GEOMETRIA Z ALGEBRĄ LINIOWĄ I

Marysia Nazarczuk

Ćwiczenia 1

Układy równań liniowych

Niewiadome zazwyczaj oznaczać będziemy jako $x_1, x_2, \dots$.

Zadanie 1.
Znaleźć rozwiązanie (lub rozwiązania)

a) $2x_1 + 5 = 0$

b) $3x_1 + x_2 = 6$

c) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1 \\ 2x_2 + 9x_2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 1 \\ -12x_1 = 6x_2 = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ 6x_1 + 15x_2 = 4 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) $2x_1 + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{5}{2}$

b) $3x_1 + x_2 = 7 \Leftrightarrow x_2 = 7 - 3x_1$ Ogólenie rozwiązania tego równania są to pary liczb: $(s, -3s+7)$, gdzie $s \in \mathbb{R}$ jest parametrem.

c) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1 \\ 2x_2 + 9x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 = 2 \\ 2x_2 + 9x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = -11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 1 \\ -12x_1 = 6x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = -2x_1 + \frac{1}{3}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ 6x_1 + 15x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ 0 = -5 \end{cases}$

Zadanie 2.
Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$U_1 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 17x_4 = 5 \end{cases} \quad U_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 + 10x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 3 \end{cases}$$

$$U_3 = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 16x_4 = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Macierzą układu równań U_1 nazywamy macierz współczynników

$$M_{U_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 9 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 17 & 5 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - operacje elementarne na wierszach

1. Można do równania dodać inne równanie pomnożone przez jakąś liczbę
2. Można zmienić kolejność wierszy w macierzy
3. Można każdy wiersz przemnożyć przez jakąkolwiek liczbę różną od 0

Definicja: Macierz postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots\dots & * \\ 0 & \dots\dots & 0 & * & \dots & * \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 0 & * \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą schodkową.

Sprowadzamy macierz do postaci schodkowej operacjami elementarnymi na wierszach

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 9 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 17 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_1 \\ -4w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja: Macierz postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots\dots & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą schodkową zredukowaną.

Sprowadźmy macierz do postaci schodkowej zredukowanej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2w_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tej macierzy odpowiada układ równań (o takim samym zbiorze rozwiązań)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 + 1 \end{cases}$$

Otrzmaliśmy więc rozwiązanie ogólne układu U_1. x_1 i x_2 to zmienne zależne (niewiadome). Inny zapis to $(3x_3 - 2x_4 - 1, -2x_3 - x_3 + 1, x_3, x_4)$, gdzie x_3 i x_4 to parametry rozwiązania (zmienne niezależne).

Macierzą układu U_2 jest

$$M_{U_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 10 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -3w_1 \\ -2w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3w_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tej macierzy odpowiada układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + 13x_5 = -2 \\ x_3 + x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 - 13x_5 - 2 \\ x_3 = -x_4 + 3x_5 + 1 \end{cases}$$

Jest to rozwiązanie ogólen układu U. Inny zapis $(-x_2 + x_4 - 13x_5 - 2, x_2, -x_4 + 3x_5 + 1, x_4, x_5$. Zmienne x_1 i x_3 to zmienne zależne, natomiast zmienne x_2, x_4 i x_5 to zmienne niezależne.

Twierdzenie: Każdą macierz liczbową złożoną z liczb rzeczywistych można sprowadzić elementarnymi operacjami do postaci schodkowej, a nawet do postaci schodkowej zredukowanej.

Macierzą układu U_3 jest

$$M_{U_3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 8 & 1 \\ 8 & 12 & 5 & 16 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_1 \\ -4w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 40 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 40 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Ostatni wiersz daje równanie $0 = -8$, co oczywiście jest sprzeczne, zatem cały układ jest sprzeczny.

Twierdzenie: Jeżeli przy sprowadzaniu macierzy układu równań liniowych U do postaci schodkowej (zredukowanej) pojawi się wiersz $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b \end{bmatrix}$ dla $b \neq 0$ (odpowiadający równaniu $0 = b$), to układ U jest sprzeczny.

Ćwiczenia 2

Własność zbioru rozwiązań układu równań liniowych

Zadanie 1.
Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań w zależności od $\mathbb{R}$.

$$U_A = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 13x_4 = s \end{cases} \qquad U_B = \begin{cases} sx_1 + x_2 + x_3 = s - 1 \\ x_1 + sx_2 + x_3 = 1 - s \\ x_1 + x_2 + sx_3 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Macierzą układu U_A jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 13 & s \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_1 \\ -4w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & s-4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_1 \\ -4w_1 \end{matrix}$$

Układ jest więc sprzeczny dla $s \neq 5$. Dla $s = 5$ mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2w_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 10 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tej macierzy odpowiada układ równań

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 10x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 10x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 + 1 \end{cases}$$

Macierzą układu U_B jest

$$\begin{bmatrix} s & 1 & 1 & s-1 \\ 1 & s & 1 & 1-s \\ 1 & 1 & s & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_3 \\ \\ w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 1 & s & 1 & 1-s \\ s & 1 & 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -sw_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 0 & s-1 & 1-s & 1-s \\ 0 & 1-s & 1-s^2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +w_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 0 & s-1 & 1-s & 1-s \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 0 & s-1 & 1-s & 1-s \\ 0 & 0 & (s+2)(s-1) & 0 \end{bmatrix}$$

Dla $s = 1$ macierz ta wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem rozwiązanie ogólne to

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

Dla $s \neq 1$ macierz wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 0 & s-1 & 1-s & 1-s \\ 0 & 0 & (s+2)(s-1) & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{s-1} \\ \cdot\frac{1}{s-1} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (s+2) & 0 \end{bmatrix}$$

Dla $s = -2$ macierz wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (s+2) & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -w_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne to

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 - 1 \end{cases}$$

Dla $s \neq -2$ macierz wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (s+2) & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -w_2 \\ \\ \cdot\frac{1}{s+2} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & s+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -(s+1)w_3 \\ +w_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne to

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.
$(1, 2, 4, 1)$ oraz $(3, 6, 12, 3)$ są rozwiązaniami układu równań liniowych. Wykaż, że $(0, 0, 0, 0)$ też jest rozwiązaniem układu U.

Rozwiązanie:
Każde równanie układu U jest postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$. Skoro $(1, 2, 4, 1)$ i $(3, 6, 12, 3)$ je spełniają, to

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 4 + a_4 \cdot 1 = b & (r_1) \\ a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 6 + a_3 \cdot 12 + a_4 \cdot 3 = b & (r_2) \end{cases}$$

czyli mamy $r_2 - 3 \cdot r_1 = 0 \Leftrightarrow b - 3b = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Zatem każde równanie ma wyraz $b = 0$, czyli U jest układem jednorodnym, czyli $(0, 0, 0, 0)$ go spełnia.

Twierdzenie: Układ równań liniowych U jest jednorodny wtedy i tylko wtedy gdy $(0, \ldots, 0)$ jest jego rozwiązaniem.

Ogólenie, jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu U i $(c \cdot s_1, \ldots, c \cdot s_n)$, gdzie $c \neq 1$ jest też rozwiązaniem układu U, to układ U jest jednorodny.

Definicja:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$s \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (s \cdot x_1, \ldots, s \cdot x_n)$$

Zadanie 3.
$(3,6,9,12)$ oraz $(6,3,9,6)$ są rozwiązaniami układu równań liniowych U. Wykazać, że $(5,4,9,8)$ też jest rozwiązaniem.

Rozwiązanie:
Każde równanie układu U jest postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$. Skoro $(3,6,9,12)$ oraz $(6,3,9,6)$ je spełniają, to

$$\begin{cases} 3a_1 + 6a_2 + 9a_3 + 12a_4 = b & | \cdot \frac{1}{3} \\ 5a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 6a_4 = b & | \cdot \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = \frac{b}{3} \\ 4a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 = \frac{2b}{3} \end{cases}$$

czyli $5a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 8a_4 = b$. Stąd $(5,4,9,8)$ też jest rozwiązaniem.

Zadanie 4.
$(s_1,\ldots,s_n)$ oraz $(t_1,\ldots,t_n)$ są rozwiązaniami układu U. Co stąd wynika?

Rozwiązanie:
Jeśli $(s_1,\ldots,s_n)$ oraz $(t_1,\ldots,t_n)$ są rozwiązaniami układu równań liniowych U, to dla każdego $r \in \mathbb{R}$ $r \cdot (s_1,\ldots,s_n) + (1-r) \cdot (t_1,\ldots,t_n)$ też jest rozwiązaniem układu U.

Zadanie 5.
Dany jest układ równań liniowych U taki, że $S_1 = (s_{11},\ldots s_{1n}), S_2 = (s_{21},\ldots,s_{2n}),\ldots,S_k = (s_{k1},\ldots,s_{kn})$ są jego rozwiązaniami. Wykaż, że dla każdych $a_1,a_2,\ldots,a_k \in \mathbb{R}$ takich że $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$, ciąg $a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 + \ldots + a_k \cdot S_k$ też jest rozwiązaniem układu U.

Rozwiązanie:
Weźmy jedno równanie układu U $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = b$ i wstawmy do niego rozwiązania.

$$\begin{cases} p_1s_{11} + \ldots + p_ns_{1n} = b \\ \vdots \\ p_1s_{k1} + \ldots + p_ns_{kn} = b \end{cases}$$

Przemnóżmy i-te równanie przez a_i

$$\begin{cases} a_1p_1s_{11} + \ldots + a_1p_ns_{1n} = a_1b \\ \vdots \\ a_kp_1s_{k1} + \ldots + a_kp_ns_{kn} = a_kb \end{cases}$$

Po dodaniu stronami tych równań mamy $p_1(a_1s_{11} + \ldots + a_ks_{k1}) + \ldots + p_n(a_1s_{1n} + \ldots + a_ks_{ln}) = b$, czyli otrzymaliśmy kolejne rozwiązanie $(a_1s_{11}+\ldots+a_ks_{k1},\ldots,a_1s_{1k}+\ldots+a_ks_{kn}) = a_1S_1+\ldots a_kS_k$.

Ćwiczenia 3

Własność zbioru rozwiązań układu równań liniowych

Zadanie 1.
Znaleźć wszystkie wielomiany $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ spełniające $f(1) = 11, f(-1) = 5, f(2) = 35, f(-2) = -1$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu za x odpowiednich wartości do wielomianu otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 11 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 5 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 35 \\ a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = -1 \end{cases}$$

Macierz tego układu to

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 35 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 24 \\ 0 & -3 & 3 & -9 & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 24 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_2 \\ -w_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot\left(\frac{1}{3}\right) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -w_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} -w_2 \\ \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_4 \\ -2w_4 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -w_3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tej macierzy odpowiada układ równań

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 2 \end{cases}$$

Stąd $f(x) = 5 + x + 3x^2 + 2x^3$.

Zadanie 2.
Czy układ siedmiu równań z jedenastoma niewiadomymi może mieć jednoznaczne rozwiązanie?

Rozwiązanie:
Nie, bo sprowadzając macierz tego układu do postaci schodkowej zredukowanej, otrzymujemy macierz o k niezerowych wierszach, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd rozwiązanie ogólne ma k zmiennych zależnych, czyli $n - k$ parametrów. Ale $k \leq 7 \Rightarrow 11 - k > 0$.

Zadanie 3.
Czy każdy układ w którym jest więcej równań niż niewiadomych jest sprzeczny?

Rozwiązanie:
Nie, bo w układzie możemy mieć kilka takich samych równań.

Zadanie 4.
Czy w przypadku układu jednorodnego można powiedzieć więcej niż $\forall_{r\in\mathbb{R}}\ r(s_1,\ldots,s_n)+(1-r)(t_1,\ldots,t_n)$ jest rozwiązaniem, gdy $(s_1,\ldots,s_n)$ i $(t_1,\ldots,t_n)$ to rozwiązania?

Rozwiązanie:
Tak, mianowicie dla każdych $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ rozwiązaniem jest też $k_1\cdot(s_1,\ldots,s_n)+k_2\cdot(t_1,\ldots,t_n)$. Ogólnie dla dowolnych rozwiązań $S_1=(s_{11},\ldots,s_{1n}),\ldots,(s_{r1},\ldots,s_{rn})$ układu U jednorodnego, dla każdych $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{R}$ rozwiązaniem jest też $k_1S_1+\ldots+k_rS_r$.

Zadanie 5.
Układ niesprzczny równań liniowych U ma własność: jeżeli $(s_1,\ldots,s_n)$ oraz $(t_1,\ldots,t_n)$ są rozwiązaniami, to dla każdych $a,b\in\mathbb{R}$ rozwiązaniem jest też $a\cdot(s_1,\ldots,s_n)+b\cdot(t_1,\ldots,t_n)$. Co można powiedzieć o U?

Rozwiązanie:
Układ U jest jednorodny, bo biorąc $a=b=0$ dostajemy rozwiązanie $(0,\ldots,0)$. Ale wiemy, że U jest jednorodny wtedy i tylko wtedy gdy $(0,\ldots,0)$ jest jego rozwiązaniem.

Zadanie 6.
W $\mathbb{R}^n$ rozpatrzmy $W_1\subset\mathbb{R}^n$ będący zbiorem wszystkich rozwiązań układu

$$U_1=\begin{cases} x_1=x_2\\ x_2=x_3\\ \quad\vdots\\ x_{n-1}=x_n\end{cases}$$

oraz $W_2\subset\mathbb{R}^n$ będący zbiorem wszystkich rozwiązań równania $U_2=\{x_1+x_2+\ldots+x_n=0$. Wykazać, że dla każdych $(x_1,\ldots,x_n)$ istnieją jednoznaczne $(t_1,\ldots,t_n)\in W_1$, $(s_1,\ldots,s_n)\in W_2$, takie że $(x_1,\ldots,x_n)=(t_1,\ldots,t_n)+(s_1,\ldots,s_n)$.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że takie s_i,t_i istnieją. Niech $x_1+\ldots+x_n=c$. Wiemy, że $s_1+\ldots+s_n=0$, bo spełniają U_2, zatem $t_1+\ldots+t_n=c$. Możemy zapisać, że $t_1=t_2=\ldots=t_n=a$, bo spełniają U_1. Zatem $n\cdot a=c$, skąd $a=\frac{c}{n}$. Dla każdego $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ mamy $s_i=x_i-t_i=x_i-\frac{c}{n}$, zatem s_i jest jednoznacznie wyznaczone. Pozostaje pytanie, czy t_i oraz s_i istnieją. Niech $(t_1,\ldots,t_n)=\left(\frac{c}{n},\ldots,\frac{c}{n}\right)$ oraz $(s_1,\ldots,s_n)=\left(x_1-\frac{c}{n},\ldots,x_n-\frac{c}{n}\right)$. Mamy $(t_1,\ldots,t_n)\in W_1$, bo spełnia układ W_1. Sprawdzamy, że tak zdefiniowane $(s_1,\ldots,s_n)$ należy do W_2. Mamy $s_1+\ldots+s_n=x_1+x_2+\ldots+x_n-n\cdot\frac{c}{n}=c-c=0$, zatem $(s_1,\ldots,s_n)\in W_2$.

Teraz umiemy już rozwiązywać układy równań, czyli sprowadzać macierze do postaci schodkowej lub do postaci schodkowej zredukowanej. Dalej będziemy pomijać ten proces.

Ćwiczenia 4

Ciała

Przykład ciała: $\mathbb{R}$ - ciało liczb rzeczywistych.

Uwaga: Jeżeli K to ciało, to L nazywamy podciałem K jeżeli $L \subset K$ oraz $\forall_{a,b\in L}$ mamy $a+b \in L$, $a \cdot b \in L$, $-a \in L$ oraz gdy $a \neq 0$, to $a^{-1} \in L$. Wtedy L też jest ciałem.

Zadanie 1.
Dla danego podzbioru $X \subset \mathbb{R}$ zbadaj, czy jest on podciałem ciała $\mathbb{R}$.

a) $X = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

b) $X = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

c) $X = \mathbb{Q}$

d) $X = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Rozwiązanie:

a) Nie, bo $\forall_{a\in\mathbb{N}} \ -a \notin \mathbb{N}$

b) Nie, bo $\forall_{a\in\mathbb{Z}}\ a^{-1} \notin \mathbb{Z}$

c) Tak, bo $\forall_{a,b\in\mathbb{Q}}\ a+b \in \mathbb{Q},\ a\cdot b \in \mathbb{Q}$ oraz $\forall_{a\in\mathbb{Q}} \ -a \in \mathbb{Q},\ a^{-1} \in \mathbb{Q}$ (ostatnie zachodzi o ile $a \neq 0$)

d) Tak, bo: niech $a = c + d\sqrt{2}$ i $b = r + s\sqrt{2}$ dla $c, d, r, s \in \mathbb{Q}$. Czy $a + b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Tak, bo $a + b = c + d\sqrt{2} + r + \sqrt{2} = (c + r) + (d + s)\sqrt{2}$. Czy $a \cdot b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Tak, bo $a \cdot b = (c + d\sqrt{2}) \cdot (r + \sqrt{2}) = cr + \sqrt{2}(dr + sc) + 2rs = (cr + 2rs) + (rd + cs)\sqrt{2}$. Czy $-a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Tak, bo $-a = -(c+d\sqrt{2}) = (-c)+(-d)\sqrt{2}$. Czy $a^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Niech $a \neq 0$, wówczas $a^{-1} = \frac{1}{c+\sqrt{2}} = \frac{1}{c+d\sqrt{2}} \cdot \frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}} = \frac{c-d\sqrt{2}}{c^2-2d^2} = \left(\frac{c}{c^2-2d^2}\right) + \left(\frac{-d}{c^2-2d^2}\right)\sqrt{2}$. Ponadto $c^2 - 2d^2 \neq 0$, bo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 2.
Niech L będzie podciałem $(\{0, 1\} \in L)$ ciała $\mathbb{R}$. Wykaż, że $\mathbb{Q} \subset L$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że $0, 1 \in L$, zatem $1 + 1 = 2 \in L,\ 2 + 1 = 3 \in L, \ldots$ (indukcja), czyli $\mathbb{N} \subset L$. Mamy $\forall_{a\in L} \ -a \in L$, zatem $\mathbb{Z} \subset L$. Mamy $\forall_{a\in L,\ a\neq 0,\ b\in L}\ a^{-1} \cdot b \in L$, zatem $\mathbb{Q} \subset L$.

Zadanie 3.
Niech L będzie podciałem ciała $\mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli $\sqrt{3} \in L$, to $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset L$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że $\mathbb{Q} \subset L$ oraz $\sqrt{3} \in L$. Niech $x \in \mathbb{Q}$, wówczas $x\sqrt{3} \in L$. Niech $y \in \mathbb{Q}$, wówczas $y + x\sqrt{3} \in L$. Wobec dowolności x i y wynika stąd, że $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset L$.

Definicja: Niech $n \in L$ i $n \geq 2$. Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $k \mod n$ oznacza resztę z dzielenia k przez n, czyli taką liczbę $s \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, że $k = p \cdot n + s$ dla pewnego p.

Zadanie 4.
Oblicz $11 \mod 6$, $-4 \mod 3$, $-12 \mod 7$.

Rozwiązanie:

$$11 \mod 6 = 5, \text{ bo } 11 = 1 \cdot 6 + 5$$
$$-4 \mod 3 = 2, \text{ bo } -4 = -2 \cdot 3 + 2$$
$$-12 \mod 7 = 2, \text{ bo } -12 = -2 \cdot 7 + 2$$

Definicja: Niech p będzie liczbą pierwszą. Wówczas $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ to ciało z działaniami: dla $a, b \in \mathbb{F}_p \ : \ a \oplus b = (a+b) \mod p$ oraz $a \otimes b = (a \cdot b) \mod p$.

Zadanie 5.
W $\mathbb{F}_5$ obliczyć $4 \oplus 3$, $4 \otimes 3$, -3, 4^{-1}.

Rozwiązanie:

$$4 \oplus 3 = (4+3) \mod 5 = 7 \mod 5 = 2$$
$$4 \otimes 3 = (4 \cdot 3) \mod 5 = 12 \mod 5 = 2$$
$$-3 = (-3) \mod 5 = 2, \text{ bo } -3 = -1 \cdot 5 + 2$$
$$4^{-1} = 4, \text{ bo } 4 \otimes 4 = (4 \cdot 4) \mod 5 = 16 \mod 5 = 1$$

Zadanie 6.
Sprawdzić, czy $\mathbb{F}_p$ jest ciałem.

