GEOMETRIA Z ALGEBRĄ LINIOWĄ II

Marysia Nazarczuk

Ćwiczenia 1

Macierze równoważne

Twierdzenie: Niech K to ciało. Dane są dwie macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje macierz odwracalna $C \in M_{m\times m}(K)$ i macierz odwracalna $D \in M_{n\times n}(K)$, że $B = C \cdot A \cdot D$.
2. Macierz B jest otrzymana z macierzy A ciągiem operacji elementarnych na wierszach lub kolumnach.
3. Istnieje przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^m$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ w K^n i bazy $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ w K^m, że $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ i $B = M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$.
4. $r(A) = r(B)$.

Dowód:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Skoro macierze C i D są odwracalne, to możemy przedstawić je jako iloczyn macierzy operacji elementarnych. Mnożąc macierz A z lewej strony przez C, wykonujemy operacje elementarne na wierszach, a mnożąc macierz A z prawej strony przez D wykonujemy operacje elementarne na kolumnach, otrzymując macierz B.

(3) $\Rightarrow$ (1) $B = M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(id)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$. Niech więc $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ oraz $D = M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$, wówczas $B = C \cdot A \cdot D$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Definiujemy $\phi : K^n \to K^m$ warunkiem: $M(\phi)_{st}^{st} = A$. Niech $\mathcal{A} = st$ oraz $\mathcal{B} = st$, czyli mamy $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Definiujemy bazę $\mathcal{A}'$ warunkiem $M(id)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} = D$ oraz definiujemy bazę $\mathcal{B}'$ warunkiem $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = C$, czyli $M(id)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = C^{-1}$. Wtedy $B = C \cdot A \cdot D = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(id)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} = M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Mnożenie przez macierz odwracalną nie zmienia rzędu macierzy.

(4) $\Rightarrow$ (1) Niech $r(A) = r(B) = k$. Definiujemy $\phi : K^n \to K^m$ przez $M(\phi)_{st}^{st} = A$, wtedy istnieją bazy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takie, że

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1 \;\ddots\; 1}}^{k} \\ k\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right. & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

gdzie $k = r(A) = r(\phi)$. Definiujemy $\psi : K^n \to K^m$ warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$. Wtedy istnieją bazy $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{B}'$ takie, że

$$M(\psi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{cl} & \quad\overbrace{\hphantom{1\quad\ddots\quad 1}}^{k} \\ k\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right. & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Zatem $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\psi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$. Ale $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$. Niech więc $C_1 = M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$ oraz $D_1 = M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$. Mamy również $M(\psi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\psi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{A}'}^{st}$. Niech więc $C_2 = M(id)_{st}^{\mathcal{B}'}$ oraz $D_2 = M(id)_{\mathcal{A}'}^{st}$. Wówczas niech $C = C_2^{-1} \cdot C_1$ oraz $D = D_2^{-1} \cdot D_1$. Mamy więc $B = C_2^{-1} \cdot C_1 \cdot A \cdot D_2^{-1} \cdot D_1 = C \cdot A \cdot D$. $\square$

Twierdzenie: Niech $\phi : K^n \to K^m$ to przekształcenie liniowe oraz $r(\phi) = k$, wówczas istnieją bazy $\mathcal{A} \in K^n$ oraz $\mathcal{B} \in K^m$ takie, że

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{cl} & \quad\overbrace{\hphantom{1\quad\ddots\quad 1}}^{k} \\ k\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right. & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Dowód: Mamy $\dim(\mathrm{im}\phi) = k \Rightarrow \dim(\ker \phi) = n - k$. Niech więc $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą $\ker \phi$. Dopełniamy to do bazy przestrzeni K^n wektorami liniowoniezależnymi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Chcemy pokazać, że $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne. Weźmy $a_1 \cdot \phi(\alpha_1) + \ldots + a_k \cdot \phi(\alpha_k) = 0$ dla $a_1, \ldots, a_k \in k$, wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, czyli $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker \phi$, czyli $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + a_n\alpha_n$, czyli $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k - a_{k+1}\alpha_{k+1} - \ldots - a_n\alpha_n = 0$, czyli $a_1 = \ldots = a_k = a_{k+1} = \ldots = a_n = 0$, zatem wykazaliśmy, że $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Niech $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, gdzie $\beta_1 = \phi(\alpha_1), \ldots, \beta_k = \phi(\alpha_k)$. Dopełniamy $\beta_1, \ldots, \beta_k$ do bazy $\mathcal{B}$ wektorami $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$. $\square$

Zadanie 1.

Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) wykazać, że $r(\phi) = 2$,

b) znaleźć bazę $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^4$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ takie, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) Mamy $r(\phi) = 2$, bo $w_2 - w_1 = w_3$.

b) Mamy $\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \phi(x_1 \cdot (1,0,0,0) + x_2 \cdot (0,1,0,0) + x_3 \cdot (0,0,1,0) + x_4 \cdot (0,0,0,1)) = x_1 \cdot (1,1,0) + x_2 \cdot (1,2,1) + x_3 \cdot (2,3,1) + x_4 \cdot (1,4,3) = (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, x_2 + x_3 + 3x_4)$. Mamy $\dim \ker(\phi) = 4 - \dim \operatorname{im}(\phi) = 4 - r(\phi) = 4 - 2 = 2$. Znajdujemy bazę jądra.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest

$$(-x_3 + 2x_4, -x_3 - 3x_4, x_3, x_4) = -x_3(1,1,-1,0) + x_4(2,-3,0,1)$$

zatem baza $\ker \phi$ to na przykład $\{(1,1,-1,0),(2,-3,0,1)\}$. Dwa wektory liniowo niezależne z bazą jądra to na przykład $(0,0,1,0),(0,0,0,1)$. Niech $\alpha_1 = (0,0,1,0), \alpha_2 = (0,0,0,1), \alpha_3 = (2,-3,0,1), \alpha_4 = (1,1,-1,0)$. Wówczas niech $\beta_1 = \phi(\alpha_1) = (2,3,1), \beta_2 = \phi(\alpha_2) = (1,4,3)$ oraz niech $\beta_3 = (0,0,1)$.

Definicja: $A, B \in M_{m\times n}(K)$ mówimy, że są równoważne jeśli zachodzi jeden (czyli wszystkie) warunek z pierwszego twierdzenia. Jest to relacja równoważności w zbiorze macierzy $M_{n\times n}(K)$.

Definicja: Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ nazywamy endomorfizmem przestrzeni V. Jeśli $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą V, to macierz $M(\phi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}$ nazywamy macierzą endomorfizmu ϕ w bazie $\mathcal{A}$.

Twierdzenie: Dane są macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Następujące warunki są równoważne:

- Istnieje macierz odwracalna C taka, że $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$
- Istnieje endomorfizm $\phi : K^n \to K^n$ i bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w K^n takie, że $M(\phi)_\mathcal{A}^\mathcal{A} = A$ oraz $M(\phi)_\mathcal{B}^\mathcal{B}$.

Ćwiczenia 2

Macierze podobne

Problem: Dane są macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Jak zbadać czy macierze A i B są podobne.

Zadanie 1.
Bierzemy przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - 5x_3)$. Dana jest baza $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Obliczyć $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\phi((1,1,1)) &= (1,3,-4) = -4\cdot(1,1,1) + 7\cdot(1,1,0) - 2\cdot(1,0,0)\\ \phi((1,1,0)) &= (0,4,1) = 1\cdot(1,1,1) + 3\cdot(1,1,0) - 4\cdot(1,0,0)\\ \phi((1,0,0)) &= (1,2,1) = 1\cdot(1,1,1) + 1\cdot(1,1,0) - 1\cdot(1,0,0)\end{aligned}$$

Zatem

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1\\ 7 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Zadanie 2.
Niech $A = M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -5\end{bmatrix}$ i niech $B = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.
Macierze A i B są więc podobne. Znaleźć macierz C taką, że $B = C^{-1}\cdot A\cdot C$.

Rozwiązanie:
Mamy $C = M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$, bo wówczas $B = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(id)_{st}^{\mathcal{A}}\cdot M(\phi)_{st}^{st}\cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$

Zadanie 3.
Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ i niech $B = C^{-1}\cdot A\cdot C$

a) obliczyć macierz B

b) macierze A i B są podobne. Podać przykład endomorfizmu $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oraz baz $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ w $\mathbb{R}^3$, że $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ oraz $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

Rozwiązanie:

a) Obliczmy macierz odwrotną do C

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

Zatem $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$. Wówczas

$$B = C^{-1}\cdot A\cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4\\ 16 & 11\end{bmatrix}$$

b) Niech $\mathcal{A} = \{(1,0),(0,1)\}$ i niech $\phi((x_1,x_2)) = (x_1+2x_2, 3x_1+4x_2)$. Wtedy faktycznie $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$. Baza $\mathcal{B}$ będzie zadana warunkiem $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st}$. Wtedy mamy $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{st}$. Wówczas $\mathcal{B} = \{(2,1),(1,1)\}$.

Zadanie 4.
Wykazać, że relacja podobieństwa macierzy w $M_{n\times n}(K)$ jest relacją równoważności.

1. Zwrotność: $A \sim A$, bo $A = I^{-1} \cdot A \cdot I$

2. Symetryczność: $A \sim B$, czyli $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$, skąd dla $D = C^{-1}$ mamy $A = D^{-1} \cdot B \cdot D$, bo $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$, czyli $C \cdot B \cdot C^{-1} = C \cdot C^{-1} \cdot A \cdot C \cdot C^{-1} = I \cdot A \cdot I = A$, zatem $B \sim A$

3. Przechodniość: $A_1 \sim A_2$, $A_2 \sim A_3 \Rightarrow A_1 \sim A_3$, bo $A_1 = C^{-1} \cdot A_2 \cdot C$ oraz $A_2 = D^{-1} \cdot A_3 \cdot D$, zatem $A_1 = C^{-1} \cdot D^{-1} \cdot A_3 \cdot D \cdot C = (D \cdot C)^{-1} \cdot A_3 \cdot (D \cdot C)$

Definicja: Niech $\sim$ to relacja równoważności w zbiorze X. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy niezminnikiem relacji $\sim$ jeśli $\forall_{x_1,x_2\in X}\ (x_1 \sim x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Zadanie 5.
Podaj przykład niezmienników relacji podobieństwa macierzy.

Rozwiązanie:

- ślad, bo: $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$ oraz $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(C^{-1} \cdot A \cdot C) = \mathrm{tr}(A \cdot C \cdot C^{-1}) = \mathrm{tr}(A \cdot I) = \mathrm{tr}(A)$

- rząd, bo: mnożenie przez macierz odwracalną nie zmienia rzędu

- wyznacznik, bo: na mocy twierdzenia Cauchy'ego, jeśli $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$, to mamy $\det B = \det(C^{-1} \cdot A \cdot C) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det C \cdot \det C^{-1} \cdot A = 1 \cdot \det A = \det A$

Uwaga: $\forall_{A,B\in M_{n\times n}(K)}\ \mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$

Definicja: Niech $\phi : V \to V$ to endomorfizm. $\alpha \in V$ jest wektorem własnym ϕ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(\alpha) = a \cdot \alpha$ dla pewnego $a \in K, \alpha \neq 0$. Wtedy a nazywamy wartością własną ϕ.

Zadanie 6.
Wykazać, że dla $\phi : V \to V$ nie istnieje $\alpha \in V, \alpha \neq 0$ takie, że $\phi(\alpha) = a \cdot \alpha$ i $\phi(\alpha) = b \cdot \alpha$ dla $a \neq b$.

Rozwiązanie:
Gdyby $a \cdot \alpha = b \cdot \alpha$, to $(a-b) \cdot \alpha = 0$. Skoro $a \neq b$, to $a - b \neq 0$, więc $(a-b) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, więc mamy sprzeczność, bo $\alpha \neq 0$.

Definicja: Niech $\phi : V \to V$ to endomorfizm oraz $a \in K$. Definiujemy zbiór

$$V_{(a)} = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = a \cdot \alpha\}$$

$V_{(a)} = \{0\} \Leftrightarrow a$ nie jest wartością własną ϕ. $V_{(a)} \neq \{0\} \Leftrightarrow a$ jest wartością własną ϕ i wtedy $V_{(a)} = \{0\} \cup \{\text{wektory własne o wartości własnej } a\}$.

Uwaga: $\phi : V \to V$ jest endomorfizmem. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza V oraz niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A$. Wówczas $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \in V_{(a)} \Leftrightarrow \phi(\alpha) = a \cdot \alpha \Leftrightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a \cdot I \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow (A - a \cdot I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Zatem $V_{(a)} \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(A - aI) = 0$, gdzie a jest wartością własną ϕ.

Definicja: Dana jest macierz $A = M_{n\times n}(K)$ wówczas $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ to wielomian charakterystyczny macierzy A.

Przykład: Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mamy $w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 3 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$.

Zadanie 7.
Dany jest endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2)) = (2x_1 - x_2, 2x_1 + 5x_2)$. Znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych.

Rozwiązanie:
Bierzemy bazę standardową $\mathcal{A} = st$. Wówczas $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Zatem $w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$, czyli wartości własne to 3 i 4. Dalej mamy $(x_1, x_2) \in V_{(3)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ 2 & 5-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$. Mamy więc $(x_1, -x_1) = x_1(1, -1)$, zatem baza $V_{(3)}$ to $\{(1, -1)\}$, czyli $V_{(3)} = \text{lin}((1, -1))$. $(x_1, x_2) \in V_{(4)} \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 2-4 & -1 \\ 2 & 5-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{x_2}{2}$. Mamy więc $(x_1, -2x_1) = x_1(1, -2)$, zatem baza $V_{(4)}$ to $\{(1, -2)\}$, czyli $V_{(4)} = \text{lin}((1, -2))$.

Zadanie 8.
Dany jest endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, -x_1 + 3x_2)$. Znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych.

Rozwiązanie:
Niech $A = M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, wówczas $w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$.

Wartość własna macierzy A to 2. $(x_1, x_2) \in V_{(2)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Mamy wieć $(x_1, x_1) = x_1(1,1)$, zatem baza $V_{(2)}$ to $\{(1,1)\}$ oraz $V_{(2)} = \operatorname{lin}((1,1))$.

Zadanie 9.
Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Wykazać, że jeśli jedyną macierzą w $M_{n\times n}(K)$ podobną do A jest A, to $A = a \cdot I$ dla pewnego $a \in K$.

Rozwiązanie:

Sposób I
Weźmy macierz operacji elementarnej T_{ij}

$$T_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array} = T_{ij}^{-1}$$

Wówczas $T_{ij} = (T_{ij})^{-1}$. Macierz A jest podobna tylko do macierzy A, gdy dla każdej macierzy odwracalnej C zachodzi $C^{-1} \cdot A \cdot C = A$. Mamy więc $T_{ij}^{-1} \cdot A \cdot T_{ij} \Leftrightarrow T_{ij} \cdot A \cdot T_{ij} = A$, czyli mamy

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & * & & \\ & & a_i & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & a_j & & \\ & * & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & * & & \\ & & a_j & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & a_i & & \\ & * & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_n \end{bmatrix} = T_{ij} \cdot A \cdot T_{ij}$$

Skąd $a_i = a_j$ dla każdego i, j. Zatem macierz A jest postaci

$$A = \begin{bmatrix} a & & * \\ & \ddots & \\ * & & a \end{bmatrix}$$

Pozostaje pokazać, że poza przekątną są same zera. Mamy $E_{ij}(1) \cdot E_{ij}(-1) = I_n$, zatem $E_{ij}(1) = E_{ij}(-1)^{-1}$, czyli $E_{ij}(-1)^{-1} \cdot A \cdot E_{ij}(-1) = A \Leftrightarrow E_{ij}(1) \cdot A \cdot E_{ij}(-1) = A$.

Mamy

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{ij} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{ji} & a_{jk} & a_{jj} \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ k \\ j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & \quad k & \quad j \end{matrix} & \end{array}$$

oraz

$$E_{ij}(1) \cdot A \cdot E_{ij}(-1) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{ii} + a_{ji} & a_{ik} + a_{jk} & a_{ij} + a_{jj} - a_{ii} - a_{ji} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kj} - a_{ki} \\ a_{ji} & a_{jk} & a_{jj} - a_{ji} \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ k \\ j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & \qquad k & \qquad j \end{matrix} & \end{array}$$

Zatem mamy między innymi $a_{ik} + a_{jk} = a_{ik}$, czyli $a_{jk} = 0$ dla każdego $j, k,\ j \neq j$. Mamy więc

$$A = \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{bmatrix} = a \cdot I \text{ dla pewnego } a \in K$$

Sposób II

Niech ϕ będzie endomorfizmem takim, że $M(\phi)_{st}^{st} = A$. Skoro jedyną macierzą podobną do A jest A, to dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V zachodzi $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(\phi)_{st}^{st} = A$. Dla każdej macierzy odwracalnej C istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że $M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = C$. W takim razie, dla każdej macierzy odwracalnej C mamy $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(id)_{st}^{\mathcal{A}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = C^{-1} \cdot A \cdot C$, czyli $A = C^{-1} \cdot A \cdot C$ dla każdej macierzy odwracalnej C. Zatem $C \cdot A = A \cdot C \Rightarrow A = a \cdot I$.

Praca domowa

Dla każdego z poniższych endomorfizmów ϕ znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych.

a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \phi((x_1, x_2)) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2)$

b) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \phi((x_1, x_2)) = (5x_1 + x_2, -x_1 + 3x_2)$

c) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_3)$

d) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \phi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2, 7x_1 - 7x_2 + 5x_3)$

e) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (-6x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_4, -14x_1 - 2x_2 + 5x_3, -x_4)$

Ćwiczenia 3

Diagonalizowalność

Zadanie 1.

Podać przykład macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ takiej, że

a) $r(A) = r(B)$, $\det(A) = \det(B)$, $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(B)$

b) $r(A) = r(B)$, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, $\det(A) \neq \det(B)$

c) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, $\det(A) = \det(B)$, $r(A) \neq r(B)$

Rozwiązanie:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 2.

Podać przykład niepodobnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ takich, że $r(A) = r(B)$, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, $\det(A) = \det(B)$.

Rozwiązanie:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Macierz A nie jest podobna do B, bo jedyną macierzą podobną do I jest I, bo $C^{-1} \cdot I \cdot C = C^{-1} \cdot C = I$.

Definicja: Mówimy, że macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(K)$ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \neq j$ zachodzi $a_{ij} \neq 0$, czyli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.

Wykazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest endomorfizmem i $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = \{1, \dots, n\}$, α_i jest wektorem własnym ϕ.

Rozwiązanie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \phi(\alpha_1) = a_{11} \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \ldots + 0 \cdot \alpha_n = a_{11}\alpha_1 \\ \vdots \\ \phi(\alpha_n) = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \ldots + a_{nn} \cdot \alpha_n = a_{nn}\alpha_n \end{matrix}$$

Definicja: Endomorfizm $\phi : V \to V$ n wymiarowej przestrzeni V nad K jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych ϕ lub równoważnie, gdy macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$ jest podobna do macierzy diagonalnej należącej do $M_{n\times n}(K)$.

Definicja: Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy diagonalizowalną nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest podobna do macierzy diagonalnej należącej do $M_{n\times n}(K)$.

Twierdzenie: (Warunek konieczny diagonalizowalności endomorfizmu) Jeżeli endomorfizm $\phi : V \to V$ nad K jest diagonalizowalny, to $w_\phi(\lambda)$ rozkłada się w K na czynniki stopnia pierwszego.

Dowód: Niech baza $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie złożona z wekotrów własnych ϕ. Wówczas

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

czyli $w_\phi(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)$. $\square$

Przykład: Endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2)) = (-x_2, x_1)$, czyli obrót o $\frac{\pi}{2}$ nie jest diagonalizowalny, bo $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, czyli $w_\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$ nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}$, czyli nie ma wartości własnych.

Zadanie 4.
Podać przykład endomorfizmu $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ który ma wartość własną, ale nie jest diagonalizowalny (równoważnie: podać przykład macierzy $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, która ma wartość własną w $\mathbb{R}$, ale nie jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$).

Rozwiązanie:
Jest to na przykład endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_2)$ lub równoważnie macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ponieważ $w_\phi(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, czyli jedyną wartością własną jest 1. Gdyby $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ było bazą złożoną z wektorów własnych ϕ, to $\phi(\alpha_1) = 1 \cdot \alpha_1$ i $\phi(\alpha_2) = 1 \cdot \alpha_2$, czyli $\phi = id$. Ale $\phi \neq id$, czyli mamy sprzeczność.

Twierdzenie: (Podstawowe twierdzenie o diagonalizowalności) Nad K dany jest endomorfizm $\phi : V \to V$, gdzie $\dim V = n$. Niech $a_1, \ldots, a_s \in K$ to parami różne wartości własne ϕ. Wtedy ϕ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_s)} = \dim V$.

Wniosek: (Warunek dostateczny diagonalizowalności endomorfizmu) Jeżeli $\phi : V \to V$, gdzie $\dim V = n$, ma n różnych wartości własnych, to ϕ jest diagonalizowalny.

Zadanie 5.
Czy macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Jeżli tak, to podać przykład macierzy $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ takiej, że $C^{-1} \cdot A \cdot C$ jest diagonalna oraz obliczyć $C^{-1} \cdot A \cdot C$.

Rozwiązanie:
$w_A = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-3)$, zatem wartości własne to 1 i 3, zatem macierz A jest diagonalizowalna. $(x_1, x_2) \in V_{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, zatem $V_{(1)} = \mathrm{lin}((1,1))$. $(x_1, x_2) \in V_{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2$, zatem $V_{(1)} = \mathrm{lin}((1,-1))$. Niech $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$. Niech $C = M(id)^{st}_{\mathcal{B}}$, wówczas $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$, czyli $C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, bo $C^{-1} \cdot A \cdot C = M(id)^{\mathcal{B}}_{st} \cdot M(\phi)^{st}_{st} \cdot M(id)^{st}_{\mathcal{B}} = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ćwiczenia 4

Potęgowanie macierzy diagonalizowalnych

Zadanie 1.
Niech $\phi : V \to V$ to endomorfizm i niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza V taka, że $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$. Wykaż, że ϕ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest diagonalizowalna nad ciałem K.

