będzie całkowalna. Intuicja jaką powinniśmy mieć jest taka, że splot $f * g$ to rodzaj „uśrednienie funkcji f za pomocą funkcji g (albo na odwrót).

Zadanie 1.
Rozważmy $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$. Oblicz splot $f * f$.

Rozwiązanie:
Wprost z definicji splotu mamy

$$f * f = \int_{\mathbb{R}} f(y)f(x - y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(y)\chi_{[0,1]}(x - y)\ dy =$$

$$= \lambda_1\{y \in \mathbb{R} \mid y \in [0, 1], x - y \in [0, 1]\} = \lambda_1([0, 1] \cap [x - 1, x]) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{dla } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Definicja: Nośnikiem funkcji f nazywamy domknięcie zbioru $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Oznaczamy go przez $\operatorname{supp}(f)$.

Zadanie 2.
Pokaż, że $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

Rozwiązanie:
Niech $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid f * g(x) \neq 0\}$, czyli $f * g(x) \neq 0$, wówczas $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\ dy \neq 0$, czyli istnieje $y \in \mathbb{R}^n$ takie, że $f(y)g(x - y) \neq 0$, skąd $f(y) \neq 0$ i $g(x - y) \neq 0$. Biorąc $x = z + y$ mamy $f(y) \neq 0$ oraz $g(z) \neq 0$, skąd $x \in \{z + y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \neq 0,\ g(z) \neq 0\}$, czyli

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f * g(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} + \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}$$

skąd po domknięciu zbiorów i skorzystaniu z faktu $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ mamy tezę.

Zadanie 3.
Rozważmy $f_1(t) = \chi_{[0,1]}(t)$ i zdefiniujmy indukcyjnie $f_n = f_1 * f_{n-1}$. Udowodnij, że

a) Nośnik f_n jest zawarty w $[0, n]$

b) $f_n \geq 0$

c) f_n na każdym przedziale $[k, k+1]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest wielomianem stopnia nie większego niż $n-1$

d) f_n jest klasy C^{n-2}, dla $n \geq 1$

Rozwiązanie:

a) Mamy $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq \mathrm{supp}(f_1) + \mathrm{supp}(f_{n-1}) \subseteq [0,1] + [0, n-1] = [0, n]$, przy czym przedostatnia równość wynika z indukcji.

b) Splot funkcji nieujemnych jest nieujemny, bo całkujemy iloczyn funkcji nieujemnych.

c) Pokażemy to indukcyjnie. Mamy

$$f_n(x) = f_1 * f_{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,1]}(y) \cdot f_{n-1}(x-y)\ dy = \int_0^1 f_{n-1}(x-y)\ dy$$

Dla $x \in [k, k+1]$ całkujemy wielomian stopnia nie większego niż $n-2$, zatem wynikiem będzie wielomian stopnia nie większego niż $n-1$.

d) Pokażemy to indukcyjnie. Mamy

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,1]}(x-y) \cdot f_{n-1}(y)\ dy = \int_x^{x+1} f_{n-1}(y)\ dy = F_{n-1}(x+1) - F_{n-1}(x)$$

gdzie F_{n-1} oznacza funkcję pierwotną f_{n-1}. Jeśli f_{n-1} było klasy C^{n-3}, to F_{n-1} jest klasy C^{n-2}.

Zadanie 4.
Rozważmy funkcję całkowalną $f \in L(\mathbb{R})$ i zdefiniujmy funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-y) \frac{\sin y}{y}\ dy$$

Wykaż, że F jest

a) dobrze określona

b) ciągła (jednostajnie)

c) różniczkowalna

Rozwiązanie:

a) Korzystając z nierówności $\frac{|\sin x|}{|x|} < 1$ mamy

$$|F(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t-y)|\ dy = \left\| \begin{array}{c} x = t-y \\ dx = dy \end{array} \right\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ dx < \infty$$

zatem $F(t)$ jest skończone dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

b) Policzmy różnicę $F(t)-F(s)$, mamy

$$|F(t)-F(s)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f(t-y)\frac{\sin y}{y}\ dy - \int_{\mathbb{R}} f(s-y)\frac{\sin y}{y}\ dy \right| = \left\| \begin{array}{c} z=t-y \\ z=s-y \end{array} \right\| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} f(z)\frac{\sin(t-z)}{t-z}\ dz - \int_{\mathbb{R}} f(z)\frac{\sin(s-z)}{s-z}\ dz \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(z)| \cdot \left| \frac{\sin(t-z)}{t-z} - \frac{\sin(s-z)}{s-z} \right|\ dz$$

Funkcja $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ jest jednostajnie ciągła, zatem dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $|g(t')-g(s')| < \varepsilon$ o ile $|t'-s'| < \delta$. Biorąc $|t-s| < \delta$ mamy $\left|\frac{\sin(t-z)}{t-z} - \frac{\sin(s-z)}{s-z}\right| < \varepsilon$ i stąd otrzymujemy

$$|F(t)-F(s)| < \int_{\mathbb{R}} |f(z)| \cdot \varepsilon\ dz = \varepsilon \cdot ||f||_1$$

zatem F jest jednostajnie ciągła.

c) Dla $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{\sin(t-y)}{t-y}\ dy$ mamy

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y) \cdot \frac{\sin(t-y)}{t-y} = f(y) \cdot \frac{\cos(t-y)\cdot(t-y) - 1\cdot(t-y)}{(t-y)^2} = f(y)\cdot h(t-y)$$

gdzie $h(s) = \frac{\cos(s)s - \sin(s)}{s^2}$. Funkcja $h(s)$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła, zatem funkcję $f(y)\cdot h(t-y)$ możemy ograniczyć przez funkcję całkowalną $M\cdot f(y)$. Możemy więc skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki, mamy

$$\frac{d}{dt}F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} f(y) \cdot \frac{\sin(t-y)}{t-y}\ dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\cdot h(t-y)\ dy$$

zatem F jest różniczkowalna.

Definicja: Dla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mierzalnej względem λ_n połóżmy

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\ d\lambda_n$$

Symbolem $L^1(\mathbb{R}^n)$ oznaczamy przestrzeń funkcji całkowalnych na $\mathbb{R}^n$ względem miary Lebesgue'a λ_n

Zadanie 5.
Wykaż, że dla dowolnych funkcji całkowalnych $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$

a) funkcja $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ jest całkowalna dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, w związku z czym splot $(g * f)(\mathbf{x})$ jest dobrze określony dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

b) zachodzi nierówność $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$

c) splot jest przemienny, to znaczy $f * g = g * f$

d) splot jest łączny, to znaczy $f * (g * h) = (f * g) * h$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)\cdot g(y)|\ d\lambda_{2n}(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\ d\lambda_n(x)\right)|g(y)|\ d\lambda_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f|\ d\lambda_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|\ d\lambda_n = ||f||_1\cdot||g||_1 < \infty$$

gdyż całka $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\ d\lambda_n(x)$ nie zależy od y. Zatem całka $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\cdot g(y)|\ d\lambda_n(y)$ jest skończona dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$, czyli splot $(g * f)(x)$ jest dobrze określony.

b) Z definicji splotu mamy

$$||\ |f| * |g|\ ||_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g|\ d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\ d\lambda_n(x)\right)|g(y)|\ d\lambda_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)\cdot g(y)|\ d\lambda_{2n}(x,y) = ||f||_1\cdot||g||_1$$

Skoro $|f*g| \leq |f| * |g|$, to

$$||f*g||_1 \leq ||\ |f| * |g|\ ||_1 = ||f||_1 \cdot ||g||_1$$

c) Mamy

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\cdot g(x-y)\ dy = \left\|\begin{matrix} y' = x-y \\ dy = dy' \end{matrix}\right\| = \int_{\mathbb{R}} f(x-y')\cdot g(y')\ dy' = g*f(x)$$

d) Skorzystamy ze zmiany kolejności całkowania, którą możemy zastosować powołując się na twierdzenie Fubini'ego (wszystkie funkcje są całkowalne) oraz skorzystamy z tego, że całka Lebesgue'a jest niezmiennicza na przesunięcia. Mamy

$$\begin{aligned}
(f*g)*h(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(y)\cdot h(x-y)\ dy = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(z)\cdot g(y-z)\ dz\right]\cdot h(x-y)\ dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\cdot g(y-z)\cdot h(x-y)\ dy\ dz = \left\|\begin{matrix} y' = y-z \\ x' = x-z \\ dy = dy' \end{matrix}\right\| = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)\int_{\mathbb{R}} g(y')\cdot h(x'-y')\ dy'\ dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)\cdot(g*h)(x')\ dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)\cdot(g*h)(x-z)\ dz = f*(g*h)(x)
\end{aligned}$$

Zadanie 6.
Dla funkcji całkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określamy $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\xi x)\ dx$. Wykaż, że

a) $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona

b) jeśli f_n zbiega do f w normie $L_1(\mathbb{R})$, to $\widehat{f_n}$ zbiega jednostajnie do $\widehat{f}$

c) dla $f = \chi_{[0,\pi]}$, funkcja $\widehat{f}$ nie jest całkowalna na $\mathbb{R}$

Rozwiązanie:

a) Funkcja sin jest ciągła, zatem $f(x)\sin(\xi x) \overset{\xi\to\xi_0}{\to} f(x)\sin(\xi_0 x)$. Funkcję $|f(x)\sin(\xi x)|$ możemy ograniczyć funkcją całkowalną $|f(x)|$, zatem z twierdzenia o zmajoryzowanej zbieżności mamy

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi x) f(x)\ dx \overset{\xi\to\xi_0}{\to} \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi_0 x) f(x)\ dx = \widehat{f}(\xi_0)$$

zatem $\widehat{f}$ jest ciągła. Ponadto $|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ dx$, zatem jest również ograniczona.

b) Mamy

$$|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \cdot |\sin(\xi x)|\ dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \cdot |\sin(\xi x)|\ dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\ dx = ||f_n - f||_{L^1(\mathbb{R})}$$

Oszacowanie to jest niezależne od ξ, zatem $\widehat{f}$ jest zbieżne jednostajnie.

c) Dla $f = \chi_{[0,\pi]}$ mamy

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\pi]} \cdot \sin(\xi x)\ dx = \int_0^{\pi} \sin(\xi x)\ dx = \frac{\cos(\xi x)}{\xi}\Big|_0^{\pi} = \frac{1 - \cos(\xi\pi)}{\xi}$$

Dla $\xi = \left(k + \frac{1}{2}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{1}{\xi} \sim \frac{1}{k}$. Istnieje $\varepsilon > 0$ oraz $c > 0$, że jeśli $|\xi - (k + \frac{1}{n})| < \varepsilon$, to $\widehat{f}(\xi) > \frac{c}{k}$. Sumując po wszystkich $k \in \mathbb{N}$ otrzymujemy szereg rozbieżny.

Zadanie 7.
Wykaż, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, zaś

a) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i ograniczona, to splot $f * g$ jest dobrze określony i ograniczony

b) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest w klasie $C_c(\mathbb{R}^n)$, bądź $C_0(\mathbb{R}^n)$, to splot $f * g$ jest jednostajnie ciągły

c) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest w klasie $C_c^k(\mathbb{R}^n)$, to splot $f * g$ jest klasy $C^k(\mathbb{R}^n)$

Rozwiązanie:

a) Niech $|g| < M$, wówczas

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y)\ d\lambda_n(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot M \leq M \cdot ||f||_1 < \infty$$

b) Funkcja $x \mapsto g(x-y)$ jest jednostajnie ciągła, zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że $||x-z|| < \delta \Rightarrow |g(x-y) - g(z-y)| < \varepsilon$. Zatem dla takich x i z mamy

$$|f*g(x) - f*g(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x-y) - g(z-y)| \, d\lambda_n(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} ||f(y)|| \cdot \varepsilon \, d\lambda_n(y) = \varepsilon \cdot ||f||_1$$

c) Korzystając z różniczkowania pod znakiem całki mamy

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x-y) \, d\lambda_n(y) = f * \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g \right)(x)$$

Zadanie 8.
Rozważmy funkcję całkowalną $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Dla $t \geq 0$ definiujemy

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cos(tx) \cdot f(x) \, dx$$

Rozstrzygnij, czy

a) F jest ciągła na $[0, \infty)$

b) F jest różniczkowalna na $(0, \infty)$

c) F jest całkowalna na $[0, \infty)$

Zadanie 9.
Dla funkcji $f \in L(\mathbb{R})$ definiujemy $S_f(x) = \int_R \sin(xt) \cdot f(t) \, dt$ oraz $C_f(x) = \int_R \cos(xt) \cdot f(t) \, dt$. Wykaż, że funkcje S_f i C_f są dobrze określone oraz, że zachodzi równość $S_{f*g} = S_r C_g + C_f S_g$.

Rozwiązanie:
Dobra określoność transformat wynika z szacowania

$$|S_f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\sin(xt) \cdot f(t)| \, dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \, dt = ||f||_{L^1}$$

$$|C_f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\cos(xt) \cdot f(t)| \, dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \, dt = ||f||_{L^1}$$

Dalej mamy

$$S_{f*g}(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \cdot (f*g)(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(t-y) \, dy \right) \, dt \overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \cdot f(y) g(t-y) \, dt \, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sin((y+t-y)x) \cdot f(y) g(t-y) \, dt \, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\sin(yx) \cos((t-y)x) + \sin((t-y)x) \cos(yx)) \cdot f(y) g(t-y) \, dt \, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\sin(yx) f(y) \cdot \cos((t-y)x) g(t-y) + \sin((t-y)x) g(t-y) \cdot \cos(yx) f(y)) \, dt \, dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} s = t - y \\ ds = dt \end{matrix} \right| = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\sin(yx) f(y) \cdot \cos(sx) g(s) + \sin(sx) g(s) \cdot \cos(yx) f(y) \right) \, dt \, dy =$$
$$= S_f \cdot C_g + S_g \cdot C_f$$

Zadanie 10.
Dane są dwie niezależne ograniczone zmienne losowe A, B o wartościach w liczbach naturalnych. Oznaczmy $a_k = \mathbb{P}(A = k)$, $b_k = \mathbb{P}(B = k)$ oraz $c_k = \mathbb{P}(A + B = k)$. Wykazać, że ciąg (c_k) jest splotem ciągów (a_k) i (b_k), to znaczy

$$c_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{k-i} b_i$$

Przekonać się również, że wielomian $\sum c_k x^k$ jest iloczynem wielomianów $\sum a_k x^k$ i $\sum b_k x^k$.

Zadanie 11.
Niech A, B będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednostajnym rozkładzie na $\{1, \ldots, 6\}$ (odpowiada to dwóm rzutom kostką). Znaleźć niezależne zmienne A', B' o innym rozkładzie na liczbach naturalnych, ale dające ten sam rozkład sumy $A' + B'$ co $A + B$.

Zadanie 12.
Całki niewłaściwe

$$B_k = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)}{\frac{x}{2k+1}} \, dx$$

są równe π dla $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ ale dla $k = 7$ dostajemy $B_7 \neq 0$. Sprawdzić, że podobny fenomen zachodzi przy splataniu funkcji $f_d := \frac{1}{d} \cdot 1_{(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})}$. Otóż liczby

$$C_k = f_1 * f_{\frac{1}{3}} * \ldots * f_{\frac{1}{2k+1}}(0)$$

są równe 1 dla $k = 0, 1, \ldots, 6$ ale dla $k = 7$ jest już mniej.

Ćwiczenia 8

Przestrzeń L^1 funkcji całkowalnych, przestrzenie L^p

Definicja: Przestrzeń L^p to zbiór funkcji mierzalnych, dla których norma p-tej potęgi jest skończona. Konkretnie, niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią mierzalną z miarą μ, a p jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Wówczas przestrzeń $L^p(X, \Sigma, \mu)$ definiuje się jako zbiór funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, dla których norma p-tej potęgi jest skończona, tzn.

$$||f||_p = (\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}} < \infty$$

gdzie $|f(x)|$ oznacza wartość bezwzględną funkcji f w punkcie x.

Dla przypadku szczególnego, kiedy $p = 2$, przestrzeń $L^2(X, \Sigma, \mu)$ określa się jako przestrzeń Hilberta, z normą $|f|_2 = (\int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$ i iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x) \, d\mu(x)$.

Przestrzeń L^∞ to zbiór funkcji mierzalnych, dla których istnieje skończona i ograniczona z góry norma nieskończonej normy supremum. Konkretnie, niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią mierzalną z miarą μ. Wówczas przestrzeń $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ definiuje się jako zbiór funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, dla których norma nieskończonej normy supremum jest skończona, tzn.

$$||f||_\infty = \text{esssup}|f(x)| = \inf\{M \geq 0 \mid \mu(\{x \mid |f(x)| > M\}) = 0\} < \infty$$

gdzie esssup oznacza istotne supremum (ang. essential supremum). Innymi słowy, norma $|f|_\infty$ to najmniejsza skończona liczba M, dla której zbiór $\{x \mid |f(x)| > M\}$ ma miarę zero. Funkcje należące do przestrzeni L^∞ są zwykle nazywane funkcjami ograniczonymi z góry (ang. bounded functions).

Zadanie 1.
Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ udowodnij, że splot $(f * g)(x)$ jest dobrze określony dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ oraz, że zachodzi następująca nierówność Younga

$$||f * g||_p \leq ||f||_p \cdot ||g||_1$$

Zadanie 2.
Pokazać, że dla dowolnego $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto f(\cdot - v) \in l^1(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją ciągłą (jednostajnie).

Zadanie 3.
Wskazać ciąg funkcji $f_n \in L^1([0,1])$ spełniający $||f_n||_{L^1} \leq 1$, który nie posiada podciągu zbieżnego w $L^1([0,1])$.

Zadanie 4.
Wskazać ciąg funkcji $f_n \in L^1([0,1])$ spełniający $||f_n||_{L^1} \leq 1$, który nie posiada podciągu zbieżnego w $l^1([0,1])$.

Zadanie 5.
Niech $f \in l^1(\Omega, \mu)$. Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f(x)| \, d\mu(x) < \varepsilon$.

Zadanie 6.
Znaleźć przykład funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dla których całka definiująca $f * g(0)$ nie jest zbieżna.

Zadanie 7.
Wykazać, że przestrzeń $L^1(\mathbb{R}^n)$ z działaniem splotu nie posiada jedynki: nie istnieje funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, spełniająca $f * g = g$ dla wszystkich $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 8.
Wykazać, że jeśli $p, q, r \geq 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, to $||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}$

Zadanie 9.
Dla $a, b > 0$ przyjmijmy $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \, dx$ oraz $B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx$. Wyprowadzić tożsamość $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Zadanie 10.
Wykazać, że jeśli $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Zadanie 11.
Rozważmy rodzinę funkcji

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

i dla funkcji $g \in C_0(\mathbb{R})$ określmy funkcję $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wzorem $f(t, x) = (g * K_t)(x)$. Wykaż, że

a) Funkcja f spełnia równanie przewodnictwa cieplnego $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

b) Funkcja $g(x)$ jest warunkiem początkowym tego równania, to znaczy $\lim \lim_{t \to 0} f(t, x) = g(x)$.

c) Zachodzi równość $\int_\mathbb{R} f(x, t) \, dx = \int_\mathbb{R} g(x) \, dx$.

d) Oblicz granicę punktową $\lim\limits_{t \to \infty} f(x, t)$.

Zadanie 12.
Dla $t > 0$ określamy tak zwane jądro ciepła $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem $g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ (gęstość rozkładu normalnego o wariancji 2), następnie dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy $H_t f := f * g_t$. Wykazać, że

a) funkcja g_t spełnia równanie ciepła $\partial_t g = \Delta g$ (gdzie $\Delta = \partial_{11} + \ldots + \partial_{nn}$)

b) funkcja $H_t(x)$ (zmiennych t, x) jest gładka na $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ i również spełnia $\partial_t f = \Delta f$

c) $||H_t f - f||_{L^1} \to 0$ przy $t \to 0$

d) $H_t H_s f = H_{t+s} f$

Zadanie 13.
Niech f będzie funkcją mierzalną na $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że jeśli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dla pewnego $p \in (1, \infty)$, to

$$||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \, d\lambda_n \right| \mid ||g|\_L^q(\mathbb{R}^n) \leq 1 \right\}$$

gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Zadanie 14.
Niech $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, \infty)$ oraz $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wykazać, że $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (funkcje ciągłe, których granica przy $||x|| \to \infty$ wynosi zero).

Zadanie 15.
(Twierdzenie Steinhausa) Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym dodatniej miary. Wówczas zbiór $E - E := \{x - y \mid x, y \in E\}$ zawiera pewną kulę o środku w zerze.

Zadanie 16.
Rozważmy funkcję $f \in L^1(\mathbb{R})$ o tej własności, że dla dowolnej funkcji gładkiej o zwartym nośniku $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot h(x) \, dx = 0$$

Wykaż, że $f = 0$ prawie wszędzie.

Zadanie 17.
Rozważmy funkcję $f \in L^1(\mathbb{R})$ o tej własności, że dla dowolnej funkcji gładkiej o zwartym nośniku $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot h'(x) \, dx = 0$$

Wykaż, że istnieje pewne $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f = c$ prawie wszędzie.