Rozwiązanie:

- $\forall_{a,b \in \mathbb{F}_p} \ a \oplus b = (a+b) \mod p = (b+a) \mod p = b \oplus a$
- $\forall_{a,b \in \mathbb{F}_p} \ a \otimes b = (a \cdot b) \mod p = (b \cdot a) \mod p = b \otimes a$
- $\forall_{a,b,c \in \mathbb{F}_p} \ (a \oplus b) \oplus c = (a+b) \mod p \oplus c = [(a+b) \mod p + c] \mod p = [((a+b) \mod p) \mod p + c \mod p] \mod p = [(a+b) \mod p + c \mod p] \mod p = (a+b+c) \mod p$. Analogicznie $a \oplus (b \oplus c) = (a+b+c) \mod p$
- $\forall_{a \in \mathbb{F}_p} \ a \oplus 0 = (a+0) \mod p = a \mod p = a$
- $\forall_{a \in \mathbb{F}_p} \ a \otimes 1 = (a \cdot 1) \mod p = a \mod p = a$
- $\forall_{a,b,c \in \mathbb{F}_p} \ (a \otimes b) \otimes c = (a \cdot b) \mod p \otimes c = [(a \cdot b) \mod p \cdot c] \mod p = [((a \cdot b) \mod p) \mod p \cdot c \mod p] \mod p = [(a \cdot b) \mod p \cdot c \mod p] \mod p = (a \cdot b \cdot c) \mod p$. Analogicznie $a \otimes (b \otimes c) = (a \cdot b \cdot c) \mod p$

- $\forall_{a\in\mathbb{F}_p}\ \exists_{b\in\mathbb{F}_p}$, że $a\oplus b=0$, bo niech $b=p-a$. Wówczas $a\oplus b=a\oplus(p-a)=(a+p-a)\mod p=p\mod p=0$ (dla ciała dowolnego p)

- Pokażemy najpierw, że $(a+b)\mod p=(a\mod p+b\mod p)\mod p$. Weźmy takie a i b, ze $a=p\cdot n_1+r_1$ oraz $b=p\cdot n_2+r_2$. Wówczas $(a+b)\mod p=[p\cdot(n_1+n_2)+r_1+r_2]\mod p=(r_1+r_2)\mod p=(a\mod p+b\mod p)\mod p$. Zatem mamy $\forall_{a,b,c\in\mathbb{F}_p}\ a\otimes(b\oplus c)=a\otimes(b+c)\mod p=(a\cdot(b+c)\mod p)\mod p=[a\mod p\cdot((b+c)\mod p)\mod p]\mod p=[a\mod p\cdot(b+c)\mod p]\mod p=a\cdot(b+c)\mod p=(ab+ac)\mod p=(ab\mod p+ac\mod p)\mod p=ab\mod p\oplus ac\mod p=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

- $\forall_{a\in\mathbb{F}_p,a\neq 0}\ \exists_{b\in\mathbb{F}_p}$ takie, że $a\otimes b=1$, bo niech $a\in\{1,2,3,\ldots,p-1\}$. Rozpatrzmy funkcję $f:\{0,1,\ldots,p-1\}\to\{0,1,\ldots,p-1\}$ taką, że $f(x)=a\otimes x$. Wykażemy, że f jest różnowartościowa i "na", czyli istnieje takie $s\in\{0,1,\ldots,p-1\}$ takie że $f(s)=1$. Niech $x,y\in\mathbb{F}_p$. Przypuśćmy, że $a\otimes x=a\otimes y$. Wtedy $a\otimes x-a\otimes y=0$, więc $a\otimes(x\oplus(-y))=0$, czyli $a\cdot(x-y)\mod p=0$. Stąd p dzieli $a\cdot(x-y)$, czyli p dzieli $x-y$, ponieważ p nie dzieli a. Stąd $x-y=0\Leftrightarrow x=y$, zatem ta funkcja jest różnowartościowa i "na".

Wykazaliśmy więc, że w $\mathbb{F}_p$ zachodzą warunki z definicji ciała, zatem $\mathbb{F}_p$ jest ciałem.

Zadanie 7.
Oblicz w $\mathbb{F}_7$: 1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}, 6^{-1}.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
1^{-1}&=1,\text{ bo } 1\cdot 1\mod 7=1\\
2^{-1}&=4,\text{ bo } 2\cdot 4\mod 7=1\\
3^{-1}&=5,\text{ bo } 3\cdot 5\mod 7=1\\
4^{-1}&=2,\text{ bo } 4\cdot 2\mod 7=1\\
5^{-1}&=3,\text{ bo } 5\cdot 3\mod 7=1\\
6^{-1}&=6,\text{ bo } 6\cdot 6\mod 7=1
\end{aligned}$$

Definicja: Niech n będzie dowolną liczbą naturalną większą od 2. Niech $\mathbb{Z}_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$. Wówczas $a\oplus b=(a+b)\mod n$ oraz $a\otimes b=(a\cdot b)\mod n$.

Uwaga: $\mathbb{Z}_n$ z tymi działaniami spełnia wszystkie aksjomaty z wyjątkiem ostatniego ($a\otimes b=1$).

Zadanie 8.
W $\mathbb{Z}_4$ podać $a\in\mathbb{Z}_4$ takie, że nie istnieje $b\in\mathbb{Z}_4$, że $a\otimes b=1$.

Rozwiązanie:
Dla $a=2$ zachodzi $2\otimes 0=0$, $2\otimes 1=2$, $2\otimes 2=0$, $2\otimes 3=2$.

Ćwiczenia 5

Liczby zespolone

Definicja: Mówimy, że ciało K ma charakterystykę skończoną, jeśli istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = 0$. Jeżeli takie n nie istnieje, to mówimy, że K ma charakterystykę 0. Dla danego K minimalne n takie, że $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = 0$ nazywa się charakterystyką ciała K. Oznaczamy $\chi(K)$.

Zadanie 1.
Udowodnij, że jeśli $\chi(K) < \infty$, to $\chi(K)$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:
Niech $n = k_1 \cdot k_2$, przy czym $k_1, k_2 \neq 1$. Wówczas

$$0 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k_1 \cdot k_2} = \underbrace{\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k_1} + \ldots + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k_1}}_{k_2} = \left(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k_1} \right) \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2$$

Definicja: Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, dla których $(0, 1) = i$. W tym ciele zachodzą działania:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ac + bc)$
- $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

Zadanie 2.
Niech $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$. Znaleźć wzór na z^{-1}, czyli znaleźć takie x i y, że $(a + bi) \cdot (x + yi) = 1$.

Rozwiązanie:
Mamy $(a+bi)(x+yi) = 1 \Leftrightarrow ax + ayi + bxi + byi^2 = 1 \Leftrightarrow (ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0 \cdot i$. Zatem

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} y = -\frac{bx}{a}$$

1° dla $a \neq 0$ mamy $ax + \frac{b^2 x}{a} = 1 \Leftrightarrow a^2 x + b^2 x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a^2+b^2}$ oraz $y = -\frac{b}{a^2+b^2}$.
2° dla $a = 0$ mamy $x = 0$ i $y = -\frac{1}{b}$ o ile $b \neq 0$
3° jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to $z = 0$, więc nie istnieje odwrotność.
Ogólnie

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

Zadanie 3.
Czy w $\mathbb{C}$ istnieje porządek rozszerzający porządek w $\mathbb{R}$ i spełniający: $a \leq b$ i $c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$ lub $a \leq b$ i $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$?

Rozwiązanie:
Nie. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a \leq b$. Załóżmy, że $i > 0$. Wówczas $ai \leq bi$ oraz $ai^2 \leq bi^2$. Ale przecież $ai^2 = -a$ oraz $bi^2 = -b$, czyli mamy $-a \leq -b \Leftrightarrow a \geq b$ - sprzeczność. Załóżmy, że $i < 0$. Wówczas $ai \geq bi$ oraz $ai^2 \leq bi^2$. Mamy więc $-a \leq -b \Leftrightarrow a \geq b$ - sprzeczność.

Zadanie 4.
Ile elementów jest w zbiorze

a) $\{(i)^n\}_{n=1,2,...}$

b) $\{(1+i)^n\}_{n=1,2,...}$

Rozwiązanie:

a) $\{(i)^n\}_{n=1,2,...} \xrightarrow{\text{4elementy}} i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

b) $\{(1+i)^n\}_{n=1,2,...} \xrightarrow{\text{zbiór nieskończony}}$ bo $|1+i| = \sqrt{2}$. Mamy $(1+i)^1 = 1+i$, $(1+i)^2 = 2i$, ...

Ćwiczenia 6

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Zadanie 1.
Wykazać, że nie istnieją liczby całkowite x, y takie, że $x^2 + 10y^2x = 3$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $10xy^2 \equiv 0 \mod 5$ oraz $3 \equiv 3 \mod 5$. Wystarczy zatem wykazać, że $x^2 \not\equiv 3 \mod 5$.

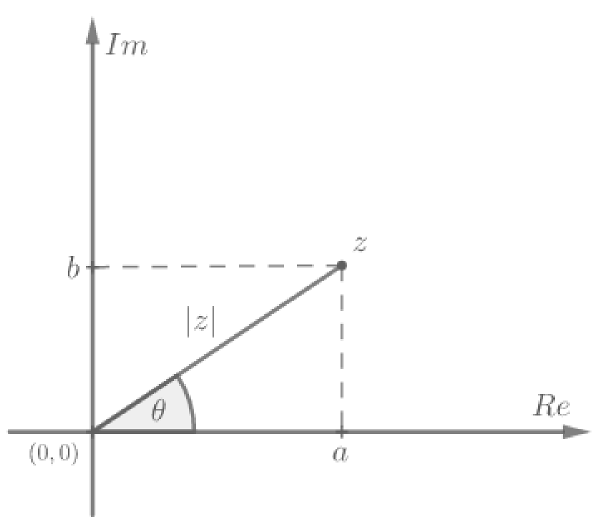
$$x \equiv 0 \mod 5 \longrightarrow x^2 \equiv 0 \mod 5$$
$$x \equiv 1 \mod 5 \longrightarrow x^2 \equiv 1 \mod 5$$
$$x \equiv 2 \mod 5 \longrightarrow x^2 \equiv 4 \mod 5$$
$$x \equiv 3 \mod 5 \longrightarrow x^2 \equiv 4 \mod 5$$
$$x \equiv 4 \mod 5 \longrightarrow x^2 \equiv 1 \mod 5$$

Czyli $x^2 = 3$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{F}_5$, zatem nie istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, ze $x^2 + 10xy^2 = 3$.

Uwaga: Dla każdej liczby rzeczywistej $r \in \mathbb{R}$ istnieje $z \in \mathbb{C}$ takie, że $z^2 = r$, bo dla $r \geq 0$ bierzemy $z = \sqrt{r}$, natomiast dla $r < 0$ bierzemy $z = i \cdot \sqrt{-r}$.

Zadanie 2.
Rozpatrzmy równanie $ax^2 + bx + c = 0$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Niech $d \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $d^2 = b^2 - 4ac$. Wykazać, że liczby $\frac{-b+d}{2a}$ oraz $\frac{-b-d}{2a}$ są rozwiązaniami równania.

Rozwiązanie:
Podstawmy te pierwiastki do równania: $a \cdot \left(\frac{-b+d}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b+d}{2a}\right) + \frac{-d^2+b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow d^2 - 2bd + b^2 - 2b^2 + 2db + b^2 - d^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Analogicznie dowodzimy, że $\frac{-b-d}{2a}$ jest rozwiązaniem tego równania. Podobna sytuacja jest, gdy $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$. Wówczas $\frac{-b+d}{2a}$ oraz $\frac{-b-d}{2a}$ też są rozwiązaniami równania $ax^2 + bx + c = 0$.



$$z = (a, b) = a + bi$$

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\arg(z) = \theta$$
$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \quad \cos\theta = \frac{a}{|z|}$$
$$z = a + bi = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

Po co to? Niech $z_1, z_2 \in C$, wówczas $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_1 \cdot z_2| \cdot (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$. Zatem przy mnożeniu liczb zespolonych ich poduły się mnożą, a ich argumenty się dodają.

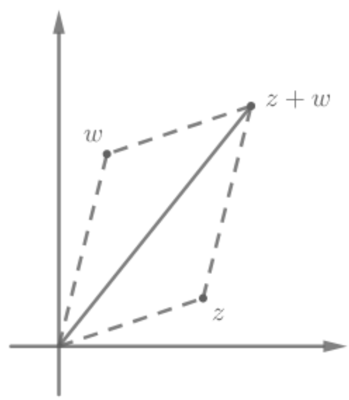
Zadanie 3.
Niech $w \in \mathbb{C},\ w \neq 0$. Podać interpretację geometryczną przekształceń płaszczyzny $\mathbb{C}$:

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ \forall_{z\in\mathbb{C}}\ f(z) = z + w$;

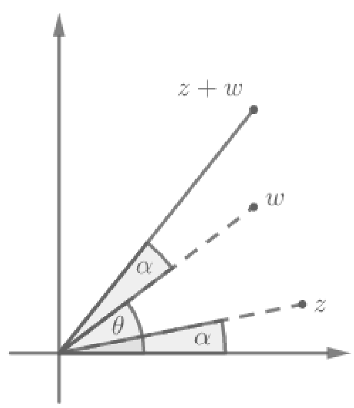
b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ \forall_{z\in\mathbb{C}}\ g(z) = w \cdot z$.

Rozwiązanie:

a) Jest to przesunięcie równoległe o wektor $w = (a, b)$.



b) Jest to złożenie obrotu wokół $(0, 0)$ o kąt θ i jednokładność o środku $(0, 0)$ i skali $|w|$.



Zadanie 4.
Dla danego $z \in \mathbb{C}$ znaleźć jego postać trygonometryczną.

a) $z = 1 + i$

b) $z = \sqrt{3} - i$

c) $z = \sqrt{3} + 3i$

Rozwiązanie:

a) Mamy $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, zatem $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli $\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4}$. Mamy więc $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) Mamy $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, zatem $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\sin\theta = \frac{-1}{2}$, czyli $\arg(z) = \theta = -\frac{\pi}{6}$. Mamy więc $z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$

c) Mamy $|z| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$, zatem $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ oraz $\sin\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{3}$. Mamy więc $z = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Twierdzenie: (wzór de Moivre'a) Gdy $n \in \mathbb{N}$, to dla $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ zachodzi

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Zadanie 5.
Daną liczbę zespoloną $z = \frac{(1-i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{55}}$ przedstawić jako $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Niech $x = (1-i)^{100}$ oraz $y = (\sqrt{3}+i)^{55}$. Wówczas $|x| = \sqrt{2}$ i $|y| = 2$. Zatem $\cos\theta_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $\sin\theta_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli $\theta_x = -\frac{\pi}{4}$. Analogicznie $\cos\theta_y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\sin\theta_y = \frac{1}{2}$, czyli $\theta_y = \frac{\pi}{6}$. Mamy więc

$$x = \sqrt{2}^{100} \cdot \left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)^{100} = 2^{50} \cdot \left(\cos\frac{-\pi}{4} \cdot 100 + i\sin\frac{-\pi}{4} \cdot 100\right) =$$

$$= 2^{50} \cdot (\cos 25\pi - i\sin 25\pi) = 2^{50} \cdot (\cos\pi - i\sin\pi) = 2^{50} \cdot (-1 - i \cdot 0) = -2^{50}$$

$$y = 2^{55} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{55} = 2^{55} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} \cdot 55 + i\sin\frac{\pi}{6} \cdot 55\right) =$$

$$= 2^{55} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + 9\pi + i\sin\frac{\pi}{6} + 9\pi\right) = 2^{55} \cdot \left(\cos 10\pi - \frac{5\pi}{6} + i\sin 10\pi - \frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= 2^{55} \cdot \left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 2^{55} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2^{55} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2^{55} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2^{54} \cdot \left(\sqrt{3} + i\right)$$

Zatem

$$z = \frac{-2^{50}}{-2^{54} \cdot (\sqrt{3}+i)} = \frac{1}{2^4 \cdot (\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{2^4 \cdot (3+1)} = \frac{\sqrt{3}-i}{64}$$

Definicja: Niech dana będzie funkcja $f : X \to Y$. Niech $A \subset X$. Obraz zbioru A to

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset Y$$

Niech $B \subset Y$. Przeciwobraz zbioru B to

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

Zadanie 6.
Dana jest funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k^2$ oraz zbiory $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $B = \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$. Znaleźć a) $f(A)$, b) $f^{-1}(B)$.

Rozwiązanie:

a) Mamy $f(-2) = f(2) = 4$, $f(-1) = f(1) = 1$ oraz $f(0) = 0$, zatem $f(A) = \{0, 1, 4\}$.

b) Mamy $f(B) = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, jednak jedynie $\{0, 1, 4\} \in B$, zatem $f^{-1}(B) = \{0, 1, -1, 2, -2\}$.

Praca domowa
Poniższą liczbę $z \in \mathbb{C}$ przedstawić jako $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

a) $z = (1-i)^{100}$

b) $z = \left(\frac{i+\sqrt{3}}{i+1}\right)^{55}$

c) $z = \frac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$

Ćwiczenia 7

Geometria przekształcenia

Uwaga: Niech $w \in \mathbb{C}$. Jeżeli $w \neq 0$ to $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje dokładnie n takich liczb zespolonych z, że $x^n = w$, bo te liczby z można wypisać wzorem. Są to $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, gdzie dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ zachodzi

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

Zadanie 1.
Znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia czwartego z -1, to znaczy znaleźć wszystkie takie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, że $z^4 = -1$.

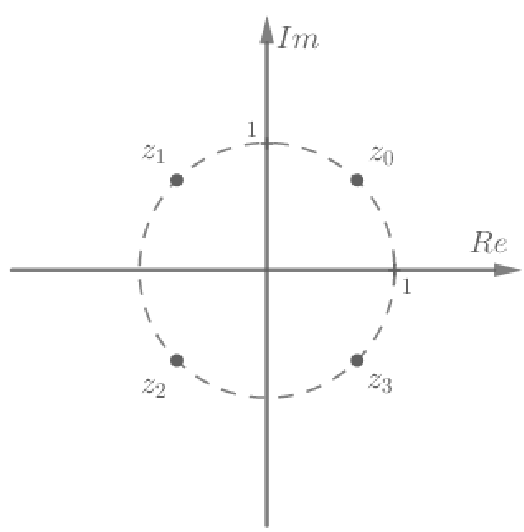
Rozwiązanie:
Mamy $|-1| = 1$ oraz $\cos\theta = -1$ i $\sin\theta = 0$, zatem $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$. Wówczas

$$z_0 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

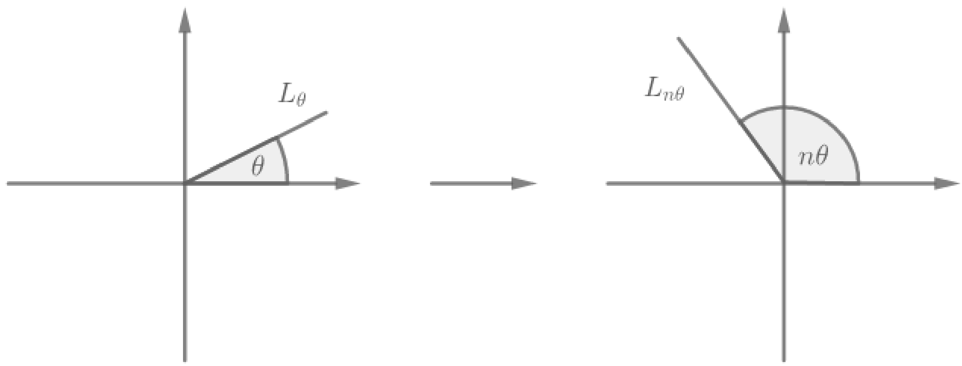
$$z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{\pi + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$



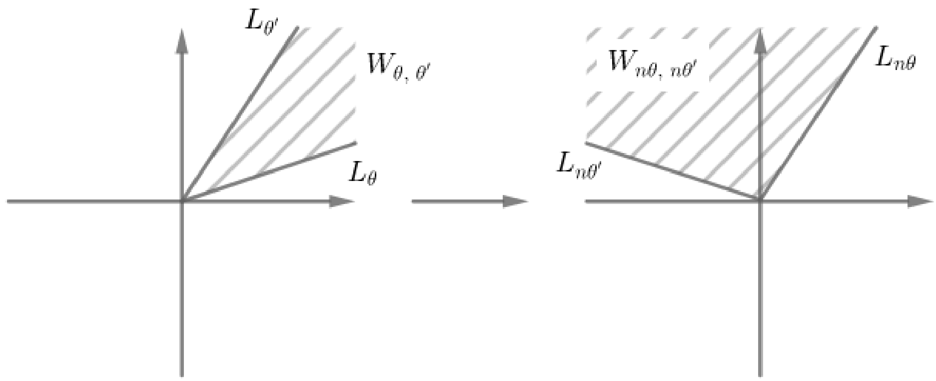
$$z_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad z_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad z_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad z_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Geometria przekształcenia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^n$

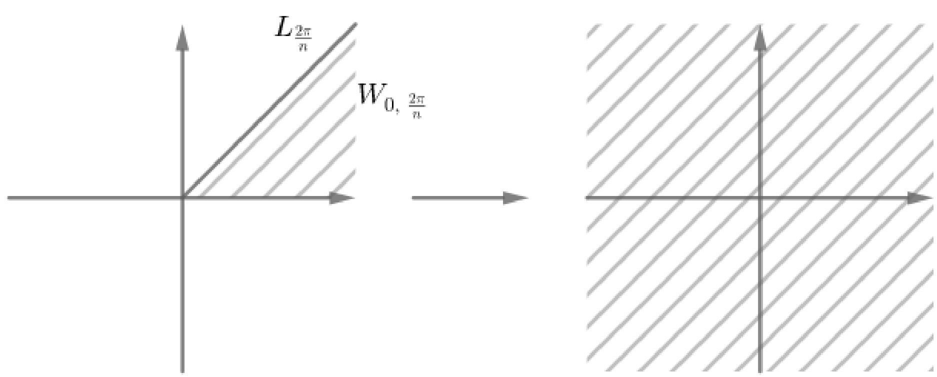
Jakie jest przekształcenie prostej? $f(L_\theta) = L_{n\theta}$



Jakie jest przekształcenie obszaru? $f(W_{\theta,\theta'}) = W_{n\theta,n\theta'}$ dla $\theta' > \theta$

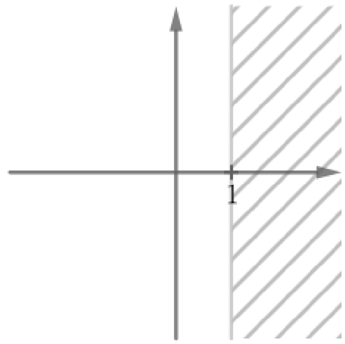


Gdy obszar jest zawarty między półprostymi $L_{x\cdot\frac{2\pi}{n}}$ oraz $L_{(x+1)\frac{2\pi}{n}}$, to przekształcenie jest płaszczyzną $\mathbb{C}$.