Rozwiązanie:

$\Rightarrow$ Niech $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ to baza złożona z wektorów własnych ϕ. Macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ jest diagonalna i podobna do macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A$.
$\Leftarrow$ Wiemy, że istnieje macierz $C = M_{n\times n}(K)$, że $C^{-1} \cdot A \cdot C = B$, gdzie B jest diagonalna. Niech baza $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ będzie zadana warunkiem $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. Wtedy $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = B$, czyli $\mathcal{B}$ jest złożona z wektorów własnych ϕ. $\square$

Zadanie 2.
Czy endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2, 7x_1 - 7x_2 + 5x_3)$ jest diagonalizowalny?

Rozwiązanie:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Zatem $w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I) = (5-\lambda)^2(1-\lambda)$, czyli wartości własne to 5 i 1.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow V_{(5)} = \mathrm{lin}((1,1,0),(0,0,1))$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_3 = -7x_1 \end{cases} \Leftrightarrow V_{(1)} = \mathrm{lin}((1,-3,-7))$$

$\dim V_{(5)} + \dim V_{(3)} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem ϕ jest diagonalizowalny.

Niech $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,-3,-7)\}$, wówczas

$$M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.
Czy macierz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$. Jeśli tak, to podać przykład macierzy $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, że $C^{-1} \cdot A \cdot C$ jest diagonalna.

Rozwiązanie:
Macierz A jest oczywiście diagonalizowalna, po endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2, 7x_1 - 7x_2 + 5x_3)$ jest diagonalizowalny.

Niech $C = M(id)^{st}_{\mathcal{B}}$ dla $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,-3,-7)\}$, bo $B = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ jest diagonalna i $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = M(id)^{\mathcal{B}}_{st} \cdot M(\phi)^{st}_{st} \cdot M(id)^{st}_{\mathcal{B}}$.

Zadanie 3.
Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Wykazać, że jeśli A i B są podobne, to $\forall_{m\in\mathbb{N}}$ A^m i B^m też są podobne.

Rozwiązanie:
Mamy $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$ dla pewnej odwracalnej macierzy C. Wówczas $A^m = (C^{-1} \cdot B \cdot C)^m = (C^{-1} \cdot B \cdot C) \cdot (C^{-1} \cdot B \cdot C) \cdot \ldots \cdot (C^{-1} \cdot B \cdot C) = C^{-1} \cdot B \cdot I \cdot B \cdot I \cdot \ldots \cdot I \cdot B \cdot C = C^{-1} \cdot B \cdot B \cdot \ldots \cdot B \cdot C = C^{-1} \cdot B^m \cdot C$.

Mówimy, że macierz C realizuje podobieństwo między macierzami A i B.

Zadanie 4.
Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Załóżmy, że A jest diagonalna i jest podobna do macierzy $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Oblicz $\operatorname{tr}(A^{10})$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$B^{10} = \begin{bmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{bmatrix}$$

zatem $\operatorname{tr}(A^{10}) = \operatorname{tr}(B^{10}) = 1 + 2^{10} + 1 = 1 + 1024 + 1 = 1026$.

Ogólnie jeśli $A \sim \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}$, bo $\operatorname{tr}(A^m) = b_1^m + \ldots + b_n^m$, bo $\begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} b_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n^m \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.
Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$. Oblicz A^{1000}.

Rozwiązanie:
Mamy $w_A(\lambda) = (-1-\lambda)(6-\lambda) + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$, zatem wartości własne to 2 i 3. Wyliczamy, że $V_{(2)} = \operatorname{lin}((2,3))$ oraz $V_{(3)} = \operatorname{lin}((1,2))$. Niech $\mathcal{B} = \{(2,3),(1,2)\}$.

$A = M(\phi)^{st}_{st} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$, $B = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = M(id)^{st}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, zatem $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Mamy $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$, czyli $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$, wówczas $A^{1000} = C \cdot B^{1000} \cdot C^{-1}$, zatem

$$A^{1000} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{1000} & 0 \\ 0 & 3^{1000} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{1002} - 3^{1001} & -2^{1001} + 2 \cdot 3^{1001} \\ 3 \cdot 2^{1001} - 2 \cdot 3^{1001} & -3 \cdot 2^{1000} + 4 \cdot 3^{1000} \end{bmatrix}$$

Zadanie 6.
Niech $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ i niech indukcyjnie $x_{n+1} = 3x_n + 4x_{n-1}$. Stosując diagonalizacje macierzy obliczyć wzór na X_{n+1}.

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_n + 4x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Niech więc $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, wówczas $A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$, czyli $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Znajdźmy więc wzór na A^{n-1}.

$$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$w_A(\lambda) = (3-\lambda)(-\lambda) - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

$$(x_1, x_2) \in V_{(4)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 4x_2 \Leftrightarrow V_{(4)} = \mathrm{lin}((4,1))$$

$$(x_1, x_2) \in V_{(-1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow V_{(4)} = \mathrm{lin}((1,-1))$$

Niech $\mathcal{B} = \{(4,1), (1,-1)\}$, wówczas $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
Znajdujemy C^{-1}

$$\left[\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \frac{1}{5} \cdot \left[\begin{array}{cccc} 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Zatem $C^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, wówczas $A^{n-1} = C \cdot B^{n-1} \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$.

Zadanie 7.
Wykaż, że macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są podobne

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & & & 0 \\ 1 & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & a \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:
Weźmy endomorfizm $\phi \in End(K^n)$ i $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ taką, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A$, czyli że $\phi(\alpha_1) = a \cdot \alpha_1, \phi(\alpha_2) = a \cdot \alpha_2 + \alpha_1, \ldots \phi(\alpha_n) = a \cdot \alpha_n + \alpha_{n-1}$. Niech $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, gdzie $\beta_i = \alpha_{n-i+1}$, wówczas $\phi(\beta_1) = a \cdot \beta_1 + \beta_2, \phi(\beta_2) = a \cdot \beta_2 + \beta_3, \ldots, \phi(\beta_{n-1}) = a \cdot \beta_{n-1} + \beta_n, \phi(\beta_n) = a \cdot \beta_n$, czyli $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = B$. Wówczas $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, gdzie $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$

$$M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

Zadanie 8.
Wykaż, że $A \sim A^T$, dka $A \in M_{n\times n}(K)$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że

$$E = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = E^{-1}$$

zatem $J^T = E \cdot J \cdot E$. Udowodnimy teraz, że $A_J \sim A_J^T$, gdzie A_J to macierz postaci Jordana. Niech

$$E_A = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_k \end{bmatrix} = E_A^{-1}$$

gdzie E_i to macierz postaci E rozmiaru takiego jak i-ta klatka Jordana w macierzy A_J. Zatem $A_J = E_A^{-1} \cdot A_J \cdot E_A$.

Wniosek z twierdzenia Jordana jest taki, że dla każdej macierzy A istnieje macierz w postaci Jordnana do niej podobna. Zatem $A = C^{-1} \cdot A_J \cdot C \Leftrightarrow A_J = C \cdot A \cdot C^{-1}$. Mamy więc $A^T = (C^{-1} \cdot A_J \cdot C)^T = C^T \cdot A_J^T \cdot (C^{-1})^T = C^T \cdot E_A \cdot A_J \cdot E_A \cdot (C^{-1})^T = C^T \cdot E_A \cdot C \cdot A \cdot C^{-1} \cdot E_A \cdot (C^{-1})^T$. Zatem biorąc $D = C^T \cdot E_A \cdot C$ mamy $A^T = D \cdot A \cdot D^{-1} \Leftrightarrow A = D^{-1} \cdot A^T \cdot D$, czyli $A \sim A^T$. $\square$

Ćwiczenia 5

Twierdzenie Jordana

Zadanie 1.
Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times n}(K)$. Niech

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

gdzie dla $i = 1, 2, \ldots, s$, $A_i \in M_{n_i\times n_i}(K)$, czyli $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$. Niech $\delta : \{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots, s\}$ będzie permutacją (bijekcją) i niech

$$B = \begin{bmatrix} A_{\delta(1)} & & & \\ & A_{\delta(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\delta(s)} \end{bmatrix}$$

Wykazać, cze macierze A i B są podobne.

Rozwiązanie:
Niech V to przestrzeń liniowa nad K oraz niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to baza V. Definiujemy $\phi : V \to V$ warunkiem $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A$. Chcemy znaleźć $\mathcal{B}$ przestrzeni V taką, że $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = B$. Mamy $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_s$, gdzie $\mathcal{A}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_1+n_2}\}$ idt. Wówczas niech $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{\delta(1)} \cup \mathcal{A}_{\delta(2)} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{\delta(s)}$. Zatem A i B są podobne. $\square$

Zadanie 2.
Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Znaleźć macierz $C \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$, że $C^{-1} \cdot A \cdot C = B$.

Rozwiązanie:
Niech $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A} = st = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$ przy czym $\mathcal{A}_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ i $\mathcal{A}_2 = \{\varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Wiemy, że A i B są podobne, zatem niech $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{B} = \{\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Wtedy biorąc $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ mamy $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$, zatem

$$C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C^{-1} = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie: (Jordana) Niech $\phi : V \to V$ to endomorfizm i niech V będzie n-wymiarową przestrzenią nad ciałem K. Jeśli $w_\phi(\lambda) = (c_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (c_n - \lambda)$, gdzie $c_i \in K$, to istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V, że

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}, \text{ gdzie } J_i = \begin{bmatrix} d_i & 1 & & \\ & d_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & d_i \end{bmatrix}$$

Wniosek: Jeśli dwie macierze w postaci Jordana różnią się tylko kolejnością klatek, to są podobne.

Niech $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obliczmy $P^0, P^1, P^2, \ldots$ oraz $r(P^i)$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots$.

$$P^0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \quad P^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla $i \geq 4, P^i$ jest macierzą zerową. Zatem $r(P^0) = 4, r(P^1) = 3, r(P^2) = 2, r(P^3) = 1$ oraz $r(P^i) = 0$ dla $i \geq 4$.

Niech $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Obliczmy $r(Q^i)$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots$. Skoro na przekątnej są wyrazy różne od zera, to po przemnożeniu macierzy, rząd się nie zmienia, zatem $4 = r(Q^0) = r(Q^1) = \ldots$.

Ogólnie, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & & & & & & & \\ & & & & & b & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & b & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & b & 1 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & b & & & \\ & & & & & & & & & b & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & b & 1 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

to

$$S = A - aI = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&&&&&&& \\ 0&0&1&0&0&&&&&&& \\ 0&0&0&1&0&&&&&&& \\ 0&0&0&0&1&&&&&&& \\ 0&0&0&0&0&&&&&&& \\ &&&&&b-a&1&0&0&&& \\ &&&&&0&b-a&1&0&&& \\ &&&&&0&0&b-a&1&&& \\ &&&&&0&0&0&b-a&&& \\ &&&&&&&&&b-a&1&0 \\ &&&&&&&&&0&b-a&1 \\ &&&&&&&&&0&0&b-a \end{bmatrix}$$

czyli $r(S^0) = 12,\ r(S^1) = 11,\ r(S^2) = 10,\ r(S^3) = 9,\ r(S^4) = 8,\ r(S^5) = 7$ itd.

$$T = A - bI = \begin{bmatrix} a-b&1&0&0&0&&&&&&& \\ 0&a-b&1&0&0&&&&&&& \\ 0&0&a-b&1&0&&&&&&& \\ 0&0&0&a-b&1&&&&&&& \\ 0&0&0&0&a-b&&&&&&& \\ &&&&&0&1&0&0&&& \\ &&&&&0&0&1&0&&& \\ &&&&&0&0&0&1&&& \\ &&&&&0&0&0&0&&& \\ &&&&&&&&&0&1&0 \\ &&&&&&&&&0&0&1 \\ &&&&&&&&&0&0&0 \end{bmatrix}$$

czyli $r(T^0) = 12,\ r(T^1) = 10,\ r(T^2) = 8,\ r(T^3) = 6,\ r(T^4) = 5$ itd.

Uwaga: Jeśli A jest wartością własną macierzy A, to $\forall_{m\in\mathbb{N}}\ r((A-aI)^{m-1}) - r((A-aI)^m)$ to liczba klatek w A_J o wartości własnej a mających rozmiar co najmniej m.

Uwaga:

$$A \sim B \Rightarrow \forall_c\ A - cI \sim B - cI$$

$$C \sim D \Rightarrow C^m \sim D^m$$

Zadanie 4.
Znaleźć postać Jordana macierzy A (czyli taką macierz w postaci Jordana A_J, że $A \sim A_J$).

$$A = \begin{bmatrix} 1&2&1&0&0 \\ -2&5&1&0&0 \\ 0&0&3&0&0 \\ 1&-1&1&2&-1 \\ -1&1&-1&1&4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = [(1-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)+4(3-\lambda)] \cdot [(2-\lambda)(4-\lambda)+1] = (3-\lambda)^3 \cdot (\lambda-3)^2 = (3-\lambda)^5$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$r((A-3I)^0) = r(I) = 5$ oraz $r((A-3I)^1 = 2$, zatem są $5-2=3$ klatki rozmiaru co najmniej 1.

$$(A-3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$r((A-3I)^1) = 2$ oraz $r((A-3I)^2) = 1$, zatem jest $2-1=1$ klatka rozmiaru co najmniej 2. Zatem

$$A_J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ćwiczenia 6

Zastosowania twierdzenia Jordana

Zadanie 1.
Dane są 4 macierze $M_{4\times4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć klasy równoważności relacji podobieństwa w zbiorze czteroelementowym $\{A, B, C, D\}$.

Rozwiązanie:

Uwaga: Każda macierz A jest podobna do swojej postaci Jordana A_J. Macierze w postaci Jordana są podobne $\Leftrightarrow$ różnią się co najwyżej kolejnością klatek. Zatem A i B są podobne $\Leftrightarrow$ ich postaci Jordana A_J, B_J różnią się co najwyżej kolejnością klatek.

Znajdujemy postać Jordana dla każdej macierzy

$$w_A(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2$$

$$w_B(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2$$

$$w_C(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2$$

$$w_D(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2$$

Wartość własna dla każdej macierzy to 2. Dla macierzy A mamy:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$r((A-2I)^0) - r((A-2I)^1) = 4 - 3 = 1$, zatem jest 1 klatka rozmiaru co najmniej 1. Dla macierzy B mamy:

$$B - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$r((B-2I)^0) - r((B-2I)^1) = 4 - 2 = 2$, zatem są 2 klatki rozmiaru co najmniej 1.

$$(B - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r((B-2I)^1) - r((B-2I)^2) = 2 - 1 = 1$, zatem jest 1 klatka rozmiaru co najmniej 2. Dla macierzy C mamy:

$$C - 2I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$r((C-2I)^0) - r((C-2I)^1) = 4 - 2 = 2$, zatem są 2 klatki rozmiaru co najmniej 1.

$$(C - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r((C-2I)^1) - r((C-2I)^2) = 2 - 0 = 2$, zatem są 2 klatki rozmiaru co najmniej 2. Dla macierzy A mamy:

$$D - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$r((D-2I)^0) - r((D-2I)^1) = 4 - 2 = 2$, zatem są 2 klatki rozmiaru co najmniej 1.

$$(D - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r((B-2I)^1) - r((B-2I)^2) = 2 - 1 = 1$, zatem jest 1 klatka rozmiaru co najmniej 2.
Zatem

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Czyli podobne są macierze B i D.

Zadanie 2.
Czy macierze rzeczywiste $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ są podobne?

Rozwiązanie:
Ich wielomian charakterystyczny jest równy $w(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Nie są diagonalizowalne nad $\mathbb{R}$ ale są diagonalizowalne nad $\mathbb{C}$, bo $\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$, czyli w $\mathbb{C}$ są dwie różne wartości własne. Stąd istnieje macierz $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ odwracalna C, że $B = C^{-1}AC$. Ale czy istnieje macierz rzeczywista, odwracalna D, że $B = D^{-1}AD$?

Twierdzenie: Niech K to podciało ciała L oraz niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Jeśli istnieje odwracalna macierz $C \in M_{n\times n}(L)$ taka, że $B = C^{-1}AC$, to istnieje też odwracalna macierz $D \in M_{n\times n}(K)$, że $B = D^{-1}AD$.

Dowód:
Skoro $C^{-1}\cdot A\cdot C = B$, to $AC = CB$. Musimy zatem wykazać, że istnieje $D \in M_{n\times n}(K)$, że $AD = DB$. Niech $D = [d_{ij}]$, wówczas mamy po prostu układ n^2 równań z n^2 niewiadomymi. Niech więc macierze $D_1, D_2, \ldots, D_s$ są macierzami stanowiącymi bazę przestrzeni rozwiązań tego układu w K^{n^2}. Chcemy pokazać, że jest to też baza przestrzeni rozwiązań tego układu w L^{n^2}. Pokażemy najpierw, że jeśli U jest jednorodnym układem równań o n niewiadomych i współczynnikach w ciele K oraz K jest podciałem ciała L, to wektory $w_1, w_2, \ldots, w_s \in K^n$ będące bazą przestrzeni rozwiązań tego układu w K^n są też bazą rozwiazań tego układu w L^n. Jest tak dlatego, że po pierwsze wymiar przestrzeni rozwiązań nad K i nad L są takie same i wynoszą $n-r(A)$, gdzie A jest macierzą współczynników układu U. Po drugie układ $w_1, w_2, \ldots, w_s \in K^n$, który jest liniowo niezależny w K^n jest też liniowo niezależny w L^n (bo macierz o wierszach $w_1, w_2, \ldots, w_s$ ma taki sam rząd niezależnie czy rozpatrujemy ją w K czy w L. Ten rząd to rozmiar największej podmacierzy kwadratowej o niezerowym wyznaczniku). Zatem każda macierz $D \in M_{n\times n}(K)$ spełniająca $AD = DB$ jest postaci $x_1D_1 + \ldots + x_sD_s$ dla pewnych $x_1, \ldots, x_s \in K$. Zatem wystarczy dobrać $x_1, \ldots, x_s$ tak aby D była odwracalna. Gdyby $x_1, \ldots, x_s$ nie istniały w K, to wówczas dla każdych $x_1, \ldots, x_s \in K$ zachodziłoby $\det(x_1D_1 + \ldots + x_sD_s) = 0$. Ale $\det(x_1D_1 + \ldots + x_sD_s)$ jest wielomianem zmiennych $x_1, \ldots, x_s$ o współczynnikach w K (widać to na przykład ze wzoru permutacyjnego na wyznacznik). Zatem gdyby dla każdych wartości $x_1, \ldots, x_s \in K$ wyznacznik byłby zerowy, to wielomian ten miałby wszystkie współczynniki równe zero. Ale wielomian ten nie może mieć wszystkich współczynników równych zero, bo ma rozwiązanie w ciele L (wiemy, że istnieje macierz odwracalna $C \in M_{n\times n}(L)$ taka, że $AC = CB$, czyli macierz ta jest postaci $y_1D_1 + \ldots + y_sD_s$ dla pewnych $y_1, \ldots, y_s \in L$. Ale wtedy $\det(y_1D_1 + \ldots + y_sD_s) \neq 0$ co jest sprzeczne z tym, że wielomian ten ma wszystkie współczynniki zerowe). □

Wiemy więc, że dla macierzy A, B istnieje odwracalne $D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ takie, że $DB = AD$. Rozwiązując układ równań $DB = AD$ dostajemy na przykład $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ćwiczenia 7

Baza Jordana i jej zastosowania

Zadanie 1.

Dany jest endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, -x_1 + 3x_3)$. Znaleźć bazę Jordana dla ϕ.

Rozwiązanie:

Macierz ϕ w bazie standardowej to

$$A = M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Policzmy jej postać Jordana. Wielomian charakterystyczny to: $w(\lambda) = (2-\lambda)^3$. Zatem

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r((A-2I)^0) - r((A-2I)^1) = 3 - 2 = 1$, więc jest jedna klatka. Zatem postać Jordana macierzy A to macierz

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Baza Jordana dla ϕ jest to taka baza $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3)$, że $M(\phi)_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}} = A_J$, czyli $\phi(w_1) = 2w_1$, $\phi(w_2) = w_1 + 2w_2$, $\phi(w_3) = w_2 + 2w_3$. Wektor w_1 jest zatem wektorem własnym ϕ o wartości własnej 2, czyli jego współrzędne spełniają układ równań liniowych o macierzy współczynników $A - 2I$ i kolumnie wyrazów wolnych zerowej.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czyli n.p. $w_1 = (1,1,1)$. Wektor w_2 wyliczamy z równości $\phi(w_2) = w_1 + 2w_2$, czyli $\phi(w_2) - 2w_2 = w_1$. Oznacza to, że współrzędne wektora w_2 spełniają układ równań liniowych o macierzy współczynników $A - 2I$ i kolumnie wyrazów wolnych $w_1 = (1,1,1)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czyli n.p. $w_2 = (0,0,1)$. Wektor w_3 wyliczamy z równości $\phi(w_3) = w_2 + 2w_3$, czyli $f(w_3) - 2w_3 = w_2$. Oznacza to, że współrzędne wektora w_3 spełniają układ równań liniowych o macierzy współczynników $A - 2I$ i kolumnie wyrazów wolnych $w_2 = (0,0,1)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czyli n.p. $w_3 = (0, 1, 1)$. To daje przykład bazy Jordana dla ϕ.

Zadanie 2.

Dana jest macierz $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Dla dowolnego naturalnego m obliczyć A^m.

Rozwiązanie:

Macierz $A = M(\phi)^{st}_{st}$ jest podobna do macierzy

$$A_J = M(f)^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Co więcej dla macierzy zamiany współrzędnych $C = M(id)^{st}_{\mathcal{W}}$ mamy $A_J = C^{-1} \cdot A \cdot C$, czyli $A = C \cdot A_J \cdot C^{-1}$. Mamy $\mathcal{W} = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, zatem otrzymujemy

$$C = M(id)^{st}_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponadto z $A = C \cdot A_J \cdot C^{-1}$ otrzymujemy $A^m = C \cdot A_J^m \cdot C^{-1}$. Zatem zadanie sprowadza się do obliczenia A_J^m. Zauważmy, że $A_J = 2I + D$, gdzie

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz $2I$ jest macierzą diagonalną z 2 na przekątnej, więc jest przemienna z każdą macierzą z $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, w szczególności z macierzą D. Stąd $A_J^m = (2I + D)^m$. Wyliczamy to z dwumianu Newtona. Jak wiemy jest to suma wyrazów postaci $(2I)^{m-k} \cdot D^k$ z odpowiednimi współczynnikami. Ale D^k jest niezerowe tylko dla $k = 0, 1, 2$. Dokładniej:

$$D^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Współczynniki przy $(2I)^{m-k} \cdot D^k$ dla $k = 0, 1, 2$ wynoszą kolejno $1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{2}$. Zatem $(2I + D)^m = (2I)^m + m \cdot (2I)^{m-1} \cdot D + \frac{m(m-1)}{2} \cdot (2I)^{m-2} \cdot J^2$.