Ćwiczenia 9

Aproksymacja funkcji całkowalnych funkcjami gładkimi

Zadanie 1.
Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\phi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ dla $\lambda > 0$. Naszkicuj wykres funkcji ϕ_λ dla kilku wybranych wartości parametru. Zbadaj zachowanie się funkcji przy $\lambda \to \infty$ i oblicz $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx$. Wykaż, że dla każdego ustalonego δ zachodzi

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{|x|>\delta} \phi_\lambda(x)\, dx = 0$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\lambda(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2x^2}\, dx = \left\| \begin{array}{c} y = \lambda x \\ dy = \lambda dx \end{array} \right\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}\, dy = 1$$

Teraz dla ustalonego x zbadajmy przebieg funkcji $f(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}e^{-\lambda^2x^2}$. Mamy $f'(\lambda) = e^{-\lambda^2x^2}(1-\lambda^2x^2)$, stąd (o ile $|x| > \frac{1}{\lambda}$) funkcja $f(\lambda)$ jest malejąca. Dalej dla dostatecznie dużych λ mamy $|x| > \delta > \frac{1}{\lambda}$ stąd, rodzina funkcji $\phi_\lambda(x) \cdot \chi_{|x|>\delta}$ jest malejąca i zbieżna punktowo do zera. Zatem z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_{|x|>\delta} \phi_\lambda(x)\, dx = 0$.

Zadanie 2.
Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\varphi_\lambda(x) = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}}e^{-\lambda^2x^2}$. Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o zwartym nośniku na pewnej kuli $B(0, R)$. Wykaż, że

$$\lim_{\lambda\to\infty} ||\varphi_\lambda * g - g||_{L^1} = 0$$

Zadanie 3.
Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ dla $\lambda > 0$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji całkowalnej $f \in L_1(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\lim_{\lambda\to\infty} ||\varphi_\lambda * f - f||_{L^1} = 0$$

Rozwiązanie:
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji, funkcję całkowalną $f \in L(\mathbb{R})$ możemy przybliżyć funkcją schodkową $g = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\chi_{[a_i,b_i]}$ tak aby $||f - u||_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Każdą funkcję $g_i = c_i\chi_{[a_i,b_i]}$ możemy przybliżyć funkcją ciągłą o zwartym nośniku tak, aby $||u_i - g_i|| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Wówczas funkcja $h = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$ jest ciągła i ma zwarty nośnik. Mamy

$$||f - h|| \leq ||f - g||_{L^1} + ||g - h||_{L^1} \leq ||f - g|| + \sum_{i=1}^{n} ||u_i - h_i|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \leq \varepsilon$$

Z nierówności Younga otrzymujmy

$$||h * \varphi_\lambda - g * \varphi_\lambda||_{L^1} = ||(h - f) * \varphi_\lambda||_{L^1} \leq ||f - h||_{L^1} \cdot ||\varphi_\lambda||_{L^1} = ||f - h||_{L^1}$$

Zatem

$$||f - f * \varphi_\lambda||_{L^1} \leq ||f - h||_{L^1} + ||h - h * \varphi_\lambda||_{L^1} + ||h * \varphi_\lambda - f * \varphi_\lambda||_{l^1} \leq$$
$$\leq 2 \cdot ||f - h||_{L^1} + ||h - h * \varphi_\lambda||_{L_1} \leq 2\varepsilon + ||h - h * \varphi_\lambda||_{L^1}$$

Jako, że $||h - h * \varphi_\lambda||_{L^1} \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$, to $\lim\limits_{\lambda\to\infty} ||\varphi_\lambda * f - f||_{L^1} = 0$.

Wniosek:
Funkcje gładkie (o zwartym nośniku) są gęste (w sensie normy $|| \cdot ||_{L^1}$) w funkcjach całkowalnych $L(\mathbb{R})$. To znaczy dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdej funkcji $f \in L(\mathbb{R})$ istnieje funkcja gładka $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ taka, że $||f - h||_{L^1} \leq \varepsilon$.

Ćwiczenia 10

Transformata Fouriera

Zadanie 1.
Wykazać, że $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ dla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Zadanie 2.
Wyznaczyć transformatę Fouriera następujących funkcji

a) $f_d := \frac{1}{d}\mathbb{1}_{(-d/2,d/2)}$ $(d > 0)$

b) $g(x) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 1 & t \in (-1,0) \\ -1 & t \in (0,1) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$

d) $k(x) = e^{-|x|}$

Zadanie 3.
Wykazać, że funkcja $g = F(e^{-x^2})$ spełnia równanie różniczkowe zwykłe

$$g'(\xi) = -\xi^2 g(\xi) \qquad g(0) = \sqrt{\pi}$$

Wywnioskować, że dla każdego $a > 0$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/(4a)}$$

Zadanie 4.
Dla funkcji Schwartza $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ wykaż tożsamość

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-\varepsilon|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^{-d/2} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} * f\right)(x).$$

Wywnioskuj, że

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Zadanie 5.
Oznaczmy $\check{F} f(\xi) = Ff(-\xi)$. Sprawdź, że $\overline{Ff} = \check{F}\overline{f}$, $\overline{\check{F}f} = F\overline{f}$ oraz $F\check{F} = \check{F}F = (2\pi)^d \mathrm{id}$.

Zadanie 6.
Wyprowadź tożsamość

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f \widehat{g}\, d\xi \quad \text{dla } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Wywnioskuj twierdzenie Plancherela: $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Ćwiczenia 11

Podrozmaitości $\mathbb{R}^n$

Definicja: Podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy m-wymiarową podrozmaitością (inaczej: rozmaitością zanurzoną), jeśli lokalnie wygląda jak fragment R^m. Można przyjąć dowolną z poniższych definicji

- M jest lokalnie wykresem, to znaczy dla każdego $p \in M$ istnieją $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$, zbiór otwarty $U \subseteq P := \operatorname{span}(e_{i_j})$, zbiór otwarty $V \subseteq \mathbb{R}^n$ taki że $p \in V$ oraz $\varphi \in C^1(U, P^\perp)$, takie że
$$M \cap V = \text{ wykres } \varphi \cap V$$
- M jest lokalnie obrazem parametryzacji, to znaczy dla każdego $p \in M$ istnieją zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^m$, zbiór otwarty $V \subseteq \mathbb{R}^n$ taki że $p \in V$ oraz $\varphi \in C^1(U, V)$ przy czym $\operatorname{rank} D\varphi = m$, takie że
$$\varphi : U \to M \cap V \text{ jest homeomorfizmem}$$
- M jest lokalnie poziomicą submersji, to znaczy dla każdego $p \in M$ istnieją zbiór otwarty $V \subseteq \mathbb{R}^n$ taki że $p \in V$ oraz $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-m})$ przy czym $\operatorname{rank} D\varphi = n - m$, takie że
$$M \cap V = \text{ poziomica } \varphi$$
- M jest jak $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, to znaczy dla każdego $p \in M$ istnieją zbiór otwarty $V \subseteq \mathbb{R}^n$ taki że $p \in V$, zbiór otwarty $u \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $0 \in U$ oraz dyfeomorfizm $\varphi \in C^1(U, V)$, takie że
$$M \cap V = \text{ obraz } \mathbb{R}^m \times \{0\} \text{ przy } \varphi$$

Zadanie 1.
Dla promieni $0 < r < R$ wprowadźmy torus
$$T_{r,R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
otrzymany przez obrót okręgu $o((R, 0), r)$ w płaszczyźnie xz wokół osi z. Rozważmy też standardowy torus $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, czyli zbiór
$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$$
Uzasadnić, że jedno i drugie jest rozmaitością. Sprawdzić, że
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto ((R + rx_1)x_3,\ (R + rx_1)x_4,\ rx_2)$$
jest dyfeomorfizmem $\mathbb{T}^2 \to T_{r,R}$.

Zadanie 2.
Czy zbiory $A = \{x^6 + y^5 + z^4 = 0\}$ oraz $B = \{x^6 + y^4 + z^3 = 0\}$ w $\mathbb{R}^3$ są rozmaitościami klasy C^1?

Zadanie 3.
Pokazać, że zbiór

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ xy + yz + zx = 8\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

jest krzywą (to znaczy. 1-wymiarową rozmaitością) klasy C^1. Czy jest to krzywa spójna?

Zadanie 4.
Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $A = (0, 0, 0)$ do punktu $B = (1, 0, 0)$. Podobnie w tym samym czasie Q przemieszcza się z $C = (0, 1, 0)$ do $D = (0, 1, 1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Znaleźć parametryzację M i uzasadnić, że jest to rozmaitość dwuwymiarowa w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5.
Niech $f_\lambda(x, y) = x^3 + \lambda(x^2 - y^2)$ dla dowolnych $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_0(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

b) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

Zadanie 6.
Pokazać, że zbiór macierzy ortogonalnych

$$O(n) = \{Q \in M_{n\times n} \mid Q^T Q = I\}$$

jest rozmaitością wymiaru $\frac{n(n-1)}{2}$. Opisać przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I.

Zadanie 7.
Niech $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie standardową sferą oraz $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $F(x, y, z) = (xy,\ yz,\ zx,\ x^2 - y^2)$. Sprawdzić, że $F(S^2)$ jest zwartą rozmaitością.

Zadanie 8.
Niech funkcja $f : (-\infty, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (1, t) & \text{dla } t \le 0 \\ (\cos t, \sin t) & \text{dla } t \ge 0 \end{cases}$$

Przekonać się, że f jest różnowartościową funkcją klasy C^1. Czy jej obraz jest jednowymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 9.
Uzasadnić następujące fakty z topologii:

a) Załóżmy, że A jest przestrzenią zwartą, B przestrzenią Hausdorffa, a $f : A \to B$ jest ciągłą bijekcją. Wówczas f jest homeomorfizmem

b) Załóżmy, że A, B są jak wyżej, natomiast $f : A \to B$ jest funkcją ciągłą spełniającą na pewnym podzbiorze $A_0 \subseteq A$ warunek

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \text{ lub } x, y \notin A_0$$

Wówczas obcięcie $f|A_0$ jest homeomorfizmem pomiędzy A_0 i $f(A_0)$.

Można przyjąć, że A, B są przestrzeniami metrycznymi.

Zadanie 10.
Przekonać się, że przekształcenie

$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

jest gładkim dyfeomorfizmem spełniającym $i^2 = id$. Sprawdzić, że zadaje ono bijekcję pomiędzy zbiorami

$$P = \{x \mid x_1 = 1\} \quad S = \{x \mid |x - \frac{1}{2}e_1\} = \frac{1}{2}\} \setminus \{0\}$$

a więc parametryzację sfery z wyjętym punktem.

Zadanie 11.
Niech M będzie standardową wstęgą Mobiusa w $\mathbb{R}^3$, np. opisana parametryzacją:

$$\begin{cases} x = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u \\ y = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u \\ z = \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2} \end{cases}$$

gdzie $0 \leq u < 2\pi$, $-1 < v < 1$. Wykazać, że choć M jest rozmaitością, to nie da się przedstawić jako poziomica submersji. Innymi słowy, nie istnieje zbiór otwarty $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ i funkcja $F : U \to \mathbb{R}$ klasy C^1, dla której $M = F^{-1}(0)$, $\operatorname{rand} F(x) = 1$ dla $x \in M$.

Ćwiczenia 12

Wyznacznik Grama

Zadanie 1.

a) Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi z iloczynem skalarnym, tego samego wymiaru, a $L : V \to W$ jest przekształceniem liniowym. Zdefiniujmy $|\det L|$ jako

$$|\det L| := |\det \left([L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\right)|$$

gdzie $[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ jest macierzą L w pewnych bazach ortonormalnych $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ przestrzeni U, V. Sprawdzić, że definicja nie zależy od wyboru baz.

b) Przekonać się, że nadal obowiązują wzory $|\det(L_1L_2)| = |\det L_1| \cdot |\det L_2|$ i $|\det L|^{\perp} = |\det L|$.

c) Przyjmijmy teraz, że $V \subseteq W$, przekształcenie $E : V \hookrightarrow W$ jest włożeniem (tzn. $E(v) = v$), oraz $M := EL$. Dowieść, że $\det(M^\top M) = |\det L|^2$.

d) Załóżmy, że różniczka pewnego przekształcenia $Df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma rząd n (maksymalny). Oznaczmy przez $Df : \mathbb{R}^n \to \operatorname{im} Df$ tę samą różniczkę rozumianą jako przekształcenie w mniejszą podprzestrzeń. Wykazać, że

$$\text{wyznacznik Grama } = \sqrt{\det(Df^{\perp} Df)} = |\det \overline{Df}|$$

Zadanie 2.

Funkcje $f, g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem

$$f(\alpha,\beta) = (\cos\beta, \sin\beta, \sin\alpha) \qquad g(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha)$$

Parametryzują odpowiednio walec $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$ oraz sferę S^2 z wyjętymi biegunami $(0, 0, \pm 1)$.

a) Wyznaczyć obrazy wektorów bazy standardowej przy przekształceniu Df (czyli $\partial_\alpha f$ oraz $\partial_\beta f$), wybrać dogodną bazę $T_f C$ i obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Df}|$.

b) W podobny sposób obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Dg}|$.

c) (c) Podać interpretację geometryczną przekształcenia $g \circ f^{-1} : C \to S^2$. Uzasadnić, że przekształcenie liniowe

$$Dg \circ Df^{-1} : T_pC \to T_qS^2$$

ma wyznacznik (w module) równy 1.

d) Obliczyć bezpośrednio pierwiastki z wyznaczników Grama

$$\sqrt{\det(Df^{\perp}DF)} \qquad \sqrt{\det(Dg^{\perp}Dg)}$$

i porównać z wynikami uzyskanymi w punktach a) i b).

e) Wywnioskować, że pole czaszy sfery zakreślonej cyrklem o rozwartości r ($0 < r < 2$) wynosi πr^2.

Zadanie 3.
Korzystając z wybranej przez siebie charakteryzacji, wyprowadzić wzory

a) $|\det \overline{D\varphi}| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\}$ gdy $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$

b) $|\det \overline{D\varphi} = |\varphi'|$ gdy $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ćwiczniea 13

Miara powierzchniowa

Definicja: Powiemy, że przekształcenie $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ określone na pewnym zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^m$ jest parametryzacją, gdy

a) Φ jest homeomorfizmem U na obraz

b) pochodna $d\Phi(x)$ jest monomorfizmem dla każdego $x \in U$

Zbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest m-wymiarową rozmaitością zanurzoną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $p \in M$ ma pewne otoczenie $V \subseteq \mathbb{R}^m$ takie, że przecięcie $M \cap V = \Phi(U)$ dla pewnej parametryzacji $\Phi : \mathbb{R}^m \supseteq U to \mathbb{R}^n$

Definicja: (Miara krzywej paramatrycznej) Rozważmy krzywą gładką $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, gdzie $I \subseteq \mathbb{R}$. Wówczas długość tej krzywej to

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \; d\sigma_1 := \int_I ||\gamma'(t)|| \; dt$$

gdzie $||\gamma'(t)||$ oznacza długość euklidesową różniczki odwzorowania γ w punkcie t. Intuicja fizyczna jest taka, że wielkość $||\gamma'(t)||$ to prędkość z jaką poruszamy się po krzywej w danej parametryzacji. Intuicja matematyczna: $||\gamma'(t)||$ mówi jak bardzo nasza parametryzacja rozciąga albo skraca standardową miarę na $I \subset \mathbb{R}$.

Podobnie możemy zdefiniować całkę z funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzdłuż krzywej γ jako

$$\int_\gamma f \; d\sigma_1 := \int_I f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \; dt$$

Zadanie 1.
Oblicz długość krzywych

a) $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ gdzie $t \in [0, T]$

b) opisanej we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 1 + \cos\varphi$, gdzie $\varphi \in [0, 2\pi]$

Rozwiązanie:

a) Wektor styczny do krzywej $\gamma(t)$ to $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, zaś jego długość wynosi $||\gamma'(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$, więc

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{a^2 + b^2} \; dt = T \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

b) Rozważamy krzywą opisaną w układzie współrzędnych biegunowych jako funkcję $\gamma(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$, gdzie $x(\varphi) = r(\varphi) \cos\varphi$ i $y(\varphi) = r(\varphi) \sin\varphi$. Aby obliczyć długość krzywej, musimy najpierw obliczyć wektor pochodnej $\gamma'(\varphi)$. Mamy $\gamma'(\varphi) = [x'(\varphi), y'(\varphi)]$, gdzie $x'(\varphi)$ i $y'(\varphi)$ to pochodne funkcji $x(\varphi)$ i $y(\varphi)$ względem φ

$$x'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}(r(\varphi)\cos\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$$

$$y'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}(r(\varphi)\sin\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$$

Teraz możemy obliczyć długość wektora $\gamma'(\varphi)$, czyli $||\gamma'(\varphi)||$. Jest to długość euklidesowa wektora $\gamma'(\varphi)$. Mamy

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} = \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}$$

jest to długość krzywej opisanej we współrzędnych biegunowych.

W przypadku konkretnego równania $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$ dla $\varphi \in [0, 2\pi]$, podstawiając to równanie do wzoru na $||\gamma'(\varphi)||$, otrzymujemy

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{\sin^2\varphi + (1+\cos\varphi)^2} = \sqrt{2 + 2\cos\varphi}$$

Zatem mamy

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\; d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2\cdot\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\; d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\; d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|\; d\varphi = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\; d\varphi = 8\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8$$

Zadanie 2.
Rozważmy krzywą zadaną parametrycznie w współrzędnych biegunowych (r, φ) zależnością gładką $\gamma = \{(r(t), \varphi(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Wykaż, że

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\varphi'(t)^2}\; dt$$

Rozwiązanie:
Rozważamy krzywą opisaną w układzie współrzędnych biegunowych jako funkcję $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, gdzie $x(t) = r(t)\cos(\varphi(t))$ i $y(t) = r(t)\sin(\varphi(t))$. Aby obliczyć długość krzywej, musimy najpierw obliczyć wektor pochodnej $\gamma'(t)$. Mamy $\gamma'(t) = [x'(t), y'(t)]$, gdzie $x'(\varphi)$ i $y'(t)$ to pochodne funkcji $x(t)$ i $y(t)$ względem t

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(r(t)\cos(\varphi(t)) = r'(t)\cos(\varphi(t)) - r(t)\sin(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(r(t)\sin(\varphi(t)) = r'(t)\sin(\varphi(t)) + r(t)\cos\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Skąd

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\cdot\varphi'(t)^2}$$

czyli

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\varphi'(t)^2}\ dt$$

Zadanie 3.
Oblicz długość krzywych

a) $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in [0,1]\}$

b) $\gamma = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$\gamma'(t) = [3, 6t, 6t^2]$$

wobec czego

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 3\sqrt{(1+2t^2)^2} = 3(1+2t^2).$$

Musimy zatem policzyć całkę

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1\, d\sigma_1 = \int_0^1 1\cdot 3(2t^2+1)\, dt = 3\left(\frac{2}{3}t^2 + t\right)\Bigg|_0^1 = 5.$$

b) Mamy

$$\gamma'(t) = [-e^{-t}\cdot\cos(t) - e^{-t}\cdot\sin(t),\ -e^{-t}\cdot\sin(t) + e^{-t}\cdot\cos(t),\ -e^{-t}]$$

Skąd

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{3e^{-2t}} = \sqrt{3}\cdot e^{-t}$$

wobec czego

$$l(\gamma) = \int_0^\infty \sqrt{3}\cdot e^{-t}\ dt = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$$

Definicja: Rozważmy m-wymiarową rozmaitość zanurzoną w $\mathbb{R}^n$. Średnią wartością i-tej współrzędnej na M nazywamy wielkość

$$\langle x_i\rangle_M = \frac{1}{\sigma_m(M)}\cdot\int_M x_i(\mathbf{x})\ d\sigma_m(\mathbf{x})$$

gdzie σ_m oznacza m-wymiarową miarę powierzchniową na M. Położeniem środka masy rozmaitości M nazywamy wektor złożony ze średnich wszystkich współrzędnych, a więc

$$\langle x\rangle_M = (\langle x_1\rangle_M,\ \langle x_2\rangle_M,\ \ldots,\ \langle x_n\rangle_M) \in \mathbb{R}^n$$

Zadanie 4.
Wyznacz położenie środka ciężkości krzywych

a) $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in [0,1]\}$

b) $\gamma = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$\langle x_i\rangle_\gamma = \frac{1}{\sigma_1(\gamma)} \cdot \int_\gamma x_i(\mathbf{x})\ d\sigma_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{l(\gamma)} \cdot \int_I x_i(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\ dt$$

zatem

$$\langle \mathbf{x}\rangle = \frac{1}{l(\gamma)} \cdot \int_\gamma [x_1, x_2, x_3]\ d\sigma_1 = \frac{1}{5} \cdot \int_0^1 [3t, 3t^2, 2t^3] \cdot 3(1+2t^2)\ dt =$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{9}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2, \frac{9}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3, \frac{6}{6}t^6 + \frac{1}{4}t^4\right]\Bigg|_0^1 = \left(\frac{9}{5}, \frac{33}{25}, \frac{7}{10}\right).$$

b) Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt}\left[(A\cos t + B\sin t)e^{-2t}\right] = ((-2A+B)\cos t + (-A-2B)\sin t) \cdot e^{-2t},$$

skąd

$$\int \cos t e^{-2t} dt = \left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right) \cdot e^{-2t} \quad \text{oraz} \quad \int \sin t e^{-2t} dt = \left(-\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t\right) \cdot e^{-2t}$$

Wobec tego środek masy to

$$\langle \mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} \cdot [\cos t, \sin t, 1] \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty [\cos t, \sin t, 1] \cdot e^{-2t} dt = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$$

Zadanie 5.
Wyznacz położenie środka ciężkości jednorodnego drutu w kształcie łuku krzywej o równaniu $r = 1 + \cos\varphi$, gdzie $\varphi \in [0, \pi]$.