Zadanie 2.
Na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ naszkicować zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(1+i)z \geq 1\}$.

Rozwiązanie:
Naszkicujmy najpierw zbiór $A = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,w \geq 1\}$

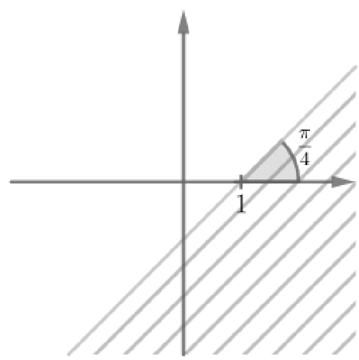


Mamy $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(1+i)z \geq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$, gdzie $g(x) = (1+i)z$.

Jakie liczby $z \in \mathbb{C}$ po zastosowaniu g lądują w A? To zależy od geometrii funkcji g. Co to jest g geometrycznie?

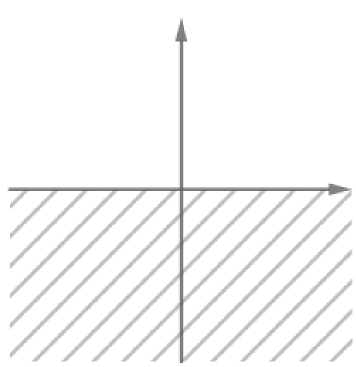
Mamy $1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, zatem funkcja $g(z) = (1+i)z$ jest to złożenie obrotu o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół $(0,0)$ i jednokładności o skali $\sqrt{2}$ i środku $(0,0)$.

Narysujmy więc zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$



Zadanie 3.
Na płaszczyćnie $\mathbb{C}$ naszkucować zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(1+i)z^2 < 0\}$

Rozwiązanie:
Naszkicujmy najpierw zbiór $A = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,w < 0\}$

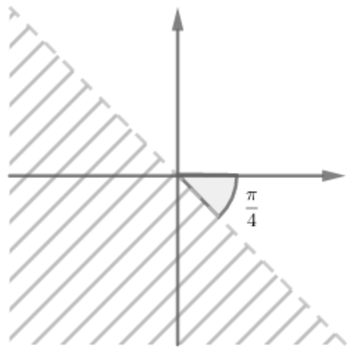


Mamy $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(1+i)z^2 < 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid g(f(z)) \in A\}$, gdzie $f(z) = z^2$ oraz $g(z) = (1+i)z$.

Co to jest g geometrycznie?

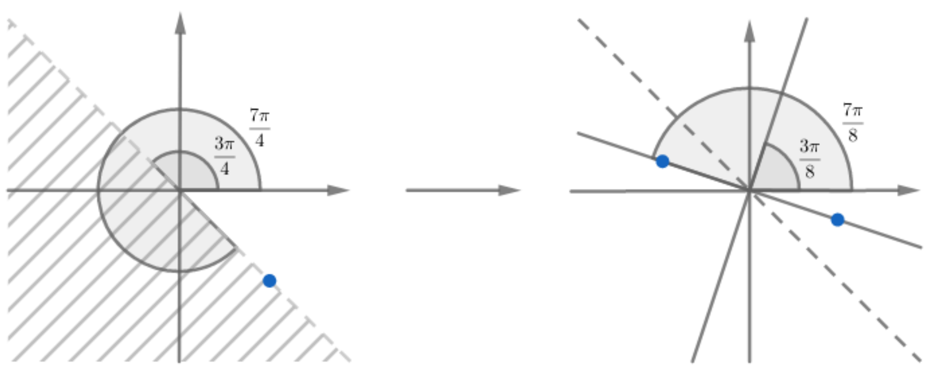
Funkcja $g(z) = (1+i)z$ jest to złożenie obrotu o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół $(0,0)$ i jednokładności o skali $\sqrt{2}$ i środku $(0,0)$.

Narysujmy więc zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$



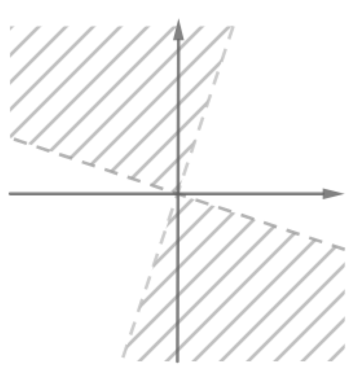
Co to jest f geometrycznie?

Chcemy narysować taki zbiór, który po zastosowaniu funkcji f lądował w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$. Musimy narysować takie półproste, które po zastosowaniu funkcji $f(z) = z^2$ przejdą na półproste wyznaczające obszar zbioru $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$. Dla każdej prostej wyznaczającej obszar $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$, kąt jaki tworzy ona z osią Re musimy podzielić przez 2 (bo podnosimy do drugiej potęgi).



Kropką zaznaczyliśmy punkty, które przejdą na siebie, po zastosowaniu funkcji $f(z) = z^2$.

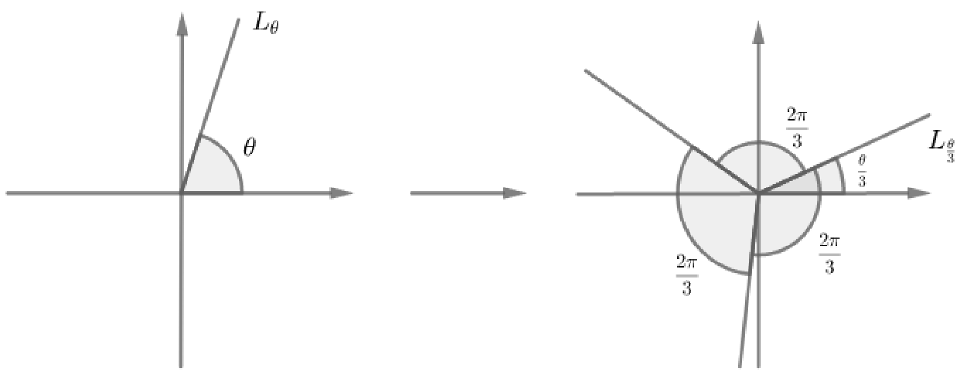
Narysujmy więc zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid g(f(z)) \in A\}$



Niech L_θ oznacza półprostą o początku w $(0,0)$ i kącie θ od półprostej Re. Dana jest funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$. Co to jest $f^{-1}(L_\theta)$?

Kąt θ jaki dzieli ta półprosta z osią Re musimy podzielić na n części (bo jak mieliśmy funkcję f to zwiększaliśmy n razy, tu mamy funkcję odwrotną, więc kąt zmniejszamy n razy). Następnie symetrycznie dzielimy obszar na n części, czyli od pierwszej półprostej odkładamy półproste co kąt $\frac{2\pi}{n}$ (bo po zastosowaniu funkcji f każda z tych półprostych przejdzie na pierwotną).

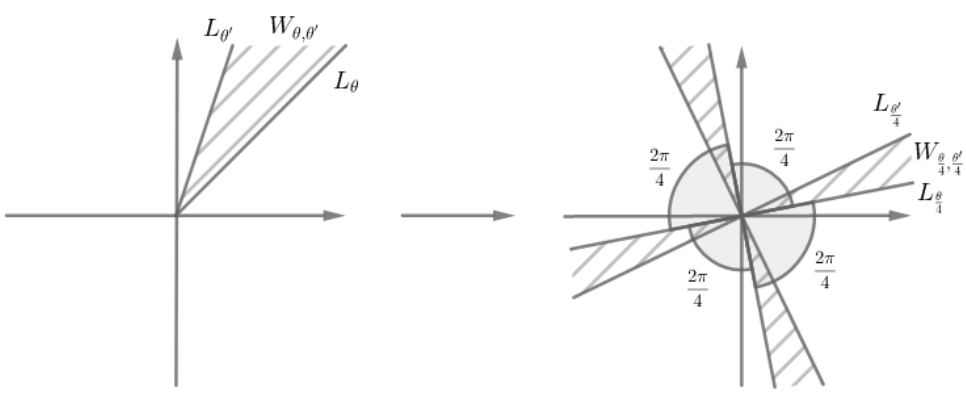
Zobaczmy to na przykładzie dla $n = 3$.



Niech $W_{\theta,\theta'}$ oznacza obszar między półprostą o początku w $(0,0)$ i kącie θ od półprostej Re, a półprostą o początku w $(0,0)$ i kącie θ' od półprostej Re. Co to jest $f^{-1}(W_{\theta,\theta'})$?

Każdy z kątów θ i θ' musimy podzielić na n części i narysować nowopowstały obszar między tymi kątami. Następnie symetrycznie dorysowujemy jeszcze $(n-1)$ obszarów (tak jak to robiliśmy z półprostą), co kąt $\frac{2\pi}{n}$, począwszy od ramienia przy kącie θ.

Zobaczmy to na przykładzie dla $n = 4$.



Ćwiczenia 8

Pierwiastki wielomianów

Twierdzenie: (Zasadnicze twierdzenie algebry) Każdy wielomian stopnia większego od 1 o współczynnikach w $\mathbb{C}$, ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

(Równoważnie) Każdy wielomian stopnia n o współczynnikach w $\mathbb{C}$ ma w $\mathbb{C}$ n pierwiastków (liczbowych z krotnościami). Jeżeli $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ przy czym $a_n \neq 0$ to istnieją $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$ takie, że $f(z) = (z-p) \cdot g(z)$.

Zadanie 1.
Przedstaw wielomian $f(x) = z^3 + i$ jako iloczyn wielomianów stopnia 1, czyli rozłóż go na czynniki stopnia pierwszego.

Rozwiązanie:
Mamy $f(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 + i = 0 \Leftrightarrow z^3 = -i$. Ponadto mamy $w_k = \cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right)$, zatem $w_0 = i$, $w_1 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $w_2 = \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, czyli

$$z^3 + i = (z - i) \cdot \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Twierdzenie: Niech $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, wtedy $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$ oraz $\overline{w_1 \cdot w_2} = \overline{w_1} \cdot \overline{w_2}$

Dowód: Niech $w_1 = a + bi$ oraz $w_2 = c + di$, wówczas $\overline{w_1 + w_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a + c) - (b+d)i = a - bi + c - di = \overline{a + bi} + \overline{c + di} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$, oraz $\overline{w_1 \cdot w_2} = \overline{(a+bi) \cdot (c+di)} = \overline{ac + adi + abi - bd} = \overline{(ac - bd) + (ad - cb)i} = ac - bd - adi - cbi = (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{a + bi} \cdot \overline{c + di} = \overline{w_1} \cdot \overline{w_2}$ $\square$

Zadanie 2.
Wykaż, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, każdy z wielomianów stopnia nie większego od dwóch. W tym celu pokaż, że:

a) Dla każdej liczby zespolonej $w \in \mathbb{C}$ wielomian $(z - w)(z - \overline{w})$ ma współczynniki rzeczywiste

b) Jeśli wielomian $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ma współczynniki rzeczywiste, to jeśli w jest pierwiastkiem f, to $\overline{w}$ też jest pierwiastkiem f.

Rozwiązanie:

a) Niech $w = a + bi$, wówczas $(z - w)(z - \overline{w}) = (z - a - bi)(z - a + bi) = (z - a)^2 + b^2 = z^2 + 2az + a^2 + b^2 = z^2 - 2\mathrm{Re}(w) \cdot z + |w|^2$. Wszstkie trzy współczynniki są rzeczywiste.

b) Niech w to pierwiastek f, czyli $a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + a_n w^n = 0$, stąd $\overline{a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w^n} = \overline{0} = 0 \Leftrightarrow \overline{a_0} + \overline{a_1 w} + \ldots + \overline{a_n w^n} = 0 \Leftrightarrow \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{w} + \overline{a_2} \cdot \overline{w^2} + \ldots + \overline{a_n} \cdot \overline{w^n} = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 \overline{w} + a_2 (\overline{w})^2 + \ldots + a_n (\overline{w})^n = 0$

Korzystając teraz z a) i b) pokażemy, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, każdy z wielomianów stopnia nie większego od dwóch. Niech $f(z)$ ma współczynniki rzeczywiste. Niech w będzie pierwiastkiem $f(z)$, wówczas $f(z) = (z-w)(z-\overline{w}) \cdot g(z)$, gdzie $(z-w)(z-\overline{w})$ oraz $g(z)$ mają współczynniki rzeczywiste. Wiemy, że $f(z) = a_n \cdot (z-p_1) \cdot (z-p_2) \cdot \ldots \cdot (z-p_n)$ dla pewnych $p_1, p_2, \ dp_n \in \mathbb{C}$. Wiemy, że w ciągu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ każda liczba nierzeczywista p występuje wraz z $\overline{p}$. Czyli $\{p_1, \ldots, p_n\}$ możemy ustawić w ciąg tak, że najpierw są liczby rzeczywiste (o ile w ogóle są), a następnie liczby zespolone parami p i $\overline{p}$. Wówczas $f(z) = a_n(z-q_1) \cdot \ldots \cdot (z-q_r) \cdot (z-q_{r+1}) \cdot (z-\overline{q_{r+1}}) \cdot \ldots \cdot (z-q_s) \cdot (z-\overline{q_s})$. Wymnażając pary nawiasów z liczbami nierzeczywistymi, otrzymujemy nawiasy o stopniach co najwyżej dwóch, w których każdy współczynnik jest rzeczywisty. $\square$

Zadanie 3.
Wielomian $f(x) = x^7 + x$ przedstawić jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

Rozwiązanie:
Mamy $f(x) = x^7 + x = x(x^6+1)$. Ponadto $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x^6 = -1$. Znajdźmy więc pierwiastki równania $x^6 = -1$. Mamy $x_k = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right)$. Zatem $x_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $x_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $x_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $x_4 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$, $x_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Zatem

$$x^7 + x = x(x-i)(x+i)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Możemy też skorzystać z tego, ze $(x-w)(x-\overline{w}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(x) + |w|^2$, czyli z tego, że $\overline{x_0} = x_5$, $\overline{x_1} = x_4$, $\overline{x_2} = x_3$. Mamy wówczas

$$x^7 + x = x \cdot (x-x_0) \cdot (x-\overline{x_0}) \cdot (x-x_1) \cdot (x-\overline{x_1}) \cdot (x-x_2) \cdot (x-\overline{x_2}) =$$

$$= (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2+1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$$

Zadanie 4.
Niech $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ będą wszystkimi pierwiastkami stopnia n z liczby 1. Niech $W \subseteq \mathbb{C}$ będzie n-kątem foremnym o wierzchołkach $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Wykazać, że jeśli $w_1, w_2 \in W$, to $w_1 \cdot w_2 \in W$. Jest to równoważne temu: niech $w \in W$ oraz $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = w \cdot z$, trzeba pokazać, że $\forall_{w \in W} \ f(w) \subset W$.

Rozwiązanie:
Niech w_1 będzie kombinacją liniową wierzchołków wielokąta, czyli $w_1 = a_1 z_0 + \ldots + a_n z_{n-1}$, gdzie $a_1, \ldots, a_n > 0$ oraz $a_1 + \ldots + a_n \leq 1$. Niech w_2 będzie inną kombinacją liniową wierzchołków wielokąta, czyli $w_2 = b_1 z_0 + \ldots + b_n z_{n-1}$, gdzie $b_1, \ldots, b_n > 0$ oraz $b_1 + \ldots + b_n \leq 1$. Wówczas iloczyn $w_1 \cdot w_2$ również jest kombinacją liniową wierzchołków wielokąta, czyli $w_1 \cdot w_2 = c_1 z_0 + \ldots + c_n z_{n-1}$, gdzie $c_1, \ldots, c_n > 0$ oraz $c_1 + \ldots + c_n \leq 1$. Zatem również punkt $w_1 \cdot w_2$ leży wewnątrz wielokąta. $\square$

Ćwiczenia 9

Przestrzenie liniowe nad ciałem K

Definicja: Przestrzenią liniową nad ciałem $(K, +, \cdot, 0, 1)$ nazywamy zbiór V z odwzorowaniami:

$V \times V \to V \ : \ (x_1 \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ zwane dodawaniem wektorów;

$K \times V \to V \ : \ a \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_n)$ zwane mnożeniem wektora przez skalar.

oraz z wyróżnionym elementem w V zwanymwektorem zerowym $0 = (0, \ldots, 0)$.

Zadanie 1.
Sprawdź jeden dowolny aksjomat dla przestrzeni $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Rozwiązanie:
Sprawdźmy aksjomat rozdzielności mnożenia względem dodawania $\forall_{\alpha,\beta \in K^n} \ \forall_{a \in K} \ a(\alpha + \beta) = a\alpha + b\beta$. Niech $\alpha = (s_1, \ldots, s_n)$ oraz $\beta = (t_1, \ldots, t_n)$, wówczas $\alpha + \beta = (s_1 + t_1, \ldots, s_n + t_n)$. Mamy więc $a \cdot (\alpha + \beta) = a \cdot (s_1 + t_1, \ldots, s_n + t_n) = (a \cdot (s_1 + t_1), \ldots, a \cdot (s_n + t_n))$. Mamy $a \cdot \alpha = (a \cdot s_1, \ldots, a \cdot s_n)$ oraz $a \cdot \beta = (a \cdot t_1, \ldots, a \cdot t_n)$, zatem $a \cdot \alpha + a \cdot \beta = (a \cdot s_1, \ldots, a \cdot s_n) + (a \cdot t_1, \ldots, a \cdot t_n) = (a \cdot s_1 + a \cdot t_1, \ldots, a \cdot s_n + a \cdot t_n) = (a \cdot (s_1 + t_1), \ldots, a \cdot (s_n + t_n))$ Korzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania w ciele, zatem $a \cdot (\alpha + \beta) = a \cdot \alpha + a \cdot \beta$.

Przykłady:

- $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}$
- Macierze $M_{m \times n}(K)$ - macierze rozmiaru $m \times n$ o wyrazach z ciała K.

$$A[a_{ij}] + B[b_{ij}] = (A + B)[a_{ij} + b_{ij}]$$

$$x \cdot A[a_{ij}] = A_x[x \cdot a_{ij}]$$

- $F(X, K) = \{$wszystkie funkcje $X \to K$ $\}$, gdzie X to jakiś niepusty zbiór.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

Zadanie 2.
W $\mathbb{R}^4$ dla $\alpha = (1, 2, 4, -1)$, $\beta = (5, 6, -2, 10)$ obliczyć $5\alpha + 4\beta$.

Rozwiązanie:
Mamy $5\alpha + 3\beta = 5 \cdot (1, 2, 4, -1) + 4 \cdot (5, 6, -2, 10) = (5, 10, 20, -5) + (20, 24, -8, 40) = (25, 34, 12, 35)$.

Definicja: Niech V podprzestrzeń liniowa nad K. Niepusty podzbiór $W \subset V$ jest podprzestrzenią V jeśli

1. $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W$
2. $\alpha \in W,\ a \in K \Rightarrow a \cdot \alpha \in W$

Zadanie 3.
Sprawdź jeden wybrany aksjomat dla podprzestrzeni W.

Rozwiązanie:
Sprawdźmy aksjomat istnienia elementu przeciwnego $\forall_{\alpha \in W}\ \exists_{\alpha' \in W}\ \alpha + \alpha' = 0$. Niech $\alpha' = (-1) \cdot \alpha$, wtedy $\alpha' \in W$ (bo $\alpha \in W$ oraz $-1 \in K$) z warunku b). Wówczas $\alpha + \alpha' = \alpha + [(-1) \cdot \alpha] = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \alpha = \alpha \cdot (1 - 1) = \alpha \cdot 0 = 0$.

Zadanie 4.
Dla danego podzbioru $X \subset \mathbb{R}^2$ sprawdzić, czy spełnia on warunek 1. lub warunek 2. z definicji pojęcia podprzestrzeni

a) $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}\}$

b) $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 0\}$

c) $X = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| - |x_2| = 1\}$

Rozwiązanie:

a) Jest to zbiór punktów kratowych
   1. Prawda, bo $\forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}}\ x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$
   2. Fałsz, bo na przykład $\frac{1}{2} \cdot (1, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin X$

b) Jest to zbiór punktów leżących na osi OX lub osi OY
   1. Fałsz, bo $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin X$
   2. Prawda, bo gdy $x_1 = 0$, to mamy $(0, x_2)$ i wtedy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $a \cdot (0, x_2) = (0, a \cdot x_2) \in X$, gdy $x_2 = 0$, to mamy $(x_1, 0)$ i wtedy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $a \cdot (x_1, 0) = (a \cdot x_2, 0) \in X$

c) Jest to zbiór punktów, których moduł pierwszej współrzędnej różni się od modułu drugiej współrzędnej o 1
   1. Fałsz, bo $(-2, 1) + (2, -1) = (0, 0) \notin X$
   2. Fałsz, bo $3 \cdot (3, 2) = (9, 6) \notin X$

Zadanie 5.
Dany jest podzbiór $W_s = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = s^2 - 1 \ \wedge \ x_1 + x_2 + sx_4^2 = x_4^2\}$. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$, W_s jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

Rozwiązanie:
Warunek konieczny na to by $W \subset V$ był podprzestrzenią to $0 \in W$.