Ćwiczenia 8

Iloczyny skalarne

Definicja: V przestrzeń liniowa nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Iloczyn skalarny na przestrzeni V jest to funkcja $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, która jest:

1. dwuliniowa (to znaczy liniowa ze względu na każdą zmienną, czyli dla każdego $v \in V$ funkcje $\langle v,\ \rangle : V \to \mathbb{R}$ oraz $\langle\ , v\rangle : V \to \mathbb{R}$ są liniowe),
2. symetryczna (to znaczy dla każdych $v, w \in V$ mamy $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$),
3. dodatnio określona (to znaczy dla każdego niezerowego $v \in V$ zachodzi $\langle v, v\rangle > 0$).

Przykłady:

1. Standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1y_1 + \ldots + y_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

   Np. $\langle (1,3,2),(5,2,4)\rangle = 5 + 6 + 8 = 19$

2. Na $\mathbb{R}^2$ Czy to jest iloczyn skalarny?
   a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_2$ NIE, bo nie jest symetryczny
   b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ NIE, bo nie jest dodatnio określone, bo np. $\langle (1,-1),(1,-1)\rangle = 0$
   c) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$ TAK, 1, 2, 3 spełnione. Warunek 3. jest spełniony dlatego, że $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = (x_1)^2 + 2x_1x_2 + 2(x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2)^2$ a to jest zawsze ≥ 0, przy czym równe zero tylko dla $(0,0)$.

3. Przestrzeń Hilberta l^2

   wektory: nieskończone ciągi rzeczywiste sumowalne z kwadratem, tz. ciąg (x_i) jest w l^2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2$ jest skończona.

$$\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i$$

Definicja: W przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym mówimy, że wektory v, w są prostopadłe, jeśli $\langle v, w\rangle = 0$. Oznaczamy to: $v \perp w$.

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym

a) Czy wektory $(2, 5, 6)$, $(3, 4, -5)$ są prostopadłe?

b) Dla jakich t rzeczywistych wektory $(4, -1, 3)$, $(2, t, 5)$ są prostopadłe?

Rozwiązanie:

a) Nie są, bo $2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 5 \cdot 6 = -4 \neq 0$

b) $8 - t + 15 = 23 - t = 0 \Leftrightarrow t = 23$

Definicja: W przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym długością wektora v nazywamy liczbę $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Zadanie 2.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym

a) Obliczyć $||(3, -1, 2)||$

b) Znaleźć takie $a \in \mathbb{R}$, że wektor $a(5, -2, 1)$ ma długość 1.

Rozwiązanie:

a) $||(3, -1, 2)|| = \sqrt{\langle(3, -1, 2), (3, -1, 2)\rangle} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

b) $||(a(5, -2, 1)|| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\langle a(5, -2, 1), a(5, -2, 1)\rangle} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{30}}$

Zadanie 3.
Wykazać, że w przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym dla każdego niezerowego wektora v wektor $\frac{1}{||v||}v$ ma długość 1.

Rozwiązanie:
Z definicji: $||\frac{1}{||v||}v|| = \sqrt{\langle \frac{1}{||v||}v, \frac{1}{||v||}v\rangle} = \sqrt{\frac{1}{||v||}^2 \langle v, v\rangle} = \frac{1}{||v||}||v|| = 1$

Definicja: W przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym niech W będzie podprzestrzenią. Dopełnienie prostopadłe podprzestrzeni W jest to zbiór wszystkich wektorów w V prostopadłych do każdego wektora w W. Oznaczenie na dopełnienie prostopadłe podprzestrzeni W to $W^{\perp}$.

Uwaga: $W^{\perp}$ jest podprzestrzenią V.

Zadanie 4.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $W = \text{lin}((1,1,1,1))$. Znaleźć bazę $W^\perp$.

Rozwiązanie:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1,1,1,1) \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

czyli $W^\perp = \text{lin}((1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1))$.

Twierdzenie: Jeśli przestrzeń V z iloczynem skalarnym jest skończenie wymiarowa, to dla każdej jej podprzestrzeni W mamy: $V = W \oplus W^\perp$.

Ćwiczenia 9

Iloczyny skalarne

Czy zawsze dla podprzestrzeni W w przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym zachodzi $V = W \oplus W^\perp$. Wiemy, że jest twierdzenie mówiące, że tak jest, gdy V jest skończenie wymiarowa (przy czym można wykazać, że tak naprawdę wystarczy, żeby W była skończenie wymiarowa). Niech $V = l^2$ oraz $W =$ takie ciągi, że każdy jest równy zero od pewnego miejsca. Wówczas $W^\perp = 0$, więc $V \neq W \oplus W^\perp$.

Definicja: Układ wektorów $v_1, \ldots, v_k$ w przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym nazywamy układem prostopadłym (ortogonalnym), jeśli dla każdego $i \neq j$ mamy $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, czyli $v_i \perp v_j$. Mówimy, że taki układ jest ortonormalny, jeśli ponadto wszystkie jego wektory mają długość 1.

Uwaga: Jeśli układ $v_1, \ldots, v_k$ złożony z niezerowych wektorów jest prostopadły, to jest on liniowo niezależny.

Definicja: Mówimy, że baza $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym jest prostopadła (ortogonalna), jeśli jest ona układem prostopadłym. Bazę prostopadłą nazywamy ortonormalną jeśli wszystkie jej wektory mają długość 1.

Przykład:
Baza st jest bazą ortonormalną dla $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

Twierdzenie: Każda skończenie wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym ma bazę prostopadłą.

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech W będzie opisana równaniem $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni W.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy najpierw bazę W: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 - x_3 - x_4$, zatem mamy $(x_1, -x_1 - x_3 - x_4, x_3, x_4) = x_1(1, -1, 0, 0) + x_3(0, -1, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1)$, skąd mamy $W = \text{lin}((1, -1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$ oraz $\dim W = 3$.

Bierzemy dowolny niezerowy $v_1 \in W$, n.p. $v_1 = (1, -1, 0, 0)$. Szukamy takiego $v_2 \in W$, że $v_2 \perp w_1$. Jeśli $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, to daje to układ dwóch równań na v_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \;\; \text{(bo jest w przestrzeni } W) \\ x_1 - x_2 = 0 \;\; \text{(bo jest prostpadły do } v_1) \end{cases}$$

Zatem n.p. $v_2 = (0, 0, 1, -1)$. Szukamy takiego $v_3 \in W$, że $v_3 \perp w_1$ oraz $v_3 \perp v_2$. Jeśli $v_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, to daje to układ trzech równań na v_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \text{(bo jest w przestrzeni } W) \\ x_1 - x_2 = 0 \ \text{(bo jest prostopadły do } v_1) \\ x_3 - x_4 = 0 \ \text{(bo jest prostopadły do } v_2) \end{cases}$$

Zatem n.p. $v_3 = (1, 1, -1, -1)$.

Twierdzenie: Niech V przestrzeń z iloczynem skalarnym $\langle\ ,\ \rangle$. Niech $v_1, \ldots, v_n$ baza prostopadła V. Wtedy dla każdego wektora $v \in V$ jego współrzędne w tej bazie to:

$$\frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}, \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}, \ldots, \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle}$$

Dla bazy ortonormalnej współrzędne wektora v wynoszą $\langle v, v_1\rangle, \langle v, v_2\rangle, \ldots, \langle v, v_n\rangle$.

Zadanie 2.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech W będzie opisana równaniem $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni W.

Rozwiązanie:
Baza ortogonalna przestrzeni W to $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, -1, -1)\}$. Wystarczy zatem podzielić każdy wektor z tej bazy przez jego długość. Dostajemy bazę

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1) \right\}$$

Definicja: V przestrzeń z iloczynem skalarnym. Jeśli $\dim V$ jest skończony, to mówimy, że V jest przestrzenią euklidesową liniową. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wtedy $V = W \oplus W^{\perp}$. Rzut na W wzdłuż $W^{\perp}$ nazywamy rzutem prostopadłym na W.

Zadanie 3.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech W będzie opisana równaniem $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. Znaleźć rzut prostopadły wektora $(1, 1, 1, 0)$ na przestrzeń W.

Rozwiązanie:
Ogólnie jeśli $v_1, \ldots, v_k$ jest bazą prostopadłą przestrzeni W, to

$$v' = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 + \ldots + \frac{\langle v, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} v_k$$

jest rzutem prostopadłym v na W.
W przypadku, gdy $\dim V = n$ oraz ponadto $v_{k+1}, \ldots, v_n$ jest bazą prostopadłą $W^{\perp}$, to wówczas $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ jest bazą prostopadłą V, więc

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 + \ldots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} v_n$$

Suma pierwszych k składników należy do W, suma pozostałych $n - k$ należy do $W^{\perp}$.

W zadaniu mamy więc

$$v' = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \frac{\langle v, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle}v_3 =$$

$$= \frac{0}{2}(1,-1,0,0) + \frac{1}{2}(0,0,1,-1) + \frac{1}{4}(1,1,-1,-1) = \frac{1}{4}(1,1,1,-3)$$

Można inaczej: Skorzystamy z tego, że $W^\perp$ jest wymiaru 1. Korzystając z tego, że $V = W \oplus W^\perp$, jeśli w jest rzutem v na $W^\perp$, to $v' = v - w$. Bazą $W^\perp$ jest n.p. $(1,1,1,1)$. Niech więc $v_4 = (1,1,1,1)$. Skoro

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \frac{\langle v, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle}v_3 + \frac{\langle v, v_4\rangle}{\langle v_4, v_4\rangle}v_4$$

to mamy

$$v' = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \frac{\langle v, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle}v_3 = v - \frac{\langle v, v_4\rangle}{\langle v_4, v_4\rangle}v_4 =$$

$$= (1,1,1,0) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{4}(1,1,1,-3)$$

Zadanie 4.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech W będzie opisana równaniem $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. Znaleźć wzór na przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będące rzutem prostopadłym na przestrzeń W.

Rozwiązanie:
Metoda jest jak Zadaniu 3. tylko zamiast $(1,1,1,0)$ bierzemy dowolny wektor (x_1, x_2, x_3, x_4).

$$\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1,1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1,1), (1,1,1,1)\rangle} \cdot (1,1,1,1) =$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{4} \cdot (1,1,1,1) =$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4) =$$

$$= \frac{1}{4}(3x_1 - x_2 - x_3 - x_4, -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4, -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4, -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4$$

Ćwiczenia 10

Kryterium Sylvestera

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, niech $h : V \times V \to K$ będzie przekształceniem, które jest liniowe ze względu na każdą zmienną. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Dla każdych i, j oznaczmy $h(v_i, v_j) = a_{ij}$.

Wówczas dla każdych wektorów $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ oraz $w = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n$ mamy:

$$h(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

Mieliśmy już ten wzór w szczególnym przypadku, gdy $K = \mathbb{R}$ i h był iloczynem skalarnym.

Oznaczmy przez A macierz $n \times n$ o wyrazach $a_{ij} = h(v_i, v_j)$.

W przypadku, gdy h jest iloczynem skalarnym macierz A nazywamy macierzą Grama układu wektorów $v_1, \ldots, v_n$ i oznaczamy $G(v_1, \ldots, v_n)$ a jej wyznacznik nazywamy wyznacznikiem Grama układu wektorów $v_1, \ldots, v_n$ i oznaczamy $W(v_1, \ldots, v_n)$.

Suma $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ może być wyliczona za pomocą mnożenia macierzy. Mianowicie $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ jest iloczynem trzech macierzy: wiersza długości n o wyrazach $x_1, \ldots, x_n$, macierzy A oraz kolumny o długości n o wyrazach $y_1, \ldots, y_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Zadanie 1.

W $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym $\langle\ ,\ \rangle$ i bazą v_1, v_2, v_3 mamy: $G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Niech $v = v_1 + v_2 + v_3$, $w = v_1 + v_3$. Obliczyć $\langle v, w\rangle$.

Rozwiązanie:

$$\langle v, w\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 10$$

Uwaga:

1. $W(v_1, \ldots, v_k)$ jest zawsze nieujemny,
2. $W(v_1, \ldots, v_k) > 0 \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_k$ jest liniowo niezależny

Zadanie 2.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym obliczyć $W(v_1, v_2)$ dla $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (-2, 4, r)$.

Rozwiązanie:
$\langle v_1, v_1 \rangle = 1 + 4 + 1 = 6$
$\langle v_1, v_2 \rangle = -2 - 8 + r = r - 10$
$\langle v_2, v_2 \rangle = 4 + 16 + r^2 = r^2 + 20$
Zatem macierz Grama to $\begin{bmatrix} 6 & (r-10) \\ (r-10) & (r^2+20) \end{bmatrix}$.
Wyznacznik Grama jest równy $W(v_1, v_2) = 5 \cdot (r+2)^2$.

Dla $r = -2$ wektory v_1, v_2 są liniowo zależne, bo wyznacznik Grama się zeruje.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K i niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą przestrzeni V. Wiemy już, że jeśli $h : V \times V \to K$ jest przekształceniem, które jest liniowe ze względu na każdą zmienną, to dla każdych wektorów $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ oraz $w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ mamy:

$$h(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

gdzie $a_{ij} = h(v_i, v_j)$.
Na odwrót: dla każdej macierzy $A = [a_{ij}]$ rozmiaru $n \times n$ wzór

$$h(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

dla $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ oraz $w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ zadaje przekształcenie $h : V \times V \to K$, które jest liniowe ze względu na każdą zmienną.

Czyli przy zadanej bazie $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni V istnieje bijekcja:
$\{$macierze $n \times n$ o wyrazach z $K\}$ $\longleftrightarrow$ $\{$przekształcenia $V \times V \to K$, które są liniowe ze względu na każdą zmienną$\}$

Definicja: Mówimy, że przekształcenie $h : V \times V \to K$ jest symetryczne, jeśli dla każdych $v, w \in V$ mamy $h(v, w) = h(w, v)$.

Przykład h symetrycznego i przykład h niesymetrycznego:

symetryczne: $h((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$
niesymetryczne: $h((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + x_1 y_2$

Problem 1.
W powyższej bijekcji jakie macierze odpowiadają przekształceniom symetrycznym?

Takie macierze, których postać A jest równa A^T, czyli takie macierze, w których $a_{ij} = a_{ji}$. Bo skoro $h(v_i, v_j) = a_{ij}$, to $h(v_i, v_j) = h(v_j, v_i) \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$. W drugą stronę ($A$ symetryczna, to h symetryczna) trzeba skorzystać z liniowości na każdą zmienną.

Problem 2.
Niech $K = \mathbb{R}$. W powyższej bijekcji, jakie macierze symetryczne odpowiadają iloczynom skalarnym?

Definicja: Dla macierzy A rozmiaru $n \times n$ niech $A^{(i)}$ oznacza macierz $i \times i$ powstałą z A przez usunięcie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn.

Przykład:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, wtedy $A^{(1)} = [1]$, $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{(3)} = A$
Macierz A odpowiada iloczynowi skalarnemu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ macierz $A^{(i)}$ ma dodatni wyznacznik.

Twierdzenie: (Kryterium Sylwestera) Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie jej bazą. Dla macierzy symetryczej $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ rozpatrujemy funkcję $h : V \times V \to \mathbb{R}$ zadaną dla każdych wektorów postaci $v = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$ oraz $w = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ wzorem: $h(v, w) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. funkcja h jest iloczynem skalarnym na przestrzeni V
2. $\det A^{(i)} > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$

Zadanie 3.
$h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest zadane wzorem: $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + tx_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + 5x_3y_3$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ h jest iloczynem skalarnym?

Rozwiązanie:
Temu przekształceniu odpowiada macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & t & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Mamy $\det(A^{(1)}) = 1 > 0$, czyli OK. Dalej $\det(A^{(2)}) = t - 1$ oraz $\det(A^{(3)}) = t - 2$. Czyli h to jest iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy $t > 2$.

Ćwiczenia 11

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech W będzie podprzestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

i niech $W_t = \text{lin}((2,5,0,0),(t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2))$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$

a) $W_t \subseteq W^\perp$?

b) $W_t = W^\perp$

Rozwiązanie:
Wyznaczmy najpierw W. Mamy $W = \text{lin}((5,-2,1,0),(-5,2,0,1))$. Wyznaczamy $W^\perp$. Otrzymujemy $W^\perp = \text{lin}((1,0,-5,5),(0,1,2,-2))$. Układ równań opisujący $W^\perp$ to

$$U = \begin{cases} 5 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 0 \\ -5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad U = \begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ 5 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Aby $W_t \subseteq W^\perp$, to wektory $(2,5,0,0)$ oraz $(t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2)$ muszą być rozwiązaniem układu U, czyli $t = 1$ lub $t = 2$.

b) Aby $W_t = W^\perp$ musi zachodzić $\dim W_t = \dim W^\perp$, czyli $t = 1$.

Konstruowanie bazy prostopadłej do dowolnej przestrzeni euklidesowej W

1. Wybieramy dowolny niezwrowy wektor $w_1 \in W$
2. Znajdujemy wektor $w_2 \in W$ taki, że $w_2 \perp w_1$
3. Znajdujemy wektor $w_3 \in W$ taki że $w_3 \perp w_2$ oraz $w_3 \perp w_1$
4. Powtarzamy czynność aż do w_k, gdzie $k = \dim W$

Jest też inna metoda pozwalająca mając bazę $v_1, \ldots, v_k$ przestrzeni W dostać z niej algorytmicznie bazę prostopadłą $w_1, \ldots, w_k$ przestrzeni W. Nazywa się ortogonalizacją Grama-Schmidta (w skrócie G-S). Jest nieprzyjemna do liczenia ręcznego, ale ma ważną interpretację geometryczną.

Opiera się na poniższej Uwadze.

Uwaga: Niech $w_1, \ldots, w_k$ będzie bazą prostopadłą podprzestrzeni Z w przestrzeni liniowej V z iloczynem skalarnym. Wtedy dla każdego $v \in V$ wektor

$$v - \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \ldots - \frac{\langle v, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$$

należy do $Z^{\perp}$.

Dowód: Ten wektor jest prostopadły do każdego w_i dla $i = 1, \ldots, k$, bo wyliczając jego iloczyn skalarny z w_i dostajemy 0.

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Z rozkładu $v = v' + v''$, gdzie

$$v' = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \ldots - \frac{\langle v, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$$

$$v'' = v - \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \ldots - \frac{\langle v, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$$

wynika więc, że v' jest rzutem prostopadłym wektora v na Z, a v'' jest rzutem prostopadłym wektora v na $Z^{\perp}$.

To daje dla każdej bazy $v_1, \ldots, v_k$ przestrzeni euklidesowej liniowej W algorytmiczną konstrukcję bazy prostopadłej $w_1, \ldots, w_k$ przestrzeni W.

Mianowicie:
Przyjmujemy $w_1 = v_1$ oraz dla $i > 1$ definiujemy (indukcyjnie) w_i = rzut prostopadły wektora v_i na przestrzeń $(\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_{i-1}))^{\perp}$, czyli

$$w_i = v_i - \frac{\langle v_i, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \ldots - \frac{\langle v_i, w_{i-1} \rangle}{\langle w_{i-1}, w_{i-1} \rangle} w_{i-1}$$

Zauważmy przy tym, że dla każdego i mamy $\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_i) = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_i)$, bo z powyższego wzoru na w_i oraz indukcji otrzymujemy, że w_i należy do $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_i)$.

Zadanie 2.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $W = \mathrm{lin}((1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1))$. Znaleźć bazę przestrzeni W otrzymaną z bazy $(1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1)$ ortogonalizacją Grama-Schmidta.

Rozwiązanie:
Oznaczmy $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$. Wtedy:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 0, 1) = \frac{1}{3}(2, -1, 3, -1)$$

$$w_3 = (0, 1, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 0, 1) - \frac{1}{15}(2, -1, 3, -1) = \frac{1}{5}(-4, 2, 4, 2)$$

Twierdzenie: Niech $v_1, \ldots, v_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej liniowej V. Niech $v_k = w + z$, gdzie $w \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k-1})$ oraz $z \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k-1})^\perp$. (To znaczy w jest rzutem prostopadłym wektora v_k na $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k-1})$, a z jest rzutem prostopadłym wektora v_k na $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k-1})^\perp$.) Wówczas $W(v_1, \ldots, v_k) = W(v_1, \ldots, v_{k-1})\langle z, z\rangle$.

Zadanie 3.
Niech $v_1, \ldots, v_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ takim, że układ $v_1, \ldots, v_{k-1}$ jest ortonormalny i wyznacznik Grama układu $v_1, \ldots, v_k$ wynosi 25. Niech z będzie rzutem prostopadłym wektora v_k na przestrzeń $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k-1})^\perp$. Ile wynosi długość wektora z?

Rozwiązanie:
Układ $v_1, \ldots, v_{k-1}$ jest ortonormalny, więc wyznacznik macierzy Grama jest równy 1. Mamy więc $25 = W(v_1, \ldots, v_k) = W(v_1, \ldots, v_{k-1})\langle z, z\rangle$, zatem $\langle z, z\rangle = 25$, czyli $||z|| = 5$.

Zadanie 4.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2)$, $v_3 = (0, t, 1)$. Niech z będzie rzutem prostopadłym wektora v_3 na $\mathrm{lin}(v_1, v_2)^\perp$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wektor z ma najmniejszą długość?

Rozwiązanie:
$W(v_1, v_2, v_3) = W(v_1, v_2)\langle z, z\rangle$. Stąd $||z||$ jest minimalne wtedy i tylko wtedy gdy $W(v_1, v_2, v_3)$ jest minimalne. Macierz Grama tego układu to $\begin{bmatrix} 6 & 0 & (2t+1) \\ 0 & 5 & (t-2) \\ (2t+1) & (t-2) & (t_1^2) \end{bmatrix}$. Zatem wyznacznik Grama jest równy: $30(t^2+1) - 5(2t+1)^2 - 6(t-2)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = (2t+1)^2$. Jest on minimalny wtedy gdy $t = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenia 12

k wymiarowa objętość równoległościanów w przestrzeniach euklidesowych

Definicja: Niech $v_1, \ldots, v_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni euklidesowej V. Zbiór $\mathrm{R}(v_1, \ldots, v_k) = \{t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k \ : \ t_i \in [0,1] \text{ dla } i = 1, \ldots, k\}$ nazywamy k wymiarowym równoległościanem rozpiętym na układzie wektorów $v_1, \ldots, v_k$. (czyli bierzemy wszystkie kombinacje liniowe układu $v_1, \ldots, v_k$, w których współczynniki należą do przedziału $[0,1]$).