Rozwiązanie:
Mamy krzywą $\gamma(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$. Wiemy, że $||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{2 + 2\cos\varphi} = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ oraz $l(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$. Pozostaje nam policzyć:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{l(\gamma)} \cdot \int_0^\pi (1+\cos\varphi)\cos(\varphi) \cdot 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi \left(1 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ d\varphi =$$
$$= \int_0^\pi \left(1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ d\varphi =$$
$$= \left| \begin{array}{c} s = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ ds = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ d\varphi \end{array} \right| =$$
$$= 2 \cdot \int_0^1 (1-s^2)(1-2s^2)\ ds = \frac{4}{5}$$

oraz

$$\begin{aligned}\langle y\rangle &= \frac{1}{l(\gamma)}\cdot\int_0^\pi (1+\cos\varphi)\sin(\varphi)\cdot 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,d\varphi\\ &== \frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2+\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2+\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,d\varphi =\\ &= 2\int_0^\pi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 s\,d\varphi = \left|\begin{array}{c} c=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\ dc=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,d\varphi\end{array}\right| = -4\int_1^0 c^4\,dc = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Definicja: (Miara i całka powierzchniowa) Rozważmy podrozmaitość k-wymiarową $M\subset\mathbb{R}^n$ sparametryzowaną przekształceniem gładkim $\Psi:\mathbb{R}^k\supset U\to\mathbb{R}^n$ (tzn. $M=\Psi(U)$). Wówczas k-wymiarowa miara podrozmaitości M to

$$\sigma_k(M)=\int_U\sqrt{\det[d\Psi^T(x)d\Psi(x)]}\,d_k(x)$$

Wielkość $\sqrt{\det[d\Psi^T(x)d\Psi(x)]}$ to pierwiastek z wyznacznika Grama, a więc k-wymiarowa objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\{d\Psi(x)[e_1],d\Psi(x)[e_2],\dots,d\Psi(x)[e_k]\}$, gdzie $\{e_1,e_2,\dots,e_k\}$ oznacza standardową bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^k$. Tak zdefiniowana wielkość $\sigma_k(M)$ nie zależy od wyboru parametryzacji zbioru M.

Ogólniej możemy określić całkę z funkcji $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ na zbiorze M względem miary powierzchniowej σ_k wzorem

$$\int_M f\,d\sigma_k=\int_U f(\Psi(x))\sqrt{\det[d\Psi^T(x)d\Psi(x)]}\,d_k(x)$$

Również ta wielkość nie zależy od konkretnego wyboru parametryzacji zbioru M.

Przykład: (Długość krzywej parametrycznej). Niech $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n):\mathbb{R}\supseteq I\to\mathbb{R}^n$ będzie gładką krzywą. Wówczas

$$\det[d\gamma(t)^Td\gamma(t)]=\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2+\ldots+\gamma_n'(t)^2=\|\gamma'(t)\|^2$$

a zatem długość tej krzywej to

$$l(\gamma)=\int_\gamma 1\,d\sigma_1:=\int_I\|d\gamma(t)\|\,dt$$

zgodnie z naszym wcześniejszym wzorem.

Zadanie 6.
Oblicz miarę powierzchniową sfery 2-wymiarowej $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

Zadanie 7.
Oblicz pole powierzchni wycinka sfery $S^2(0,R)$ zawartego między płaszczyznami $z=a$ i $z=b$, gdzie $a,b\in[-R,R]$.

Rozwiązanie:
Wystarczy, że zmodyfikujemy nasz rachunek dla pełnego pola sfery.

Sposób 1. Załóżmy, że $a > b > 0$. Półsfera jest wykresem funkcji $z = \sqrt{R^2 - x^2 + y^2} = f(x,y)$ nad kołem $B^2(0,R) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$, a nasz wycinek to fragment wykresu nad pierścieniem $P = \{(x,y) \mid R^2 - a^2 < x^2 + y^2 < R^2 - b^2\}$. Mamy $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}[x,y]$. Stosując wzór na miarę powierzchniową wykresu dostajemy

$$\sigma_2(W) = \int_P \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\ d^2(x,y) = \int_P \sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ d^2(x,y) =$$

$$= \int_P R\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ d^2(x,y) = \Big|\text{podstawienie biegunowe}\Big| \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= R\int_0^{2\pi}\left[\int_{\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-a^2}} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr\right] d\varphi = 2\pi R\left(-\sqrt{R^2-r^2}\right)\Big|_{\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-a^2}} = 2\pi R(a-b).$$

Proste rozumowanie pozwala stwierdzić, że ten wzór obowiązuje dla dowolnych $a, b \in [-R, R]$.

Sposób 2. Rozważmy standardową parametryzację sfery $S^2(0,R)$ za pomocą kątów Eulera:

$$\Phi : (\varphi, \beta) \mapsto (R\cos\varphi\cos\beta, R\sin\varphi\cos\beta, R\sin\beta),$$

gdzie $\varphi \in (0, 2\pi)$ i $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nasz wycinek jest opisany warunkiem $z = \sin\beta \in \left[\frac{a}{R}, \frac{b}{R}\right]$. Różniczkując parametryzację, otrzymujemy $e_1 := d\Phi[e_\varphi] = R\cos\beta[-\sin\varphi, \cos\varphi, 0]$ i $e_2 := d\Phi[e_\beta] = R[-\cos\varphi\sin\beta, -\sin\varphi\sin\beta, \cos\beta]$, a więc $\langle e_1, e_1\rangle = R^2\cos^2\beta$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = R^2$. Stąd odpowiedni wyznacznik Grama wynosi $R^2\cos\beta$ (moduł nie jest potrzebny w rozważanym zakresie kątów). Ostatecznie

$$\sigma_2(S^2) = \int_{(0,2\pi)\times\{\beta \mid \sin\beta \in \left[\frac{a}{R}, \frac{b}{R}\right]\}} R^2\cos\beta\ d_2(\varphi,\beta) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{\left\{\beta \mid \sin\beta \in \left[\frac{a}{R}, \frac{b}{R}\right]\right\}} \cos\beta\ d\beta = 2\pi R^2 \cdot (\sin\beta)\Big|_{\arcsin\left(\frac{b}{R}\right)}^{\arcsin\left(\frac{a}{R}\right)} = 2\pi R^2(a-b).$$

Sposób 3. Wprowadźmy współrzędne walcowe ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$). Sfera o promieniu R jest opisana równaniem $r^2 + z^2 = R^2$, skąd dostajemy jej następującą parametryzację

$$\Phi : (\varphi, z) \mapsto (\sqrt{R^2 - z^2}\cos\varphi, \sqrt{R^2 - z^2}\sin\varphi, z = z),$$

gdzie $\varphi \in (0, 2\pi)$ i $z \in [b, a]$. Nasza miseczka paraboliczna jest zdefiniowana warunkiem $2z = x^2 + y^2 \in [0, 1]$. Różniczkując parametryzację, otrzymujemy

$$e_1 := d\Phi[e_\varphi] = (-\sqrt{R^2 - z^2}\sin\varphi, \sqrt{R^2 - z^2}\cos\varphi, 0),$$

$$e_2 := d\Phi[e_z] = \left(\frac{-z\cos\varphi}{\sqrt{R^2 - z^2}}, \frac{-z\sin\varphi}{\sqrt{R^2 - z^2}}, 1\right),$$

a więc $\langle e_1, e_1\rangle = R^2 - z^2\cos^2\varphi$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = \frac{z^2\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi}{R^2-z^2} + 1 = \frac{z^2+R^2-z^2}{R^2-z^2} + 1 = \frac{R^2}{R^2-z^2}$. Stąd odpowiedni wyznacznik Grama wynosi R. Liczymy

$$\sigma_2(W) = \int_0^{2\pi}\int_b^a R\,d\phi\,dz = 2\pi R(a-b)$$

Zadanie 8.
Oblicz miarę powierzchniową torusa $T = \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Zakładamy $R > r > 0$.

Zadanie 9.
Oblicz średnią wartość funkcji

a) $f(x) = \operatorname{dist}(x, 0)^2$

b) $\operatorname{dist}(x, OZ)^2$

na torusie $T^2 = \{(x, y, z) \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$, gdzie przyjmujemy $R > r > 0$.

Zadanie 10.
Oblicz miarę powierzchniową torusa $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = R^2, z^2 + t^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^4$.

Rozwiązanie:
Rozważmy parametryzację torusa

$$\Phi : (\alpha, \beta) \mapsto (R \cos \alpha, R \sin \alpha, r \cos \beta, r \sin \beta)$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. Mamy $v_1 = d\Phi[e_\alpha] = [-\sin \alpha, \cos \alpha, 0, 0]$ oraz $v_2 = d\Phi[e_\beta] = r[0, 0, -\sin \beta, \cos \beta]$, skąd $\langle v_1, v_1\rangle = R^2$, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ oraz $\langle v_2, v_2\rangle = r^2$. Stąd łatwo wyliczymy, że odpowiedni wyznacznik Gramma równy $r \cdot R$. Zatem

$$\sigma_2(T) = \int_{(0,2\pi)^2} r \cdot R \; d^2(\alpha, \beta) = 2\pi R \cdot 2\pi r.$$

Co ciekawe, otrzymaliśmy taki sam wynik jak dla torusa w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 11.
Oblicz średnią wartość funkcji $f(x) = \operatorname{dist}(x, OZ)^2$ na torusie

$$T^2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = R^2, z^2 + t^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^4$$

Rozwiązanie:
Średnia wartość funkcji f na torusie to

$$\langle f\rangle_{T^2} = \frac{1}{\sigma_2(T^2)} \int_{T^2} f \, d\sigma_2$$

gdzie musimy skalować rozważaną funkcję po torusie i następnie podzielić przez jego całkowitą miarę, która jak już wiemy wynosi $\sigma_2(T^2) = 4\pi^2 Rr$. Pozostaje policzyć odpowiednią całkę. Będziemy korzystać z użytej wcześniej parametryzacji

$$\Phi : (\alpha, \beta) \mapsto (R \cos \alpha, R \sin \alpha, r \cos \beta, r \sin \beta)$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. Jak już wiemy, odpowiedni pierwiastek z wyznacznika Gramma wynosi $R \cdot r$. Nasza funkcja to oczywiście $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + t^2$, a zatem w parametryzacji $f(\Phi(\alpha, \beta)) = R^2 + r^2 \sin^2 \beta$. Zatem

$$\int_{T^2} f \, d\sigma_2 = \int_{(0,2\pi)^2} f(\Phi(\alpha, \beta)) \sqrt{G\Phi(\alpha, \beta)} \, d^2(\alpha, \beta) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R^2 + r^2 \sin^2\beta) Rr \, d\alpha \, d\beta = \frac{4\pi^2 Rr}{2}\left(R^2 + \frac{r^2}{2}\right)$$

Ostatecznie $\langle f \rangle_{T^2} = \frac{R^2+\frac{r^2}{2}}{2}$.

Zadanie 12.
Oblicz masę miseczki parabolicznej $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2+y^2, z \in [0,1]\}$ o gęstości powierzchniowej $\rho(x,y,z) = z$.

Rozwiązanie:
Rozważany zbiór to wykres funkcji $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ nad kołem $B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2\}$. Mamy $\nabla f(x,y) = [x,y]$, skąd

$$\int_M z \, d\sigma_2 = \int_B \frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+\|\nabla f\|^2} \, d^2(x,y) = \int_B \frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2} \, d^2(x,y) =$$

$$= \Big|\text{współrzędne biegunowe}\Big| \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\sqrt{1+r^2} \, r \, dr \, d\phi =$$

$$= \begin{vmatrix} s = 1+r^2 \\ ds = 2r \, dr \end{vmatrix} = 2\pi \int_1^3 \frac{s-1}{2}\sqrt{s}\cdot\frac{1}{2} \, ds = \pi\left(\frac{2}{5}s^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{35}}{5} - \frac{\sqrt{33}}{3} + \frac{2}{15}\right)$$

Zadanie 13.
Oblicz miarę powierzchni $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x + e^{-x} = z - \sqrt{3}y, 0 < y < x \leq 1\}$.

Zadanie 14.
Znaleźć położenie środka masy jednorodnej półsfery $S^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq 0\}$ o gęstości powierzchniowej ρ.

Zadanie 15.
Powierzchnia $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest wykresem funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ (czyli $\Sigma = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$). Wykaż, że $\sigma_n(\Sigma) = \int_U \sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2} \, dn(x)$.

Zadanie 16.
Oblicz całkę powierzchniową

$$\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{1+2z}} \, d\sigma^2$$

gdzie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2+y^2 \leq \sqrt{x}\}$.

Rozwiązanie:
Rozważana powierzchnia jest wykresem funkcji $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ nad zbiorem $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{x}\}$. Z postaci zbioru widać, że wygodnie będzie przejść do współrzędnych biegunowych $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Wówczas nasza parametryzacja powierzchni Σ ma postać

$$\Phi : (r,\varphi) \mapsto \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \frac{r^2}{2}\right)$$

a jej dziedziną jest zbiór $U = \{(r,\varphi)\,|\,r^3 \leq \cos\varphi, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$. Warunek na kąt φ odpowiada warunkowi $\cos\varphi > 0$. Policzmy wyznacznik Gramma odpowiedniej parametryzacji: $e_1 := d\Phi[e_r] = [\cos\varphi, \sin\varphi, r]$, $e_2 := d\Phi[e_\varphi] = r[-\sin\varphi, \cos\varphi, 0]$. Mamy $\langle e_1, e_1\rangle = 1+r^2$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = r^2$, skąd odpowiedni wyznacznik wynosi $r\sqrt{1+r^2}$. Pozostaje policzyć całkę

$$\int_\Sigma \frac{\sqrt{z}}{1+2z}\,d\sigma^2 = \int_U \frac{\sqrt{\frac{r^2}{2}}}{1+2\frac{r^2}{2}} r\sqrt{1+r^2}\,d^2(r,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_U r^2\,d^2(r,\varphi) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\int_{\{r^3<\cos\varphi\}} r^2\,dr\,d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Zadanie 17.
Znaleźć parametryzację krzywej opisanej równaniem $(x^2+y^2) = x^2 - y^2$ a następnie wyznaczyć jej długość.

Zadanie 18.
Obliczyć całkę $\int_C x^2\,dl_C$, jeśli C to krzywa powstała w wyniku przecięcia sfery jednostkowej (o równaniu $x^2+y^2+z^2=1$) z płaszczyzną $x+y+z=1$.

Zadanie 19.
Wyznaczyć miarę powierzchni M, powstałej przez przecięcia sfery jednostkowej (o równaniu $x^2+y^2+z^2=1$) z płaszczyzną $x+y+z=1$.

Zadanie 20.
Wykazać szczególny przypadek twierdzenia o całkowaniu po włóknach

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d\lambda_n(X) = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} f(x)\,dl_{\partial B_r}(x)\,dr$$

dla odpowiednio regularnych funkcji f. Można założyć, że f jest ciągła.

Zadanie 21.
Wykazać, że średnia odległość punktów n-wymiarowej o promieniu R do środka tej kuli wynosi $\frac{n}{n+1}\cdot R$.

Zadanie 22.
Obliczyć pole powierzchni paraboloidy

$$M = \{(x,y,x^2+y^2) \mid x^2+y^2 < 1\}$$

Zadanie 23.
Wyprowadzić wzór na miarę wykresu funkcji $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ jest wykresem f na zbiorze U, czyli zbiorem $\{(x,f(x)) \mid x \in U\}$, to

$$l(M) = \int_U \sqrt{1+|\nabla f(x)|^2}\,dx$$

Zadanie 24.
(reguła Pappusa-Guldina) Wykazać, że miara powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej Γ wynosi 2π razy całka po Γ z odległości do osi obrotu. Lub inaczej $2\pi r \cdot l(\Gamma)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości Γ od osi obrotu.

Zadanie 25.
Wyznaczyć wzór pole powierzchni bocznej walca i stożka (o wysokości h i promieniu r) na dwa sposoby

a) w oparciu o regułę Pappusa-Guldina;

b) przez wskazanie izometrycznej figury płaskiej w $\mathbb{R}^2$ (chodzi o to, żeby różniczka parametryzacji była włożeniem izometrycznym).

Zadanie 26.
Niech $M \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie rozmaitością jednowymiarową, $f : M \to (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą, a $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zbiorem zadanym przez

$$S = \{(x, y, t) : (x, y) \in M, 0 < t < f(x, y)\}$$

Uzasadnić, że S jest rozmaitością 2-wymiarową oraz że

$$l(S) = \int_M f(x, y)\, dl_M(x, y)$$

Zadanie 27.
Dane są rozmaitości $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^M$ (m-wymiarowa) i $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^N$ (n-wymiarowa). Wykazać, że zbiór $\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N} : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$ jest rozmaitością o wymiarze $m+n$. Dla odpowiednio regularnych funkcji $f : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ wyprowadzić wzór

$$\int_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}} f(x, y)\ dl_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}(x, y) = \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathcal{M}} f(x, y)\ dl_{\mathcal{M}}(x)\ dl_{\mathcal{N}}(y)$$

Zadanie 28.
(Twierdzenie o całkowaniu po włóknach) Załóżmy, że $H : U \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 na $U \subseteq \mathbb{R}^n$, a jej gradient nie zeruje się na zbiorze zwartym $K \subseteq U$. Dla odpowiednio regularnych funkcji f wyprowadzić wzór

$$\int_K f(x)\ d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{K\cap H^{-1}(t)} f(x)\ \frac{f}{|\nabla H(x)|}\ dl_{H^{-1}(t)}\ dt.$$

Ćwiczenia 14

Powierzchnie obrotowe

Zadanie 1.

Rozważmy funkcję gładką $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ i niech Σ będzie powierzchnią 2-wymiarową powstałą przez obrót wykresu funkcji f wokół osi Ox. Znajdźmy wzór na pole Σ.

Rozwiązanie:

Naturalną parametryzacją Σ jest odwzorowanie

$$\Phi : (t, \varphi) \mapsto (t, f(t)\cos\varphi, f(t)\sin\varphi)$$

Policzmy teraz pochodne $d\Phi[e_t] = [1, f'(t)\cos\varphi, f'(t)\sin\varphi]$ oraz $d\Phi[e_\varphi] = [0, -f(t)\sin\varphi, f(t)\cos\varphi]$. Stąd odpowiadająca macierz Gramma to $\begin{pmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix}$. Otrzymujemy

$$\sigma^2(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \left[\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} f(t)^2 dt \right] d\varphi = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Twierdzenie: Reguła Pappusa-Guldina. Dla powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f z poprzedniego zadania, jej pole wynosi

$$\sigma^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx = 2\pi l \langle R \rangle$$

gdzie $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$ to długość wykresu, a $\langle R \rangle = \frac{1}{l} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$ to odległość środka masy wykresu od osi obrotu.

Ćwiczenia 15

Formy różniczkowe pierwszego stopnia - definicja 1-formy, dokładność, zamkniętość

Definicja: Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, gdzie U jest otwartym zbiorem. 1-formą na U nazywamy rodzinę odwzorowań liniowych $\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładko indeksowaną punktami zbioru U.

Innymi słowy, 1-forma to funkcja $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdzie zależność od $x \in U$ jest gładka, a zależność od $v \in \mathbb{R}^n$ jest liniowa (dla każdego ustalonego x). (Dobrze jest myśleć, że $\omega(x)$ to odwzorowanie liniowe na przestrzeni stycznej $T_xU \approx \mathbb{R}^n$). Zwyczajowo piszemy $\langle \omega(x), v \rangle$ lub $\omega(x)[v]$. Zbiór wszystkich jedno-form na U oznaczamy symbolem $\Omega^1(U)$.

Przykłady:

1. Rozważmy standardową bazę $e_1, e_2, \ldots, e_n$ w $\mathbb{R}^n$ i odpowiadającą jej bazę dualną $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$. Elementy e_i^* są 1-formami w $\mathbb{R}^n$ (trywialnie zależnymi od punktu $x \in \mathbb{R}^n$). Mamy bowiem
$$e_i^*(x)[v] = v_i, \quad \text{gdzie} \quad v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$
Ogólniej, każdy element $\omega \in \Omega^1(U)$ możemy jednoznacznie przedstawić jako kombinację
$$\omega(x) = f_1(x) \cdot e_1^* + f_2(x) \cdot e_2^* + \ldots + f_n(x) \cdot e_n^*,$$
gdzie $f_i : U \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi.

2. Rozważmy funkcję gładką $f \in C^\infty(U)$. Jej pochodną df w punkcie $x \in U$ definiowaliśmy jako przekształcenie liniowe $df(x) : T_xU \to \mathbb{R}$. Wobec tego jest to naturalny (i najważniejszy) przykład 1-formy na U. Zwyczajowo oznaczamy ją symbolem df.

Definicja: 1-formę $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy dokładną, gdy istnieje pewna funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ taka, że $\omega = df$. W takiej sytuacji mówimy, że f jest funkcją pierwotną formy ω.

Zadanie 1.
Rozważmy funkcję $f(x) = x_i$, która punktowi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ przyporządkowuje jego i-tą współrzędną. Wykażemy, że odpowiadająca jej 1-forma df to e_i^*.

Rozwiązanie:
Dla danego f mamy $df(x)[v] = v_i = e_i^*(x)[v]$, gdzie $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definicja: 1-formy e_i^* tworzone przez dualną do wybranej bazy standardowej $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ możemy interpretować jako formy dx_i zdefiniowane przez różniczki i-tych funkcji współrzędnościowych $f(x) = x_i$, to znaczy $dx_i[v] = v_i$. Wynika stąd, że każdy element $w \in \Omega^1(U)$ możemy jednoznacznie przestawić jako kombinację

$$\omega(x) = f_1(x)\ dx_1 + f_2(x) dx_2 + \ldots + f_n(x)\ dx_n$$

gdzie $f_i : U \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi.