Gdyby W_s była podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$, to $(0,0,0,0) \in W_s$, więc z pierwszego równania mamy $s^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow s = 1 \ \vee \ s = -1$. Czyli W_s ma szansę być podprzestrzenią tylko gdy $s = 1$ lub $s = -1$.

Rozpatrujemy $s = 1$, wówczas $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \wedge \ x_1 + x_2 = 0\}$, czyli zbiór W_1 to zbiór rozwiązań układu U

$$U = \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Niech $\alpha = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in W_1$ oraz $\beta = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in W_1$. Chcemy pokazać, że $\alpha + \beta \in W_1$ oraz dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $a \cdot \alpha \in W_1$.

$$\alpha \in W_1 \Rightarrow \begin{cases} s_1 - 2s_2 + s_3 + s_4 = 0 \\ s_1 + s_2 = 0 \end{cases} \qquad \beta \in W_1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 - 2t_2 + t_3 + t_4 = 0 \\ t_1 + t_2 = 0 \end{cases}$$

Po dodaniu układów stronami otrzymujemy

$$\begin{cases} (s_1 + t_1) - 2(s_2 + t_2) + (s_3 + t_3) + (s_4 + t_4) = 0 \\ (s_1 + t_1) + (s_2 + t_2) = 0 \end{cases}$$

Zatem $\alpha + \beta \in W_1$. Po przemnożeniu pierwszego układu przez $a \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$\begin{cases} a \cdot s_1 - 2a \cdot s_2 + a \cdot s_3 + a \cdot s_4 = 0 \\ a \cdot s_1 + a \cdot s_2 = 0 \end{cases}$$

Zatem $a \cdot \alpha \in W_1$. Zatem dla $s = 1$ podzbiór W_s jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Rozpatrujemy $s = -1$, wówczas $W_{-1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \wedge x_1 + x_2 - 2x_4^2 = 0\}$. Niech $\alpha = (1,1,0,1) \in W_{-1}$ wówczas $2 \cdot \alpha = (2,2,0,2) \notin W_{-1}$, czyli dla $s = -1$ podzbiór W_s nie jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Twierdzenie: Niech U to jednorodny układ równań liniowych o współczynnikach w ciele K. Wtedy zbiór rozwiązań układu U jest podprzestrzenią w K^n.

Czy powyższe twierdzenie działałoby dla układu niejednorodnego? Nie, bo musiałby istnieć w tej przestrzeni wektor 0, czyli $(0, 0, \ldots, 0)$ byłby rozwiązaniem. Ale taki wektor jest rozwiązaniem tylko układu jednorodnego.

Zadanie 6.
Dany jest podzbiór $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\}$. Czy jest to podprzestrzeń?

Rozwiązanie:
Mamy $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, zatem zgodnie z powyższym twierdzeniem jest to podprzestrzeń.

Definicja: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ to wektory, natomiast $a_1, \ldots, a_k \in K$ to skalary. Wektor $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$ nazywamy kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ o współczynnikach $a_1, \ldots, a_k$.

Zadanie 7.
Czy wektor $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją wektorów $(1,2,4,3), (0,1,3,3), (1,2,1,5)$?

Rozwiązanie:
Gdyby był, to $(1,1,1,1) = a_1 \cdot (1,2,4,3) + a_2 \cdot (0,1,3,3) + a_3 \cdot (1,2,1,5)$ dla pewnych $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ 2a_1 + a_2 + 2a_3 = 1 \\ 4a_1 + 3a_2 + a_3 = 1 \\ 3a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ostatni wiersz macierzy odpowiada równaniu $0 = 1$, co jest sprzeczne, zatem $(1,1,1,1)$ nie jest kombinacją liniową zadanych wektorów.

Twierdzenie: V to przestrzeń liniowa nad K, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ to wektory. Niech $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oznacza zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Wówczas $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Dowód: Weźmy $\alpha, \beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, wówczas $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$ oraz $\beta = b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k$, czyli $\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + \ldots + (a_k + b_k)\alpha_k$, zatem $\alpha + \beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Weźmy $a \in K$, wtedy $a \cdot \alpha = a \cdot a_1\alpha_1 + \ldots a \cdot a_k\alpha_k$, zatem $a \cdot \alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ $\square$

Zadanie 8.
W przestrzeni liniowej V udowodnij, że $\forall_{\alpha \in V}\ 0 \cdot \alpha = 0$.

Rozwiązanie:
Mamy $0 = \alpha + (-\alpha) = 1 \cdot \alpha + (-\alpha) = \alpha \cdot 1 + (-\alpha) = \alpha \cdot (1 + 0) + (-\alpha) = (\alpha \cdot 1 + \alpha \cdot 0) + (-\alpha) = (\alpha + \alpha \cdot 0) + (-\alpha) = (\alpha \cdot 0 + \alpha) + (-\alpha) = \alpha \cdot 0 + (\alpha + (-\alpha)) = \alpha \cdot 0 + 0 = \alpha \cdot 0$ $\square$

Ćwiczenia 10

Kombinacje liniowe

Zadanie 1.
Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ wektor $(1,1,c)$ jest kombinacją liniową wektorów $(2,1,3)$, $(1,2,4),(3,0,2)$ i $(2,-2,-2)$?

Rozwiązanie:
Wektor $(1,1,c)$ jest kombinajcą liniową danych wektorów, gdy $(1,1,c) = a_1\cdot(2,1,3)+a_2\cdot(1,2,4)+a_3\cdot(3,0,2)+a_4\cdot(2,-2,-2)$ dla pewnych $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2a_1+a_2+3a_3+2a_4=1 \\ a_1+2a_2-a_4=1 \\ 3a_1+4a_@+2a_3-2a_4=c \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Układ jest więc niesprzeczny dla $c=\frac{7}{3}$. Zatem dla $c=\frac{7}{3}$ wektor $(1,1,c)$ jest kombinacją liniową wektorów $(2,1,3),(1,2,4),(3,0,2)$ i $(2,-2,-2)$.

Zadanie 2.
Czy istnieje wektor $\alpha \in \mathbb{R}^4$ taki, że α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1 = (1,2,1,1)$ oraz $\alpha_2 = (0,1,2,1)$ i jest też kombinacją liniową wektorów $\beta_1 = (1,1,-1,-2)$ i $\beta_2 = (1,0,-3,1)$?

Rozwiązanie:
Oczywiście, gdyby α był był wektorem zerowym, to byłby kombinacją liniową tych wektorów. Rozpatrzmy więc niezerowy wektor α. Szukamy, czy istnieją liczby rzeczywiste a_1,a_2,a_3,a_4 nie wszystkie równe zero, takie, że $a_1\cdot\alpha_1+a_2\cdot\alpha_2 = a_3\cdot\beta_1+a_4\cdot\beta_2$

$$\begin{cases} a_1+0-a_3-a_4=0 \\ 2a_1+a_2-a_3+0=0 \\ a_1+2a_2+a_3+2a_4=0 \\ a_1+a_2+2a_3-a_4=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a_1 = 2a_4 \\ a_2 = -3a_4 \\ a_3 = a_4 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem tego układu jest $(2a_4,-3a_4,a_4,a_4) = a_4(2,-3,1,1)$, czyli warunki zadania spełnia na przykład wektor $\alpha = (2,-3,1,1)$.

Zadanie 3.
Dane są wektory $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ oraz $\beta_1,\ldots,\beta_k$. Jak sprawdzić czy zachodzi?

$$\operatorname{lin}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \operatorname{lin}(\beta_1,\ldots,\beta_k)$$

Rozwiązanie:
Wystarczy pokazać zawieranie w dwie strony

$$\subseteq \quad \forall_{i=1,2,\ldots,k}\ \alpha_i \in \operatorname{lin}(\beta_1,\ldots,\beta_k)$$

$$\supseteq \quad \forall_{i=1,2,\ldots,k}\ \beta_i \in \operatorname{lin}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$$

Definicja: Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ nad K jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a_1, \ldots, a_k \in K$ nie wszystkie równe zero, takie że $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$.

Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy z równości $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$ wynika, że $a_1 = 0, \ldots, a_k = 0$.

Zadanie 4.
Czy układ $(1, 2, -1, 2), (1, 4, 2, 8), (-1, 0, 4, 4)$ jest liniowo niezależny?

Rozwiązanie:
Pytamy się, czy istnieją $a_1, a_2, a_3, \neq 0$ takie, że $a_1(1, 2, -1, 2) + a_2(1, 4, 2, 8) + a_3(-1, 0, 4, 4) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a_1 = 2a_3 \\ a_2 = -a_3 \end{cases}$$

Zatem $(2a_3, -a_3, a_3) = a_3(2, -1, 1)$. Układ jest więc liniowo zależny dla na przykład $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 1$.

Zadanie 5.
Wykazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden wektor tego układu nie jest kombinacją liniową pozostałych.

Rozwiązanie:
Pokażemy przeciwnie, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy gdy jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

$\Rightarrow$ Jeżeli układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny, to istnieją $a_1, \ldots, a_k$ nie wszystkie równe 0, że $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, zatem możemy założyć (po ewentualnym przenumerowaniu indeksów), że $a_1 \neq 0$, czyli mamy $a_1\alpha_1 = -a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k \Leftrightarrow \alpha_1 = -\frac{a_2}{a_1}\alpha_2 + \ldots + \frac{a_k}{a_1}\alpha_k$. Zatem wektor α_1 jest kombinacją liniową pozostałych wektorów układu.

$\Leftarrow$ Jeżeli jednen z wektorów jest kombinacją liniową pozostałych, to wówczas $\alpha_1 = b_2\alpha_2 + \ldots + b_k\alpha_k \Leftrightarrow \alpha_1 - b_2\alpha_2 - \ldots - b_k\alpha_k = 0$. Współczynnik przy α_1 jest różny od zera (ponieważ jest równy 1), zatem układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny. $\square$

Twierdzenie: Niech $A, A' \in M_{n\times n}(K)$ to macierze o wierszach odpowiednio $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ oraz $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$. Załóżmy, że macierz A' powstała z macierzy A przez ciąg operacji elementarnych. Wtedy:

1. $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \text{lin}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_m)$
2. $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy układ $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ jest liniowo niezależny

Dowód: Wystarczy pokazać, gdy A' powstaje z A jedną operacją.

1. Wystarczy wykazać, że $\text{lin}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_m) \subset \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Dla operacji typu (1) mamy

$$\begin{cases} \alpha'_j = \alpha_j + a \cdot \alpha_i & \text{dla } i \neq j \\ \alpha'_k = \alpha_k & \text{dla każdego } k \neq j \end{cases}$$

   Wtedy OCZYWIŚCIE $\alpha'_j \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ oraz dla każdego $k \neq i$ zachodzi $\alpha'_k \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Dla operacji typu (2) i (3) JASNE!

2. Wystarczy wykazać, że z tego że $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ są liniowo niezależne wynika, że wektory $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ są liniowo niezależne. Dla operacji typu (1) $a_1\alpha'_1 + \ldots + a_j\alpha'_j + \ldots + a_m\alpha'_m = 0 \Leftrightarrow a_1\alpha_1 + \ldots + a_j(\alpha_j + a\alpha_i) + \ldots + a_m\alpha_m = 0$, czyli mamy $a_1\alpha_1 + \ldots + (a_i + a_j \cdot a)\alpha_i + \ldots + a_m\alpha_m = 0$. Ale przecież $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jest liniowo niezależny, zatem

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{i-1} = 0 \\ a_i + a \cdot a_j = 0 \\ a_{i+1} = 0 \\ \quad\vdots \\ a_m = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{bo } a_j = 0} \begin{cases} a_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{i-1} = 0 \\ a_i = 0 \\ a_{i+1} = 0 \\ \quad\vdots \\ a_m = 0 \end{cases}$$

   czyli $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ są liniowo niezależne. $\square$

Ćwiczenia 11

Liniowa niezależność

Zadanie 1.
Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ będzie macierzą schodkową. Kiedy wiersze macierzy A tworzą układ liniowo niezależny?

Rozwiązanie:
Wiersze macierzy schodkowej A tworzą układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma wiersza zerowego.

$\Rightarrow$ Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest zawsze liniowo zależny, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ma wektor zerowy (na przykład $\alpha_i = 0$), to zachodzi $0\cdot\alpha_1 + \ldots + 0\cdot\alpha_{i-1} + 1\cdot\alpha_i + 0\cdot\alpha_{i+1} + \ldots + 0\cdot\alpha_k = 0$.

$\Leftarrow$ Gdyby wiersze macierzy A były liniowo zależne, to $a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_mw_m = 0$, czyli istnieje wiersz, który jest kombinacją liniową pozostałych. Wtedy za pomocą operacji elementarnych możemy go wyzerować.

Zadanie 2.
Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ układ wektorów $(1, 2, 1, 3, 5)$, $(3, 7, 4, 0, 7)$, $(1, 3, 2, -6, t)$ jest liniowo niezależny?

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+3 \end{bmatrix}$$

Układ jest liniowo niezależny dla $t = -3$.

Definicja: Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ jest bazą przestrzeni liniowej V jeśli:

1. układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo niezależny,
2. $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = V$, czyli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rozpinają V.

Przykład: Baza standardowa przestrzeni K^n to $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Zadanie 3.
Niech $V \subset \mathbb{R}^4$, $V = \mathrm{lin}((1, 2, 1, 0, 1), (2, 5, 4, 7, 8), (4, 9, 6, 7, 10), (1, 3, 3, 7, 7))$. Znaleźć bazę przestrzeni V.

Rozwiązanie:

Rozważmy problem ogólnie. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K^n$. Rozważmy macierz $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$. Sprowadzamy macierz A do postaci schodkowej $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_k$ to wiersze niezerowe. Wówczas $\beta_1, \ldots, \beta_s$ jest bazą $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, bo $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_s, 0 \ldots, 0) = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_s)$, zatem wektory $\beta_1, \ldots, \beta_s$ rozpinają $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Mamy więc

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 6 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza V to $\{(1, 2, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 7, 6)\}$.

Definicja: Wymiar to liczba elementów bazy. Na przykład wymier przestrzeni $\mathbb{R}^3$ to 3, bo baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ to $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Twierdzenie: (Steiniza) Dla wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne, to $k \leq m$.

Uwaga: Jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_m$ to bazy przestrzeni V, to wtedy $k = m$.

Dowód: Jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne i należą do $\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to $k \leq m$. Jeżeli $\beta_1, \ldots, \beta_m$ są liniowo niezależne i należą do $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to $m \leq k$. Zatem $m = k$.

Zadanie 4.
Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_3 = 0 \end{cases}$$

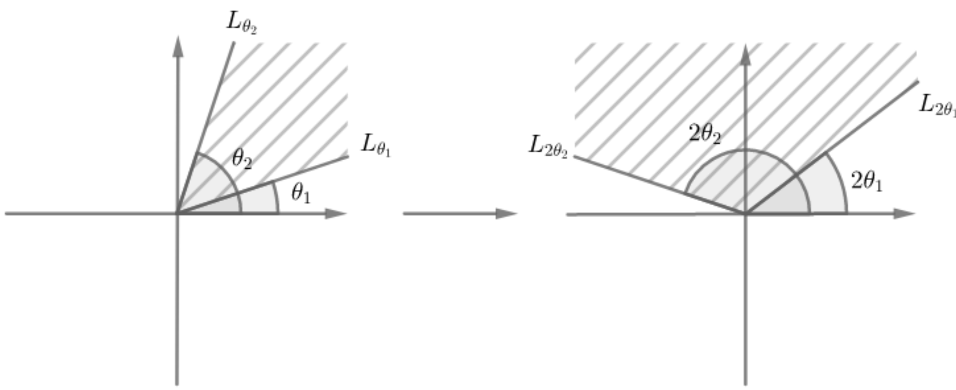
Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{5}x_3 - x_4 \end{cases}$$

$(-\frac{3}{5}x_3, -\frac{1}{5}x_3 - x_4, x_3, x_4) = \frac{1}{5}x_3(-3, -1, 5, 0) + x_4(0, -1, 0, 1)$. Zatem baza to $\{(-3, -1, 5, 0), (0, -1, 0, 1)\}$. Jest to kombinacja liniowo niezależna, bo mamy $(-\frac{3}{5}x_3, -\frac{1}{5}x_3 - x_4, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ wtedy gdy $x_3 = 0$ oraz $x_4 = 0$.

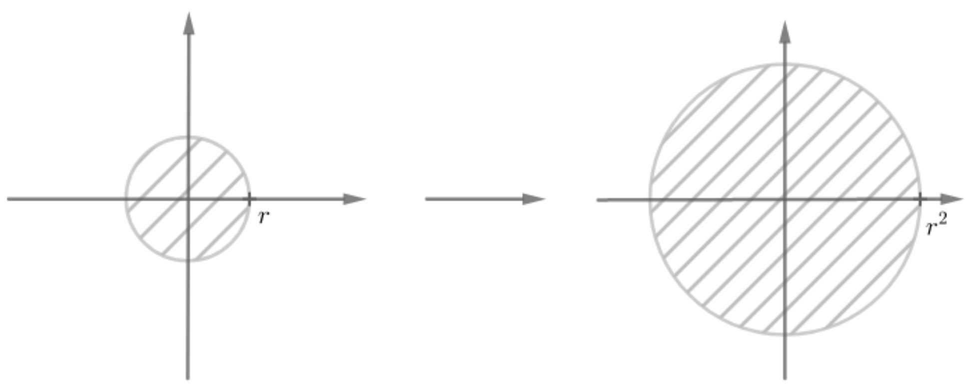
Zadanie 5.
Niech $A \subset \mathbb{C}$ oraz $B = \{w \cdot w' \mid w, w' \in A\}$. Co to jest B?

Rozwiązanie:



Zadanie 6.
Niech $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Co to jest B?

Rozwiązanie:



Ćwiczenia 12

Liniowa niezależność

Twierdzenie: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$, gdzie V to podprzestrzeń liniowa nad K. Następujące warunki są równoważne:

1. $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
2. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V
3. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest minimalnym układem rozpinającym V
4. Dla każdego $\alpha \in V$ istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ takie, że każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. To znaczy gdy $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ i $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_n\alpha_n$, to $a_i = b_i$ dla każdego i.

Zadanie 1.
Wykazać jedną z implikacji

Rozwiązanie:
(1) $\Rightarrow$ (4) Weźmy $\alpha \in V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, zatem istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. Dlaczego te $a_1, \ldots, a_n$ są wyznaczone jednoznacznie? Przypuśćmy, że istnieją $b_1, \ldots, b_n \in K$ takie, że $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_n\alpha_n$, czyli $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + \ldots + b_n\alpha_n \Leftrightarrow (a_1 - b_1)\alpha_1 + \ldots + (a_n - b_n)\alpha_n = 0$. Wiemy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne, zatem $a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_n - b_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Skoro każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić jako kombinację układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, to $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dlaczego $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne? Weźmy $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = 0$, ale też $0 \cdot \alpha_1 + \ldots + 0 \cdot \alpha_n = 0$, zatem z jednoznaczności mamy $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$, czyli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo niezależny. $\square$

Definicja: Dla bazy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V i dla $\alpha \in V$ elementy $a_1, \ldots, a_n \in K$ spełniające $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ nazywamy współrzędnymi wektora α w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Na przykład współrzędne wektora $\alpha = (3, 1, 4)$ w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$ wynoszą $3, 1, 4$, bo $(3, 1, 4) = 3 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 4 \cdot (0, 0, 1)$. Ogólnie $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ma w bazie standardowej współrzędne $x_1, \ldots, x_n$.

Zadanie 2.
Znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 11x_2 + x_3 - 17x_4 = 0 \end{cases}$$

i współrzędne wektora $\alpha = (1, 1, 1, 1) \in W$ w otrzymanej bazie.

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & 11 & 1 & -17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -46 & 45 \\ 0 & 1 & 21 & -22 \end{bmatrix}$$

> **Uwaga:** Wymiar przestrzeni rozwiązań układu U to liczba zmiennych − liczba zmiennych zależnych lub po prostu liczba zmiennych niezależnych

Zatem wymiar przestrzeni W to $\dim W = 4 - 2 = 2$. Dalej mamy rozwiązanie ogólne $(46x_3 - 45x_4, -21x_3 + 22x_4, x_3, x_4) = x_3(46, -21, 1, 0) + x_4(-45, 22, 0, 1)$. Zatem baza przestrzeni W to $\{(46, -21, 1, 0), (-45, 22, 0, 1)\}$. Mamy $\alpha = (1, 1, 1, 1) = 1 \cdot (46, -21, 1, 0) + 1 \cdot (-45, 22, 0, 1)$, skąd współrzędne wektora $\alpha \in W$ w otrzymanej bazie to $1, 1$.

> **Wniosek z twierdzenia:** Jeżeli $\dim W = n$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W$ są liniowo niezależne, to wtedy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą W, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest bazą W, to z twierdzenia Steinitza wiemy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym, zatem jest on bazą W.

Zadanie 3.
Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ układ wektorów $\alpha_1 = (1, 3, 2, -4), \alpha_2 = (2, 7, 1, -9), \alpha_3 = (4, 13, t, -18)$ jest bazą przestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^4$ będącej zbiorem rozwiązań (wszystkich) równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$?

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $\dim W = 3$, bo rozwiązanie ogólne to $x_1 = -x_2 - x_4$, czyli mamy $(-x_2 - x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)$. Mamy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in W$, stąd na mocy powyższego wniosku, wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są bazą przestrzeni W wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest liniowo niezależny.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 1 & -9 \\ 5 & 13 & t & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & t-16 & 0 \end{bmatrix}$$

Ostatni wiersz nie może być zerowy, zatem $t \neq 16$.