Co to jest dla $k = 1$? Odcinek o końcach 0, v_1
Co to jest dla $k = 2$? Równoległobok o podstawie $\mathrm{R}(v_1)$ i wysokości równej długości wektora z, gdzie z jest rzutem prostopadłym v_2 na $\mathrm{lin}(v_1)^\perp$
Co to jest dla $k = 3$? Równoległościan 3 wymiarowy o podstawie $\mathrm{R}(v_1, v_2)$ i wysokości równej długości wektora z, gdzie z jest rzutem prostopadłym v_3 na $\mathrm{lin}(v_1, v_2)^\perp$.

Definicja: Niech $\mathrm{R} = \mathrm{R}(v_1, \ldots, v_k)$ będzie k wymiarowym równoległościanem. k wymiarową objętością równoległościanu R nazywamy liczbę dodatnią $\mu_k(R) = \sqrt{W(v_1, \ldots, v_k)}$.

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym obliczyć $\mu_3(\mathrm{R})$ dla $\mathrm{R} = \mathrm{R}((1,0,1),(1,0,-1),(1,1,1))$.

Rozwiązanie:

$$\mu_3(\mathrm{R}) = \sqrt{W((1,0,1),(1,0,-1),(1,1,1))} = \sqrt{\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}} = \sqrt{4} = 2$$

Dlaczego ta definicja μ_k jest uogólnieniem znanych nam pojęć dla $k = 1, 2, 3$?

Twierdzenie: Niech $v_1, \ldots, v_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej liniowej V. Niech $v_k = w + z$, gdzie $w \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k-1})$ oraz $z \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k-1})^\perp$. Wówczas

$$W(v_1, \ldots, v_k) = W(v_1, \ldots, v_{k-1}) \langle z, z \rangle$$

Zatem mamy

$$\sqrt{W(v_1, \ldots, v_k)} = \sqrt{W(v_1, \ldots, v_{k-1})} \cdot ||z||$$

czyli

$$\mu_k(\mathrm{R}(v_1, \ldots, v_k)) = \mu_{k-1}(\mathrm{R}(v_1, \ldots, v_{k-1}) \cdot ||z||$$

Zatem indukcyjnie: $\mu_k = \mu_{k-1}(\text{postawy})$ razy wysokość.

Zauważmy, że dla każdego izomorfizmu $f : V \to V$ mamy: jeśli $\mathrm{R} = \mathrm{R}(v_1, \ldots, v_k)$, to $f(\mathrm{R}) = \mathrm{R}(f(v_1), \ldots, f(v_k))$. Bo dla każdych $t_1, \ldots, t_k$ zachodzi: $f(t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k) = t_1 f(v_1) + \ldots + t_k f(v_k)$.

Definicja: V przestrzeń euklidesowa liniowa. Mówimy, że liniowy izomorfizm $\phi : V \to V$ zachowuje objętość k wymiarowych równoległościanów, jeśli dla każdego k wymiarowego równoległościanu R zachodzi $\mu_k(\mathrm{R}) = \mu_k(\phi(\mathrm{R}))$.

Zadanie 2.
Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $\phi((x_1, x_2)) = (2x_1 + 3x_2, x_1 + 4x_2)$. W $\mathbb{R}^2$ standardowy iloczyn skalarny. Czy ϕ zachowuje miarę

a) 1 wymiarowych równoległościanów?

b) 2 wymiarowych równoległościanów?

Rozwiązanie:

a) Zachowywać miarę 1 wymiarowych równoległościanów to zachowywać długość wektorów! Zatem ϕ nie zachowuje miary 1 wymiarowych równoległościanów, bo dla $v = (1, 0)$ mamy $||v|| = 1$, $||\phi(v)|| = \sqrt{5}$.

b)

Twierdzenie: Niech $f : V \to V$ będzie izomorfizmem n wymiarowej przestrzeni liniowej z iloczynem skalarnym. Wtedy dla każdego n wymiarowego równoległościanu R mamy: $\mu_n(f(\mathrm{R})) = |\det(f)| \cdot \mu_n(\mathrm{R})$.

Wniosek: Dla $\dim V = n$, izomorfizm $f : V \to V$ zachowuje miarę n wymiarowych równoległościanów $\Leftrightarrow |\det(f)| = 1$.

$$\det(f) = \det(M(f)_{st}^{st}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 3 = 5. \text{ Zatem NIE}$$

Podaj przykład ϕ, które nie zachowuje długości, ale zachowuje μ_2.

Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $\phi((x_1, x_2)) = (5x_1, \frac{1}{5}x_2)$. W $\mathbb{R}^2$ standardowy iloczyn skalarny. Czy ϕ zachowuje miarę

a) 1 wymiarowych równoległościanów? NIE

b) 2 wymiarowych równoległościanów? TAK

Zadanie 3.
Dla jakich rzeczywistych t przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + x_2, 4x_1 + x_3, tx_1 + x_2 + 2x_3)$ jest izomorfizmem podwajającym miarę 3 wymiarowych równoległościanów?

Rozwiązanie:

Mamy $\mu_n(\phi(\mathrm{R})) = |\det(\phi)|\mu_n(\mathrm{R})$ oraz $\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ t & 1 & 2 \end{bmatrix} = t - 11$, zatem $|\det(\phi)| = 2 \Leftrightarrow t = 13$ lub $t = 9$.

Definicja: Mówimy, że dwie bazy $\mathcal{A} = v_1, \ldots, v_n$ oraz $\mathcal{B} = w_1, \ldots, w_n$ przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ są zgodnie zorientowane, jeśli wyznacznik macierzy zamiany współrzędnych od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ jest dodatni, tzn. $\det(M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) > 0$.

To jest relacja równoważności w zbiorze baz przestrzeni V.

Zadanie 4.
Czy bazy $\mathcal{A} = \{(2,1),(5,3)\}$ oraz $\mathcal{B} = \{(8,3),(1,4)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są zgodnie zorientowane?

Rozwiązanie:
Można policzyć macierz zamiany współrzędnych od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, ale można prościej:

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

$$M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 29 > 0$$

Stąd $\mathcal{A}$ i st zgodnie zorientowane, $\mathcal{B}$ i st zgodnie zorientowane $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ zgodnie zorientowane.

Ćwiczenia 13

Iloczyn wektorowy, izometrie

Każdy układ liniowo niezależny w przestrzeni liniowej V może być dopełniony do bazy przestrzeni V. Takich dopełnień jest wiele.

Czy w jakimś przypadku istnieje algorytm wybierania pewnego dopełnienia, czyli metoda, która przy danym układzie liniowo niezależnym wyznacza jednoznacznie jego dopełnienie do bazy?

W szczególnym przypadku, jeśli V jest zorientowaną n wymiarową przestrzenią euklidesową i układ $v_1, \ldots, v_{n-1}$ w przestrzeni V jest liniowo niezależny, to iloczyn wektorowy $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ jest dopełnieniem układu $v_1, \ldots, v_{n-1}$ do bazy przestrzeni V.

Definicja: Niech V będzie zorientowaną n wymiarową przestrzenią euklidesową i układ $v_1, \ldots, v_{n-1}$ w przestrzeni V będzie liniowo niezależny, to iloczyn wektorowy $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ jest to wektor $v_n \in V$ taki, że:

a) v_n jest prostopadły do $v_1, \ldots, v_{n-1}$,

b) $||v_n|| = \sqrt{W(v_1, \ldots, v_{n-1})}$,

c) baza $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ jest dodatnio zorientowana (to znaczy zgodnie z zadaną orientacją V).

(Dla $v_1, \ldots, v_{n-1}$ liniowo zależnych przyjmujemy $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} =$ wektor zerowy).

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym i orientacją przeciwną do standardowej niech $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ obliczyć $v_1 \times v_2$.

Rozwiązanie:
Szukamy wektora v_3 spełniającego a), b), c) z Definicji. Jeśli $v_3 = (x_1, x_2, x_3)$, to mamy

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

Zatem $v_3 \in \operatorname{lin}((-1, 3, 1))$. Zatem $v_3 = (-1, 3, 1)$ jest to wektor spełniający a). Wektor ten nie spełnia jednak warunku c), ponieważ baza $\{v_1, v_2, (-1, 3, 1)\}$ jest przeciwnie zorientowana. Spełnia go jednak wektor $(1, -3, -1)$. Policzmy wyznacznik Grama układu v_1, v_2. Mamy $W(v_1, v_2) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 1 = 11$. Wektor $v_3 = (1, -3, -1)$ spełnia warunek b), ponieważ $||(1, -3, -1)|| = \sqrt{11}$, zatem $v_1 \times v_2 = (1, -3, -1)$.

Inna metoda.

Twierdzenie Jeśli u_1, u_2, u_3 jest dodatnio zorientowaną, ortonormalną bazą zorientowanej przestrzeni euklidesowej liniowej V oraz jeśli $v_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$, $v_2 = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$, to

$$v_1 \times v_2 = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} u_1 - \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} u_2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} u_3$$

$u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (0,0,-1)$ jest dodatnio zorientowaną, ortonormalną bazą przestrzeni euklidesowej V (bo zadana orientacja jest przeciwna do standardowej).

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1$$

wyznaczniki tych trzech macierzy współczynników to kolejno: $1, 3, 1$ czyli

$$v_1 \times v_2 = 1(1,0,0) - 3(0,1,0) + 1(0,0,-1) = (1,-3,-1)$$

Definicja: Dla $i = 1,2$ niech $(V_i, \langle\ ,\ \rangle_i)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową (to znaczy dla $i = 1,2$ V_i jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym $\langle\ ,\ \rangle_i$). Mówimy, że przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ zachowuje iloczyn skalarny, jeśli dla każdych wektorów v, w należących do V_1 mamy $\langle v, w\rangle_1 = \langle \phi(v), \phi(w)\rangle_2$.

To jest równoważne zachowywaniu długości wektorów, czyli dla każdego $v \in V_1$ mamy $||v||_1 = ||f(v)||_2$, bo dla każdych v, w mamy $\langle v+w, v+w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$, czyli $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2)$. Mianowicie "długości wyznaczają iloczyn skalarny".

Definicja: Dla $i = 1,2$ niech $(V_i, \langle\ ,\ \rangle_i)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową. Mówimy, że przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest izometrią $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$, jeśli

a) ϕ jest izomorfizmem V_1 na V_2

b) ϕ zachowuje iloczyn skalarny

Jeśli $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) = (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$, to izometrię $\phi : V_1 \to V_2$ nazywamy izometrią przestrzeni $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$.

Uwaga: W powyższej definicji, jeśli $\dim V_1 = \dim V_2$, to b) $\Rightarrow$ a). Bo b) zawsze implikuje monomorfizm, bo $f(v) = 0 \Rightarrow ||f(v)|| = 0 \Rightarrow ||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$.

Definicja: Rzeczywistą macierz kwadratową A nazywamy ortogonalną, jeśli $A^TA = I$. Równoważnie: jeśli kolumny (wiersze) macierzy A tworzą ortonormalny układ wektorów w $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

Uwaga: Każda macierz ortogonalna 2×2 jest postaci $\begin{bmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ \sin(t) & -\cos(t)\end{bmatrix}$. Bo kolumny w A to wektory w $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym mające długość 1 i prostopadłe do siebie.

Zadanie 2.

Niech $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & t & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & s\end{bmatrix}$ Dla jakich s, t rzeczywistych macierz A jest ortogonalna?

Rozwiązanie:

Szukamy takich s, t, że $A^T \cdot A = I$, czyli

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 3t & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3s\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 3t & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 3t & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3s\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3t & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Daje nam to na przykład układ równań

$$\begin{cases}-3t + 2 = 0\\ 6s + 6t - 2 = 0\end{cases}$$

co spełnione jest dla $t = \frac{2}{3}$ oraz $s = -\frac{1}{3}$.

Twierdzenie: Dla $i = 1, 2$ niech $(V_i, \langle\ ,\ \rangle_i)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną V_1 i niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną V_2. Przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest izometrią $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2) \Leftrightarrow$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest ortogonalna.

Zadanie 3.

Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem: $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (-\frac{1}{3}x_1 + tx_2 + \frac{2}{3}x_3, \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + sx_3)$. Dla jakich s, t rzeczywistych ϕ jest izometrią przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym?

Rozwiązanie:

Macierz tego przekształcenia to macierz z poprzedniego zadania, więc przekształcenie f jest izometrią $\Leftrightarrow$ macierz jest ortogonalna $\Leftrightarrow s = -\frac{1}{3}, t = \frac{2}{3}$.

Ćwiczenia 14

Izometrie ciąg dalszy

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}((1,0,1),(1,1,0))$ z orientacją zadaną przez bazę $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,1,0)\}$. Znaleźć wzór na izometrię $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będącą obrotem wokół $W^\perp$ o kąt $\frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie:

Definicja: Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową i niech $W \subseteq V$ będzie jej 2-wymiarową podprzestrzenią zorientowaną. Przekształcenie liniowe $f : V \to V$ takie, że $f|_W$ jest obrotem o kąt θ w przestrzeni W, a $f|_{W^\perp}$ jest identycznością na przestrzeni $W^\perp$ nazywamy obrotem o kąt θ wokół przestrzeni $W^\perp$. Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest taką bazą przestrzeni V, że $\mathcal{A}' = (\alpha_1, \alpha_2)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni W zorientowaną zgodnie z orientacją W, natomiast $(\alpha_3, \dots, \alpha_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni $W^\perp$, to

$$M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} O_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$$

gdzie $O_\theta = M(f|_W)^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Znajdźmy bazę prostopadłą podprzestrzeni W. W jest opisana równaniem

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Niech $v_1 = (1,0,1)$. Wektor prostopadły do tego wektora będzie spełniał układ równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Wektor spełniający ten układ to na przykład $v_2 = (1,2,-1)$. Zatem baza $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,2,-1)\}$ jest bazą prostopadłą przestrzeni W. Mamy

$$(1,0,1) = 1\cdot(1,0,1) + 0\cdot(1,1,0)$$

oraz

$$(1,2,-1) = 1\cdot(1,0,1) + 2\cdot(1,1,0)$$

zatem $M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \geq 0$, czyli $\mathcal{B}$ jest dodatnio zorientowana. Po unormowaniu dostajemy $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\right\}$. Niech $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ oraz $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$. Izometria f będzie obrotem wokół $W^\perp$. Wyznaczmy zatem $W^\perp$. Są to wektory spełniające układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Spełnia je na przykład wektor $v_3 = (1, -1, -1)$, zatem $W^\perp = \text{lin}((1, -1, -1))$. Macierz obrotu o $\frac{\pi}{2}$ to $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Przekształcenie $f|_W$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$, zatem $f(v_1) = v_2$ oraz $f(v_2) = -v_1$. Przekształcenie $f|_{W^\perp}$ jest identycznością, zatem $f(v_3) = v_3$. Mamy więc

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

$$f((1, -1, -1)) = (1, -1, -1)$$

Jest teraz rzeczą standardową znaleźć wzór na przekształcenie f.

Zadanie 2.
Niech $f : V \to V$ będzie izometrią n wymiarowej przestrzeni euklidesowej V. Niech v będzie takim wektorem z V, że $f(v) \neq v$. Niech $W = \text{lin}(f(v) - v)^\perp$. Niech $g : V \to V$ będzie symetrią prostopadłą względem W. Wykazać, że $(g \circ f)(v) = v$.

Rozwiązanie:
Mamy pokazać, że $g(f(v)) = v$. Skoro f jest izometrią, to zachowuje długość wektorów i iloczyn skalarny, zatem $\langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, v\rangle \Leftrightarrow \langle f(v), f(v)\rangle - \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(v) - v, f(v) + v\rangle = 0$. Zatem $f(v) - v$ jest prostopadłe do $f(v) + v$ dla dowolnego $v \in V$. Zatem $f(v) + v \in W$. Jako, że g jest symetrią względem W, toteż $g(f(v) + v) = f(v) + v$, zatem

$$f(v) + v = g(f(v) + v) = (g \circ f)(v) + g(v)$$

Z drugiej strony mamy $g(f(v) - v) = -(f(v) - v) = -f(v) + v$, czyli

$$-f(v) + v = g(f(v) - v) = (g \circ f)(v) - g(v)$$

Dodając równania stronami i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$v = (g \circ f)(v)$$

Zadanie 3.
Niech V będzie 2 wymiarową przestrzenią euklidesową liniową ze standardowym iloczynem skalarnym i niech w_1, w_2 będzie jej bazą ortonormalną. Niech $f : V \to V$ będzie endomorfizmem, który w bazie w_1, w_2 ma macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Podać przykład podprzestrzeni 1 wymiarowych $W_1, W_2 \in V$ takich, że f jest złożeniem symetrii prostopadłych względem nich.

Rozwiązanie:
Nie mamy niezerowego wektora v takiego, że $f(v) = v$. Weźmy więc $v_1 = w_1$ oraz niech $W_1 = \text{lin}(f(v_1) - v_1)^\perp$. Wówczas dla przekształcenia $g : V \to V$ będącego symetrią prostopadłą względem W_1 mamy

$$g \circ f(v_1) = v_1$$

Wektor $v_2 = w_2$ jest prostopadły do wektora v_1. Przekształcenie $g \circ f$ możemy przestawić jako złożenie symetrii prostopadłych. Niech $W_2 = \text{lin}(v_1)$, wówczas skoro $g(f(v_1)) = v_1$, to $(g \circ f)|_{W_2^\perp}$

jest albo identycznością, albo minus identycznością (bo jest to przekształcenie jednowymiarowej przestrzeni). Gdyby $(g \circ f)|_{W_2^\perp}$ było identycznością, to $g(f(v_2)) = v_2 \Leftrightarrow g(v_2) = f(v_2) = -v_1$, ale z drugiej strony $g(v_2) = g(f(v_1)) = v_1$, mamy więc sprzeczność. Zatem $(g \circ f)|_{W_2^\perp}$ jest minus identycznością. Zatem

$$g \circ f(v_2) = -v_2$$

Skąd $g \circ f$ jest symetrią prostopadłą względem $W_2 = \mathrm{lin}(v_1)$.
Mamy więc $f = g \circ h$, gdzie g jest symetrią prostopadłą względem

$$W_1 = \mathrm{lin}(f(w_1) - w_1)^\perp = \mathrm{lin}(f(w_1) + w_1) = \mathrm{lin}(w_2 + w_1)$$

oraz $h = g \circ f$ jest symetrią prostopadłą względem

$$W_2 = \mathrm{lin}(w_1)$$

Zadanie 4.
Endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest zadany wzorem: $f((x_1, x_2, x_3)) = (-x_3, x_2, x_1)$. Przedstawić f jako złożenie co najwyżej trzech symetrii prostopadłych względem podprzestrzeni wymiaru 2.

Rozwiązanie:
Weźmy bazę standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas mamy

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_3,\ \ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2,\ \ f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_1$$

Zatem mamy $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$. Niech więc $W = \mathrm{lin}(\varepsilon_2)$, czyli $W^\perp = \mathrm{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. Przekształcenie $f|_{W^\perp}$ możemy więc przedstawić jako złożenie symetrii prostopadłych $f|_{W^\perp} = g_2 \circ g_1$. Przekształcenie $f|_{W^\perp}$ w bazie $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ ma macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, zatem na mocy zadania 3. mamy

$$g_1 = \text{symetria prostopadła względem } \mathrm{lin}(\varepsilon_1)$$

$$g_2 = \text{symetria prostopadła względem } \mathrm{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$$

Stąd: $f = f_2 \circ f_1$, gdzie:

$$f_1 = \text{symetria prostopadła względem } \mathrm{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$f_2 = \text{symetria prostopadła względem } \mathrm{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2)$$

Ćwiczenia 15

Przekształcenia samosprzężona

Definicja: $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ przestrzeń euklidesowa liniowa. Przekształcenie liniowe $f : V \to V$ nazywamy samosprzężonym, jeśli dla każdych $v, w \in V$ zachodzi: $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$.

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^2$ zadany jest iloczyn skalarny $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$. Czy przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $f((x_1, x_2)) = (x_2, x_1)$ jest samosprzężone?

Rozwiązanie:
Twierdzenie charakteryzujące przekształcenia samosprzężone mówi:

Twierdzenie: $f : V \to V$ jest przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle) \Leftrightarrow$ macierz przekształcenia f w bazie ortonormalnej tej przestrzeni jest symetryczna.

Przykładowa baza ortonormalna dla zadanego iloczynu to $\mathcal{A} = \{((1, 0), (1, -1)\}$. W bazie $\mathcal{A}$ macierz ma postać $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Nie jest to macierz symetryczna, zatem f nie jest samosprzężone.

Zadanie 2.
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (5x_1 + x_2 + sx_3, rx_1 + 2x_3, 3x_1 + 2x_2 + tx_3)$. Dla jakich rzeczywistych r, s, t, przekształcenie f jest przekształceniem samosprzężonym $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym?

Rozwiązanie:
Baza standardowa jest dla przestrzeni ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortonormalną. Macierz f w bazie standardowej to: $M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & s \\ r & 0 & 2 \\ 3 & 2 & t \end{bmatrix}$. Przekształcenie f jest samosprzężone wtedy i tylko wtedy gdy ta macierz jest symetryczna, czyli gdy $r = 1$, $s = 3$, t dowolne.

Twierdzenie: Niech $f : V \to V$ będzie samosprzężonym przekształceniem przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Wówczas istnieje baza ortonormalna tej przestrzeni złożona z wektorów własnych przekształcenia f.

Zadanie 3.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych przekształcenia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_3, 2x_2, -2x_1)$.

Rozwiązanie:
Wielomian charakterystyczny przekształcenia to $\omega_f(\lambda) = -(\lambda-2)^2 \cdot (\lambda+2)$, zatem wartości własne to 2 i -2. Mamy $V_{(2)} = \mathrm{lin}((-1,0,1),(0,1,0))$ oraz $V_{(-2)} = \mathrm{lin}((1,0,1))$. Baza $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\}$ jest ortonormalna i składa się z wektorów własnych przekształcenia f. Wówczas

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wyszła macierz diagonalna - jak powinna!