Zadanie 2.
Rozważmy funkcję gładką $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathbb{R}$. Przedstaw 1-formę df w postaci

$$df = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + \ldots + g_n dx_n$$

Rozwiązanie:
Weźmy dowolny wektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, wówczas z definicji mnożenia macierzy mamy

$$df(x)[v] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ dx_i[v] = \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \right) [v]$$

skąd

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i = \sum_i g_i(x) \cdot dx_i$$

dla $g_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Zadanie 3.
Rozważmy funkcję $f, g \in C^\infty(U)$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym. Wykaż, że zachodzi następująca równość 1-form

$$d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$d(f \cdot g)(x)[v] = \sum_i \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i}(x) \cdot v_i = \sum_i \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x) \cdot v_i =$$

$$= \sum_i \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) (x) \cdot v_i + \sum_i \left(g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x) \cdot v_i =$$

$$= f(x) \cdot \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \cdot v_i + g(x) \cdot \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i = f(x) \cdot dg(x) \cdot [v] + g(x) \cdot df(x) \cdot [v]$$

skąd $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$.

Zadanie 4.
Rozstrzygnij, czy 1-forma $\eta = dx + (x \cos y - 2y)\ dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ ma funkcję pierwotną.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że ta 1-forma ma funkcję pierwotną, czyli że istnieje gładka funkcja f taka, że $\eta = df$. Wówczas

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

czyli $f'_x = 1$ oraz $f'_y = x \cos y - 2y$. Ale mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f'_x = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} f'_y = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y - 2y) = \cos y$$

co z twierdzenia Schwarza oznacza, że $0 = \cos y$ dla każdego y, co jest sprzeczne. Więc η nie ma funkcji pierwotnej.

Zadanie 5.
Wykaż, że jeśli forma $\omega = g(x,y)\ dx + h(x,y)\ dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ jest dokładna (to znaczy $\omega = df$ dla pewnej funkcji gładkiej f), wówczas $g'_y = h'_x$.

Rozwiązanie:
Skoro forma ma funkcję pierwotną, to $\omega = df$ dla pewnej funkcji f, czyli $g = f'_x$ oraz $h = f'_y$. Z twierdzenia Schwarza o symetrii drugiej różniczki mamy

$$g'_y = \frac{\partial}{\partial y} f'_x = f''_{yx} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} f'_y = h'_x$$

Definicja: Rozważmy zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^n$. 1-formę $\omega \in \Omega^1(U)$ postaci $\omega(x) = f_1(x)\ dx_1 + \ldots + f_n(x)\ dx_n$, nazwiemy zamkniętą gdy dla wszystkich $i, j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $x \in U$ zachodzą równości

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Równoważna definicja zamkniętości jest taka, że $d\omega = 0$.

Zadanie 6.
Czy forma

$$\omega = (1 + \sin y)\ dx + (x\cos y - 2y)\ dy$$

jest zamknięta? Czy jest dokładna? Jeśli tak, to jak wyglądają wszystkie funkcje pierwotne formy ω?

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\partial}{\partial y}(1 + \sin y) = \cos y = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y - 2y)$$

zatem forma jest zamknięta. Niech f będzie funkcją pierwotną dla tej formy, czyli $\omega = df$. Wtedy

$$f'_x = (1 + \sin y) \qquad \text{oraz} \qquad f'_y = x\cos y - 2y$$

Stąd $f(x,y)$ powinno być postaci $f(x,y) = x + x\sin y + h(y)$ oraz $f(x,y) = x\sin y - y^2 + g(x)$, zatem

$$f(x,y) = x + x\sin y - y^2 + C$$

Zadanie 7.
Sprawdź, że forma $\omega = (x+y)\ dx + (x-y)\ dy$ jest zamknięta (czyli spełnia warunek konieczny dokładności). Znajdź funkcję f taką, że $df = (x+y)\ dx + (x-y)\ dy$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x-y)$$

lub sprawdzamy, czy $d\omega = 0$. Mamy

$$d\omega = d(x+y)\wedge dx + d(x-y)\wedge dy = dx\wedge dx + dy\wedge dx + dx\wedge dy - dy\wedge dy =$$

$$= 0 + dy\wedge dy + dx\wedge dy - 0 = -dx\wedge dy + dx\wedge dy = 0$$

zatem forma jest zamknięta. Wyznaczmy teraz funkcję pierwotną. Mamy

$$f'_x = x+y \qquad \text{oraz} \qquad f'_y = x-y$$

czyli $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + h(y)$ oraz $f(x,y) = xy - \frac{1}{2}y^2$, skąd

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)^2 + C$$

Zadanie 8.
Sprawdź zamkniętość i wyznacz funkcję pierwotną z 1-formy (o ile istnieje)

$$\omega = (1 + yze^{xy})\ dx + (1 + xze^{xy})\ dy + e^{xy}\ dz$$

Rozwiązanie:
Sprawdźmy, czy $d\omega = 0$. Mamy

$$d\omega = d(1 + yze^{xy})\wedge dx + d(1 + xze^{xy})\wedge dy + d(e^{xy})\wedge dz =$$
$$= (y^2ze^{xy}\ dx + (ze^{xy} + xyze^{xy})\ dy + ye^{xy}\ dz)\wedge dx +$$
$$+((ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx + x^2ze^{xy}\ dy + xe^{xy}\ dz)\wedge dy +$$
$$+(ye^{xy}\ dx + xe^{xy}\ dy + 0\ dz)\wedge dz =$$
$$= (ze^{xy} + xyze^{xy})\ dy\wedge dx + ye^{xy}\ dz\wedge dx +$$
$$+(ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx\wedge dy + xe^{xy}\ dz\wedge dy +$$
$$+ye^{xy}\ dx\wedge dz + xe^{xy}\ dy\wedge dz =$$
$$= -(ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx\wedge dy - ye^{xy}\ dx\wedge dz +$$
$$+(ze^{xy} + xyze^{xy})\ dx\wedge dy - xe^{xy}\ dy\wedge dz +$$
$$+ye^{xy}\ dx\wedge dz + xe^{xy}\ dy\wedge dz = 0$$

zatem forma jest zamknięta. Wyznaczmy teraz funkcję pierwotną $f(x,y,z)$. Mamy

$$f'_x = (1 + yze^{xy}) \qquad f'_y = (1 + xze^{xy}) \qquad f'_z = e^{xy}$$

skąd

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x + ze^{xy} + g(y,z) \\ f(x,y,z) = y + ze^{xy} + h(x,z) \\ f(x,y,z) = ze^{xy} + k(x,y) \end{cases}$$

czyli

$$f(x,y,z) = x + y + ze^{xy} + C$$

Zadanie 9.
Niech $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \supseteq U \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem. Wykaż, że dla każdej 1-formy ω na U możemy jednoznacznie zapisać ją w postaci

$$\omega = \sum_i g_i \cdot df_i,$$

gdzie g_i są funkcjami gładkimi.

Zadanie 10.
Wykaż, że jeśli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i spójnym, oraz forma $\omega \in \Omega^1(U)$ ma własność niezależności całki od drogi, to ω jest dokładna w U.

Zadanie 11.
Wykaż, że dowolna 1-forma zamknięta $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ jest postaci

$$\omega = c \cdot \theta + df,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest stałą, $\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, oraz $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ jest pewną funkcją gładką.

Ćwiczenia 16

Formy różniczkowe pierwszego stopnia - całka z 1-formy po krzywej, niezależność całki od drogi

Definicja: Rozważmy zorientowaną 1-wymiarową podrozmaitość $\Gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$ (tj. krzywą zorientowaną) i 1-formę $\omega \in \Omega^1(U)$. Całkę z formy ω po Γ nazywamy liczbą

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)]dt,$$

gdzie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją podrozmaitości Γ zgodną z orientacją.

Uwagi:

1. Przez orientację krzywej intuicyjnie rozumiemy wybór kierunku, w którym poruszamy się po niej od jej punktu początkowego do końcowego. Formalnie, orientacja krzywej to wybór nigdzie nieznikającego pola wektorów stycznych, przy czym dwa wybory uznajemy za równoważne, gdy jeden jest przeskalowaniem drugiego przez funkcję stałe dodatnią.
2. Parametryzacja krzywej $\gamma : [a, b] \to \Gamma \subset U$ jest zgodna z jej wybraną orientacją, gdy pole wektorów stycznych $\gamma'(t)$ jest polem o którym mowa wyżej. Innymi słowy, jeśli $\gamma(a)$ jest ustalonym początkiem, a $\gamma(b)$ końcem krzywej.
3. Wartość $\int_\Gamma \omega$ nie zależy od wyboru parametryzacji γ.
4. Zmiana orientacji zmienia znak całki na przeciwny, $\int_\Gamma \omega = -\int_{\Gamma'} \omega$.

Jeśli $\omega(x) = \sum_i f_i(x)dx_i$, gdzie $f_i \in C^\infty(U)$, wówczas

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \sum_i f_i(\gamma(t))x_i'(t)dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

gdzie $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ oraz $F(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Innymi słowy, możemy interpretować $\int_\Gamma \omega$ jako pracę sił F wykonywaną wzdłuż krzywej Γ. Przy takiej interpretacji rolę orientacji odgrywa to, zależnie od tego, w którą stronę po krzywej się poruszamy, albo siła wykonuje pracę za nas, albo my musimy pracować przeciwko danej sile.

Definicja: Powiemy, że forma $\omega \in \Omega^1(U)$ ma własność niezależności całki od drogi, gdy dla każdych dwóch krzywych zorientowanych $\Gamma, \Gamma' \subset U$ o wspólnych początkach i końcach zachodzi

$$\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma'} \omega.$$

Idąc za duchem interpretacji fizycznej, formy które mają powyższą własność odpowiadają siłom zachowawczym.

Zadanie 1.
Wykaż, że wartość całki $\int_K \omega$ nie zależy od wyboru konkretnej parametryzacji krzywej K.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że $\gamma : (a, b) \to K$ oraz $\eta : (c, d) \to K$ są parametryzacjami K zgodnymi z orientacją. Przekształcenie $\varphi = \eta^{-1} \circ \gamma$ jest (na mocy lematu o funkcjach przejścia) dyfeomorfizmem (a, b) na (c, d), Mamy $\eta \circ \varphi = \gamma$, czyli $\eta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \gamma'(t)$. Mamy więc

$$\int_K \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \omega(\eta \circ \varphi(t)) \cdot \eta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t)\ dt \end{array} \right| = \int_c^d \omega(\eta(s)) \cdot \eta'(s)\ ds = \int_K \omega$$

Zadanie 2.
Wykaż, że każda forma dokładna ma własność niezależności całki od drogi, dokładniej dla krzywej $\gamma : [a, b] \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\int_\gamma df = \int_a^b df(\gamma(t)) \cdot [\gamma'(t\ dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Zadanie 3.
Oblicz całkę z $\omega = (1+\sin y)\ dx+(x \cos y-2y)\ dy$ wzdłuż krzywej $\gamma(t) = (t, \sin^2 t)$, gdzie $t \in [0, 4\pi]$ zorientowanej w kierunku rosnącego t.

Rozwiązanie:
Funkcją pierwotną dla danej formy jest $f(x, y) = x + x \sin y - y^2 + C$, skąd wartość całki wynosi

$$\int_\gamma \omega = f(4\pi, \sin^2(4\pi)) - f(0, \sin^2(0)) = f(4\pi, 0) - f(0, 0) = 4\pi - 0 = 4\pi$$

Zadanie 4.
Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x\ dx+y\ dy}{x^2+y^2}$ po łuku elipsy $E = \{(2 \cos t, 3 \sin t) \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$.

Rozwiązanie:
Sposób 1. Elipsa jest sparametryzowana za pomocą odwzorowania

$$\gamma : t \mapsto (2 \cos t, 3 \sin t)$$

dla $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Mamy $\gamma'(t) = [-2 \sin t, 3 \cos t]$, zatem

$$\int_E \omega = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{2(\cos t) \cdot (-2 \sin y) + 3 \sin t \cdot (3 \cos t)}{(2 \cos t)^2 + (3 \sin t)^2} = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{5 \sin t \cos t}{4 + 5 \sin^2 t} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s = 4 + 5 \sin^2 t \\ ds = 10 \sin t \cos t\ dy \end{array} \right| = \int_4^9 \frac{1}{2s}\ ds = \ln 3 - \ln 2$$

Sposób 2. Sprawdźmy, czy rozważana forma jest zamknięta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{oraz } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

zatem $f''_{yx}=f''_{yx}$, czyli forma jest zamknięta. Znajdźmy teraz funkcję pierwotną. Mamy

$$f'_x=\frac{x}{x^2+y^2} \quad f'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

zatem

$$\begin{cases} f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)\\ f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+h(x)\end{cases}$$

Skąd

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$$

zatem

$$\int_E \omega = f\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-f(2\cos(0),3\sin(0))=f(0,3)-f(2,0)=\ln 3-\ln 2$$

Zadanie 5.
Zbadać, czy forma $\omega=|x+y|\,dx+|x+y|\,dy$ ma w obszarze $G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $x,z\in G$ i dla każdej krzywej $\gamma:[a,b]\to G$ o początku $x=\gamma(a)$ i końcu $z=\gamma(b)$ wartość $\int_\gamma \omega$ jest taka sama).

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(x+y)|x+y|\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}(x+y)|x+y|\right)=|x+y|$$

Wobec tego ω jest różniczką zupełną funkcji $\frac{1}{2}(x+y)|x+y|$, czyli forma jest dokładna, więc całka nie zależy od drogi.

Zadanie 6.
Oblicz całkę z formy $\omega=(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$ wzdłuż ćwiartki elipsy $E=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x,y\geq 0\}$ z orientacją przeciwną do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie:
Funkcją pierwotną f formy ω jest

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)^2$$

Niech $\gamma:[0,a]\to E$ będzie parametryzacją ćwiartki elipsy określoną wzorem

$$\gamma(t)=\left(t,b\cdot\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\right)$$

parametryzacja jest przeciwnie zorientowana do orientacji formy, zatem

$$\int_E \omega=-\left(f(\gamma(a,0))-f(\gamma(0,b))\right)=f\left(0,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)-f(a,b)=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}\cdot(a^2-b^2)-(a-b)^2\right) \qquad ?$$

Zadanie 7.
Oblicz całkę

$$\int_\Gamma (y+z)\ dx + (z+x)\ dy + (x+y)\ dz$$

po krzywej $\Gamma = \{(t, t(1-\cos t), t\sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ zorientowanej w kierunku rosnącego t.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy funkcję pierwotną f formy $\omega = (y+z)\ dz + (z+x)\ dy + (x+y)dz$ (o ile istnieje). Mamy

$$f'_x = y+z \quad f'_y = z+x \quad f'_z = x+y$$

zatem

$$\begin{cases} f(x,y,z) = xy + xz + g(y,z) \\ f(x,y,z) = xy + yz + h(x,z) \\ f(x,y,z) = xz + yz + k(x,y) \end{cases}$$

skąd

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx + C$$

Niech $\gamma : [0, 2\pi] \to \Gamma$ określona wzorem $\gamma(t) = (t, t(1-\cos t), t\sin t)$ będzie parametryzacją Γ zgodnie zorientowaną. Wówczas

$$\int_\Gamma \omega = f(2\pi, 0, 0) - f(0,0,0) = 0 - 0 = 0$$

Zadanie 8.
Oblicz całkę z formy $\theta = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2+y^2}$ po okręgu $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie:
Funkcja $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, jest parametryzacją okręgu. mamy $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, zatem

$$\int_{S^1} \theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin t}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi$$

Zadanie 9.
Wykaż, że forma $\theta = \frac{xdy - ydx}{(x^2+y^2)}$ nie jest dokładna (to znaczy, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taka, że $\theta = df$), ale jest zamknięta, tzn. spełnione są warunki konieczne dla dokładności θ, czyli że pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ są równe.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

zatem forma θ jest zamknięta.Gdyby θ była dokładna, to istniałaby funkcja pierwotna f taka, że $\theta = df$. Wtedy $f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$ oraz $f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$, skąd

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

ta funkcja jest jednak nieokreślona na prostej $y = 0$, zatem θ nie ma funkcji pierwotnej i nie jest dokładna.

Zadanie 10.
Wykaż, że forma $\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ jest dokładna w $R^2 \setminus \{(0,y) \mid y \leq 0\}$ i znajdź jej funkcję pierwotną.

Rozwiązanie:
Mamy $f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$ oraz $f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$, skąd

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

Mamy

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ i } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \end{cases}$$

Zadanie 11.
Oblicz całkę z formy $\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ po dowolnym okręgu nie zawierającym zera w swoim wnętrzu.

Zadanie 12.
Praca wykonana przez siłę $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzdłuż zorientowanej krzywej $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ jest zdefiniowana jako całka

$$\int_\Gamma F(p) \cdot \overrightarrow{T}(p)\, dl(p),$$

w której $\overrightarrow{T}(p)$ jest jednostkowym wektorem stycznym do Γ (wskazującym zgodnie z orientacją). Załóżmy teraz, że siła F jest potencjalna, to znaczy $F(p) = \nabla E(p)$ dla pewnej funkcji skalarnej E. Wykazać, że wówczas praca F wzdłuż dowolnej zamkniętej krzywej jest zerowa.

Zadanie 13.
Sprawdzić, że pole grawitacyjne $F(x) = -\frac{x}{|x|^3}$ jest potencjalne. Wykazać, że potencjalne jest również każde inne pole centralne, czyli zadane wzorem $F(x) = f(|x|)x$.

Zadanie 14.
Przekonać się, że całka z 1-formy $\int_\Gamma \omega$ pokrywa się z całką

$$\int_\Gamma \omega(p)(\overrightarrow{T}(p))\, dl(p),$$

gdzie $\overrightarrow{T}(p)$ jest jednostkowym dodatnio zorientowanym wektorem stycznym.

Zadanie 15.
Obliczyć całkę z 1-formy $\omega = x\,dx + y\,dy$ po (dodatnio zorientowanym) okręgu jednostkowym.

Zadanie 16.
Oblicz całkę z formy $\frac{y^2\ dx - 2xy\ dy}{x^2+y^4}$ wzdłuż półokręgu $x^2+y^2=1$ dla $y \geq 0$, o początku $(1,0)$ i końcu $(-1,0)$.

Zadanie 17.
Oblicz całkę
$$\int_K (2x+y)\ dx + (x-2y)\ dy$$
wzdłuż następującej krzywej
$$K = \{(x,y) \mid x^4+y^3=1,\ x \leq 0 \leq y\}$$
zorientowanej tak, aby jej początkiem był punkt $(0,1)$ a końcem $(-1,0)$.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy funkcję pierwotną f formy $\omega = (2x = y)\ (x-2y)\ dy$ (o ile istnieje). Mamy $f'_x = 2x+y$ oraz $f'_y = x-2y$, skąd
$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + g(y) \\ f(x,y) = -y^2 + h(x) \end{cases}$$
zatem forma jest różniczką zupełną funkcji
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$
Stąd
$$\int_K (2x+y)\ dx + (x-2y)\ dy = f(-1,0) - f(0,1) = 2$$

Zadanie 18.
Niech $K = \{(x,y) \mid 4x^2+y=5,\ y \geq 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x. Oblicz całkę
$$\int_K \frac{xdy - y\ dx}{x^2+y^2}$$
wzdłuż krzywej K.

Rozwiązanie:
Niech $\gamma : [-1,1] \to K$ będzie parametryzacją określoną wzorem $\gamma(t) = (t, 5-4t^2)$. Wówczas $\gamma'(t) = (1,-8t)$. Teraz podstawiamy:
$$\int_K \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_{-1}^{1} \frac{(-8t)dt}{t^2+(5-4t^2)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{-5+4t^2}{t^2+(5-4t^2)^2} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Zadanie 19.
Niech $\omega = \frac{y^2\,dx - 2xy\,dy}{x^2+y^4}$. Obliczyć całkę z tej formy wzdłuż półokręgu C o początku $(1,0)$ i końcu $(-1,0)$, gdzie $C = \{(x,y) : x^2+y^2=1, y \geq 0\}$.

Zadanie 20.
Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ w przecięciu z płaszczyzną $x + y + z = 3$ tworzy okrąg. Niech γ będzie krzywą opisującą łuk tego okręgu o początku $(2, 2, -1)$ i końcu $(0, 3, 0)$, zawarty w półprzestrzeni $\{(x, y, z) \mid y > 0\}$. Obliczyć

$$\int_\gamma \frac{yz\,dx - zx\,dy + xy\,dz}{y^2}$$

Zadanie 21.
Obliczyć całkę z formy różniczkowej $\omega = \frac{2xy\ dx - (x^2+y^2)\ dy}{y^2}$ wzdłuż łuku krzywej określonej równaniem $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{6}\sqrt{x^2 + y^2}$, mającego początek $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ i koniec $(1, \sqrt{3})$, położonego w ćwiartce $\{(x, y) : x, y > 0\}$.

Zadanie 22.
Niech

$$\omega = \frac{(3x + 2y)dx + xdy}{\sqrt{x + y}}$$

Obliczyć całkę $\int_C \omega$ wzdłuż łuku okręgu $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ o początku $(1, 0)$ i końcu $(0, 1)$.

Zadanie 23.
Niech $K = \{(x, y, z) : x^2 - 2x + z = 0, y^2 - 2y - z = -1, x \geq 1\}$ będzie zorientowanym łukiem o początku $(1, 0, 1)$ i końcu $(1, 2, 1)$. Obliczyć całkę

$$\int_K \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Zadanie 24.
Zbadać, czy forma $\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+xy+y^2}$ ma w obszarze $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $x, z \in G$ i dla każdej krzywej $\gamma : [a, b] \to G$ o początku $x = \gamma(a)$ i końcu $z = \gamma(b)$ wartość $\int_\gamma \omega$ jest taka sama).

Rozwiązanie:
Warunkiem koniecznym niezależności całki od drogi jest

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2 + xy + y^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{x^2 + xy + y^2}\right)$$

który jest spełniony. Jeśli jednak jest własność niezależności całki od drogi, to całka po dowolnej krzywej zamkniętej jest zerowa. Niech więc $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ (okrąg). Wówczas

$$\int_\gamma \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \sin t \cos t}(-\sin t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{1 + \sin t \cos t}\cos t\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin t \cos t}\,dt < 0$$

a więc warunek nie jest spełniony, czyli nie mamy własności niezależności całki od drogi.