Zadanie 4.
Niech $\alpha_1 = (1, 3, 2, -4), \alpha_2 = (2, 7, 1, -9), \alpha_3 = (4, 13, t, -18)$ i niech $W_1 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Niech W_2 opisana jest równaniem $x_1 + x_2 + x_4 = 0$. Zatem W_1 i W_2 są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ mamy $W_1 = W_2$?

Rozwiązanie:

> **Uwaga:** Jeśli $W_1 \subset W_2$ oraz $\dim W_1 = k = \dim W_2$, to $W_1 = W_2$, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą W_1, to jest to też baza W_2 (bo jest to układ liniowo niezależny w W_2 długości k), więc $W_2 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = W_1$.
>
> Wzieliśmy $\dim W_1 = k = \dim W_2$, bo to nie działą dla przestrzeni nieskończonych. Na przykład gdy $W_2 = \mathbb{R}^\infty = \{(\text{ciągi parzyste})\}$ oraz gdy $W_1 = \{(a_i) \mid \forall_{i=2k}\ a_i = 0\}$.

Skoro $\alpha_1 \in W_2$ i $\alpha_2 \in W_2$ i $\alpha_3 \in W_2$, to $W_1 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subseteq W_2$. Mamy $W_1 \subseteq W_2$ oraz $\dim W_2 = 3$. Zatem $W_1 = W_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $\dim W_1 = 3$, czyli gdy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są liniowo niezależne, czyli gdy $t \neq 16$.

Zadanie 5.
Niech $K = \mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ oraz niech $V = K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in K \text{ oraz } i = 1, 2, \ldots, n\}$. Ile wektorów ma przestrzeń V? Ile jest baz w K^n?

Rozwiązanie:
Wektorów jest p^n, bo jest p^n ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o wyrazach w $\mathbb{F}_p$.

Policzmy ile jest baz w K^n. Wiemy, że $\dim K^n = n$ (baza standardowa). Konstruujemy bazę $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni K^n. Wybieramy α_1. Mamy $p^n - 1$ możliwości (bo α dowolne, byle nie 0). Mamy α_1, więc wybieramy α_2. Mamy $p^n - p$ możliwości (bo $\alpha_2 \notin \mathrm{lin}(\alpha_1)$, a $\mathrm{lin}(\alpha_1)$ ma p wektorów). Mamy więc α_1 i α_2, wybieramy α_3. Mamy $p^n - p^2$ możliwości (bo $\alpha_3 \notin (\alpha_1, \alpha_2)$, a $\mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$ ma p^2 wektorów). Mamy więc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i wybieramy α_4 itd. Baz w przestrzeni K^n jest więc $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \ldots (p^n - p^{n-1})$.

Zadanie 6.
Ile jest podprzestrzeni k wymiarowych? (Wskazówka: Ile jest układów liniowo niezależnych w z k wektorów?)

Rozwiązanie:
Różnych k-tek wektorów niezależnych jest $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \ldots (p^n - p^{k-1})$. Każdą podprzestrzeń wymiaru K możemy uzyskać na tyle sposobów, ile różnych k-tek wektorów niezależnych w niej znajdziemy. Takich k-tek jest $(p^k - 1)(p^k - p)(p^n - p^2) \ldots (p^k - p^{k-1})$. Zatem ostatecznie szukana przez nas liczba to $\binom{n}{k}_p = \frac{(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\ldots(p^n-p^{k-1})}{(p^k-1)(p^k-p)(p^n-p^2)\ldots(p^k-p^{k-1})} = \frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\ldots(p^{n-k+1}-1)}{(p^k-1)(p^{k-1})\ldots(p-1)}$.

Ćwiczenia 13
Wymiar przestrzeni

Twierdzenie:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta) \Leftrightarrow \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta)$$

Dowód: Zachodzi $\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \subseteq \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta)$, zatem teza jest prawdziwa, bo $W_1 \subset W_2$ i $\dim W_1 = \dim W_2 \Leftrightarrow W_1 = W_2$.

Zadanie 1.
Niech V to przestrzeń liniowa $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$. Wykazać, że

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta) \Leftrightarrow \beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

Rozwiązanie:
Z powyższego twierdzenia mamy

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta) \Leftrightarrow \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta)$$

Zatem wystarczy pokazać

$$\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta) \Leftrightarrow \beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$\Rightarrow$ Skoro $\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \operatorname{lin}(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, to wektor β jest kombinacją liniową pozostałych wektorów, zatem $\beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

$\Leftarrow$ Niech $\gamma \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta)$, to znaczy, że $\gamma = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b\beta$. Ale $\beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, czyli $\beta = c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k$, więc $\gamma = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + bc_1\alpha_1 + \ldots + bc_k\alpha_k = (a_1 + bc_1)\alpha_1 + \ldots + (a_k + bc_k)\alpha_k$, zatem $\gamma \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Stąd mamy $\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta) \subseteq \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Ale przecież mamy $\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \subseteq \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta)$, zatem $\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta)$. $\square$

Zastosowania

$$U = \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow S_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + S_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + S_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

gdzie $(S_1, S_2, \dots, S_n) \in K^n$ jest rozwiązaniem układu U.

Oznaczamy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A_u = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ powstałą od układu } U$$

Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n, b$ to kolumny macierzy A_u. Układ U jest niesprzeczny $\Leftrightarrow$ isnieje $(S_1, \ldots, S_n) \in K^n$ takie, że $b = S_1k_1 + \ldots S_nk_n \Leftrightarrow b \in \operatorname{lin}(k_1, \ldots, k_n) \Leftrightarrow r(A) = \dim \operatorname{lin}(k_1, \ldots, k_n) = r(A_u) = \dim \operatorname{lin}(k_1, \ldots, k_n, b)$.

Zadanie 2.
Dany jest układ równań

$$U : \begin{cases} 3x_1 + sx_2 + x_3 = 5 \\ 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 = t \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ układ U jest niesprzeczny? Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ układ U ma jednoznaczne rozwiązanie?

Rozwiązanie:
Układ U ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & s & 1 \\ 8 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & s-2 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $r(A) = 2$ dla $s = 2$ oraz $r(A) = 3$ dla $s \neq 2$, czyli układ U ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $r(A) = 3$, czyli gdy $s \neq 2$ oraz t jest dowolne.

Jedyna możliwość, aby układ U był sprzeczny, to gdy $s = 2$. Skoro dla $s = 2$ zachodzi $r(A) = 2$, to dla $s = 2$ układ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy gdy $r(A_u) = 2$.

$$A_u = \begin{bmatrix} 3 & s & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 8 & t \\ 2 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & t-16 \end{bmatrix}$$

$r(A_u) = 2$ dla $t = 16$ oraz $r(A_u) = 3$ dla $t \neq 16$, czyli układ U jest niesprzeczny dla $s = 2$ i $t = 16$ lub $s \neq 2$ i $t \in \mathbb{R}$. Układ U jest sprzeczny dla $s = 2$ i $t \neq 16$.

Twierdzenie: Dla każdej podprzestrzeni $W \subset K^n$ istnieje jednoznaczny układ równań liniowych U o n niewiadomych taki, że zbiór rozwiązań tego układu wynosi W. Mówimy U opisuje W.

Zadanie 3.
Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ oraz $W = \operatorname{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 5, 4, 0), (3, 7, 5, 3), (1, 3, 3, -3))$. Znaleźć układ równań liniowych opisujący W.

Rozwiązanie:
Każde równanie opisujące U ma postać: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$. Chcemy znaleźć a_1, a_2, a_3 i a_4. Musimy znaleźć bazę W:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a następnie rozwiązać układ równań podstawiając za x wektory z bazy.

$$U' : \begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 2a_1 + 5a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow U'; \begin{cases} a_1 = 3a_3 - 15a_4 \\ a_2 = -2a_3 + 6a_4 \end{cases}$$

$$(3a_3 - 15a_4, -2a_3 + 6a_4, a_3, a_4) = a_3(3, -2, 1, 0) + a_4(-15, 6, 0, 1)$$

Zatem bazą rozwiązań układu U' jest $\{(3, -2, 1, 0), (-15, 6, 0, 1)\}$, stąd

$$U : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -15x_1 + 6x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Układ ten opisuje W, bo jest oczywiste, że $W \subset$ (zbiór rozwiązań układu U) oraz (zbiór rozwiązań układu U) $\subset W$, ponieważ wymiar jest taki sam ($\dim U = 4 - 2 = 2$).

Zbiór rozwiązań układu U to jest układ rozwiązań dwóch równań liniowo niezależnych z czterema niewiadomymi. Przestrzeń rozwiązań ma wymiar $4 - 2 = 2$.

Twierdzenie: Dany jest układ równań liniowych

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Oraz macierz w przestrzeni rozwiązań układu U

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wówczas przestrzeń rozwiązań układu U ma wymiar $\dim W = n - r(A)$.

Ćwiczenia 14

Operacje na podprzestrzeniach, suma prosta

Uwaga: W_1 i W_2 to podprzestrzenie przestrzeni liniowej V, wówczas zbiory $W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1 \ \wedge \ \alpha_2 \in W_2\}$ oraz $W_1 \cap W_2$ też są przestrzeniami V.

Uwaga: Jeśli $W_1 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ oraz $W_2 = \mathrm{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, to $W_1 + W_2 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m)$.

Dowód: Zachodzi $W_1 + W_2 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \mathrm{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

$\subseteq$ Mamy $\forall_{\alpha \in W_1 + W_2}\ \alpha = \gamma_1 + \gamma_2$, gdzie $\gamma_1 \in W_1$ oraz $\gamma_2 \in W_2$, zatem $\alpha = \gamma_1 + \gamma_2 = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} d_i \beta_i$, czyli $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m)$.

$\supseteq$ Mamy $\forall_{\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m)}\ \alpha = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} d_i \beta_i$, gdzie $\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i \in W_1$ oraz $\sum_{i=1}^{m} d_i \beta_i \in W_2$, zatem $\alpha \in W_1 + W_2$. $\square$

Uwaga: $W_1, W_2 \subset K^n$ są opisane układami równań liniowych U_1 dla W_1 oraz U_2 dla W_2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + \ldots + c_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Wówczas $W_1 \cap W_2$ jest opisane układem równań U

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \\ c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + \ldots + c_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Zadanie 1.
Niech $W_1 = \mathrm{lin}((1,2,1,3),(2,3,2,4))$ oraz $W_2 = ((1,3,4,1),(2,4,5,2))$. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $W_1 \cap W_2$.

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Jeśli W_1, W_2 to przestrzenie V, to wtedy

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Możemy łatwo obliczyc $\dim(W_1 \cap W_2)$, ponieważ łatwo obliczyć $\dim(W_1 + W_2)$, $\dim W_1$ oraz $\dim W_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zatem $\dim W_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $\dim W_2 = 2$. Mamy $W_1 + W_2 = \mathrm{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 32, 4), (1, 3, 4, 1), (2, 4, 5, 2))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $\dim(W_1 + W_2) = 3$, skąd mamy $\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Znajdźmy bazę $W_1 \cap W_2$. W tym celu opisujemy W_1 i W_2 układami równań liniowych. Dla W_1 bierzemy $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_3 + a_4 \\ a_2 = -2a_4 \end{cases}$$

Mamy $(-a_3 + a_4, -2a_4, a_3, a_4) = a_3(-1, 0, 1, 0) + a_4(1, -2, 0, 1)$, zatem

$$U_1 = \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Dla W_2 bierzemy $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$

$$\begin{cases} b_1 + 3b_2 + 4b_3 + b_4 = 0 \\ 2b_1 + 4b_2 + 5b_3 + 2b_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}b_3 - b_4 \\ b_2 = -\frac{3}{2}b_3 \end{cases}$$

Mamy $\left(\frac{1}{2}b_3 - b_4, -\frac{3}{2}b_3, b_3, b_4\right) = \frac{1}{2}b_3(1, -3, 2, 0) + b_4(-1, 0, 0, 1)$, zatem

$$U_2 = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Zatem $W_1 \cap W_2$ opisane jest układem równań

$$U = \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Znajdźmy teraz bazę przestrzeni $W_1 \cap W_2$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $(x_4, x_4, x_4, x_4) = x_4(1, 1, 1, 1)$, skąd baza $W_1 \cap W_2$ to $\{(1, 1, 1, 1)\}$.

Uwaga: $W_1 \cup W_2$ prawie nigdy nie jest podprzestrzenią (jest, gdy $W_1 \subset W_2$ oraz $W_2 \subset W_1$)

Suma prosta

Definicja: W_1, W_2 to podprzestrzenie V, wówczas $V = W_1 \oplus W_2$ (czytaj V jest sumą prostą W_1 i W_2) wtedy i tylko wtedy, gdy $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ oraz $W_1 + W_2 = V$.

Przykład: Niech $V = \mathbb{R}^2$ oraz $W_1 = \text{lin}((1, 0))$. Dla jakiego W_2 może zachodzić $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$? W_2 może być dowolne, byleby leżało w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ oraz w W_1. W_2 może być na przykład równa $W_2 = \text{lin}((0, 1))$.

Uwaga: Jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą $W_1 \subset V$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_m$ jest bazą $W_2 \subset V$, to $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ jest bazą V.

Dowód:
$\Rightarrow$ Niech $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \in V = W_1 + W_2$, gdzie $\gamma_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in W_1$ i $\gamma_2 = b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m \in W_2$. Czyli $\gamma = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m$, zatem $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ są liniowo niezależne, bo $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m = 0$, gdyż $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ i mamy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne, więc $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ oraz analogicznie $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Zatem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ jest bazą V.

$\Leftarrow$ Jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ jest bazą V, to wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ są liniowo niezależne, zatem $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, bo w przeciwnym przypadku dowolny wektor byłby kombinacją liniową pozostałych. Ponadto $W_1 + W_2 = V$, zatem $W_1 \oplus W_2 = V$. $\square$

Zadanie 2.
Niech $W_1 = \text{lin}((1, 2, 1, 4), (2, 3, 1, 6))$ oraz $W_2 = \text{lin}((1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, t))$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$?

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Jeżeli $\dim V < \infty$ oraz $W_1, W_2 \subset V$ to podprzestrzenie, to wówczas $V = W_1 \oplus W_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ oraz $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

Mamy $W_1 + W_2 = \text{lin}((1,2,1,4),(2,3,1,6),(1,1,1,1),(1,1,0,t))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 \end{bmatrix}$$

Mamy więc $\dim(W_1 + W_2) = \begin{cases} 4 \text{ dla } t \neq 2 \\ 3 \text{ dla } t = 2 \end{cases}$. Zatem $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $\{(1,2,1,4),(2,3,1,6),(1,1,1,1),(1,1,0,t)\}$ jest bazą $\mathbb{R}^4$, czyli gdy $t \neq 2$.

Zadanie 3.
Niech $W \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie opisane układem równań

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć (przez podanie bazy) podprzestrzeń $W' \subseteq \mathbb{R}^4$ taką, że $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$.

Rozwiązanie:
Musimy znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu U i dopełnić ją do $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$(x_3 - 2x_4, -2x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(1,-2,1,0) + x_4(-2,1,0,1)$, zatem baza W to na przykład $\{(1,-2,1,0),(-2,1,0,1)\}$. Dopełniamy ją do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ na przykład wektorami $(1,0,0,0)$ i $(0,1,0,0)$ (dowolne wektory byle były liniowo niezależne z wektorami bazy W). Niech więc $W' = \text{lin}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$.

Ćwiczenia 15

Powtórzenie

Elementarne typy zadań z podstaw algebry

1. Zbadać, czy $\alpha \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Zadanie

Niech $\alpha_1 = (1, 0, 1, 2), \alpha_2 = (1, 3, 0, 1), \alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$. Czy $\beta = (1, 2, 0, 4) \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$?

Rozwiązanie:

Jeśli $\beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ to $(1, 2, 0, 4) = a_1 \cdot (1, 0, 1, 2) + a_2 \cdot (1, 3, 0, 1) + a_3 \cdot (1, 1, 1, 1)$ dla pewnych $a_1, a_2, a_3 \in K$. Mamy więc układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 3a_2 + a_3 = 2 \\ a_1 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Układ jest sprzeczny, zatem β nie jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

2. Zbadać, czy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Zadanie

Czy $\alpha_1 = (1, 1, 1, 0), \alpha_2 = (0, 1, 2, 3), \alpha_3 = (0, 1, 1, 1)$ jest liniowo niezależny?

Rozwiązanie:

Sposób I

Ten układ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze macierzy A utworzone z tych wektorów są liniowo niezależne, czyli gdy wiersze macierzy schodkowej B otrzymanej z A elementarnymi operacjami na wierszach są liniowo niezależne, czyli gdy macierz B nie ma wiersza zerowego.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zatem wektory są liniowo niezależne.

Sposób II

Wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są liniowo zależne, wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ ma niezerowe rozwiązanie.

3. Znaleźć bazę przestrzeni $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

   Niech $A \in M_{n\times m}(K)$ będzie macierzą o wierszach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz B to macierz schodkowa otrzymana z macierzy A elementarnymi operacjami na wierszach, wtedy $V = \operatorname{lin}(\text{ wiersze } A) = \operatorname{lin}(\text{ wiersze } B) = \operatorname{lin}(\text{ niezerowe wiersze } B)$. Niezerowe wiersze macierzy B są liniowo niezależne, czyli jest to baza W.

Zadanie Niech $W = \text{lin}((1,3,1,2),(1,1,1,1),(3,5,3,4))$. Znaleźć bazę przestrzeni W.

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza W to na przykład $\{(1,3,1,2),(0,2,0,1)\}$.

4. Znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego równań liniowych.

Zadanie
Dany jest układ równań liniowych w $\mathbb{R}^5$

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć bazę rozwiązań tego układu.

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$(x_3+3x_4, -3x_3-2x_4-x_4, x_3, x_4, x_5) = x_3(1,-3,1,0,0)+x_4(3,-2,0,1,0)+x_5(0,-1,0,0,1)$. Zatem baza to $\{(1,-3,1,0,0),(3,-2,0,1,0),(0,-1,0,0,1)\}$.

5. Znaleźć współrzędne wektora α w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Zadanie
Znaleźć współrzędne wektora $(4,-6,1,1,1)$ w bazie $\{(1,-3,1,0,0),(-3,2,0,1,0),(0,-1,0,0,1)\}$.

Rozwiązanie:
Mamy $(4,-6,1,1,1) = a_1 \cdot (1,-3,1,0,0) + a_2 \cdot (-3,2,0,1,0) + a_3 \cdot (0,-1,0,0,1)$ dla pewnych $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Daje nam to układ równań

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 4 \\ -3a_1 - 2a_2 - a_3 = -6 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

Zatem współrzędne wektora $(4,-6,1,1,1)$ w bazie $\{(1,-3,1,0,0),(-3,2,0,1,0),(0,-1,0,0,1)\}$ to $1,1,1$.

6. Obliczyć rząd macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$.

Zadanie

Oblicz rząd macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz ma trzy niezerowe wiersze, zatem $r(A) = 3$.

7. Opisać podprzestrzeń $W \subset K^n$ jednorodnym układem równań liniowych.

Zadanie

Opisz podprzestrzeń $W = \operatorname{lin}((1,1,1,1),(1,2,1,3),(2,3,2,4)) \subseteq \mathbb{R}^4$ jednorodnym układem równań liniowych.

Rozwiązanie:

Mamy równanie opisujące $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ oraz szukamy a_1, a_2, a_3, a_4. Muszą one spełniać układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a_1 = -a_3 + a_4 \\ a_2 = -2a_4 \end{cases}$$

Rozwiązanie ogólne układu to na przykład $(-a_3+a_4, -2a_4, a_3, a_4) = a_3(-1,0,1,0)+a_4(1,-2,0,1)$. Zatem układ opisujący W to

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Znaleźć bazę i wymiar $W_1 + W_2$ dla zadanych podprzestrzeni W_1, W_2 z V.

Zadanie

Niech $W_1 = \operatorname{lin}((1,3,1,4),(0,2,0,3)) \subseteq V$ oraz $W_2 = \operatorname{lin}((1,1,3,5),(2,2,4,6)) \subseteq V$, gdzie $V = \mathbb{R}^4$. Znaleźć bazę i wymiar $W_1 + W_2$.

Rozwiązanie:

Zawsze zachodzi $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, zatem mamy $W_1 + W_2 = \operatorname{lin}((1,3,1,4),(0,2,0,3),(1,1,3,5),(2,2,4,6))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza $W_1 + W_2$ to na przykład $\{(1,3,1,4),(0,2,0,3),(0,0,1,2)\}$, czyli $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

9. Znaleźć bazę i wymiar $W_1 \cap W_2$ dla zadanych podprzestrzeni W_1, W_2 z V.

Zadanie
Niech $W_1 = \operatorname{lin}((1,3,1,4),(0,2,0,3)) \subseteq V$ oraz $W_2 = \operatorname{lin}((1,1,3,5),(2,2,4,6)) \subseteq V$, gdzie $V = \mathbb{R}^5$. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni $W_1 \cap W_2$.

Rozwiązanie:
Mamy $\dim W_1 = 2$ oraz $\dim W_2 = 2$ oraz $\dim(W_1 + W_2) = 3$, zatem $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$. Aby znaleźć bazę $W_1 \cap W_2$, należy znaleźć układ równań opisujący W_1 i układ równań opisujący W_2. Następnie bierzemy układ złożony ze wszystkich równań z W_1 i W_2. Opisuje on przestrzeń $W_1 \cap W_2$. Następnie znajdujemy bazę danego układu. Wynosi ona $(1,1,1,1)$.