Wniosek: Dla każdej macierzy symetrycznej rzeczywistej A istnieje macierz ortogonalna C taka, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Zadanie 4.
Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz ortogonalną $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ taką, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Rozwiązanie:
Ta macierz A to macierz przekształcenia f z poprzedniego zadania w bazie standardowej. Macierz C to jest macierz zamiany bazy z bazy $\mathcal{B}$ do standardowej $C = M(f)_{\mathcal{B}}^{st}$.

Zadanie 5.
Czy prawdziwa jest odwrotność powyższego wniosku: Jeśli dla macierzy kwadratowej rzeczywistej A istnieje macierz ortogonalna C taka, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna, to macierz A jest symetryczna.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że dla pewnej macierzy ortogonalnej C mamy: $C^{-1}AC = B =$ macierz diagonalna. Wtedy $A = CBC^{-1}$. Ale C jest ortogonalna, czyli $C^TC = I =$ macierz jednostkowa. Stąd $C^T = C^{-1}$. Zatem $A = CBC^T$. Mamy pokazać, że A jest symetryczna, czyli że CBC^T jest symetryczna. Najpierw przypomnijmy jak iloczyn macierzy zachowuje się przy transponowaniu. $(XY)^T = Y^T \cdot X^T$. To teraz zastosujmy to do CBC^T. Macierz B jest diagonalna, zatem $B = B^T$. Mamy $A = CBC^T$, zatem

$$A^T = (CBC^T)^T = (BC^T)^TC^T = (C^T)^TB^TC^T = C(CB)^T = CB^TC^T = CBC^T = A$$

Zatem powyższe stwierdzenie jest prawdziwe.

Ćwiczenia 16

Iloczyny skalarne-remanenty

Definicja: $f : V \to V$ przekształcenie liniowe. Podprzestrzeń W przestrzeni V nazywamy f-niezmienniczą, jeśli dla każdego $w \in W$ mamy: $f(w) \in W$.

Izometrie i przekształcenia samosprzężone to RÓŻNE klasy przekształceń. Ale mają jedną cechę wspólną. Jest ona związana z pojęciem podprzestrzeni niezmienniczej.

Zadanie 1.
$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ przestrzeń euklidesowa liniowa, $f : V \to V$ przekształcenie liniowe, v wektor własny f Niech $W = (\mathrm{lin}(v))^{\perp}$. Załóżmy, że przekształcenie f

a) jest izometrią

b) jest samosprzężone.

Wykazać, że W jest podprzestrzenią f-niezmienniczą.

Rozwiązanie:
v jest wektorem własnym f, czyli $f(v) = av$ dla pewnego $a \in R$. Niech w należy do W czyli $\langle v, w\rangle = 0$. Mamy wykazać, że $f(w)$ należy do W, czyli $\langle v, f(w)\rangle = 0$.

a) f jest izometrią, więc $|a| = 1$, w szczególności a jest różne od 0. Skoro f jest izometrią, to mamy $0 = \langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle av, f(w)\rangle = a\langle v, f(w)\rangle$. a jest różne od 0, zatem $\langle v, f(w)\rangle = 0$.

b) Jeśli f jest samosprzężone, to $\langle v, f(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle = a \cdot 0 = 0$.

Zadanie 2.
Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową i niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że istnieją dwie f-niezmiennicze podprzestrzenie W_1 oraz W_2 w V takie, że V jest sumą prostą W_1 oraz W_2 oraz f ograniczona do W_i jest izometrią $W_i \to W_i$ dla $i = 1, 2$. Czy wynika stąd, że $f : V \to V$ jest izometrią?

Rozwiązanie:
f nie musi być izometrią. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f((x_1, x_2)) = (x_1 - 2x_2, -x_2)$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wówczas dla $W_1 = \mathrm{lin}((1, 0))$ i $W_2 = \mathrm{lin}((1, 1))$, przekształcenie $f|_{W_i}$ jest izomerią dla $i = 1, 2$. f jednak nie jest izometrią, ponieważ iloczyn macierzy $M(f)_{st}^{st}$ i $(M(f)_{st}^{st})^T$ nie jest równy I.

Aby f była izometrią, to W_1 i W_2 muszą być prostopadłe, ponieważ wystarczy pokazać, że f przeprowadza bazę ortonormalną V w bazę ortonormalną V. Ale tak jest, jeśli za bazę V weźmiemy bazę ortonormalną W_1 i bazę ortonormalną W_2.

Przypomnienie:
Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową i niech Z będzie jej $n-2$ wymiarową podprzestrzenią. Jeśli w 2 wymiarowej podprzestrzeni $W = Z^{\perp}$ jest zadana orientacja, to obrotem

o kąt t wokół Z nazywamy przekształcenie liniowe $f : V \to V$, które jest identycznością na Z oraz przeprowadza W w W w taki sposób, że dla pewnej (równoważnie każdej) dodatnio zorientowanej, ortonormalnej bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni W przekształcenie f ograniczone do przekształcenia $W \to W$ ma w bazie $\mathcal{B}$ macierz $\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$. Oczywiście obrót jest izometrią przestrzeni $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, ponieważ przy oznaczeniach z poprzedniego zadania mamy $W_1 = W$ oraz $W_2 = Z$, wiemy że W i Z są prostopadłe i f obcięte do każdej z nich jest izometrią.

Zadanie 3.
$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ to n wymiarowa przestrzeń euklidesowa liniowa, $f : V \to V$ izometria różna od identyczności. Wykazać, że f jest obrotem wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_{(1)} = n - 2$ oraz $\det f = 1$. (gdzie $V_{(1)}$ oznacza jak zwykle przestrzeń własną f o wartości własnej 1)

Rozwiązanie:
$\Rightarrow$ Załóżmy, że f jest obrotem o kąt t (różny od $2k \cdot \pi$, bo f nie jest identycznością) wokół podprzestrzeni Z wymiaru $n - 2$. Wówczas $V_{(1)} = Z$, więc $\dim V_{(1)} = n - 2$. Ponadto, niech $\mathcal{B}$ będzie bazą V, w której dwa pierwsze wektory to dodatnio zorientowana baza $Z^{\perp}$, następnych $n - 2$ to baza Z. $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ma w lewym górnym rogu macierz 2×2 postaci $\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ a na pozostałej części przekątnej jedynki (reszta wyrazów macierzy jest 0). Stąd $\det f = \det M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 1$.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że $\dim V_{(1)} = n - 2$ oraz $\det f = 1$. Wtedy f ograniczone do 2 wymiarowej podprzestrzeni f-niezmienniczej $W = Z^{\perp}$ ma wyznacznik 1, więc jest obrotem w przestrzeni W, więc f jest obrotem wokół Z.

Definicja: Niech $\langle\ ,\ \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. Niech α, β będą niezerowymi wektorami przestrzeni V. Liczbę $\theta \in [0, \pi]$ taką, że

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{||\alpha|| \cdot ||\beta||} = \cos\theta$$

nazywamy (niezorientowanym) kątem między wektorami α i β.

Zadanie 4.
Dla jakich r rzeczywistych kąt między wektorami $v = (1, -r, 1)$ i $w = (1, 1, r)$ jest najmniejszy przy standardowym iloczynie skalarnym?

Rozwiązanie:
Otrzymujemy $\cos(t) = \frac{1}{(r^2+2)}$, więc kąt t jest najmniejszy dla $r = 0$. Dla $r = 0$ mamy $\cos(t) = \frac{1}{2}$, więc $t = \frac{\pi}{3}$. $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem kąt między wektorami to $\frac{\pi}{6}$.

Ćwiczenia 17

Formy dwuliniowe

Definicja: V przestrzeń liniowa nad ciałem K. Przekształcenie dwuliniowe $h : V \times V \to K$ nazywamy formą dwuliniową na przestrzeni V. Jest to uogólnienie pojęcia iloczynu skalarnego.

Definicja: Macierzą formy dwuliniowej $h : V \times V \to K$ w bazie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ przestrzeni V nazywamy macierz $G(h, \mathcal{B}) = [h(v_i, v_j)]$ rozmiaru $n \times n$. To znaczy dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$ wyraz ij tej macierzy wynosi $h(v_i, v_j)$.

Zadanie 1.
Forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest zadna wzorem $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_2 + 7x_3y_3$. Znaleźć:

a) $G(h, st)$

b) $G(h, \mathcal{B})$ dla $\mathcal{B} = (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$

Rozwiązanie:

a) $G(h, st) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

b) $G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Dzięki macierzom form dwuliniowych łatwo obliczać wartości form na parach wektorów:

Zadanie 2.
Forma dwuliniowa $h : V \times V \to \mathbb{R}$ ma w bazie $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3, v_4$ przestrzeni V macierz

$$G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Niech $v = 2v_1 + v_2 + 2v_4$, $w = v_2 + v_3 - v_4$. Obliczyć $h(v, w)$.

Rozwiązanie:

$$h(v, w) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [-9]$$

bo

Twierdzenie: Jeśli v ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $c_1, \dots, c_n$, a w ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $d_1, \dots, d_n$, to

$$h(v,w) = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \cdot G(h,\mathcal{B}) \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.
Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Czy istnieje macierz odwracalna $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ taka, że $B = C^T AC$?

Rozwiązanie:
Jeśli dla jakieś formy dwuliniowej macierz A to $G(h,\mathcal{A})$ a macierz B to $G(h,\mathcal{B})$ to istnieje taka macierz C odwracalna równa $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. Macierze A i B to macierze z zadania pierwszego i są one nad tą samą formą dwuliniową więc istnieje taka macierz $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, że $B = C^T AC$. $\mathcal{A}$ to baza standardowa, a baza $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

Definicja: Macierze A, B rozmiaru $n \times n$ o wyrazach z ciała K są kongruentne nad K, jeśli istnieje macierz odwracalna C rozmiaru $n \times n$ o wyrazach z ciała K taka, że $B = C^T AC$.

Kongruencja jest relacją równoważności w zbiorze $M_{nxn}(K)$:

zwrotność : $A = I^T AI$

symetria: $B = C^T AC \Rightarrow (C^T)^{(-1)} BC^{(-1)} = A \Rightarrow (C^{(-1)})^T BC^{(-1)} = A$

przechodniość: $B = C^T AC$ oraz $A = D^T ED \Rightarrow B = C^T D^T EDC = (DC)^T E(DC)$

Niezmiennik relacji kongruencji macierzy, który pozwalałby, przynajmniej w pewnych przypadkach, stwierdzić, że dane macierze nie są kongruentne to na przykład rząd macierzy. Jeżeli macierze są kongruentne, to mają ten sam rząd.

Zadanie 4.
Czy macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ są kongruentne na $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie:
Nie, bo mają różne rzędy.

Twierdzenie: Jeśli macierze A, B z $M_{n\times n}(K)$ są kongruentna nad K, to $\det(A)\cdot\det(B)$ jest kwadratem w K, tzn. istnieje $d \in K$, że $\det(A)\cdot\det(B) = d^2$.

Dowód: $B = C^TAC \Rightarrow \det(B) = \det(C^T)\cdot\det(A)\cdot\det(C) = \det(A)\cdot(\det(C))^2 \Rightarrow \det(A)\cdot\det(B) = (\det(A))^2\cdot(\det(C))^2 = (\det(A)\cdot\det(C))^2$.

Zadanie 5.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Czy macierze A, B są kongruentne nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$?

Rozwiązanie:
NIE, bo $\det(A) = 2$, $\det(B) = 3$, ale $\det(A)\cdot\det(B) = 6$ nie jest kwadratem w $\mathbb{Q}$.

Zadanie 6.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Czy macierze A, B są kongruentne nad ciałem $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie:
TAK, bo biorąc $C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ mamy $B = C^TAC$

Zadanie 7.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Czy macierze A, B są kongruentne nad ciałem $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie:
NIE, bo $\det(A)\cdot\det(B) = -9$ oraz $\sqrt{-9}$ nie należy do $\mathbb{R}$.

Zadanie 8.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Czy macierze A, B są kongruentne nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$?

Rozwiązanie:
TAK, są kongruentne nad liczbami zespolonymi, wystarczy wziąć: $C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 9.

$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Czy macierze A, B są kongruentne nad ciałem $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie:
NIE! $\det(A)\cdot\det(B) = 1$, więc to nie wyklucza kongruencji, ale gdyby $B = C^TAC$ dla pewnej

macierzy rzeczywistej $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, to wobec $A = I =$ macierz jednostkowa, dostajemy $B = C^T C$. Patrząc na wyraz ""$_{11}$ mamy $-1 = (c_{11})^2 + (c_{21})^2$. Sprzeczność.

Ograniczymy się teraz do przestrzeni skończenie wymiarowych i form symetrycznych (tzn. takich, że $h(v, w) = h(w, v)$ dla każdych v, w).

Definicja: Parę (V, h), gdzie V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K a $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną nazywamy przestrzenią dwuliniową. Jest to oczywiście uogólnienie pojęcia przestrzeni euklidesowej liniowej.

Definicja: Mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa, jeśli dla pewnej (równoważnie: każdej) bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V macierz $G(h, \mathcal{B})$ jest odwracalna. Mówimy, że podprzestrzeń W przestrzeni dwuliniowej (V, h) jest nieosobliwa jeśli przestrzeń (W, h'), gdzie h' jest ograniczeniem h do $W \times W$, jest nieosobliwa. Każda przestrzeń euklidesowa liniowa jest przestrzenią dwuliniową nieosobliwą i każda jej podprzestrzeń jest nieosobliwa.

Zadanie 10.
Podać przykład przestrzeni dwuliniowej nieosobliwej, (V, h) mającej podprzestrzeń osobliwą wymiaru 1.

Rozwiązanie:
Niech $V = \mathbb{R}^2$ oraz $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$, wówczas $G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, więc (V, h) jest nieosobliwa. Dla $W = \operatorname{lin}((1, 0))$ mamy $h((1, 0), (1, 0)) = 0$, zatem (W, h) jest osobliwa.

Ćwiczenia 18

Przestrzenie dwuliniowe

Zadanie 1.
Forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem:

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + rx_1y_2 + x_1y_3 + rx_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3$$

Dla jakich liczb rzeczywistych r:

a) Przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^3, h)$ jest nieosobliwa?

b) Podprzestrzeń $W = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$ jest nieosobliwa?

Rozwiązanie:

a) $G(h, st) = \begin{bmatrix} 2 & r & 1 \\ r & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det G(h, st) = 6 - 3 - r^2 = 3 - r^2$. Stąd: $(\mathbb{R}^3, h)$ jest nieosobliwa $\Leftrightarrow 3 - r^2 \neq 0 \Leftrightarrow r \neq \pm\sqrt{3}$.

b) Wyznacznik macierzy $G(h, (\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \begin{bmatrix} 2 & r \\ r & 3 \end{bmatrix}$ jest równy $6 - r^2$. Podprzestrzeń jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwracalna, czyli gdy $6 - r^2 \neq 0 \Leftrightarrow r \neq \pm\sqrt{6}$.

Zadanie 2.
Niech $(\mathbb{R}^3, h)$ przestrzeń dwuliniowa z Zadania 1 a). Dla jakich r istnieje w tej przestrzeni niezerowy wektor v taki, że dla każdego $w \in \mathbb{R}^3$ zachodzi: $h(v, w) = 0$?

Rozwiązanie:
Chcemy sprawdzić dla jakich r przestrzeń $(\mathbb{R}^3, h)$ jest osobliwa, ponieważ

Twierdzenie: Przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niezerowego $v \in V$ istnieje $w \in V$, że $h(v, w)$ jest niezerowe.

Równoważnie

Twierdzenie: rzestrzeń dwuliniowa (V, h) jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowy $v \in V$ taki, że dla każdego $w \in V$, $h(v, w) = 0$.

Z powyższego twierdzenia mamy $r = \pm\sqrt{3}$.

Zadanie 3.
$W = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ podprzestrzeń z Zadania 1 b). Dla jakich r rzeczywistych zachodzi: $\mathbb{R}^3$ jest sumą prostą W i $W^\perp$?

Rozwiązanie:
V jest sumą prostą W i $W^{\perp}$ wtedy i tylko wtedy, gdy W jest nieosobliwa, czyli gdy macierz $G(h,(e_1,e_2))$ jest odwracalna co jest równoważne temu, że $r \neq \pm\sqrt{6}$.

Definicja: Wektory v, w przestrzeni dwuliniowej (V,h) są prostopadłe, jeśli $h(v,w) = 0$. Piszemy wtedy: $v \perp w$.

Zadanie 4.
Dla jakich rzeczywistych s wektory $v = (1,1)$, $w = (1,s)$ są prostopadłe w przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^2, h)$, gdzie $h((x_1,x_2),(y_1,y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_2$?

Rozwiązanie:
$h((1,1),(1,s)) = 1 + 2s + 2 - s = 3 + s$, więc dla $s = -3$ wektory są prostopadłe.

Definicja: W przestrzeni dwuliniowej (V,h) dla podzbioru $X \in V$ oznaczamy:

$$X^{\perp} = \{v \in V : h(v,w) = 0 \text{ dla każdego } w \in X\}$$

Zadanie 5.
W $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie $h((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$ znaleźć bazę przestrzeni $(\mathrm{lin}(v))^{\perp}$ dla $v = (1,0,1)$.

Rozwiązanie:
$(x_1,x_2,x_3) \in (\mathrm{lin}(1,0,1))^{\perp} \Leftrightarrow h((x_1,x_2,x_3),(1,0,1)) = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0$. Zatem

$$(\mathrm{lin}(1,0,1))^{\perp} = \mathrm{lin}((-2,1,0),(0,0,1))$$

Definicja: W przestrzeni dwuliniowej (V,h) wektor v jest izotropowy, jeśli $h(v,v) = 0$.

Zadanie 6.
W przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie: $h((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3$ znaleźć wszystkie wektory izotropowe będące postaci $(t,1,-t)$ dla pewnego t rzeczywistego.

Rozwiązanie:
$h((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)) = 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$. Stąd $h((t,1,-t),(t,1,-t)) = -2t^2 + 1 + t^2 = -t^2 + 1$, zatem $(t,1,-t)$ jest izotropowy gdy $-t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

Komentarz: W przestrzeni dwuliniowej (V,h) dla niezerowego wektora $v \in V$ możliwe jest:

a) v nieiztropowy, tzn. $h(v,v) \neq 0$;

albo

b) v izotropowy, tzn. $h(v,v) = 0$.

Wśród niezerowych wektorów izotropowych możliwe jest:

a) istnieje $w \in V$, że $h(v, w)$ niezerowe;

albo

b) dla każdego $w \in V$, $h(v, w) = 0$.

Im dalej w dół na tej liście, tym bardziej sytuacja jest różna od tej, jaka jest w przestrzeniach euklidesowych. Można w zależności od gustu powiedzieć, że na tej liście im dalej w dół, tym dziwaczniej albo tym ciekawiej.

Definicja: (V, h) przestrzeń dwuliniowa. Układ wektorów $v_1, \ldots, v_k$ nazywamy prostopadłym, jeśli dla każdych i, j różnych zachodzi: $h(v_i, v_j) = 0$. Bazę $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni V nazywamy prostopadłą, jeśli jest ona układem prostopadłym.

Zadanie 7.
Podać przykład przestrzeni dwuliniowej (V, h), która nie ma bazy prostopadłej. TO JEST SUPER WAŻNY PRZYKŁAD

Rozwiązanie:
Niech $K = \mathbb{Z}_2$, $V = K^2$ oraz $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$

Wtedy dla każdego $v = (x_1, x_2)$ mamy $h(v, v) = 2x_1x_2 = 0$, bo w $\mathbb{Z}_2$ jest $2 = 0$. Stąd każdy wektor w tej przestrzeni dwuliniowej jest izotropowy. Zatem gdyby $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ było bazą prostopadłą, to $G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ - sprzeczność, bo to by oznaczało, że h jest zerowe, a nie jest, bo na przykład $h((1, 1), (1, 0)) = 1$.

Definicja: Ciało K ma charakterystykę 2, jeśli w K zachodzi $1 + 1 = 0$. Przykład: $K = \mathbb{Z}_2$.

Twierdzenie: Każda przestrzeń dwuliniowa nad ciałem charakterystyki różnej od 2 ma bazę prostopadłą.

Zadanie 8.
Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie:

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2$$

Rozwiązanie:
Zanim zaczniemy liczyć ustalmy jaka jest metoda i na jakich podstawach teoretycznych się opiera.

Uwaga: Jeśli $v_1, \ldots, v_k$ jest układem prostopadłym wektorów nieizotropowych, to:

a) układ ten jest liniowo niezależny,

b) podprzestrzeń $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ jest nieosobliwa, więc V jest sumą prostą $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ i $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)^\perp$.

Metoda znajdowania bazy prostopadłej:

Bierzemy wektor nieizotropowy v_1. Wtedy V jest sumą prostą $\mathrm{lin}(v_1)$ i $\mathrm{lin}(v_1)^\perp$. W $\mathrm{lin}(v_1)^\perp$ bierzemy wektor nieizotropowy v_2. Wtedy V jest sumą prostą $\mathrm{lin}(v_1, v_2)$ i $\mathrm{lin}(v_1, v_2)^\perp$. W $\mathrm{lin}(v_1, v_2)^\perp$ bierzemy wektor nieizotropowy v_3, etc.

Jeśli nie ma wektora nieizotropowego, to każda baza jest prostopadła. Jeśli charakterystyka ciała K jest różna od 2 i wszystkie wektory w W są izotropowe, to h jest zerowa na W i każda baza jest prostopadła!

Jesteśmy gotowi szukać bazy prostopadłej. Wektor nieizotropowy to na przykład $v_1 = (0, 1, 0)$. Wybieramy wektor nieizotropowy w $\mathrm{lin}(v_1)^\perp$. Taki jest na przyklad $v_2 = (1, 1, 0)$. W $\mathrm{lin}(v_1, v_2)^\perp$ nie ma nieizotropowych. Bierzemy tam byle jaki, na przykład $v_3 = (1, 0, -1)$.

Ćwiczenia 19

Macierze kongruentne

Twierdzenie: Każda przestrzeń dwuliniowa nad ciałem K charakterystyki różnej od 2 ma bazę prostopadłą.