Zadanie 25.
Niech $\omega = f\,dx + g\,dy$ będzie formą klasy C^1 w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, zamkniętą ($\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$). Udowodnić, że istnieje liczba $c \in \mathbb{R}$ oraz funkcja $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ klasy C^2 takie, że $\omega = c \cdot \omega_0 + dh$, gdzie $\omega_0 = x\,dy - y\,dx$.

Zadanie 26.
Niech $\gamma(t) = (t^3 - 3t, t^4 - 2t^2)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ rozcina płaszczyznę na kilka obszarów, z których jeden jest ograniczony. Obliczyć jego miarę płaską.

Zadanie 27.
Niech $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \text{ i } z = xy\}$. Wykazać, że C jest zwartą i spójną rozmaitością jednowymiarową. Niech $\omega(x, y, z) = y\,dx + z\,dy + x\,dz$ i niech wektor $(0, 1, 1)$ styczny do C w punkcie $(1, 0, 0)$ wyznacza orientację rozmaitości C. Obliczyć $\int_C \omega$.

Zadanie 28.
Niech $\omega(x, y, z) = \frac{1}{z^3}\,dx + \frac{2y}{z^3}\,dy - \frac{3(x+y^2)}{z^4}\,dz$, $p = (1, -1, 6)$, $q = (2, 5, 3)$. Niech C oznacza krótszy z łuków koła wielkiego sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 38$ o początku p i końcu q. Znaleźć całkę $\int_C \omega$.

Zadanie 29.
Niech $C_1 = \{(x, y) : (x-1)^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$, $C_2 = \{(x, y) : x^2+y^2 = 4\}$ oraz $C_3 = \{(x, y) : (x+1)^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$ będą okręgami zorientowanymi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Niech

$$\omega = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2}\,dy - \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2}\,dx$$

Obliczyć całki:

$$\int_{C_1} \omega \qquad \int_{C_2} \omega \qquad \int_{C_3} \omega$$

Rozwiązanie:
Rozkładając mianowniki na ułamki proste dostaniemy

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\,dy - \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}\,dx\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}\,dy - \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}\,dx\right).$$

Oznaczmy pierwszą formę przez ω_1, a drugą przez ω_2. Sprawdzamy łatwo, że obie te formy są zamknięte, czyli zachodzą równości:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}\right)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}\right).$$

Stąd

$$\int_{C_1} \omega_2 = \int_{C_3} \omega_1 = 0.$$

Bezpośredni rachunek daje teraz wyniki:

$$\int_{C_1} \omega = \pi = \int_{C_3} \omega.$$

Spodziewamy się, że całka po C_2 wyniesie wobec tego 2π, co sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem po uproszczeniu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{12 + 8\sin^2 t}{25 - 16\cos^2 t}\, dt = 2\pi.$$

Zadanie 30.
Niech K będzie zorientowanym łukiem o początku $(\pi, -1)$ i końcu $(3\pi, 1)$. Obliczyć całkę

$$\int_K (e^y + e^{-y}) \cos x\, dx + (e^y - e^{-y}) \sin x\, dy$$

oraz wyjaśnić, jak zależy od wybranej drogi łączącej wskazane punkty.

Zadanie 31.
Niech

$$\omega = \frac{(x+1)\, dy - y\, dx}{(x+1)^2 + y^2} - \frac{(x-1)\, dy - y\, dx}{(x-1)^2 + y^2}$$

Wykazać, że istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{0\}) \to \mathbb{R}$, że $\omega = df$, ale nie ma takiej funkcji $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\} \to \mathbb{R}$, że $\omega = dg$.

Zadanie 32.
Udowodnić, że jeśli krzywa $\gamma : [7, 9] \to \mathbb{R}^2$ klasy C^1 nie przechodzi przez punkt $(0, 0)$ i spełnia warunki $7 \leq s < t \leq 9 \Rightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$ oraz $\gamma(7) = \gamma(9)$, to

$$\int_\gamma \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2 + y^2)^3}\, dx + \frac{3x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^3}\, dy = 0.$$

Zadanie 33.
Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\gamma(t) = (a\cos^3(t), b\sin^3(t))$$

dla $t \in [0, 2\pi]$ i zadanego $a > 0$.

Ćwiczenia 17

Wprowadzenie do różniczki zewnętrznej

Zadanie 1.

Oblicz całkę z formy $\omega = xdy - ydx$ po konturze C, gdzie

a) C jest brzegiem prostokąta $[-a, a] \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

b) C jest okręgiem $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Definicja: (2-formy) Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ dla $3 \leq n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie zbiorem otwartym. Dwu-formą na U nazywamy rodzinę odwzorowań 2-liniowych antysymetrycznych $\eta(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładko indeksowaną punktami zbioru U. Innymi słowy, 2-forma to funkcja $\eta : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdzie zależność od $x \in U$ jest gładka, a zależność od $v, w \in \mathbb{R}^n$ jest 2-liniowa i antysymetryczna (dla każdego ustalonego x), czyli $\eta(x)[v, w] = -\eta(x)[w, v]$. Zbiór wszystkich 2-form na U oznaczamy symbolem $\Omega^2(U)$.
Każdy element $\eta \in \Omega^2(U)$ możemy jednoznacznie przedstawić jako kombinację

$$\eta(x) = \sum_{i<j} f_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j,$$

gdzie $f_{ij} : U \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi, a $dx_i \wedge dx_j$ to formy 2-liniowe antysymetryczne określone następująco

$$dx_i \wedge dx_j[v, w] = \det \begin{pmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}.$$

Wygodnie jest myśleć o tych obiektach, że powstają z 1-form dx_i poprzez użycie operacji $\wedge$, pamiętając, że

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Zadanie 2.

Oblicz

a) $(x\ dy + y\ dx) \wedge (dx + dy + dz)$

b) $(x\ dy \wedge dz + y\ dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz)$

Rozwiązanie:

a) Iloczyn zewnętrzny jest operacją nieprzemienną, za to rozdzielną względem dodawania, skąd mamy

$$(x\, dy + y\, dz + z\, dx) \wedge (dx + dy + dz) = x\, dy \wedge dx + x\, dy \wedge dy + x\, dy \wedge dz +$$

$$+ y\, dz \wedge dx + y\, dz \wedge dy + y\, dz \wedge dz + z\, dx \wedge dx + z\, dx \wedge dy + z\, dx \wedge dz =$$

$$= -x\ dx \wedge dy + 0 + x\ dy \wedge dz - y\ dx \wedge dz - y\ dy \wedge dz + 0 +$$
$$+ 0 + z\ dz \wedge dy + z\ dx \wedge dz =$$
$$= (z-x)\, dx \wedge dy + (x-y)\, dy \wedge dz + (z-y)\, dx \wedge dz$$

b) Mamy

$$(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz)$$
$$= x\, dy \wedge dz \wedge dx + x\, dy \wedge dz \wedge dy + x\, dy \wedge dz \wedge dz +$$
$$+ y\, dz \wedge dx \wedge dx + y\, dz \wedge dx \wedge dy + y\, dz \wedge dx \wedge dz +$$
$$+ z\, dx \wedge dy \wedge dx + z\, dx \wedge dy \wedge dy + z\, dx \wedge dy \wedge dz =$$
$$= x\ dx \wedge dy \wedge dz + 0 + 0 + 0 + y\ dx \wedge dy \wedge dz + 0 + 0 + 0 + z\ dx \wedge dy \wedge dz =$$
$$= (x+y+z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Zadanie 3.
Niech $\eta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oznacza standardowy iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$, to znaczy $\eta(v, w) = v \times w$. Wykaż, że

$$\eta = [dy \wedge dz,\ dz \wedge dx,\ dx \wedge dy]$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy z definicji iloczynu zewnętrznego. Przy wyliczaniu wyznacznika skorzystamy w rozwinięcia Laplace'a dla pierwszego wiersza. Mamy

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = e_1 \cdot \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} - e_2 \cdot \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + e_3 \cdot \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} =$$
$$= e_1 \cdot dy \wedge dz[v, w] - e_2 \cdot dx \wedge dz[v, w] + e_3 \cdot dx \wedge dy[v, w] = [dy \wedge dz,\ dz \wedge dx,\ dx \wedge dy]$$

Zadanie 4.
Niech $F = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym (gładkim odwzorowaniem z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$). Wykaż, że odwzorowanie:

$$\eta_F(x) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle F(x), v \times w \rangle \in \mathbb{R}$$

jest 2-formą różniczkową w $\mathbb{R}^3$. Wyraź tę formę w bazie $\{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz\}$.

Różniczka zewnętrzna

Naszym podstawowym przykładem jedno-formy była forma $df \in \Omega^1(U)$ powstała przez różniczkowanie funkcji gładkiej $f \in C^\infty(U)$. Okazuje się, że operację różniczkowania możemy naturalnie rozszerzyć na przestrzeń jedno-form.

Definicja: Dla 1-formy
$$\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \ldots + f_n\,dx_n,$$
określamy operację różniczki zewnętrznej d następującym wzorem:
$$d\omega = df_1 \wedge dx_1 + \ldots + df_n \wedge dx_n =$$
$$= \left(\sum_j (f_1)'_{x_j}\,dx_j\right) \wedge dx_1 + \ldots + \left(\sum_j (f_n)'_{x_j}\,dx_j\right) \wedge dx_n =$$
$$= \sum_{i<j} \left((f_j)'_{x_i} - (f_i)'_{x_j}\right) dx_i \wedge dx_j.$$

Przykład: Zauważmy, że forma $\omega = g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy$ jest zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy $g'_y = h'_x$. Istotnie,
$$d\omega = dg \wedge dx + dh \wedge dy = \left(g'_x\,dx + g'_y\,dy\right) \wedge dx + \left(h'_x\,dx + h'_y\,dy\right) \wedge dy = (h'_x - g'_y) \cdot dx \wedge dy.$$

Definicja: Formę $\omega \in \Omega^1(U)$ nazwiemy zamkniętą, gdy $d\omega = 0$.

Uwaga: Zauważmy, że każda forma dokładna jest zamknięta, ale niekoniecznie odwrotnie, czego dowodzi przykład $\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Co więcej, jak widzimy z rozpatrywania tej samej formy na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,|\,x \geq 0\}$, to czy dana forma jest zamknięta czy nie może zależeć od topologii rozpatrywanego zbioru.

Zadanie 5.
Oblicz $d\omega$ dla

a) $\omega = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2+y^2}$

b) $\omega = xy^2z^3\,dx \wedge dy - yz^2x^3\,dy \wedge dz$

c) $\omega = \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq 4} x_i x_j\,dx_i \wedge dx_j$.

Rozwiązanie:

a) Mamy
$$d\omega = d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx =$$
$$= \left[\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx + Ady\right] \wedge dy - \left[\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dy + Bdx\right] \wedge dx =$$
$$= \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx \wedge dy = 0$$
Obliczenie wyrażeń A i B nie jest potrzebne, gdyż się zredukują.

b)

$$d\omega = d(xy^2z^3) \wedge dx \wedge dy - d(yz^2x^3) \wedge dy \wedge dz =$$
$$= (xy^2 \cdot 3z^2dz + \cdots dx + \cdots dy) \wedge dx \wedge dy - (yz^2 \cdot 3x^2dx + \cdots dy + \cdots dz) \wedge dy \wedge dz =$$
$$= (xy^2z^2 - yz^2x^2)dx \wedge dy \wedge dz.$$

c) $d\omega = 0$, ponieważ przy różniczkowaniu zawsze spotkają się dwa wyrazy dx_i lub dx_j

Definicja: (Całka z 2-formy na $\mathbb{R}^2$) Każda 2-forma $\eta \in \Omega^2(U)$ określona na obszarze $U \subset \mathbb{R}^2$ (x, y) jest postaci

$$\eta = h\, dx \wedge dy,$$

gdzie $h : U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką. W takiej sytuacji całkę z η po zbiorze otwartym $V \subset U$ określamy wzorem

$$\int_V \eta = \int_V h\, dx \wedge dy = \pm \int_V h\, d\lambda^2(x, y),$$

gdzie znak $\pm$ ustalamy zależnie od tego, czy orientacja V jest zgodna ze standardową orientacją $\mathbb{R}^2$ czy nie.

Twierdzenie: (Gaussa-Greena) Rozważmy 1-formę $\omega = f\, dx + g\, dy \in \Omega^1(U)$ określoną w obszarze $U \subset \mathbb{R}^2$. Niech $\Gamma \subset U$ będzie krzywą zamkniętą, ograniczającą zbiór otwarty $V \subset U$, $\Gamma = \partial V$. Wówczas

$$\int_\Gamma f\, dx + g\, dy = \int_\Gamma \omega = \int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega = \int_V (g'_x - f'_y)\, dx \wedge dy,$$

przy czym orientacje Γ i V są uzgadniane według następującej reguły

$$\mathrm{or}_V = \{n, \mathrm{or}_{\partial V}\},$$

gdzie n oznacza tutaj wektor normalny do brzegu V skierowany na zewnątrz V.

Zadanie 6.
Korzystając z twierdzenie Gaussa-Greena oblicz pole wnętrza elipsy

$$E = \{(a \cos\varphi, b \sin\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

Rozwiązanie:
Niech $\omega = x\ dy$ będzie 1-formą. Wówczas $d\omega = dx \wedge dy$ jest formą objętości w $\mathbb{R}^2$. Wobec tego, na mocy twierdzenia Greena mamy

$$\lambda_2(V) = \int_V d^2(x, y) = \int_V d\omega = \int_E \omega$$

gdzie V oznacza wnętrze zbioru ograniczonego krzywą E. Drugą z całek łatwo policzyć, używając parametryzacji $\gamma(\varphi) = (a \cos\varphi, b \sin\varphi)$. Mamy $\gamma'(\varphi) = (-a \sin\varphi, b \cos\varphi)$.

$$\int_E \omega = \int_0^{2\pi} x(\phi) \cdot \mathrm{d}y[\gamma'(\phi)]\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} a\cos(\phi) \cdot b\cos(\phi)\,\mathrm{d}\phi = ab\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi = ab\pi.$$

Zadanie 7.
Oblicz całkę

$$\int_C (2x+y)\ dx + (x-2y)\ dy$$

wzdłuż krzywej $C = \{(x,y)\,|\,x^4+y^3=1, x \leq 0 \leq y\}$ zorientowanej tak, że jej początkiem jest punkt $(0,1)$, a końcem punkt $(-1,0)$.

Rozwiązanie:
Mamy $d\omega = 0$, forma jest określona na R^2, a zatem ma funkcję pierwotną. Chwila rachunków pozwala stwierdzić, że jest to $f(x,y) = x^2+xy-y^2$. Wobec tego

$$\int_C \omega = \int_C df = f(-1,0) - f(0,1) = 1-(-1) = 2.$$

Zadanie 8.
Oblicz całkę

$$\int_C (x^2-y)\ dx + xy\ dy$$

gdzie C jest łukiem paraboli $y^2 = 8x$ zorientowanym od punktu $(0,0)$ do punktu $(2,4)$.

Zadanie 9.
Oblicz całkę

$$\int_D (x^2+y)dx + (x-y)dy$$

gdzie D to łuk paraboli $y^2 = x$ zorientowany od $(1,1)$ do $(1,-1)$.

Rozwiązanie:
Mamy $x = y^2$ dla $y \in (-1,1))$ oraz $dx = 2y\ dy$. Ustawiając całkę w przeciwnej orientacji niż łuk paraboli mamy

$$\int_D (x^2+y)\ dx + (x-y)\ dy = -\int_{-1}^1 (y^4+y)\cdot 2y\ dy + (y^2-y)\ dy =$$

$$= -\int_{-1}^1 (2y^5+3y^2-y)\ dy = -\left(\frac{y^6}{3}+y^3-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^1 = -2$$

Zadanie 10.
Niech $C = \{(x,y)\,|\,4x^2+y=5, y \geq 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x. Oblicz całkę

$$\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

Jak zmieni się odpowiedź gdy rozważymy krzywą $C' = \{(x,y)\,|\,4x^2+y=5, y \geq -11\}$ zorientowaną w analogiczny sposób?

Zadanie 11.
Oblicz całkę

$$\int_{S1} \frac{xe^{x^2+y^2}}{dx} + \frac{ye^{x^2+y^2}}{dy}$$

gdzie S^1 to okrąg jednostkowy zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 12.
Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2+y^2}$ po konturze będącym brzegiem kwadratu

a) o środku $(3, 3)$ i boku długości 1

b) o środku $(1, 1)$ i boku długości 3

Zadanie 13.
Znajdź taki obszar B w $\mathbb{R}^2$, którego brzegiem jest gładka, zamknięta i dodatnio zorientowana krzywa $C \subseteq \mathbb{R}^2$, żeby całka

$$\int_C (4y^3 - 6xy)dx + (4x - 3x^3)dy$$

była maksymalna. Oblicz tę całkę dla znalezionej krzywej C.

Zadanie 14.
Oblicz pole obszaru w $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ograniczonego krzywą $(x + y)^4 = x^2y$.

Zadanie 15.
Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 > y, x^4 - xy^2 - y^3 = 0\}$.

Zadanie 16.
Na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dana jest 1-forma

$$\omega = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\ dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)}\ dy$$

a) Przekonać się, że jest to forma zamknięta, czyli $d\ \omega = 0$

b) Wykazać, że jest to forma dokładna, czyli istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ spełniające $df = \omega$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$d\omega = d\left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) \wedge dx + d\left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)}\right) \wedge = dy =$$

$$= \frac{(y - 3x^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^3}\ dy \wedge dx + \frac{2y \cdot (y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}\ dx \wedge dy = 0$$

zatem forma ω jest zamknięta.

b) Gdyby
$$df = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)}\,dy$$
to wówczas
$$f'_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{oraz} \qquad f'_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)}$$
Funkcja f spełnia więc układ równań
$$\begin{cases} f(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + g(y) \\ f(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + h(x) \end{cases}$$
Skąd otrzymujemy
$$f(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + C$$
dla pewnego $C \in \mathbb{R}$. Jest to funkcja dobrze określona na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, zatem istnieje f spełniające $\omega = df$, czyli ω jest dokładna.

Zadanie 17.
Zbadać, czy forma
$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2+xy+y^2}$$
ma w obszarze $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ własność niezależności całki od drogi.

Zadanie 18.
Oblicz granicę
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial D_n} \omega_n$$
gdzie $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 1 \le y \le 1 + \frac{1}{n}\}$ ma standardową orientację dziedziczoną z $\mathbb{R}^2$, a
$$\omega_n = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)dx + (y+1)dy}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(x^2+y^2)}$$

Zadanie 19.
Wykazać, że jeśli Ω jest ograniczonym obszarem klasy C^1, to
$$\int_{\partial\Omega} x\,dy = -\int_{\partial\Omega} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx = \frac{\lambda}{2}(\Omega).$$

Zadanie 20.
Sprawdzić, że forma $\omega = x\,dy - y\,dx$ zapisana w postaci $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ spełnia $-\frac{\partial y}{\partial x}f + \frac{\partial x}{\partial y}g = 0$ w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wykazać, że nie istnieje forma $\eta = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ spełniająca ten warunek w $\mathbb{R}^2$ i różniąca się od ω jedynie na pewnym otoczeniu zera.

Zadanie 21.
Czy forma $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ z poprzedniego zadania daje się zapisać w postaci $\frac{\partial x}{\partial h}\,dx + \frac{\partial y}{\partial h}\,dy$ dla pewnej funkcji $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$? Czy jest to możliwe na mniejszym zbiorze $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$?

Zadanie 22.
Załóżmy, że forma $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ klasy C^1 jest określona na kuli jednostkowej i spełnia warunek $\frac{\partial y f}{\partial x} = \frac{\partial x g}{\partial y}$. Wykazać, że $\omega = \frac{\partial x h(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y h(x,y)}{\partial y}\,dy$ dla funkcji h określonej wzorem

$$h(x,y) = \int_{[x,y]} \omega = \int_0^1 f(tx,ty)x + g(tx,ty)y\,dt.$$

Wskazówka: Przedstawić $\frac{\partial x h}{\partial x}$ w postaci $\int_0^1 \frac{\partial t(f(tx,ty)t)}{\partial x}\,dt$.

Zadanie 23.
Dany jest ograniczony wypukły obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ klasy C^1 zawierający punkt 0, wraz z parametryzacją brzegu $\gamma : [a,b] \to \partial\Omega$ zgodną z orientacją.

a) Wyprowadzić wzór na prędkość polową, czyli prędkość zmiany pola zakreślonego przez promień wodzący (tj. odcinek łączący 0 z $\gamma(t)$): $\frac{1}{2}\det(\gamma, \dot\gamma)$.

b) Wyprowadzić drugie prawo Keplera: jeśli wektor przyspieszenia $\ddot\gamma(t)$ jest zawsze proporcjonalny do promienia wodzącego $\gamma(t)$, to prędkość polowa jest stała.

c) Wyprowadzić wzór na pole z Zadania 10.6: $\lambda^2(\Omega) = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$.

Ćwiczenia 18

Przestrzeń k-form różniczkowych

Jedno-formę określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$ definiowaliśmy jako rodzinę odwzorowań liniowych $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładko parametryzowaną punktami zbioru U. Analogicznie k-formę na U określimy jako rodzinę odwzorowań k-liniowych antysymetrycznych gładko parametryzowaną punktami U.

Definicja: k-formę różniczkową na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy rodzinę odwzorowań k-liniowych antysymetrycznych gładko indeksowaną punktami U.