10. Dane są podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$. Zbadać, czy $V = W_1 \oplus W_2$.

Zadanie
Niech $W_1 \in \mathbb{R}^4$ opisane jest układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

oraz niech $W_2 = \operatorname{lin}((1,1,1,-1),(1,2,0,1))$. Czy $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$?

Rozwiązanie:
Wiemy, że gdy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą $W_1 \in V$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_m$ jest bazą $W_2 \in V$, to $V = W_1 \oplus W_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ jest bazą V. Wyznaczamy bazę W_1 i W_2. Wektory $(1,1,1,-1),(1,2,0,1)$ są liniowo niezależne, zatem jest to baza W_2. Dla W_1 mamy natomiast bazę $\{(-1,1,0,0),(1,0,-2,1)\}$. Sprawdzamy, czy $W_1 \oplus W_2 = V = W_1 + W_2$. Mamy $W_1 + W_2 = \operatorname{lin}((1,1,1,-1),(1,2,0,1),(-1,1,0,0),(1,0,-2,1))$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mamy $\dim W_1 = 2$ oraz $\dim W_2 = 2$ oraz $\dim(W_1 + W_2) = 4$, zatem prawdziwa jest równość $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$, zatem $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$.

11. Dla danej podprzestrzeni $W \subset V$ podać przykład takiej podprzestrzeni $W' \subset V$, że $V = W \oplus W'$.

Zadanie
Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisana równaniem $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Podać $W', W'' \subset \mathbb{R}^4$ przy czym $W' \neq W''$ takie, że $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$ oraz $\mathbb{R}^4 = W \oplus W''$.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy bazę W. Mamy $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \Leftrightarrow X_1 = x_2 - x_3 + x_4$, zatem w przestrzeni W leżą wektory postaci $(x_2 - x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(1,0,0,1)$. Zatem baza W to $\{(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$ oraz $\dim W = 3$. Dopełniamy bazę W do bazy $\mathbb{R}^4$ wektorem liniowo niezależnym z pozostałymi. Niech więc $W' = \operatorname{lin}((1,0,0,0))$ oraz $W'' = \operatorname{lin}((0,1,0,0))$.

O ciałach

1. Rozwiązywanie układów równań liniowych o współczynnikach w K.
2. Ciało licz zespolonych
    a) Znajdowanie postaci trygonometrycznej
    b) Dla $z \in \mathbb{C}$ znajdowanie z^n w postaci $a + bi$
    c) Skicowanie podzbiorów $D \subset \mathbb{C}$
    d) Znajdowanie pierwiastków z liczb zespolonych
    e) Rozkładanie wielomianów na czynniki stopnia 1 w $\mathbb{C}$

Ćwiczenia 16

Przekształcenie liniowe

Definicja: Funkcję $\phi : V \to W$ nazywamy przekształceniem liniowym jeśli $\forall_{\alpha,\beta \in V}\ \forall_{a \in K}$

a) $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$

b) $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$

Zadanie 1.
Wykazać, że $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ oraz dla każdego $a_1, \ldots, a_k \in K$ zachodzi $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k)$.

Rozwiązanie:
$\Leftarrow$ Mamy tu szczególny przypadek. Gdy $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ oraz $a_1 = a_2 = 1$ i $k = 2$, to mamy $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$. Gdy $\alpha_1 = \alpha$ oraz $a_1 = a$ i $k = 1$, to mamy $\phi(a \cdot \alpha) = \phi(a_1\alpha_1) = a_1\phi(\alpha_1) = a\phi(\alpha)$.

$\Rightarrow$ Stosujemy indukcję ze względu na k. Dla $k = 1$ mamy $\phi(a_1\alpha_1) = a_1\phi(\alpha_1)$. Mamy więc spełnione dla k i dowodzimy dla $k + 1$. Mamy $\phi((a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) + a_{k+1}\alpha_{k+1}) = \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) + \phi(a_{k+1}\alpha_{k+1}) = a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) + \phi(a_{k+1}\alpha_{k+1}) = a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) + a_{k+1}\phi(\alpha_{k+1})$.

Zadanie 2.
Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^m$. Niech $\forall_{j=1,\ldots,n}\ \phi(\varepsilon_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$. Znaleźć wzór na ϕ w zależności od $a_{ij} \in K$.

Rozwiązanie:
Mamy $\phi((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \phi(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n) = x_1\phi(\varepsilon_1) + x_2\phi(\varepsilon_2) + \ldots + x_n\phi(\varepsilon_n) = x_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) + \ldots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\ \ldots,\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)$.

Zadanie 3.
Sprawdzić, że dla każdych $a_{ij} \in K$ funcja $\phi : K^n \to K^m$ zadana wzorem $\phi((x_1, \ldots, x_m)) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,\ \ldots,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$ jest przekształceniem liniowym.

Rozwiązanie:
Niech $\alpha = (s_1, \ldots, s_n)$, $\beta = (t_1, \ldots, t_n)$. Wówczas $\alpha + \beta = (s_1 + t_1, \ldots, s_n + t_n)$, czyli mamy $\phi(\alpha + \beta) = \phi((s_1 + t_1, \ldots, s_n + t_n)) = (a_{11}(s_1 + t_1) + a_{12}(s_2 + t_2) + \ldots + a_{1n}(s_n + t_n),\ \ldots,\ a_{m1}(s_1 + t_1) + \ldots + a_{mn}(s_n + t_n)) = (a_{11}s_1 + a_{11}t_1 + \ldots + a_{1n}s_n + a_{1n}t_n,\ \ldots,\ a_{m1}s_1 + a_{m1}t_1 + \ldots + a_{mn}s_n + a_{mn}t_n) = (a_{11}s_1 + \ldots a_{1n}s_n,\ \ldots,\ a_{m1}s_1 + \ldots + a_{mn}s_n) + (a_{11}t_1 +\ d + a_{1n}t_n,\ \ldots,\ a_{m1}t_1 + \ldots + a_{mn}t_n) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$. Analogicznie $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$, zatem ϕ jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 4.
Zbadać czy dana funkcja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym

a) $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (5x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - 4x_3)$

b) $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 3x_2 + x_3 + 1, x_1 - x_2 - x_3 + 4)$

c) $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2 + 2x_2 + x_3, x_1 + 3x_3)$

d) $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + (x + 2 + 1)^2 - x_2^2 + x_3 - 1, x_1 + x_2 - x_3)$

Rozwiązanie:

a) Tak, bo jest dana wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x23x_3)$.

Uwaga: Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to $\phi(0) = 0$.

Dowód: $\phi(0) = \phi(0 \cdot \alpha) = 0 \cdot \phi(\alpha) = 0$ dla dowolnego $\alpha \in V$. $\square$

b) Nie, bo $\phi((0, 0, 0)) = (1, 4) \neq (0, 0)$.

c) Nie, bo niech $\alpha = (1, 0, 0), \beta = (1, 1, 1)$, wówczas $\alpha + \beta = (2, 1, 1)$. Mamy więc $\phi(\alpha) = (1, 1), \phi(\beta) = (4, 4)$ oraz $\phi(\alpha + \beta) = (7, 3)$, przy czym $\phi(\alpha) + \phi(\beta) \neq \phi(\alpha + \beta)$.

d) Tak, bo $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

Uwaga: Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ to baza V oraz dane są dowolne $\beta_1, \ldots, \beta_n \in W$. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ takie, że $\phi(\alpha_1) = \beta_1, \ldots, \phi(\alpha_n) = \beta_n$.

Zadanie 5.
Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\phi((0, 1)) = (1, 2, 3), \phi((1, 3)) = (4, 5, 2)$.

Rozwiązanie:
Ogólny wzór wygląda następująco $\phi((x_1, x_2)) = (a_{11}x_1 + x_{12}x_2, a_{21}x_1 + a22x_2, a_{31}x_1 + a_{32}x_2)$.

Sposób I
Podstawiamy $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 3)$ do ogólnego wzoru. Dostajemy układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi. Rozwiązujemy.

Sposób II Jak wiemy, wzór na ϕ łatwo dostać, gdy dane są wartości ϕ na bazie standardowej. Mamy $(1, 0) = (1, 3) - 3 \cdot (0, 1)$, zatem $\phi((1, 0)) = \phi((1, 3) - 3 \cdot (0, 1)) = \phi((1, 3)) - 3 \cdot \phi((0, 1)) = (4, 5, 2) - 3(1, 2, 3) = (1, -1, -7)$. Stąd $\phi((x_1, x_2)) = \phi(x_1(1, 0) + x_2(0, 1)) = x_1 \cdot \phi((1, 0)) + x_2 \cdot \phi((0, 1)) = x_1(1, -1, -7) + x_2(1, 2, 3) = (x_1, -x_1, -7x_1) + (x_2, 2x_2, 3x_2) = (x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2, -7x_1 + 3x_2)$.

Zadanie 6.
Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. W zbiorze $V_1 \times V_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$ wprowadzamy działania $(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$ oraz $a \cdot (\alpha_1, \alpha_2) = (a \cdot \alpha_1, a \cdot \alpha_2)$. Wykaż, że $V_1 \times V_2$ z tymi działaniami jest przestrzenią nad K.

Rozwiązanie:
Niech $(\alpha_1, \beta_1) \in V_1 \times V_2$ oraz $(\alpha_2, \beta_2) \in V_1 \times V_2$ i $a \in K$. Wówczas $(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 +$

$\alpha_2, \beta_1 + \beta_2) \in V_1 \times V_2$ oraz $a \cdot (\alpha_1, \beta_1) = (a \cdot \alpha_1, a \cdot \beta_1) \in V_1 \times V_2$, zatem $V_1 \times V_2$ jest podprzestrzenią nad K.

Zadanie 7.
Niech V, W to przestrzenie liniowe nad K. Dana jest funkcja $\phi \mid V \to W$. Niech $G_\phi = \{(\alpha, \phi(\alpha)) \mid \alpha \in V\} \subset V \times W$, gdzie G to wykres funkcji ϕ. Wykazać, że funkcja $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres G_ϕ jest podprzestrzenią tej przestrzeni $V \times W$.

Rozwiązanie:
Weźmy $(\alpha, \phi(\alpha)) \in V \times W$ oraz $(\beta, \phi(\beta)) \in V \times W$, wtedy $(\alpha, \phi(\alpha)) + (\beta, \phi(\beta)) = (\alpha + \beta, \phi(\alpha) + \phi(\beta)) = (\alpha+\beta, \phi(\alpha+\beta)) \in G_\phi$. Dla $a \in K$ mamy $(\alpha, \phi(\alpha))\cdot a = (\alpha\cdot a, \phi(\alpha)\cdot a) = a\cdot\alpha, \phi(a\cdot\alpha)) \in G_\phi$

Ćwiczenia 17

Baza i jądro przekształcenia

Pytanie: Dane są przestrzenie liniowe V, W nad ciałem K oraz wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_k \in W$. jak sprawdzić, czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ takie, że $\forall_{i=1,2,\ldots,k}\ \phi(\alpha_i) = \beta_i$?

Metoda: Rozpatrujemy podprzestrzeń $V_0 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in V$. Z układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wybieramy bazę $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{is}$ przestrzeni V_0. Definiujemy przekształcenie liniowe $\phi_0 : V_0 \to W$ przez warunek: $\phi_0(\alpha_{i1}) = \beta_{i1}, \phi_0(\alpha_{i2}) = \beta_{i2}, \ldots, \phi_0(\alpha_{is}) = \beta_{is}$. Wówczas przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ takie, że $\forall_{i=1,2,\ldots,k}\ \phi(\alpha_i) = \beta_i$ istnieje $\Leftrightarrow$ $\forall_{i=1,2,\ldots,k}\ \phi_0(\alpha_i) = \beta_i$.

Dowód:

$\Rightarrow$ Gdyby takie ϕ istniało, to mielibyśmy $\phi|_{V_0} = \phi_0$, bo przekształcenia te są równa na bazie przestrzeni V_0.

$\Leftarrow$ Przypuśćmy, że ϕ_0 spełnia $\forall_{i=1,2,\ldots,k}\ \phi_0(\alpha_i) = \beta_i$. Dopełniamy układ liniowo niezależny $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{is}$ do bazy $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{is}, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ przestrzeni V i definiujemy ϕ na tej bazie: $\phi(\alpha_{i1}) = \beta_{i1}, \ldots, \phi(\alpha_{is}) = \beta_{is}$ oraz $\phi(\gamma_j) = $ cokolwiek dla $j = 1, 2, \ldots, r$.

Zadanie 1.

Niech $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (2, 4, 5, 8)$, $\alpha_3 = (4, 6, 9, 14)$, $\alpha_4 = (1, 3, 3, 5)$. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takie, że $\phi(\alpha_1) = (1, 1)$, $\phi(\alpha_2) = (2, 3)$, $\phi(\alpha_3) = (4, 5)$, $\phi(\alpha_4) = (1, 2)$?

Rozwiązanie:

Znajdźmy bazę przestrzeni układów wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $\dim(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ oraz baza to $\{(1, 1, 2, 3), (2, 4, 5, 8)\}$. Niech dana podprzestrzeń to V_0. Definiujemy $\phi_0 : V_0 \to \mathbb{R}^2$. Mamy $\phi_0(\alpha_1) = (1, 1)$ oraz $\phi_0(\alpha_2) = (2, 3)$. Pytamy się czy $\phi_0(\alpha_3) = (4, 5)$? Mamy $\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, zatem $\phi_0(\alpha_3) = \phi_0(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2 \cdot \phi_0(\alpha_1) + \phi_0(\alpha_2) = 2 \cdot (1, 1) + (2, 3) = (4, 5)$. Pytamy się, czy $\phi_0(\alpha_4) = (1, 2)$? Mamy $\alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_1$, zatem $\phi_0(\alpha_4) = \phi_0(\alpha_2 - \alpha_1) = \phi_0(\alpha_2) - \phi_0(\alpha_1) = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$. Zatem takie przekształcenie ϕ istnieje. Definiujemy je następująco. Dopełniamy wektory $(1, 1, 2, 3), (2, 4, 5, 8)$ do bazy $\mathbb{R}^4$ wektorami $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$. Następnie zadajemy $\phi((1, 1, 2, 3)) = (1, 1)$, $\phi((2, 4, 5, 8)) = (2, 3)$, $\phi((1, 0, 0, 0)) = (0, 0)$, $\phi(0, 1, 0, 0)) = (0, 0)$ (byle co).

Zadanie 2.

Dane jest przekształcenie liniowe $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3, 3x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + 4x_3)$. Znaleźć bazy dwóch podprzestrzeni obrazu i jądra przekształcenia ϕ.

Rozwiązanie:

Znajdźmy bazę podprzestrzeni jądra ϕ. Mamy $(x_1, x_2, x_3) \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi((x_1, x_2, x_3)) = (0, 0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = 5x_3 \end{cases}$$

Zatem $(4x_3, 5x_3, x_3) = x_3(4, 5, 1)$, czyli baza przestrzeni $\ker(\phi)$ to $\{(4, 5, 1)\}$.

Uwaga: Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ to baza V, wówczas $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n))$.

Dowód:
$\subseteq$ Niech $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ (bo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą V) oraz niech $\phi(\alpha) \in \mathrm{im}(\phi)$, wtedy $\phi(\alpha) = \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n))$.

$\supseteq$ Niech $\gamma = a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) = \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) \in \mathrm{im}(\phi)$. $\square$

Znajdujemy bazę przestrzeni obrazu ϕ. Mamy $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(\phi((1, 0, 0)), \phi((0, 1, 0)), \phi((0, 0, 1)) = \mathrm{lin}((1, 2, 3, 1), (1, 1, 2, 0), (-1, 3, 2, 4))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}((1, 1, 2, 0), (1, 2, 3, 1))$. Ponadto $\dim\ker(\phi) = 1$ oraz $\dim\mathrm{im}(\phi) = 2$, czyli zgadza się, bo $\dim\mathbb{R}^3 = \dim\ker(\phi) + \dim\mathrm{im}(\phi)$.

Definicja: Załóżmy, że $V = W_1 \oplus W_2$, gdzie W_1, W_2 to podprzestrzenie zawarte w V. Dla każdego $\alpha \in V$ istnieje zatem $\alpha_1, \in W_1$ oraz $\alpha_2 \in W_2$ jednoznacznie wyznaczone, takie, że $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Definiujemy $\phi : V \to V$: dla każdego α zachodzi $\phi(\alpha) = \alpha_1$. Takie ϕ jest rzutem (=rzutowaniem) na W_1 wzdłuż W_2.

Zadanie 3.
Sprawdzić, że takie ϕ jest przekształceniem liniowym.

Rozwiązanie:
Niech $\alpha_1 \in A$ oraz $\beta_1 \in B$ przy czym $\alpha_1 + \beta_1 \in A \oplus B$, zatem $\phi(\alpha + \beta) = \alpha_1 + \beta_1 = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$. Dla $a \in K$ mamy $a \cdot \phi(\alpha) = a \cdot \alpha_1 = \phi(a \cdot \alpha)$, bo $a \cdot \alpha_1 \in A$.

Zadanie 4.
Niech $\phi : V \to V$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $\phi \circ \phi = \phi$. Wykazać, że ϕ jest rzutem, to znaczy że istnieje $W_1, W_2 \subset V$ takie, że $V = W_1 \oplus W_2$ oraz ϕ jest rzutem na W_1 wzdłuż W_2.

Rozwiązanie:
Niech $W_1 = \mathrm{im}\phi$ oraz $W_2 = \ker\phi$. Wykażemy, że $V = W_1 \oplus W_2$. Niech $\alpha \in \ker\phi \cap \mathrm{im}\phi$,

czyli $\alpha = \phi(\beta)$ dla pewnego β, bo $\alpha \in \mathrm{im}\phi$. Ponadto $\phi(\alpha) = 0$, bo $\alpha \in \ker\phi$. Mamy $\phi(\alpha) = \phi(\phi(\beta)) = \phi(\beta) = \alpha$, czyli $\alpha = 0$. Zatem $\ker\phi \cap \mathrm{im}\phi = \{0\}$. Mamy wykazać, że dla każdego $\alpha \in V$ istnieje $\alpha_1 \in \ker\phi$ i $\alpha_2 \in \mathrm{im}\phi$, że $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Weźmy $\alpha_2 = \phi(\alpha) \in \mathrm{im}\phi$ oraz $\alpha_1 = \alpha - \phi(\alpha) \in \ker\phi$, bo $\phi(\alpha - \phi(\alpha)) = \phi(\alpha) - \phi(\phi(\alpha)) = \alpha - \alpha = 0$. Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\alpha = \underbrace{\phi(\alpha)}_{\in W_1} + \underbrace{\alpha - \phi(\alpha)}_{\in W_2}$. Zatem $\alpha \in W_1 + W_2$. Dla takich W_1 i W_2 rzut na W_1 wzdłuż W_2 przyporządkowuje każdemu $\alpha \in W$ wekor $\alpha_1 = \phi(\alpha)$, czyli rzut na W_1 wzdłuż W_2 jest to ϕ.

Ćwiczenia 18

Monomorfizmy, epimorfizmy, izomorfizmy

Definicja: Niech $\phi : V \to W$ to przekształcenie liniowe

- ϕ jest monomorfizmem, jeśli ϕ jest różnowartościowe
- ϕ jest epimorfizmem, jeśli ϕ jest "na"
- ϕ jest izomorfizmem, jeśli ϕ jest różnowartościowe i jest "na"

Uwaga:

- ϕ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow \ker\phi = \{0\}$
- ϕ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow \mathrm{im}\phi = W$

Dowód:
$\Rightarrow$ $\alpha \in \ker\phi \Rightarrow \phi(\alpha) = 0 = \phi(0) \Rightarrow \alpha = 0$, zatem $\ker\phi = \{0\}$

$\Leftarrow$ Niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \phi(\alpha) - \phi(\beta) = 0 \Rightarrow \phi(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in \ker\phi = \{0\} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$, zatem ϕ jest monomorfizmem.

Zadanie 1.
Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$

a) Czy ϕ jest monomorfizmem?

b) Czy ϕ jest epimorfizmem?

Rozwiązanie:

a) Mamy $\ker\phi = \{(x_1, x_2) \mid \phi((x_1, x_2)) = (0, 0, 0)\}$, zatem mamy układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Zatem ϕ jest monomorfizmem.

b) GŁUPIE PYTANIE! Nie istnieje epimorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Uwaga: Niech $\phi : V \to W$ to przekształcenie liniowe

- ϕ jest monomorfizmem $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$
- ϕ jest epimorfizmem $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$

Dowód: Wiemy, że $\dim V = \dim\ker\phi + \dim\mathrm{im}\phi$. Jeżeli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim\ker\phi = 0$, zatem $\dim V = \dim\mathrm{im}\phi$, ale $\mathrm{im}\phi \subset W$, zatem $\dim\mathrm{im}\phi \leq \dim W$. Jeżeli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim\mathrm{im}\phi = \dim W$, bo $\mathrm{im}\phi = W$, zatem $\dim V = \dim\ker\phi + \dim W$, czyli $\dim V \geq \dim W$. Ponadto jeżeli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim V = \dim W$. $\square$

Zadanie 2.
Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym, $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 = -x_2 + 2x_3)$

a) Czy ϕ jest epimorfizmem?

b) Czy ϕ jest monomorfizmem?