Wniosek: Każda macierz symetryczna o wyrazach z ciała K o charakterystyce różnej od 2 jest kongruentna nad K z macierzą diagonalną. Bo jeśli A jest macierzą symetryczną $n \times n$ to bierzemy formę dwuliniową h na K^n zadaną warunkiem $G(h, st) = A$ i dla przestrzeni dwuliniowej (K^n, h) znajdujemy bazę prostopadłą $\mathcal{B}$. Wtedy macierz $G(h, \mathcal{B})$ jest diagonalna i kongruentna nad K do A

Metoda znajdowania bazy prostopadłej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem charakterystyki różnej od 2.

Postępujemy krok po kroku:

Bierzemy wektor nieizotropowy v_1. Wtedy V jest sumą prostą $\text{lin}(v_1)$ i $\text{lin}(v_1)^\perp$. W $\text{lin}(v_1)^\perp$ bierzemy wektor nieizotropowy v_2. Wtedy V jest sumą prostą $\text{lin}(v_1, v_2)$ i $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp$. W $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp$ bierzemy wektor nieizotropowy v_3, etc.

To znaczy w każdym kroku: jeśli w $\text{lin}(v_1, \ldots, v_i)^\perp$ jest wektor nieizotropowy, to go bierzemy za v_{i+1} i rozpatrujemy $\text{lin}(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1})^\perp$. Jeśli w $\text{lin}(v_1, \ldots, v_i)^\perp$ są tylko wektory izotropowe, to forma h jest zerowa na $\text{lin}(v_1, \ldots, v_i)^\perp$, więc każda baza $\text{lin}(v_1, \ldots, v_i)^\perp$ jest prostopadła i tę bazę dołączamy do $v_1, \ldots, v_i$ i dostajemy bazę prostopadłą (V, h).

Przykład:

Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie:

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2$$

Rozwiązanie:

Bierzemy dowolny wektor nieizotropowy np. $v_1 = (0, 1, 0)$. Wybieramy wektor nieizotropowy w $\text{lin}(v_1)^\perp$. Taki jest np. $v_2 = (1, 1, 0)$. W $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp$ nie ma wektorów nieizotropowych. Bierzemy tam byle jaki, np. $v_3 = (1, 0, -1)$. $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ jest szukaną bazą prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$.

Zadanie 1.
Dla rozpatrywanej w powyższym przykładzie przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$ oraz znalezionej tam bazy $\mathcal{B}$ znaleźć macierz $G(h, \mathcal{B})$.

Rozwiązanie:
Wszystkie wyrazy poza przekątną będą zerowe (bo baza jest prostopadła), pozostaje wyliczyć wyrazy na przekątnej, które wychodzą $-1, 1, 0$, zatem

$$G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ znaleźć macierz diagonalną B kongruentną nad $\mathbb{R}$ do A.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $A = G(h, st)$ dla h z poprzedniego zadania. Dla bazy $\mathcal{B}$ z poprzedniego zadania mamy $G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Zatem macierze $A = G(h, st)$ oraz $G(h, \mathcal{B}) = B$ są kongruentne nad $\mathbb{R}$, przy czym $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest diagonalna.

Zadanie 3.

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ znaleźć macierz rzeczywistą C taką, że $B = C^T AC$.

Rozwiązanie:

Skoro $A = G(h, st)$ oraz $B = G(h, \mathcal{B})$ dla $h, \mathcal{B}$ z poprzedniego zadania, to $B = C^T AC$ dla $C = M(id)^{st}_{\mathcal{B}}$. U nas: $C = M(id)^{st}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.

Dla jakich t macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ są kongruentne nad ciałem liczb zespolonych?

Rozwiązanie:

> **Twierdzenie:** Macierze symetryczne, zespolone (w szczególności rzeczywiste) A, B są kongruentne nad ciałem liczb zespolonych wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(B)$.

U nas $r(A) = 2$. Macierz B ma podmacierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ rzędu 2, więc $r(B) \geq 2$. Zatem dla tej macierzy B mamy $r(B) = 2 \Leftrightarrow \det(B) = 0$. Wyliczamy: $\det(B) = 3t - t - 12 = 2t - 12$, zatem $\det B = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Zadanie 5.

Czy macierze rzeczywiste $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ są kongruentne nad ciałem $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Macierze symetryczne, rzeczywiste A, B są kongruentne nad $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla macierzy diagonalnych A', B' takich, że A' kongruentna nad $\mathbb{R}$ z A, B' kongruentna nad $\mathbb{R}$ z B zachodzą 3 równości:

- liczba wyrazów dodatnich na przekątnej w A' równa jest liczbie wyrazów dodatnich na przekątnej w B'
- liczba wyrazów ujemnych na przekątnej w A' równa jest liczbie wyrazów ujemnych na przekątnej w B'
- liczba zer na przekątnej w A' równa jest liczbie zer na przekątnej w B'

Równoważnie: $r(A) = r(B)$ oraz $s(A) = s(B)$, gdzie dla dowolnej macierzy symetrycznej rzeczywistej A jej sygnatura $s(A)$ jest zdefiniowana jako $s(A)$ to liczba wyrazów dodatnich na przekątnej w A' minus liczba wyrazów ujemnych na przekątnej w A', gdzie macierz A' jak wyżej.

Szukamy zatem macierzy A', B' dla naszych A, B.

Niech h będzie formą na $\mathbb{R}^3$ zadaną warunkiem

$$G(h, st) = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

Weźmy $v_1 = (1, 0, 0)$. Wtedy $h(v_1, v_1) = 1$, czyli v_1 jest nieizotropowy. $\operatorname{lin}(v_1)^\perp$ jest opisane równaniem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Weźmy $v_2 = (1, -1, 0)$. v_2 należy do $\operatorname{lin}(v_1)^\perp$ oraz $h(v_2, v_2) = -2$, czyli v_2 jest nieizotropowy. $\operatorname{lin}(v_1, v_2)^\perp$ jest opisane układem równań: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ oraz $x_2 = 0$. Weźmy $v_3 = (1, 0, -1)$. v_3 należy do $\operatorname{lin}(v_1, v_2)^\perp$ oraz $h(v_3, v_3) = -1$. Stąd dla $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ mamy

$$A' = G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Analogicznie znajdujemy dla macierzy B bazę prostopadłą $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$. Macierz formy dwuliniowej w tej bazie to

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Zatem A i B nie są kongruentne nad $\mathbb{R}$, ponieważ mają różne sygnatury. Są jednak kongruentne nad $\mathbb{C}$, ponieważ mają takie same rzędy.

Zadanie 6.
Dana jest przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podać przykład podprzestrzeni W w $\mathbb{R}^3$, że $\mathbb{R}^3$ jest sumą prostą W i $W^\perp$.

Rozwiązanie:
W musi być nieosobliwa. Wystarczy wziąć lin od jakiegoś wektora nieizotropowego, zatem na przykład $W = \mathrm{lin}((1,1,0))$.

Ćwiczenia 20

Podprzestrzenie przestrzeni dwuliniowych

Zadanie 1.
Dana jest przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podać przykład podprzestrzeni $W \in \mathbb{R}^3$, że $\mathbb{R}^3$ nie jest sumą prostą W i $W^\perp$, ale $\dim(W) + \dim(W)^\perp = 3$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_3 y_2 + x_2 y_3$$

Wystarczy, żeby W była osobliwa oraz spełniała $\dim W + \dim W^\perp = 3$, więc na przykład $W = \text{lin}(1, 0, 0)$. Mamy $\dim(W) = 1$, natomiast $W^\perp$ jest opisane równaniem $x_2 = 0$, więc $\dim(W^\perp) = 2$.

Zadanie 2.
Dana jest przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podać przykład podprzestrzeni W w $\mathbb{R}^3$, że $\dim(W) + \dim(W^\perp) \neq 3$.

Rozwiązanie:
Jeśli $W = \text{lin}((1, 0, 0))$, to (y_1, y_2, y_3) należy do $W^\perp$ wtedy i tylko wtedy gdy $y_2 = 0$, czyli $W^\perp = \text{lin}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$. Zatem $\dim W + \dim W^\perp = 1 + 2 = 3$. Niech $W = \text{lin}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$. Wtedy $W^\perp$ jest opisane układem równań $x_2 = 0$ oraz $x_2 = 0$ (bo wektor (x_1, x_2, x_3) musi być prostopadły do $(1, 0, 0)$ oraz $(0, 0, 1)$) czyli $\dim W + \dim W^\perp = 2 + 2 = 4 \neq 3$.

Można też tak: $W = \text{lin}((1, 0, -1))$, wówczas $\dim(W) = 1$, $W^\perp = \mathbb{R}^3$, więc $\dim(W^\perp) = 3$.

Zadanie 3.
Dana jest przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podać maksymalny wymiar podprzestrzeni nieosobliwej w $(\mathbb{R}^3, h)$.

Rozwiązanie:
$\dim W \neq 3$ ponieważ $\det G(h, st) = 0$. Więc 3 wymiarowa przestrzeń będzie osobliwa. Mamy jednak $W = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ i jest to podprzestrzeń nieosobliwa. Zatem maksymalny wymiar to 2.

Zadanie 4.
Dana jest przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opisać wszystkie wektory izotropowe w $(\mathbb{R}^3, h)$.

Rozwiązanie:

$$h((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = 2x_2(x_1 + x_3)$$

Stąd (x_1, x_2, x_3) izotropowy wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 = 0$ lub $x_1 = -x_3$.

Zadanie 5.
Dana jest przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opisać wszystkie całkowicie zdegenerowane podprzestrzenie w $(\mathbb{R}^3, h)$, to znaczy takie podprzestrzenie W, że h ograniczona do W jest zerowa.

Rozwiązanie:
Niech W będzie podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną w $(\mathbb{R}^3, h)$. Każdy wektor w W jest izotropowy, więc $W \subseteq W_1 \cup W_2$, gdzie

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_2 = 0\} \quad \text{oraz} \quad W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1 + x_3 = 0\}$$

W nie może zawierać dwóch wektorów w_1, w_2 takich, że w_1 leży w W_1 i nie leży w W_2 oraz w_2 leży w W_2 i nie leży w W_1 (bo wtedy $w_1 + w_2$ nie leży w sumie teoriomnogościowej W_1 i W_2). Czyli W musi być w całości zawarte w W_1 lub W_2.

Definicja: V przestrzeń liniowa nad ciałem K. Funkcję $q : V \to K$ nazywamy formą kwadratową na V, jeśli istnieje forma dwuliniowa $h : V \times V \to K$ taka, że dla każdego $v \in V$ mamy: $q(v) = h(v, v)$. Jeśli charakterystyka ciała K jest różna od 2, to formy kwadratowe to praktycznie to samo co formy dwuliniowe symetryczne.

Dokładniej: istnieje bijekcja

$$\{ \text{ formy dwuliniowe symetryczne na } V \times V\} \longleftrightarrow \{ \text{ formy kwadratowe na } V\}$$

Formie dwuliniowej h przypisujemy formę kwadratową q taką, że dla każdego $v \in V$ mamy:

$$q(v) = h(v, v)$$

Formie kwadratowej q przypisujemy formę dwuliniową h w taki sposób:

$$h(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$$

ponieważ wystarczy policzyć $h(v+w, v+w)$. Mamy

$$h(v+w, v+w) = h(v,v) + h(v,w) + h(w,v) + h(w,w) = h(v,v) + 2h(v,w) + h(w,w)$$

a stąd

$$h(v,w) = \frac{1}{2}(h(v+w, v+w) - h(v,v) - h(w,w))$$

Definicja: Macierzą formy kwadratowej $q : V \to K$ w bazie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ przestrzeni V nazywamy macierz odpowiadającej jej formy dwuliniowej symetrycznej h. Oznaczamy ją $G(q, \mathcal{B})$. To znaczy: $G(q,\mathcal{B}) = G(h,\mathcal{B})$. Wynika stąd, że dla każdych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $G(q,\mathcal{B})$ i $G(q,\mathcal{B}')$ są kongruentne nad K.

Zadanie 6.
Znaleźć macierz formy kwadratowej $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_3^2$ w bazie standardowej oraz w bazie $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,-1)\}$.

Rozwiązanie:
Formie kwadratowej q odpowiada forma dwuliniowa symetryczna

$$h((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_3y_3$$

zatem

$$G(q,st) = G(h,st) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad G(q,\mathcal{B}) = G(h,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Definicja: Przedstawienie formy kwadratowej $q : V \to K$ w postaci $q(z_1v_1 + \ldots + z_nv_n) = a_1(z_1)^2 + \ldots + a_n(z_n)^2$, gdzie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jest bazą przestrzeni V, nazywamy postacią diagonalną formy q. Jest to równoważne powiedzeniu, że macierz $G(q,\mathcal{B})$ jest diagonalna.

Wiemy, że dla każdej formy dwuliniowej symetrycznej h nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ istnieje baza, w której $G(h,\mathcal{B})$ jest diagonalna (baza prostopadła). Zatem nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ każda forma kwadratowa ma postać diagonalną.

Zadanie 7.
Znaleźć postać diagonalną formy kwadratowej $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q((x_1,x_2,x_3)) = 2x_1x_2 + x_3^2$.

Rozwiązanie:
Wystarczy znaleźć bazę prostopadłą dla formy dwuliniowej symetrycznej h odpowiadającej formie q. Mamy

$$h((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$$

zatem

$$G(h,st) = G(q,st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znajdźmy bazę prostopadłą przestrzeni (V, h). Niech $v_1 = (0, 0, 1)$. Mamy $h(v_1, v_1) = 1$, więc v_1 jest nieizotropowy. $\text{lin}(v_1)^\perp$ jest opisane równaniem $x_3 = 0$. Niech $v_2 = (1, 1, 0)$. Mamy $h(v_2, v_2) = 2$, więc v_2 jest nieizotropowy. $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp$ jest opisane układem równań $x_3 = 0$ oraz $x_1 + x_2 = 0$. Niech $v_3 = (1, -1, 0)$. Mamy $h(v_3, v_3) = -2$. Zatem

$$q(z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_3 v_3) = z_1^2 + 2(z_2)^2 - 2(z_3)^2$$

dla bazy v_1, v_2, v_3 jak wyżej jest postacią diagonalną rozpatrywanej formy kwadratowej q.

Zadanie 8.
Czy forma q z Zadania 7. jest

a) dodatnio określona

b) dodatnio półokreślona

c) ujemnie określona

d) ujemnie półokreślona

e) nieokreślona

Rozwiązanie:
Znajdujemy postać diagonalną $a_1(z_1)^2 + \ldots + a_n(z_n)^2$ formy q.

Wówczas:

- q dodatnio okreslona $\Leftrightarrow$ wszystkie a_i są dodatnie
- q dodatnio półokreślona $\Leftrightarrow$ wszystkie a_i są nieujemne
- q ujemni określona $\Leftrightarrow$ wszystkie a_i są ujemne
- q ujemnie półokreślona $\Leftrightarrow$ wszystkie a_i są niedodatnie
- q nieokreślona $\Leftrightarrow$istnieje a_i dodatnie i istnieje a_j ujemne

Dla formy z Zadania 7. mamy $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -2$, zatem ta forma jest nieokreślona.

Ćwiczenia 21

Przestrzenie afiniczne

Definicja: Niech V to przestrzeń liniowa nad ciałem K. Niech $p_0, \ldots, p_k$ należą do V oraz niech $a_0, \ldots, a_k$ należą do K, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$. Wtedy sumę $a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k$ nazywamy kombinacją afiniczną wektorów $p_0, \ldots, p_k$ z wagami $a_0, \ldots, a_k$.

(Czyli jest to specjalny przypadek kombinacji liniowej taki, że suma współczynników wynosi 1).

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^3$ niech $p_0 = (1, 1, 0)$, $p_1 = (0, 1, 1)$, $p_2 = (1, 1, 1)$. Znaleźć kombinację afiniczną p_0, p_1, p_2 z wagami $2, 3, -4$.

Rozwiązanie:

$$2p_0 + 3p_1 - 4p_3 = (-2, 1, -1)$$

Zadanie 2.
Czy $p = (1, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^3$ jest kombinacją afiniczną $p_0 = (1, 0, 1)$, $p_1 = (1, 0, 0)$, $p_2 = (0, 1, 0)$?

Rozwiązanie:
Nie, ponieważ p_0 musi być z wagą jeden, więc nie otrzymamy sumy wag równej 1.

Bardziej szczegółowo można tak:
Czy istnieją a_0, a_1, a_2 rzeczywiste takie, że $a_0(1, 0, 1) + a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ oraz $a_0 + a_1 + a_2 = 1$?
To daje układ 4 równań:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1 \end{cases}$$

Z pierwszych trzech równań wynika, że $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, co jest sprzeczne z równaniem czwartym.

Inny sposób rozwiązania Zadania 2.

Mamy $\overrightarrow{pq} = q - p$. Zatem mamy: $p + \overrightarrow{pq} = q$.

Uwaga: p jest kombinacją afiniczną $p_0, \ldots, p_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\overrightarrow{p_0 p}$ jest kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k}$.

Dowód: Niech $a_0 + \ldots + a_k = 1$. Wtedy: $p = a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k \Leftrightarrow p = (1 - a_1 - \ldots - a_k)p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k \Leftrightarrow p - p_0 = a_1(p_1 - p_0) + \ldots + a_k(p_k - p_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}$.

Na odwrót: mając współczynniki $a_1, \ldots, a_k$ spełniające ostatnią równość definiujemy: $a_0 = 1 - a_1 - \ldots - a_k$ i z powyższych równoważności dostajemy pierwszą równość.

Wystarczy teraz prawdzić, czy $\overrightarrow{p_0p}$ jest kombinacją liniową $\overrightarrow{p_0,p_1}$ i $\overrightarrow{p_0p_2}$. Mamy $\overrightarrow{p_0p} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{p_0p_1} = (0,0,-1)$, $\overrightarrow{p_0p_2} = (1,-1,1)$. Widać, ze $(0,1,0)$ nie jest kombinacją pozostałych dwóch.

Zadanie 3.
Dla jakich rzeczywistych t, $p = (2,t,1,0)$ w $\mathbb{R}^4$ jest kombinacją afiniczną $p_0 = (1,1,1,1)$, $p_1 = (1,0,1,0)$, $p_2 = (0,0,1,1)$?

Rozwiązanie:
Mamy $\overrightarrow{p_0p} = (1,t-1,0,-1)$, $\overrightarrow{p_0p_1} = (0,-1,0,-1)$, $\overrightarrow{p_0p_2} = (-1,-1,0,0)$, zatem wektor $\overrightarrow{p_0p}$ jest kombinacją wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$ dla $t = 1$.

Definicja: Dla $p_0,\ldots,p_k$ w V niech $\mathrm{af}(p_0,\ldots,p_k)$ oznacza zbiór wszystkich kombinacji afinicznych $p_0,\ldots,p_k$.

Uwaga: Podzbiór $\mathrm{af}(p_0,\ldots,p_k)$ jest zamknięty na kombinacje afiniczne, to znaczy: jeśli $q_0,\ldots,q_m$ należą do $\mathrm{af}(p_0,\ldots,p_k)$, to każda ich kombinacja afiniczna też.

Definicja: Niepusty podzbiór H przestrzeni liniowej V nazywamy przestrzenią afiniczną w V, jeśli H spełnia jeden z (równoważnych) warunków:

1. H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne,
2. H jest postaci $q + W = \{p + v \ : \ v \in W\}$, gdzie W jest podprzestrzenią przestrzeni V,
3. Jeśli $V = K^n$, to H jest zbiorem rozwiązań układu równań liniowych o n niewiadomych i o współczynnikach w K.

Przestrzeń liniową W z 2. nazywamy przestrzenią styczną do H i oznaczamy $T(H)$.

Zadanie 4.
Niech $p_0 = (0,0,1,1)$, $p_1 = (1,-1,0,2)$, $p_2 = (0,1,0,1)$, $p_3 = (1,0,-1,2)$. Przedstawić $H = \mathrm{af}(p_0,p_1,p_2,p_3)$ w postaci $H = p + W = \{p + v \ : \ v \in W\}$, gdzie W jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Rozwiązanie:
Punkt p jest kombinacją afiniczną p_0,p_1,p_2, czyli $p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$. Równoważnie mamy $\overrightarrow{p_0p} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + a_2\overrightarrow{p_0p_2} + a_3\overrightarrow{p_0p_3}$, czyli $p = p_0 + a_1\overrightarrow{p_0p_1} + a_2\overrightarrow{p_0p_2} + a_3\overrightarrow{p_0p_3}$. Stąd

$$H = p_0 + \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3}) = (0,0,1,1) + \mathrm{lin}((1,-1,-1,1),(0,1,-1,0),(1,0,-2,1))$$

Zadanie 5.
Znaleźć układ równań opisujący

$$H = p_0 + \mathrm{lin}(v_1,v_2,v_3) = (0,0,1,1) + \mathrm{lin}((1,-1,-1,1),(0,1,-1,0),(1,0,-2,1))$$

Rozwiązanie:

$$W = \mathrm{lin}((1,-1,-1,1),(0,1,-1,0),(1,0,-2,1)) = \mathrm{lin}((1,-1,-1,1),(0,1,-1,0))$$

W jest opisane jednorodnym układem równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Podstawiając $p_0 = (0,0,1,1)$ do tych równań dostajemy układ opisujący $p_0 + W$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Zadanie 6.
W $\mathbb{R}^3$ dane są proste $L_1 = (0,1,1) + \mathrm{lin}((1,-1,1))$ oraz $L_2 = (2,0,1) + \mathrm{lin}((1,3,0))$. Znaleźć prostą L przechodzącą przez punkt $p = (2,1,4)$ i przecinającą proste L_1 i L_2.