Innymi słowy, k-forma to funkcja $\omega : U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, gdzie zależność od $x \in U$ jest gładka, a zależność od $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jest k-liniowa antysymetryczna. Będziemy pisali $\omega(x)[v_1, \ldots, v_k]$, lub $\omega_x[v_1, \ldots, v_k]$. Zbiór wszystkich k-form na U oznaczamy symbolem $\Omega^k(U)$.
Każdą k-formę możemy jednoznacznie zapisać w postaci

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

gdzie $f_I \in C^\infty(U)$ są funkcjami gładkimi. Przyjmuje się również $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Zadanie 1.
Wykaż, że dla dowolnych form $\alpha \in \Omega^k(U)$ oraz $\beta \in \Omega^l(U)$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^n$, zachodzi wzór

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$$

Rozwiązanie:
Wzór wystarczy sprawdzić na formach bazowych $\Omega^k(U)$ oraz $\Omega^l(U)$. Rozważmy $\alpha = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ oraz $\beta = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$. Wówczas

$$\alpha \wedge \beta = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} =$$
$$= (-1)^{k \cdot l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$$

Uzasadnienie zmiany znaku: aby zamienić kolejność bazowych 1-form postępujemy indukcyjnie: najpierw przenosimy formę dx^{i_k} na koniec wyrażenia. W tym celu musimy dokonać l zamian z formami $dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_l}$, co zmienia nam znak wyrażenia o czynnik $(-1)^l$. Następnie 1-formę $dx^{i_{k-1}}$ przenosimy na przedostatnią pozycję, ponownie dokonując k zamian z formami $dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_l}$, co ponownie zmienia znak o czynnik $(-1)^l$. Postępujemy w ten sposób kolejno z każdą z 1-form $dx^{i_k}, \ldots, dx^{i_1}$ (k-form), w rezultacie czego znak całego wyrażenia zmieni się o czynnik $(-1)^{k \cdot l}$.

Zadanie 2.
Wykaż, że jeśli $\eta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ to $\eta \wedge \eta = 0$. Podaj przykład 2-formy $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ takie, że $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Rozwiązanie:
Iloczyn dowolnych dwóch pośród 2-form bazowych $\{dx \wedge dy, dy \wedge dz, dx \wedge dz\}$ składa się z powtórzonego jednego wyrażenia dv, zatem ten iloczyn jest równy zero.

Zbiór 2-form bazowych to $\{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dx \wedge dt, dy \wedge dz, dy \wedge dz, dz \wedge dt\}$. Tu widać że nie każdy iloczyn dwóch 2-form daje zero. Niech $\eta = dx \wedge dy + dz \wedge dt$, wówczas

$$\eta \wedge \eta = 2 \cdot dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

Zadanie 3.
Dla wektora $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ definiujemy formę $\omega_a := a_1\ dx_1 + a_2\ dx_2 + a_3\ dx_3$. Rozważmy teraz dowolną 1-formę α w $\mathbb{R}^3$ i niech

$$\omega_a \wedge \alpha = c_1 dx_2 \wedge dx_3 + c_2 dx_3 \wedge dx_1 + c_3 dx_1 \wedge dx_2$$

Wykaż, że wektor $c = (c_1, c_2, c_3)$ jest prostopadły do a.

Rozwiązanie:
Niech $\alpha = b_1\ dx_1 + b_2\ dx_2 + b_3\ dx_3$, wówczas

$$\omega_a \wedge \alpha = (a_1\ dx_1 + a_2\ dx_2 + a_3\ dx_3) \wedge (b_1\ dx_1 + b_2\ dx_2 + b_3\ dx_3) =$$

$$= a_1 b_2\ dx_1 \wedge dx_2 + a_1 b_3\ dx_1 \wedge dx_3 +$$

$$+ a_2 b_1\ dx_2 \wedge dx_1 + a_2 b_3\ dx_2 \wedge dx_3 +$$

$$+ a_3 b_1\ dx_3 \wedge dx_1 + a_3 b_2\ dx_3 \wedge dx_2 =$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\ d_1 \wedge dx_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\ dx_1 \wedge dx_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\ dx_2 \wedge dx_3$$

Skąd

$$c = (c_1, c_2, c_3) = ((a_2 b_3 - a_3 b_2),\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1),\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)) =$$
$$= ((a_2 b_3 - a_3 b_2),\ (a_3 b_1 - a_1 b_3),\ (a_1 b_2 - a_2 b_1))$$

Aby wektor c był prostopadły do a, to ich iloczyn skalarny musi być równy zero. Mamy

$$\langle a, c \rangle = a_1 \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)) = 0$$

Zadanie 4.
Rozważmy formę $\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dw \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. Rozstrzygnij, czy istnieją 1-formy $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ takie, że $\omega = \alpha \wedge \beta$.

Rozwiązanie:
Wiemy już, że $\omega \wedge \omega \neq 0$. Załóżmy, że istnieją $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, że $\omega = \alpha \wedge \beta$, wówczas

$$\omega \wedge \omega = (\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \beta = 0$$

Różniczka zewnętrzna

Operację różniczki zewnętrznej d możemy rozszerzyć ze zbioru funkcji gładkich $C^\infty(U)$ na zbiór form dowolnego stopnia $\Omega^k(U)$ wzorem

$$d\left(\sum_I f_I dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\right) = \sum_I df_I \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

a więc d różniczkuje wszystkie funkcje, natomiast zostawia w spokoju wszystkie 1-formy bazowe dx_i. Wynikają stąd następujące właściwości operacji d dla $f \in C^\infty(U)$ oraz $\alpha, \beta \in \Omega^k(U)$:

$$d(d\alpha) = 0, \quad d(f \cdot \alpha) = df \wedge \alpha + f \cdot d\alpha, \quad d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta.$$

Przykład: Rozważmy formę $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$. Wówczas

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Przykład: Zauważmy, że forma $\omega = g(x, y)\,dx + h(x, y)\,dy$ jest zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy $g'_y = h'_x$. Istotnie,

$$d\omega = dg \wedge dx + dh \wedge dy = (g'_x\,dx + g'_y\,dy) \wedge dx + (h'_x\,dx + h'_y\,dy) \wedge dy = (g'_y - h'_x)\,dx \wedge dy.$$

Definicja: Rozważmy formę $\omega \in \Omega^k(U)$. Powiemy, że ω jest zamknięta, gdy $d\omega = 0$, oraz że jest dokładna, jeśli istnieje forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ taka, że $\omega = d\alpha$.

Uwaga: Ponieważ dla dowolnej $(k-1)$-formy α mamy $d(d\alpha) = 0$, każda forma dokładna jest zamknięta, ale niekoniecznie odwrotnie, czego dowodzi przykład $\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Co więcej, jak widzimy z rozpatrywania tej samej formy na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \,|\, x \geq 0\}$, to czy dana forma jest zamknięta czy nie, może zależeć od topologii rozpatrywanego zbioru.

Zadanie 5.
Wykaż, że dla dowolnej k-formy $\omega \in \Omega^k(U)$ zachodzi $d(d\omega) = 0$

Rozwiązanie:
Niech $\omega = \sum_I f_I dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ Bez straty ogólności załóżmy, że $f := f_1 \neq 0$ oraz $f_i = 0$ dla $i \neq 1$, czyli $\omega = f\ dx_1 \wedge \ldots \wedge x_k$. Wtedy

$$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge x_k$$

Przy czym f jest funkcją, czyli 0-formą. Z twierdzenia Schwarza mamy

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\ dx_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial j}\frac{\partial f}{\partial i}\ dx_j \wedge dx_i = \sum_{1\leq j<i\leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\ dx_j \wedge dx_i = 0$$

Stąd

$$d(d\omega) = d(df) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge x_k = 0$$

Zadanie 6.
Oblicz różniczkę zewnętrzną formy

a) $\sum_{i=1}^{n} (-x_i)^{i+1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

b) $\det dF(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$, gdzie $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem gładkim.

c) $f_1(x_1, x_3)dx_1 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2 + f_3(x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3$, gdzie $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ to funkcje gładkie.

d) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (f\frac{\partial g}{\partial x_k} - g\frac{\partial f}{\partial x_k}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$, gdzie $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi.

Zadanie 7.
Niech $\eta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie iloczynem wektorowym $\eta(u, v) = u \times v$.

a) Wykazać, że $\eta = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$.

b) Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym, a $\eta F(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v\rangle$. Wyrazić ηF w bazie $dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$.

Zadanie 8.
Niech $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ będzie formą z poprzedniego zadania. Wykazać, że każdą formę $\beta \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)^*$ da się zapisać w postaci $\alpha \wedge \omega$ dla dokładnie jednej formy $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)^*$.

Ćwiczenia 19

Cofniecie formy różniczkowej

Definicja: Cofnięciem (przeciągnięciem, albo pull-backiem) k-formy $\omega \in \Omega^k(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi : V \to U$ nazywamy formę $\Phi^*\omega \in \Omega^k(V)$ określoną wzorem:

$$\Phi^*\omega_x[v_1, \ldots, v_k] = \omega_{\Phi(x)}[d\Phi_x[v_1], \ldots, d\Phi_x[v_k]].$$

Innymi słowy, aby policzyć wartość formy $\Phi^*\omega$ na wektorach $v_1, \ldots, v_k$ w punkcie x, przepychamy te wektory do U za pomocą pochodnej $d\Phi_x$ i liczymy wartość formy ω na obrazie.

Uwaga: Φ nie musi być dyfeomorfizmem, a nawet U i V nie muszą być tego samego wymiaru!

Twierdzenie: (Właściwości cofnięcia) Rozważmy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ oraz formy $\alpha \in \Omega^k(U)$ i $\beta \in \Omega^l(U)$. Wówczas:

$$\Phi^* f(x) = f(\Phi(x)) \quad \text{- cofnięcie funkcji to po prostu złożenie,}$$
$$\Phi^*(df) = d(\Phi^* f) \quad \text{- przeciąganie jest przemienne z operacją różniczki } d,$$
$$\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta) \quad \text{- łączność}$$

Wzory te pozwalają policzyć cofnięcie dowolnej k-formy różniczkowej.

Przykład: Dla $\Phi : (r, \varphi) \mapsto (x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$ i $\omega = y^2 dx$, aby obliczyć $\Phi^*\omega$ wstawiamy po prostu wyrażenia $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$ do wzoru na ω:

$$\Phi^*(y^2 dx) = (r\sin\varphi)^2 d(r\cos\varphi) = r^2 \sin^2\varphi(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi).$$

Zadanie 1.
Oblicz cofnięcie $\Phi^*\omega$ dla:

$\omega = xy\, dx + 2z\, dy - y\, dz$ i $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$,

$\omega = 4x\, dx + 9y\, dy$ i $\Phi(r, \varphi) = (3r\cos\varphi, 2r\sin\varphi)$,

$\omega = x\, dy - y\, dx$ i $\Phi(r, \varphi) = (3r\cos\varphi, 2r\sin\varphi)$.

Rozwiązanie:

a)

$$\Phi^*\omega = uv \cdot u^2\ d(uv) + 2(3u + v)\ d(u^2) - u^2\ d(3u + v) =$$
$$= u^3 \cdot v \cdot (v\ du + u\ dv) + (6u + 2v) \cdot (2u\ du) - u^2 \cdot (3\ du + dv) =$$
$$= (u^3 \cdot v^2 + 12u^2 + 4uv - 3u^2)\ du + (u^4 \cdot v - u^2)\ dv =$$
$$= (u^3v^2 + 9u^2 + 4uv)\ du + (u^4v - u^2)\ dv$$

b)

$$\Phi^*\omega = 4 \cdot (3r\cos\varphi)\ d(3r\cos\varphi) + 9 \cdot (2r\sin\varphi)\ d(2r\sin\varphi) =$$
$$= 12r\cos\varphi \cdot (3\cos\varphi\ dr - 3r\sin\varphi\ d\varphi) + 18r\sin\varphi \cdot (2\sin\varphi\ dr + 2r\cos\varphi\ d\varphi) =$$
$$= (36r\cos^2\varphi + 36r\sin^2\varphi)\ dr + (-36r^2\sin\varphi\cos\varphi + 36r^2\sin\varphi\cos\varphi)\ d\varphi = 36r\ dr$$

c)

$$\Phi^*\omega = 3r\cos\varphi\ d(2r\sin\varphi) - 2r\sin\varphi\ d(3r\cos\varphi) =$$
$$= 3r\cos\varphi \cdot (2\sin\varphi\ dr + 2r\cos\varphi\ d\varphi) - 2r\sin\varphi \cdot (3\cos\varphi\ dr - 3r\sin\varphi\ d\varphi) =$$
$$= (6r\sin\varphi\cos\varphi - 6\sin\varphi\cos\varphi)\ dr + (6r^2\cos^2\varphi + 6r^2\sin^2\varphi)\ \varphi = 6r^2\ d\varphi$$

Zadanie 2.
Znajdź cofnięcie $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u,v) = (uv, u^2, 3u+v)$, $\omega = y\,dx + x\,dz$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\Phi^*\omega = u^2\ d(uv) + uv\ d(3u+v) = u^2 \cdot (u\ dv + v\ du) + uv \cdot (3\ du + dv)$$

Zadanie 3.
Znajdź $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u,v) = (x = uv, y = u^2, z = 3u+v)$, $\omega = y\,dx \wedge dz$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\Phi^*\omega = u^2 d(uv) \wedge d(3u+v) = u^2(udv + vdu) \wedge (3du + dv) =$$
$$= u^2[3udv \wedge du + udv \wedge dv + 3vdu \wedge du + vdu \wedge dv] =$$
$$= u^2(v - 3u)du \wedge dv.$$

Zadanie 4.
Oblicz cofnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania $\Phi(u,v) = (x = uv, y = u^2, z = 3u+v)$. Uzasadnij wynik bez wykonywania obliczeń.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że odwzorowanie Φ prowadzi z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$. Wobec tego $\Phi^*\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^2) = 0$.

Zadanie 5.
Oblicz cofnięcie $\Phi^*\omega$ dla $\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, $\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\Phi^*\theta = r\cos(\varphi)d(r\sin(\varphi)) - r\sin(\varphi)d(r\cos(\varphi)) =$$
$$= \frac{r\cos(\varphi)(\sin(\varphi)dr + r\cos(\varphi)d\varphi) - r\sin(\varphi)(\cos(\varphi)dr - r\sin(\varphi)d\varphi)}{r^2} = \frac{r^2\ d\varphi}{r^2} = d\varphi$$

Zadanie 6.
Znajdź postać formy $\omega = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ we współrzędnych biegunowych $\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\Phi^*\theta = r\cos(\varphi)d(r\cos(\varphi)) + r\sin(\varphi)d(r\sin(\varphi)) =$$

$$= \frac{r\cos(\varphi)(\cos(\varphi)dr - r\sin(\varphi)d\varphi) + r\sin(\varphi)(\sin(\varphi)dr + r\cos(\varphi)d\varphi)}{r^2} = \frac{r\ dr}{r^2} = \frac{dr}{r} = d(\ln r)$$

Zadanie 7.
Oblicz formę $dx \wedge dy$ we współrzędnych biegunowych ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$).

Rozwiązanie:
Mamy

$$\Phi^*(dx \wedge dy) = d(r\cos(\varphi)) \wedge d(r\sin(\varphi)) =$$

$$= (\cos(\varphi)dr - r\sin(\varphi)d\varphi) \wedge (\sin(\varphi)dr + r\cos(\varphi)d\varphi) =$$

$$= r\cos^2(\varphi)dr \wedge d\varphi - r\sin^2(\varphi)d\varphi \wedge dr = rdr \wedge d\varphi$$

Zadanie 8.
Oblicz cofnięcie formy $\omega = dx\wedge dy\wedge dz$ za pomocą odwzorowania $\Phi(r,\varphi,\beta) = (r\cos\varphi\cos\beta, r\sin\varphi\cos\beta, r\sin\beta)$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\Phi^*(dx \wedge dy \wedge dz) = d(r\cos\alpha\cos\beta) \wedge d(r\sin\alpha\cos\beta) \wedge d(r\sin\beta)$$

Policzmy różniczki poszczególnych części

$$d(r\ cos\alpha\cos\beta) = \cos\alpha\cos\beta\ dr - r\sin\alpha\cos\beta\ d\alpha - r\cos\alpha\sin\beta\ d\beta =: DX$$

$$d(r\sin\alpha\cos\beta) = \sin\alpha\cos\beta\ dr + r\cos\alpha\cos\beta\ d\alpha - r\sin\alpha\sin\beta\ d\beta =: DY$$

$$d(r\sin\beta) = \sin\beta\ dr + 0\ d\alpha + r\cos\beta\ d\beta =: DZ$$

Wówczas

$$\Phi^*(dx \wedge dy \wedge dz) = DX \wedge DY \wedge DZ = (DX \wedge DY) \wedge DZ$$

Wymnażamy i porządkujemy wyrazy podobne korzystając z tego, że $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ oraz $dx \wedge dx = 0$. Mamy

$$DX \wedge DY = r\cos^2\beta\ dr \wedge d\alpha + 0\ dr \wedge d\beta + r^2\sin\beta\cos\beta\ d\alpha \wedge d\beta =: DXY$$

Teraz

$$\Phi^*(dx \wedge dy \wedge dz) = DXY \wedge DZ$$

Jeśli w jakimś wyrażeniu pojawi się wyrażenie zawierające $dx \wedge dx$, to całość zerujemy, zatem

$$DXY \wedge DZ = r^2\cos^3\beta\ dr \wedge d\alpha \wedge d\beta + r^2\cos\beta\sin^2\beta\ d\alpha \wedge d\beta \wedge dr$$

Wyrażenie (α, β, r) jest dwukrotnym zastosowaniem transpozycji do wyrażenia (r, α, β), zatem $d\alpha \wedge d\beta \wedge dr = dr \wedge d\alpha \wedge d\beta$, skąd

$$\Phi^*(dx \wedge dy \wedge dz) = DXY \wedge DZ = r^2\cos^3\beta\ dr \wedge d\alpha \wedge d\beta + r^2\cos\beta\sin^2\beta\ dr \wedge d\alpha \wedge d\beta =$$

$$= r^2\cos\beta(\cos^2\beta + \sin^2\beta)dr \wedge d\alpha \wedge d\beta = r^2\cos\beta\ dr \wedge d\alpha \wedge d\beta$$

Twierdzenie: Rozważmy dyfeomorfizm $\Phi : V \to U$, krzywą zorientowaną $\Gamma \subset V$ i formę $\omega \in \Omega^1(U)$. Wówczas

$$\int_\Gamma \Phi^*\omega = \int_{\Phi(\Gamma)} \omega,$$

gdzie orientacja krzywej $\Phi(\Gamma)$ jest indukowana z Γ.

Dowód. Rozważmy dowolną parametryzację krzywej Γ, powiedzmy $\eta : [a,b] \to V$. Wówczas $\gamma := \Phi(\eta) : [a,b] \to U$ jest parametryzacją krzywej $\Phi(\Gamma)$. Z definicji:

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(\Gamma)} \omega &= \int_{[a,b]} \omega(\gamma(t))[d\gamma(t)] \\ &= \int_{[a,b]} \omega(\Phi(\eta(t)))[d\eta(t)\Phi[\eta'(t)]].\end{aligned}$$

Zauważmy, że w ostatniej części mamy wyrażenie postaci $\widetilde{\omega}(\eta(t))[\eta'(t)]$, gdzie $\widetilde{\omega}(x)[v] := \omega(\Phi(x))[d\Phi[v]]$, a więc dokładnie $\widetilde{\omega} = \Phi^*\omega$. Stąd:

$$\int_{\Phi(\Gamma)} \omega = \int_{[a,b]} \Phi^*\omega(\eta(t))[\eta'(t)] = \int_\Gamma \Phi^*\omega.$$

Zadanie 9.
Oblicz

a) $xd(\sin(x^2y)) + yd(\cos(xy^2))$

b) $e^{-x-y+z}d(e^{x+y+z})$

c) $d(x^1x^3dx^3 \wedge dx^4)$

d) $d\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)$

Zadanie 10.
Obliczyć przeciągnięcie elementu $dy_2 \wedge dy_1 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ za pomocą przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadanego macierzą (w bazie standardowej)

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenia 20

Całka z k-formy po zorientowanej rozmaitości k-wymiarowej, twierdzenie Stokes'a

Definicja: Powiemy, że dwie uporządkowane (kolejność wektorów jest ważna!) bazy $(v_1, \dots, v_k)$ oraz $(w_1, \dots, w_k)$ zadają tę samą orientację przestrzeni wektorowej V, gdy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Gdy wyznacznik ten jest ujemny, powiemy, że orientacje obu baz są przeciwne. Każda przestrzeń wektorowa ma zatem dwie kanoniczne orientacje.

W przypadku przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ możemy mówić o orientacji standardowej zadanej przez uporządkowaną bazę kanoniczną $(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Przykład. Rozważmy $\mathbb{R}^3$ ze standardową orientacją (e_1, e_2, e_3). Baza uporządkowana (e_1, e_3, e_2) ma przeciwną orientację, gdyż macierz przejścia między tymi bazami, a więc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ma ujemny wyznacznik. Z kolei baza uporządkowana $v_1 = [2, 1, 0]$, $v_2 = [3, 0, 0]$, $v_3 = [0, 0, -4]$ zadaje tę samą orientację co standardowa, gdyż odpowiedni wyznacznik macierzy przejścia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

wynosi 12 i jest dodatni.

Orientacja rozmaitości różniczkowej to wybór orientacji w każdej jej przestrzeni stycznej, tak aby wszystkie te orientacje były ze sobą zgodne.

Definicja: Orientację rozmaitości różniczkowej nazywamy lokalnie zgodnym wyborem orientacji jej wszystkich przestrzeni stycznych. Intuicyjnie rozumiemy, że wybrane orientacje zmieniają się w sposób ciągły od punktu do punktu. Formalna definicja wymaga wprowadzenia pojęcia atlasu zorientowanego. Nie wszystkie rozmaitości da się zorientować (np. wstęga Möbiusa). Te, które dopuszczają orientację, nazywamy orientowalnymi.