Rozwiązanie:

a) Mamy $\mathrm{im}\phi = \mathrm{lin}(\phi(\varepsilon_1), \phi(\varepsilon_2), \phi(\varepsilon_3))$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ to baza standardowa $\mathbb{R}^3$. Mamy $\phi(\varepsilon_1) = (2, 1), \phi(\varepsilon_2) = (1, -1), \phi(\varepsilon_3) = (1, 2)$. Mamy $\dim(\mathrm{lin}((2, 1), (1, -1), (1, 2))) = 2$, ponieważ $\mathrm{lin}((2, 1), (1, -1), (1, 2)) = \mathrm{lin}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$, zatem ϕ jest epimorfizmem.

b) Nie, bo nie istnieje monomorfizn $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Zadanie 3.
Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 5x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + tx_3)$ jest izomorfizmem?

Rozwiązanie:

Uwaga: Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\dim V = \dim W = n$. Wówczas ϕ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ ϕ jest izomorfizmem $\Leftrightarrow$ ϕ jest epimorfizmem.

Dowód: ϕ jest izomorfizmem $\Rightarrow$ ϕ jest monomorfizmem i ϕ jest izomorfizmem $\Rightarrow$ ϕ jest epimorfizmem są oczywistymi inkluzjami. Pokażemy ϕ jest monomorfizmem $\Rightarrow$ ϕ jest epimorfizmem. Jeśli ϕ jest monomorfizmem, to mamy $\dim W = \dim V = \dim\ker\phi + \dim\mathrm{im}\phi = 0 + \dim\mathrm{im}\phi$, zatem $\dim W = \dim\mathrm{im}\phi$, czyli $W = \mathrm{im}\phi$, zatem ϕ jest epimorfizmem. Pokażemy ϕ jest epimorfizmem $\Rightarrow$ ϕ jest monomorfizmem. Jeżeli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W = \dim V = \dim\ker\phi + \dim\mathrm{im}\phi = \dim\ker\phi + \dim W$, zatem $\dim\ker\phi = 0$, czyli $\ker\phi = \{0\}$, zatem ϕ jest monomorfizmem. Skoro ϕ jest monomorfizmem oraz ϕ jest epimorfizmem to też jest izomorfizmem. $\square$

Sprawdźmy kiedy ϕ jest monomorfizmem. Mamy $\ker\phi = \{0\}$, czyli $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + tx_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & t & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy $\ker\phi = 0$ gdy $t \neq -2$.

Sposób II Mamy $\mathrm{im}\phi = \mathrm{lin}((1, 2, 1), (2, 5, 3), (3, 1, t))$. Wyliczamy, że $\dim\mathrm{im}\phi = 3 \Leftrightarrow t \neq -2$.

Zadanie 4.
Niech $\phi : V \to W$ będzie izomorfizmem, zatem ϕ jest różnowartościowa i "na", czyli ϕ jest bijekcją.

Niech $\psi : W \to V$ będzie bijekcją odwrotną do ϕ, czyli $\psi(\beta) = \alpha \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \phi(\alpha) = \beta$. Czy takie ψ jest przekształceniem liniowym?

Rozwiązanie:
Tak, bo: Niech $\beta_1, \beta_2 \in W$. Pytamy się czy $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \psi(\beta_1) + \psi(\beta_2)$? Niech $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, czyli $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ oraz $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Pytamy się czy $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, czyli czy $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$, czyli czy $\phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$. Ale tak przecież jest. Tak samo pokazujemy, że $\psi(a \cdot \beta) = a \cdot \psi(\beta)$.

Zadanie 5.
Podać przykład monomorfizmu $\phi : V \to V$, który nie jest izomorfizmem (czyli V jest nieskończenie wymiarowa).

Rozwiązanie:
Niech $\phi : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, $\phi(a_i) = b_i$, gdzie $b_i = a_{i-1}$ dla $i \geq 2$ oraz $b_1 = 0$. Inaczej niech $\phi((a_1, a_2, \ldots)) = (0, a_1, a_2, \ldots)$.

Zadanie 6.
Podać przykład epimorfizmu $\phi : W \to W$, który nie jest monomorfizmem.

Rozwiązanie:
Niech $\phi : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, $\phi(a_i) = b_i$, gdzie $b_i = a_{i+1}$ dla każdego i. Inaczej niech $\phi((a_1, a_2, \ldots)) = (a_2, a_3, \ldots)$.

Jaki jest najważniejszy izomorfizm na świecie ALGEBRY?

> **Uwaga:** Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza przestrzeni V nad K. Każda taka baza $\mathcal{A}$ zadaje izomorfizm $\phi : V \to K^n$. Dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zachodzi $\phi(\alpha_i) = \varepsilon_i$, czyli mamy $\phi(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n$, bo $\phi(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = \phi(x_1\alpha_1) + \ldots + \phi(x_n\alpha_n) = x_1\phi(\alpha_1) + \ldots + x_n\phi(\alpha_n) = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Niech V, W to przestrzenie liniowe nad K, czyli $\dim V = \dim W = n$. Niech $\phi : V \to K^n$, $\psi : W \to K^n$ oraz niech $\psi' : K^n \to W$ takie, że ψ' jest odwrotne do ψ, wówczas

$$V \overset{\phi}{\ } \overset{\text{izomorfizm}}{\longrightarrow} K^n \overset{\psi'}{\ } \overset{\text{izomorfizm}}{\longrightarrow} W$$

Zadanie 7.
Wykazać, że jeśli $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem oraz $\psi : W \to Z$ jest izomorfizmem, to $\psi \circ \phi : V \to Z$ jest izomorfizmem.

Rozwiązanie:
Jeżeli ϕ jest monomorfizmem oraz ψ jest monomorfizmem, to $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem, bo $\psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta)) \Rightarrow \phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$. Jeżeli ϕ jest epimorfizmem oraz ψ jest epimorfizmem, to $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem, bo z tego, że $\gamma \in Z$ i ψ jest epimorfizmem wynika, że $\gamma = \psi(\beta)$ dla pewnego $\beta \in W$. Z tego, że ϕ jest epimorfizmem wynika, że $\beta = \phi(\alpha)$ dla pewnego $\alpha \in V$. Wówczas $\gamma = \psi(\beta) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi \circ \phi(\alpha)$. Zatem $\psi \circ \phi : V \to Z$ jest izomorfizmem.

Zadanie 8.
Wykazać, że $\phi : V \to W$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\psi : W \to V$ liniowe, takie, że $\psi \circ \phi = id_V$ (załóżmy, że $\dim V$ oraz $\dim W$ są skończone)

Rozwiązanie:
$\Rightarrow$ Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza przestrzeni V, wtedy układ wektorów $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \ldots, \phi(\alpha_n)$ w W jest liniowo niezależny. Dopełniamy go do bazy $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \ldots, \phi(\alpha_n), \beta_1, \ldots, \beta_r$ przestrzeni W. Definiuję $\psi : W \to V$ na bazie W, $\psi(\phi(\alpha_1)) = \alpha_1, \psi(\phi(\alpha_2)) = \alpha_2, \ldots, \psi(\phi(\alpha_n)) = \alpha_n$ oraz $\psi(\beta_1) =$ byle co $, \ldots, \psi(\beta_n) =$ byle co (na przykład wektor zerowy). Oczywiście $\psi \circ \phi = id_V$.

$\Leftarrow$ Istnieje $\psi : W \to V$ takie, że $\psi \circ \phi = id_V$. Gdyby $\phi(\alpha) = 0$, to $\psi \circ \phi(\alpha) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(0) = 0$, ale $id(\alpha) = \alpha$, zatem $\ker \phi = \{0\}$.

Ćwiczenia 19

Macierze przekształceń liniowych

Definicja: Nad ciałem dane jest przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ to baza V oraz niech $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ to baza W. Macierz przekształcenia ϕ w bazach $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ to $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ taka, że $\forall_{j=1,2,\ldots,n}\ \phi(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$. To znaczy

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j-ta kolumna to współrzędne wektora $\phi(\alpha_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Zadanie 1.
Dane jest przekształcenie liniowe: $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 + x_2 + 5x_3)$ oraz bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (1, 1, 1), \alpha_3 = (0, 1, 0)\}$ i $\mathcal{B} = \{\beta_1 = (2, 1), \beta_2 = (1, 0)\}$. Oblicz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\phi(\alpha_1) = (-5, 18) = 18 \cdot (2, 1) - 41 \cdot (1, 0)$, $\phi(\alpha_2) = (0, 7) = 7 \cdot (2, 1) - 14 \cdot (1, 0)$ oraz $\phi(\alpha_3) = (1, 1) = 1 \cdot (2, 1) - 1 \cdot (1, 0)$, zatem mamy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 18 & 7 & 1 \\ -41 & -14 & -1 \end{bmatrix}$. Gdybyśmy mięli $\mathcal{B}' = \{(1, 0), (2, 1)\}$, to wtedy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -41 & -14 & -1 \\ 18 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2.
Niech $\mathcal{A} = \{(1, 1), (1, 0)\}$ oraz $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć wzór na ϕ.

Rozwiązanie:
Dla każdego j wyliczamy $\phi(\alpha_i)$. Mamy wartość ϕ na bazie $\mathcal{A}$, zatem umiemy znaleźć wzór.

$$\phi((1, 1)) = 5 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (1, 0, 1) + 3 \cdot (1, 1, 0) = (9, 8, 6)$$

$$\phi((1, 0)) = 2 \cdot (1, 1, 1) + 7 \cdot (1, 0, 1) + 3 \cdot (1, 1, 0) = (12, 5, 9)$$

Na wektorze $(0, 1)$ mamy

$$\phi((0, 1)) = \phi((1, 1) - \phi((1, 0)) = (9, 8, 6) - (12, 5, 9) = (-3, 3, -3)$$

Stąd

$$\phi((x_1, x_2)) = x_1 \cdot \phi((1, 0)) + x_2 \cdot ((0, 1)) = (12x_1 - 3x_2, 5x_1 + 3x_2, 9x_1 - 3x_2)$$

Zadanie 3.
Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 + x_2 + 5x_3)$. Znaleźć $M(\phi)_{st}^{st}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\phi((1,0,0)) = (2,1) = 2\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)$, $\phi((0,1,0)) = (1,1) = 1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)$ oraz $\phi((0,0,1)) = (-3,5) = -3\cdot(1,0)+5\cdot(0,1)$, zatem mamy $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Definicja: Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$. Rzędem przekształcenia ϕ nazywamy liczbę $r(\phi) = \dim \mathrm{im}\phi$.

Zadanie 4.
Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+x_2+x_3, 2x_1+3x_2+4x_3, x_1+2x_2+3x_3)$. Oblicz $r(\phi)$.

Rozwiązanie:
Znajdujemy obraz przekształcenia $\mathrm{im}\phi = \mathrm{lin}(\phi(\varepsilon_1), \phi(\varepsilon_2), \phi(\varepsilon_3)) = \mathrm{lin}((1,2,1),(1,3,2),(1,4,3))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $\dim \mathrm{im}\phi = 2$, czyli $r(\phi) = 2$.

Zadanie 5.
Niech $\phi : V \to W$ to przekształcenie liniowe $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ to baza V oraz $\mathcal{B} = \{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ to baza W. Wykazać, że $r(\phi) = r(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})$.

Rozwiązanie:
Mamy $r(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \dim \mathrm{lin}(\text{kolumny macierzy } M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})$ oraz $r(\phi) = \dim \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1),\ldots,\phi(\alpha_n))$. Mamy dwie przestrzenie liniowe:

- $\mathrm{lin}(\text{kolumny macierzy } M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) \subseteq K^m$
- $\mathrm{lin}(\phi(\alpha_1),\ldots,\phi(\alpha_n)) \subseteq W$

Uwaga: Niech $\psi : W \to Z$ będzie izomorfizmem, wówczas dla każdej podprzestrzeni $W_1 \subset W$ przekształcenie $\psi|_{W_1} : W_1 \to \phi(W_1)$ jest izomorfizmem.

Niech więc $\psi : W \to K^m$ będzie izomorfizmem oraz $\phi(W_1) = \mathrm{lin}(\text{kolumny macierzy } M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) \subseteq K^m$ i $W_1 = \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1),\ldots,\phi(\alpha_n)) \subseteq W$. ψ przyporządkowuje każdemu $\beta \in W$ jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$, czyli $\psi(x_1\beta_1+\ldots+x_m\beta_m) = (x_1,\ldots,x_m)$. Wtedy dla każdego $1 \leq j \leq n$ mamy $\psi(\phi(\alpha_j)) = j$-ta kolumna macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Zatem mamy izomorfizm $\psi|_{\mathrm{lin}(\phi(\alpha_1),\ldots,\phi(\alpha_n))} : \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1),\ldots,\phi(\alpha_n)) \to \mathrm{lin}(\text{kolumny macierzy } M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})$, skąd wynika teza.

Zadanie 6.
Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+2x_2+x_3, 2x_1+x_2=x_3)$. Podać przykład takich baz $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathcal{B} = \{\beta_1,\beta_2\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:
Mamy $\phi(\alpha_1) = 0 \cdot \beta_1 + 1 \cdot \beta_2 = \beta_2$, $\phi(\alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$ oraz $\phi(\alpha_3) = \beta_1 + 2 \cdot \beta_2$. Niech na przykład $\alpha_1 = (1, 0, 0)$, wtedy $\beta_2 = \phi(\alpha_1) = (1, 2)$. Niech na przykład $\alpha_2 = (0, 1, 0)$, wtedy $\beta_1 = \phi(\alpha_2) - \beta_2 = (2, 1) - (1, 2) = (1, -1)$. Szukamy takiego $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)$, że $\phi(\alpha_3) = \beta_1 + 2\beta_2 = (1, -1) + 2 \cdot (1, 2) = (3, 3)$. Mamy więc układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

Niech więc $x_3 = 3$, wówczas $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 0$, zatem $\alpha_3 = (0, 0, 3)$. Musimy sprawdzić, czy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są liniowo niezależne oraz czy β_1, β_2 są liniowo niezależne. Gdyby tak nie było, to musimy inaczej dobierać wektory.

Ćwiczenia 20

Macierze operacji elementarnych

Zadanie 1.

Obliczyć $A \cdot B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 16 & -2 \\ 3 & -1 \\ 18 & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie: Dane są przekształcenia liniowe $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ oraz $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ to baza W i $\mathcal{C} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ to baza Z. Wówczas

$$M(\psi \circ \phi)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}} = M(\psi)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$$

Zadanie 2.
Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ to baza przestrzeni V oraz $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ to baza przestrzeni W. Niech $\phi : V \to W$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ Niech $\alpha \in V$ i $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ oraz niech $\phi(\alpha) = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 + b_4\beta_4$. Ile wynosi b_2?

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Niech $\phi : V \to W$ to przekształcenie liniowe oraz niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza V i $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ to baza W. Jeżeli $\alpha \in V$ i $\alpha = s_1\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n$ oraz $\phi(\alpha) = t_1\beta_1 + \ldots + t_m\beta_m$ to

$$M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}$$

Zatem $b_2 = 2 + 5 + 3 = 10$ (suma drugiego wiersza macierzy $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$).

Zadanie 3.
Weźmy dwie bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(1,2,3), (0,1,4), (0,0,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,1,1), (1,0,0)\}$. Znaleźć macierz $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ o następującej własności $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}^3}$ jeżeli $\alpha = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3 =$

$t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + t_3\beta_3$, to $C \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:
Zastosujemy powyższe twierdzenie dla $id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Mamy

$$id(\alpha_1) = \alpha_1 = (1,2,3) = -1 \cdot (1,1,0) + 3 \cdot (1,1,1) - 1 \cdot (1,0,0)$$

$$id(\alpha_2) = \alpha_2 = (0,1,4) = -3 \cdot (1,1,0) + 4 \cdot (1,1,1) - 1 \cdot (1,0,0)$$

$$id(\alpha_3) = \alpha_3 = (0,0,1) = -1 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (1,0,0)$$

Zatem

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Na przykład niech $\alpha = 5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = (5,10,15) + (0,2,8) + (0,0,4) = (5,12,27) = -15 \cdot (1,1,0) + 27 \cdot (1,1,1) - 7 \cdot (1,0,0)$, skąd macierz C spełnia warunki, bo

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 27 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.
Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ to przekształcenie liniowe, gdzie $\dim V = 4$, $\dim W = \dim Z = 3$. Niech $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ Współrzędne wektora α w bazie $\mathcal{A}$ wynoszą $1, 2, 1, 2$. Oblicz współrzędne wektora $(\psi \circ \phi)(\alpha) \in Z$ w bazie $\mathcal{C}$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Wyliczamy $M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 9 \\ 8 & 11 & -2 & 1 \\ 7 & 11 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Dalej mamy

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 9 \\ 8 & 11 & -2 & 1 \\ 7 & 11 & 1 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 30 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Sposób II
Najpierw wyliczamy współrzędne wektora $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$, a następnie obliczamy współrzędne wektora $\psi(\phi(\alpha))$ w bazie $\mathcal{C}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 30 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Współrzędne wektora $(\psi \circ \phi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C}$ to $32, 20, 52$.

Operacje elementarne a mnożenie macierzy

Definicja: Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ zachodzi:

$$E^n_{ij}(a) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & a & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array} & \end{array}$$

$E^m_{ij}(a) \cdot A =$ macierz powstała z A przez dodanie do i-tego wiersza j-tego wiersza pomnożonego przez a.

$$T^n_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \dots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \dots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

$T^m_{ij} \cdot A =$ macierz powstała z A przez przestawienie i-tego i j-tego wiersza.

$$I^n_i(c) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} & \end{array}$$

$I^m_i(c) \cdot A =$ macierz powstała z A przez przemnożenie i-tego wiersza przez c.

Uwaga: Dana jest macierz $A \in M_{n\times n}(K)$, wówczas $r(A) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A można elementarnymi operacjami na wierszach sprowadzić do macierzy jednostkowej I.

Dowód:
Każdą macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ można sprowadzić elementarnymi operacjami na wierszach do macierzy schodkowej zredukowanej $B \in M_{n\times n}(K)$. Mamy $r(A) = r(B)$, stąd $r(A) = n \Leftrightarrow r(B) = n \Leftrightarrow B = I$. $\square$

Wniosek: Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Jeżeli $r(A) = n$, to A jest iloczynem macirzy operacji elementarnych.

Dowód: Skoro $r(A) = n$, to istnieją macierze operacji elementarnych $P_1, P_2, \dots, P_k$ takie, że $P_k \cdot \ldots P_2 \cdot P_1 \cdot A = I$ (mnożenie macierzy jest łączne, ponieważ przekształcenia liniowe są łączne, a to jest złożenie). $\square$

Jeżeli P jest macierzą operacji elementarnych, to istnieje macierz P' taka, że $P' \cdot P = I$. Dla $P = E_{ij}(a)$ mamy $P' = E_{ij}(-a)$, dla $P = T_{ij}$ mamy $P' = T_{ij}$, dla $P = I_{ij}(c)$ mamy $P' = I_{ij}\left(\frac{1}{c}\right)$.

Zadanie 5.
Przedstawić macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

Rozwiązanie:
Zeschodkujmy macierz A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2w_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}(2) \cdot E_{12}(2)$$

Mamy również

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = I = E_{12}(-2) \cdot E_{21}(-2) \cdot A$$

Ćwiczenia 21
Przestrzenie przekształceń liniowych

Definicja: Niech V, W to przestrzenie liniowe nad K.

$$L(V, W) = \{\phi : V \to W \mid \phi \text{ jest przekształceniem liniowym}\}$$

Uwaga: Dla każdego niepustego zbioru X zbiór $F(X, W) = \{\text{funkcje } X \to W\}$ jest przestrzenią liniową, gdzie $(f + g)(\alpha) \overset{\text{def}}{=} f(\alpha) + g(\alpha)$ oraz $(a \cdot f)(\alpha) \overset{\text{def}}{=} a \cdot f(\alpha)$. (0 w $F(X, W)$ jest to funkcja $f : X \to W$ taka, że dla każdego $\alpha \in X$ zachodzi $f(\alpha) = 0$.

Zadanie 1.
Wykazać, że $L(V, W)$ jest przestrzenią liniową nad K.