Rozwiązanie:
Niech $L_1 = p_1 + \mathrm{lin}(v_1)$, gdzie $p_1 = (0,1,1)$ oraz $v_1 = (1,-1,1)$. Skoro prosta L przecina prostą L_1 i przechodzi przez punkt p, to L leży w płaszczyźnie H zawierającej L_1 i p. Wektor $v = \overrightarrow{pp_1}$ leży w płaszczyźnie H. Mamy

$$\overrightarrow{pp_1} = p_1 - p = (-2,0,-3)$$

zatem

$$H = p_1 + \mathrm{lin}(v, v_1) = (0,1,1) + \mathrm{lin}((1,-1,1),(-2,0,-3))$$

Przecięcie prostych L_2 i L leży w płaszczyźnie H. $T(H) = \mathrm{lin}((1,-1,1),(-2,0,-3))$ opisane jest równaniem

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

skąd H opisane jest równaniem

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$$

Każdy punkt prostej L_2 jest postaci $(2,0,1) + t \cdot (1,3,0) = (2+t, 3t, 1)$ dla pewnego rzeczywistego t. Punkt prostej L_2 leżący w płaszczyźnie H będzie spełniał równanie

$$3 \cdot (2+t) + 3t - 2 = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{6}$$

Zatem punkt przecięcia L_2 i H to $q = \left(\frac{21}{6}, -\frac{15}{6}, 1\right)$. Prosta L to prosta przechodząca przez punkty p i q. Zatem

$$L = p + \mathrm{lin}(\ \overrightarrow{pq}\ ) = (2,1,4) + \mathrm{lin}\left(\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, -3\right)\right)$$

Ćwiczenia 22

Afiniczna niezależność

Pytanie: Czy zawsze istnieje prosta przechodząca przez punkt p i przecinająca proste L_1 i L_2?

Szukana prosta nie zawsze istnieje. Może się zdarzyć, że prosta L_2 jest równoległa do płaszczyzny H wyznaczonej przez punkt p i prostą L_1. Może się też zdarzyć, że prosta L_2 przecina płaszczyznę H, jednak prosta przechodząca przez punkty p i q jest równoległa do prostej L_1 (prosta L_1 jest równoległa do płaszczyzny wyznaczonej przez punkt p i prostą L_2).

Definicja: Mówimy, że punkty $p_0, \ldots, p_k$ w przestrzeni afinicznej H nad ciałem K są afinicznie zależne (inaczej: są w położeniu szczególnym), jeśli któryś z tych punktów jest kombinacją afiniczną pozostałych.

Mówimy, że punkty $p_0, \ldots, p_k$ w przestrzeni afinicznej H nad ciałem K są afinicznie niezależne (inaczej: są w położeniu ogólnym), jeśli żaden z tych punktów jest nie kombinacją afiniczną pozostałych.

Uwaga: Punkty $p_0, \ldots, p_k$ są afinicznie niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ są liniowo niezależne.

Zadanie 1.
Czy układ punktów $p_0 = (2, 3, 1), p_1 = (3, 4, 2), p_2 = (2, 3, 2), p_3 = (2, 4, 2)$ w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie niezależny?

Rozwiązanie:
Wektory $\overrightarrow{p_0p_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{p_0p_2} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{p_0p_3} = (0, 1, 1)$, są liniowo niezależne, więc układ punktów p_0, p_1, p_2, p_3 jest afinicznie niezależny.

Zadanie 2.
Dla jakich rzeczywistych t układ punktów $p_0 = (4, 6, t), p_1 = (2, 4, 1), p_2 = (1, 2, 0), p_3 = (2, 3, 1)$ w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie zależny.

Rozwiązanie:
Mamy $\overrightarrow{p_2p_0} = (2, 3, t - 1)$, $\overrightarrow{p_2p_1} = (0, 1, 0), \overrightarrow{p_2p_3} = (-1, -1, -1)$. Aby wektory te były liniowo zależne to $t - 1 = 2 \Rightarrow t = 3$.

Definicja: Układ punktów $p_0, \ldots, p_n$ w przestrzeni afinicznej H nad ciałem K taki, że punkty $p_0, \ldots, p_n$ są afinicznie niezależne oraz $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_n)$ nazywamy bazą punktową przestrzeni H.

Układ $p_0; v_1, \ldots, v_n$ taki, że p_0 należy do H oraz $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą przestrzeni $T(H)$ nazywamy układem bazowym przestrzeni afinicznej H.

Uwaga: Układ $p_0, \ldots, p_n$ jest bazą punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, gdy układ $p_0;\ \overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}$ jest układem bazowym przestrzeni H.

Zadanie 3.
$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1\} \in \mathbb{R}^4$. Znaleźć bazę punktową i układ bazowy przestrzeni H.

Rozwiązanie:
Mamy
$$H = (1,0,0,0) + \mathrm{lin}((3,1,0,0),(-5,0,1,0),(2,0,0,1))$$
więc układ bazowy to
$$((1,0,0,0);(3,1,0,0),(-5,0,1,0),(2,0,0,1))$$
Stąd baza punktowa to
$$((1,0,0,0),(4,1,0,0),(-4,0,1,0),(3,0,0,1))$$

Definicja: Jeśli układ punktów $p_0, \ldots, p_n$ jest bazą punktową przestrzeni H oraz $p = a_0p_0 + \ldots + a_np_n$ dla $a_0 + \ldots + a_n = 1$, to układ wag $a_0, \ldots, a_n$ nazywamy współrzędnymi punktu p w bazie punktowej $p_0, \ldots, p_n$.

Jeśli układ $p_0; v_1, \ldots, v_n$ jest układem bazowym przestrzeni afinicznej H oraz $p = p_0 + x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$, to układ współczynników $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy współrzędnymi punktu p w bazie punktowej $p_0; v_1, \ldots, v_n$.

Uwaga: $a_0, \ldots, a_n$ są współrzędnymi punktu p w bazie punktowej $p_0, \ldots, p_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi wektora $\overrightarrow{p_0p}$ w bazie $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}$ przestrzeni $T(H)$ czyli gdy $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi punktu p w układzie bazowym $p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}$ przestrzeni H.

Zadanie 4.
$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1\} \in \mathbb{R}^4$. Znaleźć współrzędne punktu $p = (2,3,2,1)$ z H w bazie punktowej $(1,0,0,0),(4,1,0,0),(-4,0,1,0),(3,0,0,1)$ przestrzeni H.

Rozwiązanie:
Mamy
$$T(H) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0\}$$
zatem $T(H)$ jest opisane równaniem
$$x_1 = 3x_2 - 5x_3 + 2x_4$$
Skąd baza $T(H)$ to $\{(3,1,0,0),(-5,0,1,0),(2,0,0,1)\}$. Wektor $\overrightarrow{p_0p} = (1,3,2,1)$ ma w tej bazie współrzędne: $3,2,1$. Stąd współrzędne w naszej bazie punktowej to: $-5,3,2,1$.

Definicja: Niech $p_0; v_1, \ldots, v_n$ będzie układem bazowym przestrzeni afinicznej H nad ciałem K. Funkcję $u : K^n \to H$ taką, że $u((t_1, \ldots, t_n)) = p_0 + t_1v_1 + \ldots + t_nv_n$ nazywamy parametryzacją przestrzeni H.

Zadanie 5.
Znaleźć parametryzację prostej w $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkty $(1,1,3)$ i $(2,5,3)$.

Rozwiązanie:
Prosta przechodząca przez punkty $(1,1,3)$ i $(2,5,3)$ to

$$H = (1,1,3) + \operatorname{lin}((1,4,0))$$

czyli parametryzacja prostej H to $(1,1,3) + t(1,4,0) = (1+t, 1+4t, 3)$

Zadanie 6.
Znaleźć parametryzację przestrzeni $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - x_4 = 2\}$.

Rozwiązanie:
Układ bazowy przestrzeni H to $(2,0,0,0); (1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$, zatem parametryzacja przestrzeni H to $u(t_1,t_2,t_3) = (2,0,0,0) + t_1(1,0,0,1) + t_2(0,1,0,0) + t_3(0,0,1,0) = (2+t_1, t_2, t_3, t_1)$.

Przekształcenia afiniczne

Definicja: Niech H, M to przestrzenie afiniczne nad ciałem K. Mówimy, że funkcja $f : H \to M$ jest przekształceniem afinicznym, jeśli f spełnia jeden z poniższych (równoważnych) warunków:

1. Dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k$ z H i każdych wag $a_0, \ldots, a_k$ mamy:

   $$f(a_0p_0 + \ldots + a_kp_k) = a_0 f(p_0) + \ldots + a_k f(p_k)$$

   (to znaczy f zachowuje kombinacje afiniczne)

2. Istnieje przekształcenie liniowe $F : T(H) \to T(M)$ takie, że dla każdego punktu $p \in H$ i każdego wektora $v \in T(H)$ mamy: $f(p+v) = f(p) + F(v)$.

Przekształcenie F z 2. nazywamy pochodną przekształcenia f i oznaczamy f'.

Uwaga: Każde przekształcenie afiniczne $f : K^n \to K^m$ można zapisać wzorem:

$$f((x_1, \ldots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots, a_{mn}x_n + b_m)$$

dla pewnych a_{ij}, b_i z K.

Zadanie 7.
Znaleźć wzór na przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ spełniające: $f((1,2,1)) = (2,5), f((2,2,1)) = (3,6), f((1,3,1)) = (2,6), f((1,2,2)) = (1,6)$

Rozwiązanie:
Mamy

$$f((1,2,1)) = f((0,2,1) + (1,0,0)) = f((0,2,1)) + f'((1,0,0))$$

oraz

$$f((2,2,1)) = f((0,2,1) + (2,0,0)) = f((0,2,1)) + f'((2,0,0)) = f((0,2,1)) + 2 \cdot f'((1,0,0))$$

Zatem po odjęciu stronami mamy

$$f'((1,0,0)) = f((2,2,1)) - f((1,2,1)) = (3,6) - (2,5) = (1,1)$$

Mamy

$$f((1,2,1)) = f((1,2,1))$$

oraz

$$f((1,3,1)) = f((1,2,1) + (0,1,0)) = f((1,2,1)) + f'((0,1,0))$$

Skąd

$$f'((0,1,0)) = f((1,3,1)) - f((1,2,1)) = (2,6) - (2,5) = (0,1)$$

Mamy

$$f((1,2,1)) = f((1,2,1))$$

oraz

$$f((1,2,2)) = f((1,2,1) + (0,0,1)) = f((1,2,1)) + f'((0,0,1))$$

Skąd

$$f'((0,0,1)) = f((1,2,2)) - f((1,2,1)) = (1,6) - (2,5) = (-1,1)$$

Mamy więc

$$f'((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

Przekształcenie afiniczne f możemy zapisać w ogólnej postaci jako

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - x_3 + b_1, x_1 + x_2 + x_3 + b_2)$$

Po podstawieniu $f((1,2,1)) = (2,5)$ dostajemy $b_1 = 2$ oraz $b_2 = 1$, zatem

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - x_3 + 2, x_1 + x_2 + x_3 + 1)$$

Ćwiczenia 23

Przekształcenia afiniczne

Zadanie 1.
Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że dla każdego $v \in V$ zachodzi $f'(v) = f(v) - f(0)$.

Rozwiązanie:
Z definicji $f'(v) + f(p) = f(p + v)$ więc dla $p = 0$ zachodzi $f'(v) = f(0 + v) - f(0)$.

Zadanie 2.
Wykazać, że dla przekształcenia afinicznego $f : K^n \to K^m$ danego wzorem:

$$f((x_1, \ldots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots, a_{mn}x_n + b_m)$$

zachodzi:

$$f'((x_1, \ldots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots, a_{mn}x_n)$$

Rozwiązanie:
Korzystając z zadania 1. mamy

$$f'((x_1, \ldots, x_n)) = f((x_1, \ldots, x_n)) - f((0, \ldots, 0))$$

czyli:

$$f'((x_1, \ldots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m) - (b_1, \ldots, b_m) =$$

$$= (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$$

Twierdzenie: Niech $p_0, \ldots, p_n$ będzie bazą punktową przestrzeni afinicznej H i niech $q_0, \ldots, q_n$ będzie dowolnym układem punktów przestrzeni afinicznej M. Wtedy istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f : H \to M$ takie, że $f(p_i) = q_i$ dla $i = 0, \ldots, n$.

Zadanie 3.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem afinicznym spełniającym warunki: $f((2, 3)) = (1, 2, 1)$, $f((3, 4)) = (2, 5, 3)$, $f((3, 3)) = (3, 4, 2)$. Znaleźć wzór na f.

Rozwiązanie:
Niech $p_0 = (2, 3)$, $p_1 = (3, 4)$, $p_2 = (3, 3)$. Wtedy

$$\overrightarrow{p_0p_1} = (3, 4) - (2, 3) = (1, 1), \qquad \overrightarrow{p_0p_2} = (3, 3) - (2, 3) = (1, 0)$$

Stąd

$$f'((1, 1)) = f'(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_1)} = \overrightarrow{(1, 2, 1)(2, 5, 3)} = (1, 3, 2)$$

$$f'((1,0)) = f'(\overrightarrow{p_0p_2}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_2)} = \overrightarrow{(1,2,1)(3,4,2)} = (2,2,1)$$

A stąd

$$f'((0,1)) = f'((1,1)) - f'((1,0)) = (-1,1,1)$$

Zatem

$$f'((x_1,x_2)) = f'(x_1(1,0) + x_2(0,1)) = x_1f'((1,0)) + x_2f'((0,1)) = x_1(2,2,1) + x_2(-1,1,1) =$$

$$= (2x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

Przekształcenie afiniczne f możemy zapisać w ogólnej postaci jako

$$f((x_1,x_2)) = (2x_1 - x_2 + b_1, 2x_1 + x_2 + b_2, x_1 + x_2 + b_3)$$

Podstawiając $f((2,3)) = (1,2,1)$ dostajemy $(1,2,1) = (1 + b_1, 7 + b_2, 5 + b_3)$, czyli $b_1 = 0, b_2 = -5, b_3 = -4$, skąd

$$f((x_1,x_2)) = (2x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 - 5, x_1 + x_2 - 4)$$

Zadanie 4.
Niech $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6\}$. Znaleźć wzór na przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $f((3,2,1)) = (1,0,-5)$ oraz $f(M) = \{(4,2,4)\}$.

Rozwiązanie:
Wyrażenie $f(M) = \{(4,2,4)\}$ oznacza, że dla każdego $p \in M$ zachodzi $f(p) = (4,2,4)$.

Mamy

$$M = (1,1,1) + \mathrm{lin}((1,-3,0),(0,-2,1))$$

zatem baza punktowa M to na przykład $\{(1,1,1),(2,-2,1),(1,-1,2)\}$. Mając dane wartości przekształcenia afinicznego $f : K^n \to K^m$ na bazie punktowej, umiemy znaleźć wzór na f. Niech więc

$$f((1,1,1)) = (4,2,4)$$

$$f((2,-2,1)) = (4,2,4)$$

$$f((1,-1,2)) = (4,2,4)$$

$$f((3,2,1)) = (1,0,-5)$$

Zadanie 5.
Niech $L = (3,1,4) + \mathrm{lin}((1,2,1))$. Podać przykład takiego przekształcenia afinicznego $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $f((1,1,1)) = (0,1,3)$ oraz $f(p) = (1,0,5)$ dla każdego p należącego do L.

Rozwiązanie:
Baza punktowa L to na przykład $\{(3,1,4),(4,3,5)\}$. Baza punktowa przestrzeni $\mathbb{R}^3$ to na przykład $\{(3,1,4),(4,3,5),(1,1,1),(1,0,0)\}$, bo dla $p_0 = (1,0,0), p_1 = (3,1,4), p_2 = (4,3,5), p_3 = (1,1,1)$

wektory $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$, $\overrightarrow{p_0p_3}$ są liniowo niezależne. Zatem szukane przekształcenie f będzie na zadane na bazie punktowej

$$f(3,1,4) = (1,0,5)$$
$$f(4,3,5) = (1,0,5)$$
$$f(1,1,1) = (0,1,3)$$
$$f(1,0,0) = (1,0,0)$$

Twierdzenie: Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi na ciałem K, niech $F : T(H) \to T(M)$ będzie przekształceniem liniowym i niech p_0 należy do H oraz q_0 należy do M. Wtedy odwzorowanie $f : H \to M$ zadane: $f(p) = q_0 + F(\overrightarrow{p_0p})$ dla każdego p z H jest przekształceniem afinicznym.

Zauważmy, że wówczas $f(p_0) = q_0$ oraz $f' = F$. Oznacza to, że przekształcenie afiniczne $H \to M$ może być zadane przez podanie jego pochodnej F oraz wartości f w jednym punkcie p_0.

Definicja: Niech H będzie przestrzenią afiniczną i niech $T(H)$ będzie sumą prostą W_1 i W_2. Niech $H_1 = p_1 + W_1$ i niech $H_2 = p_2 + W_2$

Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że $f(p_1) = p_1$ oraz f' jest rzutem na W_1 wzdłuż W_2 nazywamy rzutem na H_1 wzdłuż H_2 (lub wzdłuż W_2).

Przekształcenie afiniczne $g : H \to H$ takie, że $g(p_1) = p_1$ oraz g' jest symetrią względem W_1 wzdłuż W_2 nazywamy symetrią względem H_1 wzdłuż H_2 (lub wzdłuż W_2).

Zadanie 6.
Znaleźć rzut punktu $p = (1,1,0)$ na płaszczyznę $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4\}$ wzdłuż prostej $L = (3,2,1) + \text{lin}((2,1,3))$.

Rozwiązanie:
Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na płaszczyznę $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4\}$ wzdłuż prostej $L = (3,2,1) + \text{lin}((2,1,3))$. Chcemy obliczyć $f((1,1,0))$.

Znajdźmy przekształcenie $f' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będące rzutem na płaszczyznę $T(M) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$ wzdłuż prostej $T(L) = \text{lin}((2,1,3))$. Mamy $T(M) = \text{lin}((1,0,-1),(0,1,-3))$, zatem f' zadane jest

$$f'((1,0,-1)) = (1,0,-1)$$
$$f'((0,1,-3)) = (0,1,-3)$$
$$f'((2,1,3)) = (0,0,0)$$

Mając wzór na f' i wiedząc, że dla każdego $p \in M$ mamy $f(p) = p$, czyli na przykład $f((-4,0,0)) = (-4,0,0)$ znajdujemy wzór na f, skąd po podstawieniu $(1,1,0)$ do wzoru na f otrzymujemy rzut punktu $p = (1,1,0)$ na płaszczyznę M.

Ćwiczenia 24

Przestrzenie euklidesowe afiniczne

Zadanie 1.
Niech $f : H \to M$ i $g : M \to N$ będą przekształceniami afinicznymi przestrzeni afinicznych nad ciałem K. Wykazać, że

a) $g \circ f$ jest przekształceniem afinicznym,

b) $(g \circ f)' = g' \circ f'$.

Rozwiązanie:

a) Dla dowolnych punktów $p_0, \ldots, p_k$ z przestrzeni H i wag $a_0, \ldots, a_k$ z ciała K mamy:

$$g \circ f(a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k) = g(f(a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k)) = g(a_0 f(p_0)) + \ldots + a_k f(p_k)) =$$

$$a_0\ g(f(p_0)) + \ldots + a_k\ g(f(p_k)) = a_0\ g \circ f(p_0) + \ldots + a_k\ g \circ f(p_k)$$

Czyli $g \circ f$ zachowuje kombinacje afiniczne.

b) Dla dowolnego punktu $p \in H$ i każdego wektora $v \in T(H)$ mamy:

$$g \circ f(p + v) = g(f(p + v)) = g(f(p) + f'(v)) = gf(p) + g' \circ f'(v)$$

Stąd $(g \circ f)' = g' \circ f'$

Zadanie 2.
Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ to symetria względem $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2+x_3 = 4\}$ wzdłuż $\mathrm{lin}((0, 1, -2))$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ to jednokładność o środku $(1, 2, 3)$ i skali 5, oraz $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ to przesunięcie równoległe o wektor $(4, 1, 3)$. Znaleźć wzór na $h \circ g \circ f$.

Rozwiązanie:
f' to symetria względem $T(M) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2+x_3 = 0\} = \mathrm{lin}((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ wzdłuż $\mathrm{lin}((0, 1, -2))$, zatem

$$f'((1, -1, 0)) = (1, -1, 0)$$
$$f'((0, 1, -1)) = (0, 1, -1)$$
$$f'((0, 1, -2)) = (0, -1, 2)$$

skąd

$$f'((0, 0, 1)) = (0, 2, -3)$$
$$f'((0, 1, 0)) = (0, 3, -4)$$
$$f'((1, 0, 0)) = (1, 2, -4)$$

f' zadane jest więc wzorem

$$f'((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, -4x_1 - 4x_2 - 3x_3)$$

Korzystając z tego, że $f((1,2,1)) = (1,2,1)$ mamy

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8, -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 16)$$

g jest jednokładnością o środku $(1,2,3)$ i skali 5, zatem g' jest jednokładnością o skali 5, czyli

$$g'((x_1, x_2, x_3)) = 5(x_1, x_2, x_3)$$

Skąd

$$g((x_1, x_2, x_3)) = g((1,2,3) + (x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - 3)) =$$
$$= (1,2,3) + 5(x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - 3) = (5x_1 - 4, 5x_2 - 8, 5x_3 - 12)$$

Skoro h to przesunięcie o wektor $(4,1,3)$, to dane jest wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 4, x_2 + 1, x_3 + 3)$$

Teraz łatwo znaleźć wzór na $h \circ g \circ f$.

Definicja: Parę $(H, \langle\ ,\ \rangle)$, gdzie H jest przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{R}$ oraz $\langle\ ,\ \rangle$ jest iloczynem skalarnym na $T(H)$ nazywamy przestrzenią euklidesową afiniczną

Zadanie 3.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (2,3,2)$ na prostą $L = (1,0,1) + \mathrm{lin}((2,1,1))$.

Rozwiązanie:
Możemy znaleźć wzór na $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będący rzutem prostopadłym na L wzdłuż $T(L)^\perp$. Następnie podstawiamy $p = (2,3,2)$ otrzymując rzut punktu p na prostą L.

Możemy też poprowadzić płaszczyznę M prostopadłą do L przechodzącą przez punkt p. Wówczas rzut prostopadły punktu p na prostą L to punkt przecięcia L i M.

Lemat: W $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dla

$$L = p_0 + \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))$$

mamy

$$T(L)^\perp = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

Lemat: W $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dla

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$$

mamy

$$T(M)^\perp = \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n)$$

$T(M)$ jest prostopadłe do $T(L)$, zatem jest opisane równaniem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Punkt $(2,3,2)$ należy do płaszczyzny M, zatem M jest opisana równaniem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

Dowolny punkt leżący na prostej L to $(1,0,1) + t \cdot (2,1,1) = (2t+1, t, t+1)$. Punkt przecięcia prostej L i płaszczyzny M spełnia więc równanie

$$2 \cdot (2t+1) + t + (t+1) = 9 \Leftrightarrow t = 1$$

Zatem szukany punkt to $(3,1,2)$.