Twierdzenie: Każda rozmaitość będąca brzegiem innej rozmaitości (jak również każda podrozmaitość takiego brzegu) jest orientowalna. Na przykład sfera 2-wymiarowa jest orientowalna, bo jest brzegiem kuli 3-wymiarowej. Podobnie, górna półsfera jest orientowalna jako podrozmaitość na takim brzegu.
Jeśli M jest rozmaitością orientowalną i spójną, to jej orientacja jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie orientacji jej dowolnie wybranej przestrzeni stycznej T_pM.

Inaczej o orientacji powierzchni

W przypadku powierzchni dwuwymiarowej $S \subset \mathbb{R}^3$ często mówi się, że jej orientacja to wybór pola wektorów normalnych do S. Mianowicie, jeśli (v_1, v_2) jest uporządkowaną bazą przestrzeni stycznej

T_pM zadającą orientację, to iloczyn wektorowy $v_1 \times v_2$ jest wektorem prostopadłym zarówno do v_1 jak i v_2, a więc do całej rozmaitości S w punkcie p. Po znormalizowaniu dostajemy wektor jednostkowy

$$\mathbf{n}_p = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Wybór jednego z dwóch jednostkowych wektorów prostopadłych $\mathbf{n}_p$ lub $-\mathbf{n}_p$ jest równoważny z wyborem orientacji w punkcie p.

Definicja: (Całka z k-formy różniczkowej) Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^k$ z kanoniczną orientacją $[e_1, \ldots, e_k]$ definiujemy

$$\int_U f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \int_U f(x)\, dk(x),$$

czyli całka z k-formy $f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ pokrywa się ze standardową całką Lebesgue'a, z dokładnością do zmiany znaku przy innym wyborze orientacji. Formę $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ nazywamy formą objętości.
Całkę z formy różniczkowej na podrozmaitości definiujemy przechodząc od krzywych do płaskich współrzędnych. Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową podrozmaitością zorientowaną. Całkę z k-formy $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ na rozmaitości S definiujemy jako

$$\int_S \alpha = \int_U \Phi^* \alpha,$$

gdzie $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją $S = \Phi(U)$ zgodną z orientacją S. Zgodność orientacji na U i na S oznacza, że jeśli $(v_1, \ldots, v_k)$ jest wybraną orientacją na U, to baza uporządkowana $(d\Phi[v_1], \ldots, d\Phi[v_k])$ jest zgodna z wybraną orientacją S.

Standardowe zadanie na policzenie $\int_S \omega$, gdzie $S \subset \mathbb{R}^n$ jest k-wymiarową zorientowaną rozmaitością, a $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ jest k-formą różniczkową, robi się następująco:

1. Znajdujemy parametryzację $\Phi : \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$, taką że $\Phi(U) = S$.
2. Liczymy cofnięcie $\Phi^*\omega$.
3. Liczymy całkę $\int_U \Phi^*\omega$ tak jak zwykłą całkę Lebesgue'a.
4. Uzgadniamy orientację U z orientacją S i ewentualnie zmieniamy znak w powyższej całce:
$$\int_S \omega = \pm \int_U \Phi^*\omega.$$

Zadanie 1.
Rozważmy dwuwymiarową rozmaitość zorientowaną $S \subset \mathbb{R}^3$ i niech $F = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym, zaś $\eta_F = f\, dy \wedge dz - g\, dx \wedge dz + h\, dx \wedge dy$. Wykaż, że

$$\int_S \eta_F = \int_S \langle F(x), n(x) \rangle\, d\sigma_2(x),$$

gdzie σ_2 oznacza miarę powierzchniową na S, zaś $n(x)$ to wektor normalny zewnętrzny (a więc zgodny z wybraną orientacją) do S w punkcie $x \in S$.

Rozwiązanie:
Przypomnijmy, że zajmowaliśmy się już formą η_F otrzymując wzór $\eta_F(x)[v, w] = \langle F(x), v \times w\rangle$. Ustalmy dowolną parametryzację $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$, $S = \Phi(U)$ i przyjmijmy, że standardowa orientacja współrzędnych $y = (y_1, y_2)$ na U jest zgodna z wybraną orientacją S. Mamy $(\Phi^*\eta_F)(y) = \xi(y)dy_1 \wedge dy_2$ dla pewnej funkcji $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Z definicji

$$\int_S \eta_F = \int_U \Phi^*\eta_F = \int_U \xi(y)dy_1 \wedge dy_2 = \int_U \xi(y)d^2y.$$

Zauważmy teraz, że

$$\xi(y) = \xi(y)dy_1 \wedge dy_2[e_1, e_2] = (\Phi^*\eta_F)(y)[e_1, e_2] \text{ def. cofnięcia } = \eta_F(\Phi(y))[d\Phi_y[e_1], d\Phi_y[e_2]] = \langle F(\Phi(y)), d\Phi_y[e_1] \times$$

Z założenia baza uporządkowana $(d\Phi_y[e_1], d\Phi_y[e_2])$ jest zgodna z orientacją, a zatem skoro iloczyn wektorowy to wektor prostopadły do pary wektorów o długości równej polu równoległoboku przez nie rozpięte, mamy

$$d\Phi_y[e_1] \times d\Phi_y[e_1] = n(\Phi(y)) \cdot G(d\Phi_y[e_1], d\Phi_y[e_2]),$$

gdzie $G(\cdot)$ to znany nam już wcześniej wyznacznik Grama. Ostatecznie

$$\int_S \eta_F = \int_U \xi(y)d^2y = \int_U \langle F(\Phi(y)), n(\Phi(y))\rangle \cdot G(d\Phi_y[e_1], d\Phi_y[e_2])d^2y \text{ wzór na miarę pow. } = \int_S \langle F(x), n(x)\rangle d\sigma^2$$

Zadanie 2.
Dla pola wektorowego $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, 0, 0)$ oraz obszaru $\Omega = [0, 1]^3$, policz niezależnie od siebie całki

$$\int_{\partial\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, dy \wedge dz \quad \text{oraz} \quad \int_{\partial\Omega} \langle F, n\rangle\, d\sigma_2,$$

gdzie n to wektor normalny zewnętrzny. Brzeg $\partial\Omega$ ma orientację indukowaną z ze standardowej orientacji kostki Ω w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 3.
Oblicz całkę z formy $\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$ po sferze $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$. Przyjmujemy, że orientacja S jest zadana przez wybór bazy uporządkowanej (e_y, e_z) w punkcie $(1, 0, 0)$. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie:
Zacznijmy od znalezienia parametryzacji sfery. Naturalnym kandydatem jest parametryzacja sferyczna $\Phi : (\phi, \beta) \mapsto (x = a\cos\phi\cos\beta, y = a\sin\phi\cos\beta, z = a\sin\beta)$, gdzie $U = (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jest dziedziną parametryzacji. Mamy $\Phi^*\omega = a^3\cos\beta d\phi \wedge d\beta$. Przyjmijmy na razie, że orientacja w U jest wyznaczona przez bazę (e_ϕ, e_β) (czyli, że ϕ jest pierwszą współrzędną, a β drugą). Wówczas

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U a^3\cos\beta d\phi \wedge d\beta = a^3 \int_U \cos\beta d^2(\phi, \beta) = 4\pi a^3.$$

Na koniec zastanówmy się, jak się ma wybrana orientacja w U do orientacji na S. W tym celu zobaczmy, na co przechodzą wektory bazowe e_ϕ i e_β przy $d\Phi(0, 0)$ (wybieramy punkt $(0, 0)$, bo

$\Phi(0,0) = (1,0,0)$, a więc jest to przeciwobraz punktu, w którym zadaliśmy orientację). Prosty rachunek daje nam $d\Phi_0[e_\phi] = a[0,1,0] = ae_y$ i $d\Phi_0[e_\beta] = a[0,0,1] = ae_z$. Jak widać, baza (ae_y, ae_z) zadaje tę samą orientację co baza (e_y, e_z), a więc nie musimy zmieniać znaku w całce.

Zadanie 4.
Używając podstawienia walcowego:

$$\Phi : (\varphi, z) \mapsto (x = \sqrt{a^2 - z^2}\cos\varphi, y = \sqrt{a^2 - z^2}\sin\varphi, z = z),$$

oblicz całkę z formy $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ po wycinku sfery $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > \frac{a}{2}\}$. Orientację A przyjmujemy tak, jak we wcześniejszym zadaniu. Zakładamy, że $\alpha > 0$.

Rozwiązanie:
Policzmy cofnięcie $\Phi^*\omega$.

$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega = {} & \sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi\, d(\sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi) \wedge dz + \sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi\, dz \wedge d(\sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi) \\
& + z\, d(\sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi) \wedge (\sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi) = \\
= {} & \sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi\, (\sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi\, d\phi) \wedge dz + \sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi\, dz \wedge (-\sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi\, d\phi) + \\
& + z\,(\cos\phi\, d\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi\, d\phi) \wedge (\sin\phi\, d\sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi\, d\phi) = \\
= {} & (\sqrt{a^2 - z^2})^2\, d\phi \wedge dz + z(\sqrt{a^2 - z^2}\cos^2\phi\, d\sqrt{a^2 - z^2} \wedge d\phi + \\
& - \sqrt{a^2 - z^2}\sin^2\phi\, d\phi \wedge d\sqrt{a^2 - z^2}) = \\
= {} & (a^2 - z^2)\, d\phi \wedge dz - z\sqrt{a^2 - z^2}\, d\phi \wedge \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}}(-z)dz\right) = \\
= {} & a^2\, d\phi \wedge dz
\end{aligned}$$

Teraz wykonajmy całowanie po dziedzinie parametryzacji $U = \{(\phi, z) \,|\, \phi \in (0, 2\pi), z \in (\frac{a}{2}, a)\}$, przyjmując, że (e_ϕ, e_z) jest orientacją na U:

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U a^2\, d\phi \wedge dz = \int_U a^2\, d^2(\phi, z) = \pi a^3.$$

Zastanówmy się teraz nad zgodnością przyjętej orientacji U z orientacją A. Zobaczmy, na co przechodzą wektory bazowe e_ϕ oraz e_z przy $d\Phi$ w punkcie $p = (\phi = 0, z = a/2)$. Prosty rachunek daje nam

$$v_1 = d\Phi_p\,[e_\phi] = \left[0, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right] \quad \text{oraz} \quad v_2 = d\Phi_p[e_z] = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1\right].$$

Ich iloczyn wektorowy $v_1 \times v_2$ to $\left[\frac{\sqrt{3}a}{3}, 0, \frac{a}{2}\right]$ jest skierowany na zewnątrz, a zatem przyjęliśmy orientację zgodną ze standardową orientację sfery.

Twierdzenie: (Stokes'a) Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $(k+1)$-wymiarową zorientowaną rozmaitością z brzegiem ∂M. Rozważmy k-formę $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Wówczas

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

gdzie ∂M ma naturalną orientację dziedziczoną z M:

$$\mathrm{or}_M = \{n, \mathrm{or}_{\partial M}\}.$$

n oznacza tutaj wektor normalny do brzegu ∂M skierowany na zewnątrz M.

Zadanie 5.
Oblicz całkę z formy $\omega = x\,dy\wedge dz + y\sin z\,dz\wedge dx + (z+1)\,dx\wedge dy$ po rozmaitości M zdefiniowanej jako część powierzchni $x^2+y^2 = \cos^2 z$ zawartej pomiędzy płaszczyznami $z = 0$ i $z = \frac{\pi}{4}$ z orientacją wyznaczoną przez bazę $\{e_z, e_x\}$ w punkcie $(0,1,0) \in M$.

Rozwiązanie:
Będziemy całkować po zbiorze $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = \cos^2 z, z \in (0, \frac{\pi}{4})\}$, który łatwo sparametryzować:

$$\Phi : (\varphi, z) \mapsto (x = \cos z\cos\varphi, y = \cos z\sin\varphi, z),$$

gdzie $(\varphi, z) \in U = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{4}]$. Policzmy pullback:

$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= \cos z\cos\varphi\, d(\cos z\sin\varphi) \wedge dz + \cos z\sin\varphi\sin z\, dz \wedge (\cos z\cos\varphi) \\ &\quad + (z+1)\, d(\cos z\cos\varphi) \wedge (\cos z\sin\varphi) \\ &= \dots \\ &= \left[\cos z\left((1+z+\cos z)\sin z\sin^2\varphi + (\cos z + \cos^2\varphi(1+z))\sin z\right)\right] d\varphi \wedge dz.\end{aligned}$$

Policzmy całkę z tej formy, przyjmując że orientacja na U jest dana przez (e_φ, e_z):

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U \left[\cos z\left((1+z+\cos z)\sin z\sin^2\varphi + (\cos z + \cos^2\varphi(1+z))\sin z\right)\right] d\varphi\, dz =$$

$$= \frac{1}{24}\pi(32 - 2\sqrt{2} + 3\pi).$$

Zadanie 6.
Korzystając z twierdzenia Stokes'a oblicz całkę z formy $\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$ po

a) sferze $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2\}$

b) wycinku sfery $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2, z > \frac{a}{2}\}$.

Przyjmujemy, że orientacja S i $A \subset S$ jest zadana przez wybór bazy uporządkowanej (e_y, e_z) w punkcie $(a,0,0)$. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie:
Mamy $d\omega = 3\ dx \wedge dy \wedge dz$.

a) Załóżmy, że S jest brzegiem kuli $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$. Przyjmujemy standardową orientację (e_x, e_y, e_z) w $\mathbb{R}^3$. Wówczas:

$$\int_B d\omega = \int_B 3\, dx \wedge dy \wedge dz = 3 \int_B d^3(x, y, z) = 3\lambda^3(B) = 4\pi a^3.$$

Z drugiej strony, z twierdzenia Stokesa:

$$\int_B d\omega = \int_{S=\partial B} \omega,$$

przy czym orientacja S musi być indukowana z wybranej przez nas orientacji standardowej w $\mathbb{R}^3$. Zatem szukana całka wynosi:

$$\int_S \omega = \pm 4\pi a^3,$$

przy czym znak plus bierzemy, jeśli orientacja indukowana jest taka jak w treści zadania, a minus gdy jest przeciwna. Łatwo zauważyć, że baza (e_x, e_y, e_z) jest zgodna ze standardową orientacją $\mathbb{R}^3$. Ponadto pierwszy wektor e_x jest wektorem normalnym do S w punkcie $(a, 0, 0)$ skierowanym na zewnątrz kuli, zaś pozostałe wektory e_y i e_z są styczne do S. Wobec tego, baza uporządkowana (e_y, e_z) w punkcie $(a, 0, 0)$ wyznacza orientację $S = \partial B$ indukowaną ze standardowej orientacji $\mathbb{R}^3$. Jest to ta sama orientacja, co w zadaniu, zatem:

$$\int_S \omega = +4\pi a^3.$$

To samo można przedstawić inaczej: standardowa orientacja kuli B indukuje orientację brzegu $\partial B = S$ "na zewnątrz". Iloczyn wektorowy wektorów bazowych w punkcie $(1, 0, 0)$ zadających orientację S, czyli e_y i e_z, to e_x również jest skierowany "na zewnątrz", nie ma zatem potrzeby zmieniania znaku.

Zadanie 7.
Oblicz całkę z 2-formy

$$\omega = (y^2 - x^2)\, dy \wedge dz + (z - x)\, dz \wedge dx + (2xz - y)\, dx \wedge dy$$

po powierzchni M powstałej w wyniku obrotu cykloidy opisanej parametrycznie $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 1 - \cos t$, gdzie $t \in [0, \pi]$ wokół prostej $x = \pi$, $y = 0$. Wektor normalny zewnętrzny do M w punkcie $(\pi, 0, 2)$ to $[0, 0, 1]$.

Zadanie 8.
Oblicz całkę z formy $\alpha = x\, dy \wedge dz$ po połówce torusa sparametryzowanej następująco: $x = (4 + \cos\alpha)\cos\theta$, $y = (4 + \cos\alpha)\sin\theta$, $z = \sin\alpha$, gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi]$. Przyjmujemy, że orientacja torusa jest dziedziczona z orientacji $d\alpha \wedge d\theta$.

Zadanie 9.
Rozstrzygnij, czy 2-forma $\omega = \frac{(xdy - ydx)\wedge(udx - wdu)}{(x^2+y^2)(u^2+w^2)}$ jest zamknięta? Czy jest dokładna?

Rozwiązanie:
Forma jest postaci $\omega = \alpha \wedge \beta$ gdzie $d\alpha = 0 = d\beta$. Wobec $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta \pm \alpha \wedge d\beta$ zachodzi $d\omega = 0$. Pokażemy, że forma nie jest zamknięta. Rozważmy rozmaitość $T = S^1 \times S^2 \subset \mathbb{R}^4$. Wobec $\partial T = \emptyset$, gdyby zachodziło $\omega = d\eta$, mielibyśmy z Twierdzenia Stokesa $\int_T \omega = \int_T d\eta = \int_{\partial T} \eta = 0$ Tymczasem $\int_T \omega = \int_{S1 \times S1} \alpha \wedge \beta = \int_{S1} \alpha \cdot \int_{S1} \beta = \pm(2\pi)^2$.

Seria 7 (AM 2.2)

Przemysław Ohrysko

10 czerwca 2021

Zadanie 1. Obliczyć całkę

$$\int\int_{(P,+)} \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z},$$

gdzie $P = \{(x, y, z) : 1 < z < 2,\ z^2 = x^2 + y^2\}$, a symbol $(P, +)$ oznacza powierzchnię P zorientowaną tak, że jej strona dodatnia jest "widoczna" z punktu $(0, 0, -1)$.

Rozwiązanie. *Niech ω będzie formą występującą w treści zadania. Wówczas*

$$d\omega = \left(-\frac{1}{x^2}dx \wedge dy \wedge dz\right)+\left(-\frac{1}{y^2}dy \wedge dz \wedge dx\right)+\left(-\frac{1}{z^2}dz \wedge dx \wedge dy\right) = = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) dx\wedge dy\wedge dz.$$

Przyjmijmy $S = \{(x, y, z) : 1 < z < 2,\ z^2 > x^2 + y^2\}$ Z twierdzenia Stokesa

$$\int\int_{(P,+)} \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z} = -\int_S \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) dxdydz =$$

$$= -\int_1^2 \left(\int_{x^2+y^2<z^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) dxdy\right) dz =$$

$$= -\int_1^2 \left(\int_0^z \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r^2\cos^2\alpha} + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\right) rd\alpha dr + \frac{1}{z^2}\cdot \pi z^2\right) dz =$$

$$= -\int_1^2 \left(\left(\left(\int_0^z \frac{1}{r}dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}d\alpha\right) + \pi\right) dz =$$

Sytuacja jest podejrzana, bo całki wychodzą rozbieżne. Wynika to stąd, że próbowaliśmy zastosować twierdzenie Stokesa do formy, która nie jest dobrze określona na całej rozmaitości z brzegiem.
Musimy wobec tego odwołać się do definicji. Wówczas $\varphi : (-\pi, \pi) \times (1, 2) \to P$ określone wzorem:

$$\varphi(\alpha, r) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, r)$$

jest parametryzacją naszego fragmentu stożka. Zgodnie z definicją musimy poli-

czyć:

$$\varphi^*\omega =$$

$$= \frac{1}{r\cos\alpha}\left(d(r\sin\alpha)\wedge dr\right) + \frac{1}{r\sin\alpha}\left(dr\wedge d(r\cos\alpha)\right) + \frac{1}{r}\left(d(r\cos\alpha)\wedge d(r\sin\alpha)\right) =$$

$$= \frac{1}{r\cos\alpha}(\sin\alpha dr + r\cos\alpha d\alpha)\wedge dr +$$

$$+ \frac{1}{r\sin\alpha} dr\wedge(\cos\alpha dr - r\sin\alpha d\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{r}(\cos\alpha dr - r\sin\alpha d\alpha)\wedge(\sin\alpha dr + r\cos\alpha d\alpha) =$$

$$= \left(1 + 1 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) d\alpha\wedge dr = d\alpha\wedge dr.$$

Wobec tego

$$\int\int_{(P,+)} \frac{dy\wedge dz}{x} + \frac{dz\wedge dx}{y} + \frac{dx\wedge dy}{z} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_1^2 d\alpha dr = 2\pi.$$

Zadanie 2. Niech $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2 < 1, z^2 < 1\}$, $P = \partial W$ i niech $(P,+)$ oznacza P z orientacją wyznaczoną przez zewnętrzny wektor normalny do P. Obliczyć całkę

$$\int\int_{(P,+)} (x^3+y^3)dy\wedge dz + dz\wedge dx + dx\wedge dy.$$

Rozwiązanie. *Niech ω oznacza formę z treści zadania. Liczymy jej różniczkę zewnętrzną: $d\omega = 3x^2 dx\wedge dy\wedge dz$. Zauważamy, że nasz zbiór W to po prostu walec, więc z twierdzenia Stokesa:*

$$\int\int_{(P,+)} (x^3+y^3)dy\wedge dx + dz\wedge dx + dx\wedge dy = 3\int_W x^2 dxdydz =$$

$$= 3\cdot\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2+y^2<1} x^2 dxdy\right)dz = 6\cdot\int_0^1\int_0^{2\pi}(r\cos\alpha)^2 r d\alpha dr =$$

$$= 6\cdot\left(\int_0^1 r^3 dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha d\alpha\right) = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę z $(k-1)$-formy

$$x_j dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_k \text{ dla } i,j\in\{1,\ldots,k\}$$

po $(k-1)$-wymiarowej sferze $\{x\in\mathbb{R}^k : \|x\|_2 = 1\}$ z orientacją zewnętrzną.