Rozwiązanie:
$L(V, W)$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $F(V, W)$, bo:

- Weźmy $\phi, \psi \in L(V, W)$. Czy $\phi + \psi$ jest liniowe?
  - $\to$ Weźmy $\alpha, \beta \in V$, wówczas $(\phi + \psi)(\alpha + \beta) = \phi(\alpha + \beta) + \psi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) + \psi(\alpha) + \psi(\beta) = (\phi + \psi)(\alpha) + (\phi + \psi)(\beta)$
  - $\to$ Weźmy $\alpha \in V$ i $c \in K$, wówczas $(\phi + \psi)(c \cdot \alpha) = \phi(c \cdot \alpha) + \psi(c \cdot \alpha) = c \cdot \phi(\alpha) + c \cdot \psi(\alpha) = c \cdot (\phi(\alpha) + \psi(\alpha)) = c \cdot ((\phi + \psi)(\alpha))$

  Zatem $\phi + \psi$ jest liniowe
- Weźmy $\phi \in L(V, W)$ i $c \in K$. Czy $c \cdot \phi$ jest liniowe?
  - $\to$ Weźmy $\alpha, \beta \in V$, wówczas $(c \cdot \phi)(\alpha + \beta) = c \cdot \phi(\alpha + \beta) = c \cdot (\phi(\alpha) + \phi(\beta)) = c \cdot \phi(\alpha) + c \cdot \phi(\beta)$
  - $\to$ Weźmy $\alpha \in V$ i $a \in K$, wówczas $(c \cdot \phi)(a \cdot \alpha) = c \cdot a \cdot \phi(\alpha)$

  Zatem $c \cdot \phi$ jest liniowe

Zadanie 2.
Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą V, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ będzie bazą W. Definiujemy funkcję $P : L(V, W) \to M_{m \times n}(K)$, że $P(\phi) = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Wykazać, że

a) P jest przekształceniem liniowym

b) P jest izomorfizmem

Rozwiązanie:

a) P jest liniowe, bo:

- Niech $\phi, \psi \in L(V, W)$, wówczas $P(\phi + \psi) = M(\phi + \psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} + M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = P(\phi) + P(\psi)$. Musimy udowodnić, że $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} + M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$. Niech więc $\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + \ldots + a_{mj}\beta_m$ oraz $\psi(\alpha_j) = b_{1j}\beta_1 + \ldots + b_{mj}\beta_m$. Zatem j-ta kolumna macierzy $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ wynosi $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ natomiast j-ta kolumna macierzy $M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ wynosi $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$. Mamy więc $(\phi + \psi)(\alpha_j) = \phi(\alpha_j) + \psi(\alpha_j) = (a_{1j} + b_{1j})\beta_1 + \ldots + (a_{mj} + b_{mj})\beta_m$, skąd j-ta kolumna macierzy $M(\phi + \psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ wynosi $\begin{bmatrix} a_{1j} + n_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} + b_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$. Czyli każda kolumna macierzy $M(\phi + \psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ jest sumą odpowiednich kolumn macierzy $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ oraz $M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.
- Niech $\phi \in L(V, W)$ oraz $c \in K$, wówczas $P(c \cdot \phi) = M(c \cdot \phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = c \cdot M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = c \cdot P(\phi)$.

b) P jest izomorfizmem, bo:

- P jest monomorfizmem, bo: Niech $P(\phi) = 0$, czyli dla każdego j zachodzi $\phi(\alpha_j) = 0 \cdot \beta_1 + \ldots + 0 \cdot \beta_m = 0$, czyli ϕ jest przekształceniem zerowym, zatem $\ker(P) = \{0\}$
- P jest epimorfizmem, bo: Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ jest takie, że dla każdego j zachodzi $\phi(\alpha_k) \overset{\text{def}}{=} a_{1j}\beta_1 + \ldots + a_{mj}\beta_m$. Wtedy $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = [a_{ij}]$, czyli P jest epimorfizmem.

Zadanie 3.
Obliczyć wymiar $M_{m\times n}(K)$

Rozwiązanie:
$\dim M_{m\times n}(K) = m \cdot n$, bo przykładowa baza przestrzeni macierzy $M_{m\times n}(K)$ to:

$$\{M_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \qquad M_{ij} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & & 0 \\ \hline & 1 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \end{array}$$

$$\text{czyli } M_{ij} = [m_{st}], \text{ gdzie } m_{st} = \begin{cases} 1, \text{ gdy } s = i,\ t = j \\ 0, \text{ gdy } s \neq i \ \vee \ t \neq j \end{cases}$$

Łatwo widać, że ta baza ma $m \cdot n$ elementów, ponadto $A = [a_{ij}] = \sum\limits_{i,j} a_{ij} M_{ij}$.

Wniosek: Jeśli $\dim V = n$, $\dim W = m$, to $\dim L(V, W) =\sim M_{m\times n}(K) = m \cdot n = \dim V \cdot \dim W$.

Fakt: Jeżeli $G : Z \to W$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, to każda baza $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ przestrzeni Z wyznacza bazę $\{G(\alpha_1), \ldots, G(\alpha_n)\}$ przestrzeni W. Na odwrót: każda baza $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ przestrzeni W wyznacza bazę $\{G^{-1}(\beta_1), \ldots, G^{-1}(\beta_m)\}$ przestrzeni Z.

Zadanie 4.
Przy izomorfizmie $P : L(V,W) \to M_{m\times n}(K)$ jakiej bazie przestrzeni $L(V,W)$ odpowiada baza $\{M_{ij}\}_{i,j}$ przestrzeni $M_{m\times n}(K)$?

Rozwiązanie:
Jest to baza $\{\phi_{ij}\}_{ij}$, gdzie $\phi_{ij} : V \to W$ jest przekształceniem liniowym

$$\phi(\alpha_k) = \begin{cases} \beta_i \text{ dla } k = j \\ 0 \text{ dla } k \neq j \end{cases}$$

Zadanie 5.
Niech V, W to przestrzenie liniowe nad K. Niech $V_1 \subset V, W_1 \subset W$ to podprzestrzenie. Niech $Z = \{\phi \in L(V,W) \mid \forall_{\alpha\in V_1}\ \phi(\alpha) \in W_1\}$ to jest podprzestrzeń w $L(V,W)$. Niech $\dim V = 7$, $\dim V_1 = 3$, $\dim W = 4$, $\dim W_1 = 2$. Obliczyć $\dim Z$.

Rozwiązanie:
Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ to baza V_1. Dopełniamy ją do bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ przestrzeni V. Niech $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ to baza W_1. Dopełniamy ją do bazy $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ przestrzeni W. Wówczas izomorfizm $P : L(V,W) \to M_{4\times 7}(K)$ taki, że $P(\phi) = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ spełnia

$$P(Z) = \left\{ \text{macierze postaci: } \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix} \right\}$$

bo $\phi(\alpha_1) \in W_1 = \mathrm{lin}(\beta_1, \beta_2)$ oraz $\phi(\alpha_1) = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + 0\cdot\beta 3 + 0\cdot\beta_4$. Zatem $\dim P(Z) = \dim Z = 28 = 6 = 22$, bo P zadaje izomorfizm $Z \to P(Z)$.

Zadanie 6.
Niech V, W to przestrzenie liniowe nad K. Niech $V_1 \subset V, W_1 \subset W$ to podprzestrzenie. Niech $Z = \{\phi \in L(V,W) \mid \forall_{\alpha\in V_1}\ \phi(\alpha) = 0\}$ to jest podprzestrzeń w $L(V,W)$. Niech $\dim V = 7$, $\dim V_1 = 3$, $\dim W = 4$, $\dim W_1 = 2$. Obliczyć $\dim Z$.

Rozwiązanie:
Izomorfizm $P : L(V,W) \to M_{4\times 7}(K)$ jest taki, że $P(\phi) = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ spełnia

$$P(Z) = \left\{ \text{macierze postaci: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix} \right\}$$

Zatem $\dim P(Z) = 28 - 12 = 16$, skąd $\dim Z = 16$, bo P zadaje izomorfizm $Z \to P(Z)$.

Ćwiczenia 22

Funkcjonały

Zadanie 1.
Niech V, W to przestrzenie liniowe nad K. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza V, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ to baza W oraz dene jest przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$. Wykazać, że

a) ϕ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow r(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \dim W$

b) ϕ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow r(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \dim V$

Rozwiązanie:

a) ϕ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow \mathrm{im}\phi = W \Leftrightarrow \dim \mathrm{im}\phi = \dim W \Leftrightarrow r(\phi) = \dim W \Leftrightarrow r(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \dim W$

b) ϕ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow \dim\ker\phi = 0 \Leftrightarrow \dim V - \dim \mathrm{im}\phi = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim \mathrm{im}\phi \Leftrightarrow \dim V = \dim r(\phi) \Leftrightarrow r(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \dim V$

Definicja: V przestrzeń liniowa nad K. Wtedy $L(V, W) \overset{\text{ozn}}{=} V^*$ nazywamy przestrzenią sprzężoną (=dualną) do V. Elementy V^* nazywamy funkcjonałami.

Uwaga: $\dim V = n \Rightarrow \dim V^* = n$

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą V. Baza sprzężona do $\mathcal{A}$ jest to baza $\mathcal{A}^* = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ gdzie dla każdego $j = 1, \ldots, n$

$$\psi_j(\alpha_i) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } i = j \\ 0, \text{ gdy } i \neq j \end{cases}$$

Zatem dla każdego j zachodzi $\psi_j(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = a_j$ (j-ta współrzędna wektora $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ w bazie $\mathcal{A}$).

Zadanie 2.
Niech $\mathcal{A} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ to baza $\mathbb{R}^3$. Dany jest funkcjonał $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$, $\psi((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1 + x_2 + 5x_3$. Znaleźć współrzędne funkcjonału ψ w bazie $\mathcal{A}^*$.

Rozwiązanie:

Uwaga: Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza V. Dany jest funkcjonał $\psi : V \to K$. Współrzędne ψ w bazie $\mathcal{A}^*$ wynoszą $\psi(\alpha_1), \ldots, \psi(\alpha_n)$.

Dowód: Niech $\mathcal{A}^* = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ oraz niech $\psi = a_1\psi_1 + \ldots + a_n\psi_n$. Chcemy pokazać, że $\forall_{j=1,\ldots,n}\ a_j = \psi(\alpha_j)$. Wyliczamy wartość tego wyrażenia na wekotrze α_j. Mamy $\psi(\alpha_j) = (a_1\psi_1 + \ldots + a_n\psi_n)(\alpha_j) = a_1\psi(\alpha_j) + \ldots + a_j\psi(\alpha_j) + \ldots + a_n\psi_n(\alpha_j) = a_j\psi_j(\alpha_j) = a_j$. $\square$

Te współrzędne wynoszą $\psi(\alpha_1) = 3$, $\psi(\alpha_2) = 6$, $\psi(\alpha_3) = 8$.

Zadanie 3.
Dla bazy $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ znaleźć wzory na funkcjonału ψ_j dla $j = 1,2,3$ z bazy $\mathcal{A}^*$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Mamy $\psi_1(\alpha) = a_1x_1 = a_2x_2 + a_3x_3$ oraz $\psi_1(\alpha_1) = 1$, $\psi_1(\alpha_2) = 0$, $\psi_1(\alpha_3) = 0$, mamy więc

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Skąd $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, zatem $\psi_1(\alpha) = x_2 - x_3$ (Reszta analogicznie)

Sposób II

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zatem $\psi_1(\alpha) = x_1\psi_1(\varepsilon_1) + x_2\psi_2(\varepsilon_2) + x_3\psi_1(\varepsilon_3) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot (-1) = x_2 - x_3$.

Sposób III

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skąd

$$\psi_1((x_1,x_2,x_3)) = x_2 - x_3$$

$$\psi_1((x_1,x_2,x_3)) = -x_1 + x_2$$

$$\psi_1((x_1,x_2,x_3)) = x_1 - x_2 + x_3$$

Zadanie 4.
Obliczyć $3 \cdot (x_2 - x_3) + 6(x_1 + x_2) + 8(x_1 - x_2 + x_3)$.

Rozwiązanie:
Mamy $3 \cdot (x_2 - x_3) + 6(x_1 + x_2) + 8(x_1 - x_2 + x_3) = 2x_1 + x_2 + 5x_3$, bo wykazaliśmy, że dla $\psi((x_1,x_2,x_3)) = 2x_1 + x_2 + 5x_3$ mamy $\psi = 3 \cdot \psi_1 + 6 \cdot \psi_2 + 8 \cdot \psi_3$ (zadanie 2 i zadanie 3).

Definicja: Niech $\phi : V \to W$ to przekształcenie liniowe. Przekształcenie sprzężone (dualne) do ϕ jest przekształceniem $\phi^* : W^* \to V^*$ zadane jako $\forall_{\psi \in W^*}\ \phi^*(\psi) = \psi \circ \phi$

Zadanie 5.
Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1,x_2,x_3)) = (5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ oraz dany jest funkcjonał $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\psi \in (\mathbb{R}^2)^*$, gdzie $\psi((y_1,y_2)) = 3y_1 + 2y_2$. Znaleźć wzór na $\phi^*(\psi)$.

Rozwiązanie:
Mamy $\phi^*(\psi) = \psi \circ \phi$, czyli $\phi^*(\psi) = \psi \circ \phi((x_1, x_2, x_3)) = \psi((5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)) = 16x_1 + 5x_2 - x_3$.

Zadanie 6.
Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ oraz bazy $\mathcal{A} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,0)\}$. Mamy $\phi^* : (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$. Obliczyć $M(\phi*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*}$.

Rozwiązanie:

Twierdzenie:
$$M(\phi*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*} = \left(M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\right)^T$$

Mamy $\phi((1,1,0)) = (6,2) = 2 \cdot (1,1) + 4 \cdot (1,0)$ oraz $\phi((0,1,1)) = (0,2) = 2 \cdot (1,1) - 2 \cdot (1,0)$ oraz $\phi((1,1,1)) = (5,3) = 3 \cdot (1,1) + 2 \cdot (1,0)$, zatem $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, czyli $M(\phi*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 7.
Niech $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$, $\psi((x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3$ oraz $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ oraz $\phi^* : (\mathbb{R}^3)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$. Czy $\psi \in \operatorname{im}(\phi^*)$?

Rozwiązanie:

Sposób I
Załóżmy nie wprost, że istnieje $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ takie, że $\phi^*(f) = \psi$, czyli że $f \circ \phi = \psi$. Niech $f((x_1, x_2)) = a_1x_2 + a_2x_2$. Wówczas mamy $x_1 + x_2 + 2x_3 = \psi((x_1, x_2, x_3)) = f(\phi((x_1, x_2, x_3)) = a_1 \cdot (5x_1 + x_2 - x_3) + a_2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 5a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ -a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, zatem $\psi \notin \operatorname{im}(\phi^*)$.

Sposób II
Gdyby istniało $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ o współrzędnych b_1, b_2 w bazie $\mathcal{B}^*$ takie, że $\phi^*(f) = \psi$, to ψ musiałoby mieć w bazie $\mathcal{A}^*$ współrzędne a_1, a_2, a_3 spełniające

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = M(\phi*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Współrzędne wektora ψ w bazie $\mathcal{A}^*$ wynoszą $\psi(\alpha_1) = 2, \psi(\alpha_2) = 3$ oraz $\psi(\alpha_3) = 4$. Czyli chcemy wiedzieć, czy istnieją b_1, b_2 takie, że

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

czyli czy układ równań

$$\begin{cases} 2b_1 + 4b_2 = 2 \\ 2b_1 - 2b_2 = 3 \\ 3b_1 + 2b_2 = 4 \end{cases}$$

jest niesprzeczny. Układ ten jest jednak sprzeczny, zatem $\psi \notin \mathrm{im}(\phi^*)$.

Ćwiczenia 23

Zadanie 1.
Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ będzie bazą przestrzeni V. Niech $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$. Czy $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ jest bazą przestrzeni V?

Rozwiązanie:
Sprawdzamy, czy β_1, β_2, β_3 są liniowo niezależne. $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0 \Leftrightarrow a_1(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + a_2(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3) + a_3(\alpha_2 - \alpha_3) = 0 \Leftrightarrow (a_1 + 2a_2)\alpha_1 + (a_1 + 3a_2 + a_3)\alpha_2 + (2a_1 + a_2 - a_3)\alpha_3 = 0$. Wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są liniowo niezależne, zatem

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, zatem wektory $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ nie są liniowo niezależne, czyli nie są też bazą przestrzeni V.

Zadanie 2.
Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ to baza V nad ciałem K. $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$ oraz $\forall_{i=1,\ldots,n}\ \beta_i = w_{i1}\alpha_1 + \ldots + w_{in}\alpha_n$. Wtedy niech $\forall_{i=1,\ldots,n}\ \omega_i = (w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in}) \in K^n$. Wówczas:

a) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow \omega_1, \ldots, \omega_n$ jest liniowo niezależny

b) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ rozpina $V \Leftrightarrow \omega_1, \ldots, \omega_n$ rozpina K^n

c) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest bazą $V \Leftrightarrow \omega_1, \ldots, \omega_n$ jest bazą K^n

Rozwiązanie:
Jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą przestrzeni V nad ciałem K, to funkcja $P : V \to K^n$ przyporządkowująca każdemu wektorowi $\alpha \in V$ wektor $\omega \in K^n$ będący ciągiem współrzędnych wektora α w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest izomorfizmem V nad K^n.

Mamy $\forall_{1,\ldots,n}\ \omega_i = P(\beta_i)$

(Dowód a))
$\phi : V \to W$ jest izomorfizmem $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$. Wtedy $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow$ $\phi(\beta_1), \ldots, \phi(\beta_n)$ jest liniowo niezależne.

$\Rightarrow$ Mamy ciąg implikacji

$$a_1\phi(\beta_1) + \ldots + a_k\phi(\beta_n) = 0$$

$$\phi(a_1\beta_1) + \ldots + \phi(a_k\beta_n) = 0$$

$$\phi(a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_n) = 0$$

$$a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_n = 0$$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

$\Leftarrow$ Wiemy, że istnieje izomorfizm $\psi : W \to V$ taki, że $\psi \circ \phi = id_V$ oraz $\phi \circ \psi = id_W$. Wówczas mamy $\psi(\phi(\beta_i)) = \beta_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$. Teraz stosujemy $\Rightarrow$ do ψ.

Czy $(K^n)^*$ ma jakąś "fajną" bazę? $st = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ to baza standardowa w K^n. Co to jest st^*? Jest to $st^* = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, gdzie dla każdego $i = 1, \dots, n$ zachodzi $\psi_i((x_1, \dots, x_n)) = x_i$.

Zadanie 3.
Niech $st^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ to baza $(\mathbb{R}^3)^*$ sprzężona do st. Niech $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$, $\psi((x_1, x_2, x_3)) = 5x_1 + 2x_2 - 7x_3$. Znaleźć współrzędne funkcjonału ψ w bazie standardowej.

Rozwiązanie:
Szukane współrzędne to $5, 2, -7$, bo mamy $\psi((x_1, x_2, x_3)) = 5\psi_1((x_1, x_2, x_3)) + 2\psi_2((x_1, x_2, x_3)) - 7\psi_3((x_1, x_2, x_3))$, lub inaczej, wiemy że współrzędne funkcjonału ψ w bazie st^* to $\psi(\varepsilon_1) = 5, \psi(\varepsilon_2) = 2, \psi(\varepsilon_3) = -7$.

Zadanie 4.
Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ to baza V oraz $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ to baza W nad ciałem $\mathbb{R}$. Niech $\phi : V \to W$ to przekształcenie liniowe takie, że $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$. Czy $\beta \in \mathrm{im}\phi$?

Rozwiązanie:
Mamy

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3$$

$$\phi(\alpha_2) = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$$

$$\phi(\alpha_3) = \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 - \beta_4$$

Wówczas $\beta \in \mathrm{im}\phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\phi(\alpha) = \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$. Niech $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$. Wówczas α istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czyli czy układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

jest niesprzeczny. Ten układ jest jednak sprzeczny, zatem $\beta \notin \mathrm{im}\phi$.

Twierdzenie: $\phi : V \to W$ to przekształcenei liniowe, wówczas: dla $\phi^* : W^* \to V^*$

- ϕ^* jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ ϕ jest epimorfizmem
- ϕ^* jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ ϕ jest monomorfizmem

Dowód: Przypadek gdy $\dim V = n$, $\dim W = m$. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza V oraz $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_,\}$ to baza W, wówczas $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \in M_{m\times n}(K)$.

ϕ^* jest monomorfizmem $\Leftrightarrow r(M(\phi^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*}) = \dim W^* = \dim W = r(M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}) \Leftrightarrow \phi$ jest epimorfizmem.

Analogicznie ϕ^* jest epimorfizmem $\Leftrightarrow r(M(\phi^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*}) = \dim V^* = \dim V = r(M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}) \Leftrightarrow \phi$ jest monomorfizmem. $\square$

Definicja:

$$V^*V^* = (V^*)^* = L(V^*, K)$$

$$\begin{array}{r} V \text{ izomorfizm z } V^* \\ V^* \text{ izomorfizm z } V^{**} \end{array} \Rightarrow V \text{ izomorfizm z } V^*V^*$$

Ale można lepiej! Rozpatrzmy funkcję $D : V \to V^{**} = L(V^*, K), \forall_{\alpha\in V}\ D(\alpha) \in L(V^*, K)$, czyli $D(\alpha) : V^* \to K$ definiujemy $\forall_{\psi\in V^*}\ D(\alpha)(\psi) = \psi(\alpha)$

Uwaga:

a) $D(\alpha) : V^* \to K$ jest liniowe, czyli faktycznie $D(\alpha) \in L(v^*, K)$

b) przekształcenie $V \to V^{**}$ jest przekształceniem liniowym

c) D jest zawsze monomorfizmem

d) jeśli $\dim V$ jest skończony, to D jest izomorfizmem

Dowód:

a) Dlaczego $D(\alpha) : V^* \to K$ jest liniowa? Niech $\psi_1, \psi_2 \in V^*$, wówczas $D(\alpha)(\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2)(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha) = D(\alpha)(\psi_1) + D(\alpha)(\psi_2)$ oraz $D(\alpha)(a \cdot \psi_1) = (a \cdot \psi_1)(\alpha) = a \cdot \psi_1(\alpha) = a \cdot D(\alpha)(\psi_1)$

b) Dlaczego $D : V \to L(V^*, K)$ jest liniowa? $D(\alpha + \beta)(\psi) = \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta) = D(\alpha)(\psi) + D(\beta)(\psi) = (D(\alpha) + D(\beta))(\psi)$ oraz $D(a\cdot\alpha)(\psi) = \psi(a\cdot\alpha) = a\cdot\psi(\alpha) = a\cdot D(\alpha)(\psi)$

c) Załóżmy, że $D(\alpha) = 0$, czyli $D(\alpha) : V^* \to K$ jest przekształceniem zerowym, czyli $\forall_{\psi\in V^*}\ D(\alpha)(\psi) = 0$.

Ćwiczenia 24

Wyznaczniki

Twierdzenia o wyznacznikach

0. $A = [a] \in M_1 \times 1(K) \Rightarrow \det A = a$
1. $A \in M_{n\times(K)} \Rightarrow A_{ij} \in M_{(n-1|\times(n-1)}(K)$