Rozwiązanie. *Oznaczmy formę występującą w zadaniu przez $\omega_{i,j}$. Jeśli $i\neq j$, to łatwo stwierdzamy, że $d\omega_{i,j} = 0$, więc z twierdzenia Stokesa:*

$$\int_{\partial B(0,1)}\omega_{i,j} = \int_{B(0,1)} d\omega_{i,j} = 0.$$

Jeśli $i = j$, to

$d\omega_{j,j} = dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_k = (-1)^{j-1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k.$

Całka z k-formy po otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^k$ to z definicji zwykła całka Lebesgue'a oraz mamy do czynienia z naturalna orientacją, co daje:

$$\int_{\partial B(0,1)} \omega_{j,j} = \int_{B(0,1)} d\omega_{j,j} = (-1)^{j-1} \int_{B(0,1)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k = (-1)^{j-1} \lambda_k(B(0,1)).$$

Zadanie 4. Niech T oznacza torus powstały w wyniku obrotu okręgu o promieniu 7 i środku $(13, 0, 0)$ leżącego w płaszczyźnie o równaniu $y = 0$ wokół osi OZ. Torus jest zorientowany tak, że dodatnia strona jest widoczna z zewnątrz. Znaleźć

$$\int_T (xdy \wedge dz + ydz \wedge dy + zdx \wedge dy).$$

Rozwiązanie. *Niech ω będzie formą występującą w zadaniu. Wówczas $d\omega = 2dx \wedge dy \wedge dz$. Zatem z twierdzenia Stokesa:*

$$\int_T (xdy \wedge dz + ydz \wedge dy + zdx \wedge dy) = 2 \int_{pe\text{ł}ny\ torus} dxdydz = 2\lambda_3(pe\text{ł}ny\ torus).$$

Łatwo sprawdzić, że λ_3(pełny torus) wynosi $2\pi^2 \cdot 13 \cdot 7^2$.

Pierwotną formy ω nazywamy taką formę η, dla której zachodzi $\omega = d\eta$.

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie 1-formy pierwotne 2-formy

$$\omega = (x + y - z)dy \wedge dz + (y + z)dz \wedge dx + (x^2 - 2z)dx \wedge dy.$$

Rozwiązanie. *Sprawdźmy na początek różniczkę zewnętrzną formy ω:*

$$\begin{aligned} d\omega &= dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx - 2dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz - 2dx \wedge dy \wedge dz = 0. \end{aligned}$$

Zatem ω jest zamknięta. Z ogólnych twierdzeń (np. Lematu Poincare) wynika, że ω jest zupełna, co zapewnia istnienie formy pierwotnej η. Skoro $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, to spodziewamy się, że $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Załóżmy, że znaleźliśmy już pewną 1-formę η_0 spełniającą warunki zadania oraz niech η będzie dowolną jednoformą taką, że $d\eta = \omega$. Wówczas $d(\eta - \eta_0) = 0$, więc $\eta - \eta_0$ jest formą zamkniętą. Znów łatwo możemy wywnioskować, iż jest to forma zupełna (lemat Poincare). Zatem ma 0-formę pierwotną, czyli jest różniczką funkcji. Stąd $\eta = \eta_0 + dF$, gdzie $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Pozostaje wobec tego znaleźć η_0. Próbując rozwiązać to zadanie w pełnej ogólności musielibyśmy rozwiązać dość skomplikowany układ równań różniczkowych cząstkowych. Załóżmy jednak, że η_0 ma pewną szczególną formę:

$$\eta_0 = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy, \text{ gdzie } f, g \in C^1(\mathbb{R}^3).$$

Wówczas

$$d\eta_0 = f_y dy \wedge dx + f_z dz \wedge dx + g_x dx \wedge dy + g_z dz \wedge dy = (g_x - f_y) dx \wedge dy + f_z dz \wedge dx - g_z dy \wedge dz =$$
$$= \omega = (x + y - z) dy \wedge dz + (y + z) dz \wedge dx + (x^2 - 2z) dx \wedge dy.$$

Stąd $f_z = y + z$, *czyli* $f = yz + \frac{z^2}{2} + u(x,y)$. *Dalej* $-g_z = x + y - z$, *więc* $g = -xz - yz + \frac{z^2}{2} + v(x,y)$. *Podstawiamy to wszystko do ostatniego równania i mamy:*

$$x^2 - 2z = g_x - f_y = -z + v_x - z - u_y, \text{ czyli } v_x - u_y = x^2.$$

Przykładowym rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest para $v(x,y) = \frac{x^3}{3}$, $u = 0$. *Zatem ostatecznie wszystkie formy pierwotne dla* ω *są postaci*

$$(yz + \frac{z^2}{2} + F_x)dx + (-xz - yz + \frac{z^2}{2} + \frac{x^3}{3} + F_y)dy + F_z dz, \text{ gdzie } F \in C^1(\mathbb{R}^3).$$

Definicję "strumienia pola przez powierzchnię" znajdziecie po sformułowaniu Lematu 7.55 w skrypcie dziekana Strzeleckiego lub na stronie 220 skryptu Pana Krycha.

Zadanie 6. Niech $M = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{z} \geqslant 0\}$. Udowodnić, że zbiór M jest homeomorficzny z dwuwymiarową sferą. Czy M jest rozmaitość klasy C^1? Na M wybieramy orientację wyznaczoną przez zewnętrzny wektor normalny. Obliczyć strumień pola $\overrightarrow{F} = [\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \sqrt{z}]$ przez powierzchnię M.

Zadanie 7. Niech $M = \{(x,y,z) : (x-z)^2 + 4y^2 = (1-z)^2,\ 0 < z < 1\}$. Obliczyć strumień pola wektorowego $\overrightarrow{F} = [x, y-1, z+1]$ przez powierzchnię M, które orientację wyznacza $\operatorname{grad}((x-z)^2 + 4y^2 - (1-z)^2)$.

Rozwiązanie. *Niech* $G = \{(x,y,z) : (x-z)^2 + 4y^2 \leqslant (1-z)^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. *Wówczas* $M = \partial G$. *W tym przypadku gradient wyznacza nam zewnętrzny wektor normalny. Niech* $H(x,y,z) = (x-z)^2 + 4y^2 - (1-z)^2$. *Wobec tego jednostkowy wektor normalny zewnętrzny wyraża się wzorem:* $v = \frac{\operatorname{grad}(H(x,y,z))}{\|H(x,y,z)\|_2}$. *Szukanym wyrażniem jest*

$$\int_M < \overrightarrow{F}, v > d\sigma_2.$$

Z twierdzenia Gaussa o dywergencji możemy zamiast niego liczyć:

$$\int_G \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) d\lambda_3.$$

Teraz $\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = x + y - 1 + z + 1 = x + y + z$. *Zatem zajmujemy się całką*

$$\int_G (x+y+z) d\lambda_3 = \int_0^1 \left(\int_{(x,y):(x-z)^2+4y^2 \leqslant (1-z)^2} (x+y+z) dx dy \right) dz.$$

Policzmy całkę wewnętrzną za pomocą podstawienia $x = r\cos\alpha + z$, $y = \frac{r}{2}\sin\alpha$ (z jest ustalone). W tych współrzędnych nasz zbiór przyjmuje postać $\{(\alpha, r) : \alpha \in [-\pi, \pi], r \in [0, 1-z]\}$. Jakobian tego przekształcenia to $\frac{r}{2}$. Możemy zatem przystąpić do rachunków:

$$\int_{(x,y):(x-z)^2+4y^2 \leqslant (1-z)^2} (x+y+z)dxdy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1-z} (r\cos\alpha + z + \frac{r}{2}\sin\alpha)\frac{r}{2}d\alpha dr + z\lambda_2\left(\{(x,y) : (x-z)^2 + 4y^2 \leqslant (1-z)^2\}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}z(1-z)^2 + \frac{\pi}{2}(1-z)^2.$$

Pozostaje wyliczyć teraz całkę do końca:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-z^2)(1-z)dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-z-z^2+z^3)dz =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}.$$

Zadanie 8. Niech $\overrightarrow{F} = [yz, x^3z, e^z]$. Obliczyć strumień pola $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ przez powierzchnię boczną walca $x^2+y^2 = 1$, zawartą między płaszczyznami $2x+y+z = 2$ oraz $z = 5$, zorientowaną przez pole $[x, y, 0]$.

Rozwiązanie. *Znów mamy orientację wyznaczoną przez zewnętrzny wektor normalny. Niech W oznacza powierzchnię z treści zadania. Z klasycznego twierdzenia Stokesa mamy równość:*

$$\int_{\partial W} < F, \tau > d\sigma_1 = \int_W < \operatorname{rot}\overrightarrow{F}, v > d\sigma_2.$$

Tutaj v to wektor normalny zewnętrzny.

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = ((e^z)_y - (x^3z)_z, (yz)_z - (e^z)_x, (x^3z)_x - (yz)_y) = (-x^3, y, z(3x^2-1)).$$

τ to wektor jednostkowy styczny do ∂W, które jest sumą krzywych.

Zadanie 9. Obliczyć $\int_M [(1+\sin x)dy \wedge dz - y\cos x dx \wedge dz]$, gdzie

$$M = \left\{(x, y, z) : y^2 + z^2 = (1-\sin x)^2,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right\},$$

przy czym rozmaitość M jest zorientowana "na zewnątrz" tzn. dodatnio jako fragment brzegu obszaru $G = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 < (1-\sin x)^2,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}\}$.

Rozwiązanie. *Mamy orientację dodatnią, więc z twierdzenia Stokesa nasza całka wynosi:*

$$\int_G 2\cos x dx dy dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \left(\int_{y^2+z^2<(1-\sin x)^2} dydz\right) dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x(1-\sin x)^2 = \frac{\pi}{6}(7\sqrt{2} - 6).$$

Zadanie 10. Znaleźć strumień przepływu pola wektorowego $F(x,y,z) = (xze^{xy}, -yze^{xy}, z)$ przez powierzchnię

$$\{(x,y,z) : 5x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy - 2yz - 2zx = 89,\ z \geqslant 0\}$$

jest zorientowaną "na zewnątrz" (zewnętrznym wektorem normalnym w punkcie $(-1,-4,2)$ jest $\frac{1}{\sqrt{531}}(-11,-11,17)$).

Zadanie 11. Pole wektorowe $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$v(x,y,z) = [yz, 2xz, \operatorname{arc\,tg}(xyz)].$$

Obliczyć strumień pola wektorowego $w = \operatorname{rot} v$ przez powierzchnię

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 4\cos z - \cos^2 z = 4,\ |z| \leqslant \pi\},$$

której orientację wyznacza wektor $(1,0,0)$ prostopadły do $T_{(1,0,\pi)}M$.

Zadanie 12. Obliczyć całkę z formy różniczkowej

$$\omega = (x + y^2)dy \wedge dz + (y + z^2)dz \wedge dx + (z + x^2)dx \wedge dy$$

po zorientowanej powierzchni

$$M = \{(x,y,z) : (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2),\ y > 0\},$$

której strona dodatnia jest wyznaczona przez wektor $[0,1,0]$, prostopadły do M w punkcie $(0,3,0)$.

Rozwiązanie. *Trzeba sprawdzić, czy mamy do czynienia z orientacją dodatnią czy ujemną. Dokonamy tego sprawdzając, czy wektor $[0,1,0]$ jest normalnym wektorem zewnętrznym, czy wewnętrznym. Przede wszystkim musimy znaleźć G takie, że $\partial G = M$. Nietrudno stwierdzić, że*

$$G = \{(x,y,z) : (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 \leqslant 16(x^2 + y^2),\ y \geqslant 0\},$$

gdyż w przeciwnym wypadku nasz zbiór byłby nieograniczony. Aby rozwikłać kwestię orientacji "idziemy" z punktu $(0,3,0)$ zgodnie z wektorem $[0,1,0]$ i patrzymy, czy wychodzimy ze zbioru czy też nie. Wobec tego podstawiamy punkt postaci $(0, 3+\varepsilon, 0)$ i stwierdzamy, iż nie należy on do G, czyli rozpatrujemy orientację dodatnią. Niech ω oznacza formę, którą mamy całkować. Liczymy jej różniczkę zewnętrzną:

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3dx \wedge dy \wedge dz.$$

Zatem z twierdzenia Stokesa:

$$\int_M \omega = \int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega = 3\lambda_3(G).$$

Teraz zauważamy, że G to pełny torus i stosujemy regułę Pappusa-Guldina.

Zadanie 13. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ danych jest pięć punktów $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $D = (1,1,0)$, $E = (1,1,1)$. Rozważamy powierzchnię wielościenną, utworzoną przez trójkąty ADE, DBE, BCE i CAE (rozmaitość z kantami). Niech $\overrightarrow{F} = [xz, -yz, \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}]$. Obliczyć przepływ pola $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F})$ przez tę powierzchnię, ze strony ujemnej ("widocznej" z punktu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) na dodatnią.

Zadanie 14. Niech $U = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 > 0\}$, $H_t = \{x^2 + y^2 - z^2 = t\}$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Znaleźć taką 2-formę różniczkową ω na U, że jeśli $p \in H_t$, $v, w \in T_pH_t$, to $|\omega(v,w)|$ jest polem równoległoboku rozpiętego przez wektory v i w. Obliczyć całkę $\int_G d\omega$, gdzie

$$G = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 < z^2 \text{ i } 0 < z < 1\}.$$

Rozwiązanie. *Zaczynamy od znalezienia T_pH_t dla $p = (x,y,z) \in H_t$. Ponieważ H_t jest zadane jako poziomica, to przestrzeń styczną znajdumy łatwo jako jądro różniczki funkcji $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$:*

$$T_pH_t = \operatorname{lin}((z,0,x),(0,z,y)) \quad \textit{dla } z \neq 0,$$
$$T_pH_t = \operatorname{lin}((y,-x,0),(0,0,1)) \quad \textit{dla } z = 0.$$

Liczymy teraz iloczyn wektorowy wektorów z bazy dla $z \neq 0$:

$$(z,0,x) \times (0,z,y) = (-xz, -yz, z^2).$$

Jego długość to

$$\|(-xz,-yz,z^2)\|_2 = \sqrt{xz^2 + yz^2 + z^4} = |z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Jak pamiętamy z geometrii długość iloczynu wektorowego $v \times w$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez wektory v i w. Wzorując się na Uwadze 12.47 ze skryptu Pana Krycha szukamy funkcji $a, b, c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takich, że

$$(a,b,c) \cdot (-xz, -yz, z^2) = z\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Po krótkim natężeniu dostrzegamy rozwiązanie i wobec tego nasza forma prezetuje się następująco:

$$\omega = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy \wedge dz - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz \wedge dx + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx \wedge dy.$$

Powinniśmy jeszcze sprawdzić, że to działa dla drugiego przypadku (pomijamy). Zwracamy uwagę, że ta forma jest dobrze określona i gładka na U, a także na G. Z twierdzenia Stokesa

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega.$$

Zauważmy, że G jest stożkiem, a więc ∂G to powierzchnia boczna stożka oraz podstawa. Zgodnie z uwagą 12.47 dostajemy wobec tego pole tych dwóch obszarów, czyli: $\sqrt{2}\pi + \pi$.

Zadanie 15. Obliczyć całką z 2-formy

$$\omega = (y^2 - x^2)dy \wedge dz + (z - x)dz \wedge dx + (2xz - y)dx \wedge dy$$

po powierzchni S w wyniku obrotu cykloidy opisanej parametrycznie:

$$x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 0,\ z(t) = 1 - \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

wokół prostej $x = \pi$, $y = 0$ (w punkcie $(\pi, 0, 2)$ wektorem orientującym S jest $[0, 0, 1]$).

Zadanie 16. Niech S^2 oznacza sferę $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, przy czym orientację przestrzeni stycznej $T_{(0,0,1)}$ wyznacza para wektorów (e_1, e_2). Niech

$$\omega(x, y, z) = \frac{(x - 2)dy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{\left(\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2}\right)^3}.$$

Znaleść $\int_{S^2} \omega(x, y, z)$ oraz $\int_M \omega(x, y, z)$, gdzie $M = \{(x, y, z) : (x-2)^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Rozwiązanie. *Po wykonaniu rachunków sprawdzamy, że* $d\omega = 0$*, czyli z twierdzenia Stokesa* $\int_{S^2} \omega(x, y, z) = \int_{B(0,1)} d\omega = 0$*, bo* ω *jest gładką formą na otoczeniu* $B(0, 1)$*.*
W drugim przypadku nie możemy zastosować twierdzenia Stokesa, bo mamy osobliwość (punkt $(2, 0, 0)$ *należy do* M*). Niech wobec tego* $\varphi(\alpha, \beta) = (2 + \cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$ *dla* $\alpha \in (-\pi, \pi)$*,* $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *będzie parametryzacją* M*. Liczymy* $\varphi^*\omega$*:*

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega &= \cos\alpha\cos\beta d(\sin\alpha\cos\beta) \wedge d(\sin\beta) + \sin\alpha\cos\beta d(\sin\beta) \wedge d(2 + \cos\alpha\cos\beta)\\
&+ \sin\beta d(2 + \cos\alpha\cos\beta) \wedge d(\sin\alpha\cos\beta) =\\
&= \cos\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta d\alpha - \sin\alpha\sin\beta d\beta) \wedge (\cos\beta d\beta) +\\
&+ \sin\alpha\cos\beta(\cos\beta d\beta) \wedge (-\sin\alpha\cos\beta d\alpha - \cos\alpha\sin\beta d\beta) +\\
&+ \sin\beta\,(-\sin\alpha\cos\beta d\alpha - \cos\alpha\sin\beta d\beta) \wedge (\cos\alpha\cos\beta d\alpha - \sin\alpha\sin\beta d\beta) =\\
&= \left(\cos^2\alpha\cos^3\beta + \sin^2\alpha\cos^3\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta\cos\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta\cos\beta\right) d\alpha \wedge d\beta =\\
&= (\cos^3\beta + \sin^2\beta\cos\beta)d\alpha \wedge d\beta = \cos\beta d\alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

Wystarczy wobec tego policzyć prostą całkę:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\beta d\alpha d\beta = 4\pi.$$

Zadanie 17. Niech S^+ oznacza półsferę $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}$, przy czym orientację przestrzeni stycznej $T_{(0,0,1)}$ wyznacza para wektorów (e_1, e_2), a orientację przestrzeni $T_{(0,0,0)}$ stycznej do koła $D^+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ wyznacza para wektorów $(-e_1, e_2)$.
Znaleźć $\int_{D^+} ((x + y)dy \wedge dz + (y + z)dz \wedge dx + (1 - 2z)dx \wedge dy)$.
Znaleźć $\int_{S^+} ((x + y)dy \wedge dz + (y + z)dz \wedge dx + (1 - 2z)dx \wedge dy)$.

Rozwiązanie. *W drugim przypadku mamy do czynienia z orientacją dodatnią. Niech ω będzie formą występującą w zadaniu. Liczymy jej różniczkę zewnętrzną:*

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx - 2dz \wedge dx \wedge dy = 0.$$

Zatem z twierdzenia Stokesa druga całka wynosi zero.
W pierwszym przypadku mamy orientację ujemną. Niech $\varphi(r, \alpha) = (r\cos\alpha, -r\sin\alpha, 0)$ dla $\alpha \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$ będzie parametryzacją D^+. Liczymy $\varphi^*\omega$:

$$\varphi^*\omega = 1\,(d(r\cos\alpha) \wedge d(-r\sin\alpha)) =$$
$$(\cos\alpha dr - r\sin\alpha d\alpha) \wedge (-\sin\alpha dr - r\cos\alpha d\alpha) =$$
$$= -r\cos^2\alpha dr \wedge d\alpha + r\sin^2\alpha d\alpha \wedge dr = -rdr \wedge d\alpha.$$

Zatem nasza całka wynosi

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 -rdrd\alpha = -\pi.$$

Zadanie 18. Niech $v(x, y, z) = (x^2, x+y, y-x)$ oraz $w(x, y, z) = (yz, y-z, xz)$ dla każdego punktu $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dla dowolnego wektora u zaczepionego w punkcie (x, y, z) określamy liczbę $\eta(u) = \det(u, v, w)$.

1. Wykazać, że przyporządkowanie η zadaje jednoformę na $\mathbb{R}^3$.
2. Obliczyć $d\eta$.
3. Obliczyć całkę z $d\eta$ po zbiorze $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$. Orientację w punkcie $(1, 0, 0)$ wyznacza wektor $(1, 0, 0)$.

Zadanie 19. Znaleźć $\int_M \omega$, gdzie powierzchnia

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \exp(-z^2),\ 0 < z < 1\}$$

jest rozpatrywana z orientacją "na zewnątrz" oraz

$$\omega = xdy \wedge dz + y^4 f'(z)dx \wedge dz + (z^2 + 4y^3 f(z))dx \wedge dy,$$

gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką.

Rozwiązanie. *Po wykonaniu prostego rachunku przekonujemy się, że $d\omega = (1 - 2z)dx \wedge dy \wedge dz$. Podejrzewamy, że zbiorem G o własności $\partial G = M$ jest $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant \exp(-z^2),\ 0 < z < 1\}$. Wobec tego z twierdzenia Stokesa liczymy:*

$$\int_M \omega = \int_G d\omega = \int_G (1 - 2z)dxdydz.$$

Rozsądnie będzie podstawić współrzędne: $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $z = h$, w których nasz zbiór ma postać $\{(r, \alpha, h) : r \in [0, \exp(-h^2)], \alpha \in [-\pi, \pi], h \in (0, 1)\}$. Jakobian takiego przekształcenia wynosi r, więc możemy liczyć:

$$\int_G (1 - 2z)dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\exp(-h^2)} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 2h)rd\alpha drdh = \pi \cdot \int_0^1 (1 - 2h)\exp(-h^4)dh =$$
$$=$$

Był błąd w definicji ω i wynik wychodzi całkiem ładny (polecam obejrzeć nagranie).