Definicja: W przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle \ , \ \rangle)$ odległością punktów p, q nazywamy długość wektora $\overrightarrow{pq}$. Oznaczenie: $d(p,q)$. Czyli $d(p,q) = ||\overrightarrow{pq}||$.

Zadanie 4.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym na prostej $L = (1,1,1) + \text{lin}((0,1,0))$ znaleźć punkty, których odległość od punktu $p = (2,1,3)$ wynosi $\sqrt{6}$.

Rozwiązanie:
Parametryzacja L to $z(t) = (1, 1+t, 1)$, zatem odległość dowolnego punktu prostej, od punku p wynosi

$$d(z(t), p) = ||(1, -t, 2)|| = \sqrt{1 + t^2 + 4} = \sqrt{t^2 + 5}$$

Punkt $(z(t)$ leży w odległości $\sqrt{6}$ od punktu p, gdy

$$d(z(t), p) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 5} = \sqrt{6} \Leftrightarrow t = 1 \ \lor \ -1$$

Definicja: Niech $(H, \langle \ , \ \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa afiniczna, M to podprzestrzeń afiniczna w H, natomiast p to punkt w H. Odległością punktu p od podprzestrzeni M nazywamy odległość punktu p od jego rzutu prostopadłego na M. Oznaczenie: $d(p, M)$.

Zadanie 5.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym obliczyć odległość punktu $p = (2,3,2)$ od prostej $L = (1,0,1) + \text{lin}((2,1,1))$.

Rozwiązanie:
Rzut prostopadły p na L to $p' = (3,1,2)$. Zatem odległość punktu p od prostej L to odległość punktu p od punktu p', czyli

$$d(p, p') = ||(1, -2, 0)|| = \sqrt{5}$$

Ćwiczenia 25

Izometrie w przestrzeniach afinicznych

Odległość punktu od podprzestrzeni afinicznej to odległość tego punktu od jego rzutu prostopadłego na tę podprzestrzeń.

Zadanie 1.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym obliczyć odległość punktu $p = (5, 2, 2)$ od podprzestrzeni M opisanej równaniem: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$.

Rozwiązanie:
Znajdujemy rzut prostopadły na płaszczyznę

$$M = (1, 0, 0) + \mathrm{lin}((3, -1, 0), (2, 0, -1))$$

Dowolna prosta prostopadła do M to $T(M)^{\perp} = \mathrm{lin}((1, 3, 2))$. Zatem prosta prostopadła do M przechodząca przez punkt p to

$$(5, 2, 2) + \mathrm{lin}((1, 3, 2))$$

Punkt przecięcia tej prostej i płaszczyzny M to dowolny punkt z prostej

$$p(t) = (5, 2, 2) + t(1, 3, 2) = (5 + t, 2 + 3t, 2 + 2t)$$

spełniający równanie płaszczyzny, czyli

$$(5 + t) + 3(2 + 3t) + 2(2 + 2t) = 1 \Leftrightarrow t = -1$$

Zatem rzut punktu p na płaszczyznę M to $p' = (4, -1, 0)$. Odległość tego punktu od punktu p to

$$||(1, 3, 2)|| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

Można też skorzystać z twierdzenia

Twierdzenie: W $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym odległość punktu $p = (y_1, \ldots, y_n)$ od podprzestrzeni M opisanej niezerowym równaniem $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ wynosi

$$\frac{|a_1y_1 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

Zatem odległość punktu p od płaszczyzny M wynosi

$$d(p, M) = \frac{|5 + 6 + 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

Zadanie 2.
W $\mathbb{R}^3$ ze iloczynem skalarnym zadanym macierzą $G(\langle\ ,\ \rangle; st) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ obliczyć odległość punktu $p = (2, -5, -4)$ od podprzestrzeni M opisanej równaniem: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$.

Rozwiązanie:
Mamy
$$M = (1,0,0) + \mathrm{lin}((-3,1,0),(-2,0,1))$$
Ponadto $T(M)^\perp$ jest opisane układem równań
$$\begin{cases} 0 = \langle (x_1,x_2,x_3),(-3,1,0)\rangle = -3x_1 - 3x_3 + x_2 \\ 0 = \langle (x_1,x_2,x_3),(-2,0,1)\rangle = -2x_1 - 2x^3 + x_1 + 2x_3 \end{cases}$$
Zatem $T(M)^\perp = \mathrm{lin}((0,3,1))$. Punkt $p(t) = (2,-5,-4) + t(0,3,1) = (2,3t-5,t-4)$, czyli dowolny punkt leżący na prostej prostopadłej do M przechodzącej przez punkt p, należy do M , gdy
$$2 + 3(3t-5) + 2(t-4) = 1 \Leftrightarrow t = 2$$
Zatem rzut punktu p na płaszczyznę M to $p' = (2,1,-2)$. Odległość tego punktu od punktu p wynosi
$$d(p,M) = d(p,p') = ||\overrightarrow{pp'}|| = ||(0,6,2)|| = \sqrt{36+8} = \sqrt{44}$$

Zadanie 3.
W $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć na paraboli $(x_2)^2 = x_1$ punkt leżący najbliżej prostej $L = \mathrm{af}((-1,0),(0,2))$.

Rozwiązanie:
Mamy $T(L) = \mathrm{lin}((1,2))$, stąd $T(L)$ jest opisane równaniem $2x_1 - x_2 = 0$, zatem L jest opisane równaniem $2x_1 - x_2 = -2$. Nasza parabola jest to zbiór punktów (t^2,t), gdzie t jest rzeczywiste. Dla każdego (z_1,z_2) mamy
$$d((z_1,z_2),L) = \frac{|2z_1 - z_2 + 2|}{\sqrt{5}}$$
Stąd
$$d((t^2,t),L) = \frac{|2t^2 - t + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{2t^2 - t + 2}{\sqrt{2}}$$
Wyrażenie to jest najmniejsze dla $t = \frac{1}{4}$, zatem szukany punkt jest to $\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$.

Zadanie 4.
W $\mathbb{R}^3$ niech $M_1 = \mathrm{af}((0,0,-5),(1,0,-4),(1,1,-5))$, $M_2 = \mathrm{af}((0,1,0),(1,1,1),(0,2,2))$. Znaleźć $M_1 \cap M_2$ podając jej bazę punktową lub układ bazowy.

Rozwiązanie:
Opiszmy M_1 układem równań
$$x_1 - x_2 - x_3 = 5$$
Opiszmy M_2 układem równań
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
Zatem układem opisującym przestrzeń $M_1 \cap M_2$ jest
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Skąd mamy

$$M_1 \cap M_2 = (4, -1, 0) + \mathrm{lin}((1, 0, 1))$$

Układ bazowy tej przestrzeni to $(4, -1, 0); (1, 0, 1)$, natomiast baza punktowa tej przestrzeni to $(4, -1, 0), (5, -1, 1)$.

Zadanie 5.

Układ punktów p_0, p_1, p_2, p_3 jest bazą punktową $\mathbb{R}^3$. Niech $q_0 = (1, 1, 0)$, $q_1 = (0, 2, 0)$, $q_2 = (3, 0, 1)$, $q_3 = (r, 1, 5)$. Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ istnieje izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taki, że $f(p_i) = q_i$ dla $i = 0, 1, 2, 3$?

Rozwiązanie:

Wiemy, że $f : H \to M$ jest izomorfizmem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest izomorfizmem liniowym, czyli gdy f przeprowadza bazę punktową w bazę punktową dla $\dim M = \dim H = n$.

Zatem izomorfizm f istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy q_0, q_1, q_2, q_3 jest bazą punktową przestrzeni $\mathbb{R}^3$, czyli gdy $\overrightarrow{q_0q_1} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{q_0q_2} = (2, -1, 1)$, $\overrightarrow{q_0q_3} = (r - 1, 0, 5)$ są liniowo niezależne.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ r-1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6-r \end{bmatrix}$$

Wektory są więc liniowo niezależne, gdy $r \neq 6$. Zatem f jest izomorfizmem afinicznym dla $r \neq 6$.

Ćwiczenia 26

Odległości między punktami

Definicja: Niech $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa afiniczna, $p_0, \ldots, p_k$ to układ punktów afinicznie niezależnych w H. Zbiór

$$S = S(p_0, \ldots, p_k) = \{a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k \mid a_0 + \ldots + a_k = 1 \ \wedge \ a_i \geq 0\}$$

nazywamy k wymiarowym sympleksem o wierzchołkach $p_0, \ldots, p_k$.

W szczególności:

$$S(p_0, p_1) = \text{ odcinek o końcach } p_0, p_1$$

$$S(p_0, p_1, p_2) = \text{ trójkąt o wierzchołkach } p_0, p_1, p_2$$

k wymiarową miarą (k wymiarową objętością) k wymiarowego sympleksu $S = S(p_0, \ldots, p_k)$ nazywamy liczbę

$$\mathrm{vol}_k(S) = \frac{1}{k!}\sqrt{W(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k})}$$

gdzie $W(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k})$ oznacza wyznacznik Grama tych wektorów.

Zadanie 1.
Obliczyć 3 wymiarową miarę sympleksu $S = S((2,1,5), (3,2,5), (3,1,6), (3,1,5))$.

Rozwiązanie:
Niech $p_0 = (2,1,5)$, $p_1 = (3,2,5)$, $p_2 = (3,1,6)$, $p_3 = (3,1,5)$. Policzmy wyznacznik Grama wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3}$

$$W(\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3}) = \det G((1,1,0), (1,0,1), (1,0,0)) = 1$$

Zatem 3-wymiarowa objętość sympleksu S to

$$\mathrm{vol}_3(S) = \frac{1}{3!} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Zadanie 2.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech S będzie czworościanem o podstawie $S((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ i wierzchołku p leżącym w płaszczyźnie $x_1 = 5$ na okręgu o środku $(5,0,0)$ i promieniu 1. Dla jakiego p objętość sympleksu S jest największa?

Rozwiązanie:
Objętość czworościanu będzie największa, gdy odległość punktu p od podstawy będzie największa. Płaszczyzna wyznaczona przez punkty $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ to

$$M = \mathrm{af}((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

Punkt p leżący na płaszczyźnie opisanej równaniem $x_1 = 5$ i okręgu o środku w punkcie $(5,0,0)$ i promieniu 1 to na przykład

$$p(s) = (5, \cos(s), \sin(s))$$

dla dowolnego s. Odległość tego punktu od płaszczyzny M wynosi

$$d(p(s), M) = \frac{|5 + \cos(s) + \sin(s) - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |4 + \cos(s) + \sin(s)|$$

Chcemy zmaksymalizować więc wyrażenie

$$\cos(s) + \sin(s) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(s + \frac{\pi}{4}\right)$$

a to jest największe dla $s = \frac{\pi}{4}$. Wówczas $p = \left(5, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Zadanie 3.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + 5, 3x_1 + x_2 + x_3 - 4, sx_1 + 2x_3 + 2)$. Dla jakich rzeczywistych s przekształcenie f zachowuje miarę 3 wymiarowych równoległościanów?

Rozwiązanie:
f zachowuje miarę 3 wymiarowych równoległościanów wtedy i tylko wtedy, gdy f' zachowuje miarę 3 wymiarowych równoległościanów, czyli gdy $|\det(M(f')^{st}_{st})| = 1$. Mamy

$$M(f')^{st}_{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ s & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zatem $|\det(f')| = |s - 2|$, czyli $|s - 2| = 1 \Leftrightarrow s = 3 \ \vee \ s = 1$.

Definicja: Niech $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa afiniczna. Odwzorowanie $f : H \to H$ nazywamy izometrią jeśli spełniony jest jeden z poniższych (równoważnych) warunków:

1. f jest afiniczne i $f' : T(H) \to T(H)$ jest izometrią liniową,
2. f zachowuje odległość punktów, to znaczy dla każdych $p, q \in H$ mamy

$$d(p, q) = d(f(p), f(q))$$

Zadanie 4.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((1, 0, 0))$, $p = (3, 0, 0)$, $M = (6, 0, 0) + \mathrm{lin}((0, 0, 1))$, $q = (r, 0, 3)$. Dla jakich r rzeczywistych istnieje izometria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taka, że $f(L) = M$ oraz $f(p) = q$?

Rozwiązanie:
Izometria zachowuje odległości, zatem taka izometria istnieje, gdy $d(p, L) = d(q, M)$. Wyznaczmy odległości punktu p od prostej L. Układ $(0, 1, 0); (1, 0, 0)$ jest prostopadłym układem bazowym prostej L. Ponadto $p = (3, 0, 0) = (0, 1, 0) + (3, -1, 0)$, zatem rzut punktu p na prostą L to

$$p' = (0, 1, 0) + \frac{\langle (3, -1, 0), (1, 0, 0)\rangle}{\langle (1, 0, 0), (1, 0, 0)\rangle}(1, 0, 0) = (3, 1, 0)$$

Odległość punktu p od punktu p' wynosi więc

$$\sqrt{(3-3)^2+(0-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1}=1$$

Wyznaczmy odległość punktu q od prostej M w zależności od parametru r. Układ $(6,0,0);(0,0,1)$ jest prostopadłym układem bazowym prostej M. Ponadto $q=(r,0,3)=(6,0,0)+(r-6,0,3)$, zatem rzut punktu q na prostą M to

$$q'=(6,0,0)+\frac{\langle(r-6,0,3),(0,0,1)\rangle}{\langle(0,0,1),(0,0,1)\rangle}(0,0,1)=(6,0,3)$$

Odległość punktu q od punktu q' wynosi więc

$$\sqrt{(6-r)^2+(0-0)^2+(3-3)^2}=\sqrt{(6-r)^2}=|6-r|$$

Zatem

$$d(p,L)=d(q,M)\Leftrightarrow|6-r|=1\Leftrightarrow r=7\ \vee\ r=5$$

Zadanie 5.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym zbadać ile jest izometrii $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ spełniających $f((0,0,1))=(0,1,0)$, $f(\mathrm{af}((0,0,0),(0,1,0))=\mathrm{af}((0,0,0),(0,0,1))$.

Rozwiązanie:
Oznaczmy $p=(0,0,1)$, $q=(0,1,0)$, $L=\mathrm{af}((0,0,0),(0,1,0))$ oraz $M=\mathrm{af}((0,0,0),(0,0,1))$. Wówczas

$$L=\mathrm{lin}((0,1,0))\quad\text{oraz}\quad M=\mathrm{lin}((0,0,1))$$

Rzut prostopadły punktu p na prostą L to $p'=(0,0,0)$. Również rzut prostopadły punktu q na prostą M to $q'=(0,0,0)$. Ponadto mamy

$$d(p,L)=d(q,M)=1$$

zatem istnieje co najmniej jedna taka izometria. Ponadto mamy $f(p')=q'$, ponieważ punkt p' jest najbliższym punktem na L dla punktu p oraz q' jest najbliższym punktem na M dla punktu q. Dalej, niech p_1 będzie punktem na prostej L w odległości 1 od punktu p'. Niech q_1 i q_1' będą punktami na prostej M w odległości 1 od punktu q', wówczas $f(p_1)=q_1$ lub $f(p_1)=q_1'$. Niech p_2 będzie punktem na prostej L' przechodzącej przez p' i prostopadłej do $\mathrm{af}(p,p'p_1)$ leżącym w odległości 1 od p'. Niech q_2,q_2' będą punktami na prostej M' przechodzącej przez q', prostopadłej do $\mathrm{af}(q,q',q_1)$ leżącymi w odległości 1 od q'. Wówczas $f(p_2)=q_2$ lub $f(p_2)=q_2'$. Punkty p,p',p_1,p_2 to baza punktowa $\mathbb{R}^3$. Wartości f na tej bazie wynoszą $f(p)=q$, $f(p')=q'$, $f(p_1)=q_1$ lub $f(p_1)=q_1'$ oraz $f(p_2)=q_2$ lub $f(p_2)=q_2'$, zatem są cztery takie izometrie.

Ćwiczenia 27

Zadanie 1.
Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa liniowa. Wykazać, że dla każdych wektorów $v, w \in V$ zachodzi:

$$v + w \perp v - w \Leftrightarrow ||v|| = ||w||$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\langle v + w, v - w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle + \langle v, w\rangle - \langle w, w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle$$

Zatem

$$v + w \perp v - w \Leftrightarrow \langle v + w, v - w\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle \Leftrightarrow ||v|| = ||w||$$

Udowodniliśmy więc, że równoległobok jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne są prostopadłe.

Definicja: Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa liniowa. Mówimy, że przekształcenie liniowe $F : V \to V$ zachowuje prostopadłość wektorów, jeśli dla każdych wektorów $v, w \in V$ zachodzi

$$v \perp w \Rightarrow F(v) \perp F(w)$$

Zadanie 2.
Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa liniowa. Wykazać, że jeśli przekształcenie liniowe $F : V \to V$ zachowuje prostopadłość wektorów, to dla każdych wektorów $v, w \in V$ zachodzi

$$||v|| = ||w|| \Rightarrow ||F(v)|| = ||F(w)||$$

Rozwiązanie:
Wiemy, że

$$||v|| = ||w|| \Leftrightarrow v + w \perp v - w$$

Skoro f zachowuje prostopadłość wektorów, to

$$v + w \perp v - w \Rightarrow F(v + w) \perp F(v - w) \Leftrightarrow F(v) + F(w) \perp F(v) - F(w)$$

Zatem mamy

$$||v|| = ||w|| \Rightarrow ||F(v)|| = ||F(w)||$$

Zadanie 3.
Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa liniowa. Wykazać, że jeśli monomorfizm $F : V \to V$ zachowuje prostopadłość wektorów, to F jest złożeniem liniowej izometrii i jednokładności.

Rozwiązanie:
Skoro F jest monomorfizmem, to jest izomorfizmem, ponieważ V jest skończenie wymiarową przestrzenią. Stąd jeśli $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą ortonormalną V, to $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ jest bazą prostopadłą V, ponieważ F zachowuje prostopadłość wektorów. F zachowuje długość wektorów,

więc skoro wszystkie wektory $v_1, \ldots, v_n$ miały równą długość (mianowicie 1), to wszystkie wektory $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ również mają jednakową długość. Niech długość tych wektorów to $a > 0$. Niech $G = \frac{1}{a}F$, wówczas G przeprowadza bazę ortonormalną $v_1, \ldots, v_n$ na bazę ortonormalną $\frac{1}{a}F(v_1), \ldots, \frac{1}{a}F(v_n)$. Zatem G jest izometrią. Wówczas $F = a \cdot G$ jest złożeniem izometrii liniowej G oraz jednokładności o skali a.

Przypomnienie:

Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ jest izometrią przestrzeni $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f' : T(H) \to T(H)$ jest izometrią liniową, czyli gdy dla każdej bazy ortonormalnej $\mathcal{B}$ przestrzeni $T(H)$ macierz $M(f')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ jest ortogonalna.

Każda macierz ortogonalna 2×2 jest postaci

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.
Wykazać, że każda macierz ortogonalna 3x3 jest podobna do macierzy postaci:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ \sin(t) & -\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

gdzie $r = 1$ lub $r = -1$.

Rozwiązanie:
Niech A to macierz ortogonalna rozmiaru 3×3. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym w bazie standardowej macierzą A. Wówczas wielomian charakterystyczny macierzy A jest wielomianem charakterystycznym trzeciego stopnia, czyli ma pierwiastek, więc F ma wartość własną. Niech ta wartość własna to r. Niech v będzie dowolnym wektorem własnym F o wartości własnej r, czyli $F(v) = rv$. Skoro A jest ortogonalna, to F jest izometrią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Zatem $|r| = 1$. Niech $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $\text{lin}(v)^\perp$. Skoro $F(v) = rv$, czyli $F(\text{lin}(v)) = \text{lin}(v)$, to $F(\text{lin}(v)^\perp) = \text{lin}(v)^\perp$, ponieważ F zachowuje prostopadłość. Niech $G : \text{lin}(v)^\perp \to \text{lin}(v)^\perp, G = F|_{\text{lin}(v)^\perp}$, wówczas G jest izometrią, więc jej macierz w bazie $\mathcal{C}$ jest macierzą ortogonalną rozmiaru 2×2 postaci

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix}$$

Stąd dla bazy $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, v\}$ macierz $M(F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ jest postaci M_1 lub M_2. Ale A jest podobna do $M(F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, ponieważ $A = M(F)^{st}_{st}$.

Zadanie 5.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozpatrzmy izometrie afiniczne f spełniając warunki $f((0,0,0)) = (0,0,1)$ oraz $f'(\text{lin}((1,2,1),(0,1,0)) = \text{lin}((1,2,1),(0,1,0))$. Opisać te izometrie podając ich wartości na wybranym układzie bazowym.

Rozwiązanie:
Niech w_1, w_2 będzie bazą ortonormalną przestrzeni $W = \text{lin}((1,2,1),(0,1,0))$, czyli na przykład

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ oraz $w_2 = (0,1,0)$. Niech w_3 będzie bazą ortonormalną przestrzeni $W^\perp$, czyli na przykład $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Wtedy w bazie $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ przekształcenie f' ma macierz M_1 lub M_2 z poprzedniego zadania. Ponadto dla $p_0 = (0,0,0)$ mamy $f(p_0) = (0,0,1)$.

Ćwiczenia 28

Hiperpowierzchnie

Twierdzenie: (Klasyfikacja właściwych hiperpowierzchni (krzywych) stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$) Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$ jest afinicznie izomorficzna z jedną z następujących krzywych:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 + 1 = 0\}$$

Jest to para prostych równoległych.

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0\}$$

Krzywą tego typu afinicznego nazywamy elipsą.

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0\}$$

Krzywą tę nazywamy hiperbolą.

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$$

Jes to para prostych przecinających się.

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2 = 0\}$$

Krzywą tę nazywamy parabolą.

Twierdzenie: (Klasyfikacja właściwych hiperpowierzchni stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$) Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afiniczna z jedną z następujących hiperpowierzchni:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + 1 = 0$$

Jest to para płaszczyzn równoległych.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy walcem eliptycznym.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy walcem hiperbolicznym.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy elipsoidą.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - x_2^2 + 1 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy hiperboloidą jednopowłokową.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy hiperboloidą dwupowłokową.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$$

Jest to para płaszczyzn przecinających się.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy stożkiem eliptycznym.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy walcem parabolicznym.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy paraboloidą eliptyczną.

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$$

Hiperpowierzchnię tę nazywamy paraboloidą hiperboliczną.

Zadanie 1.
Krzywa $X \in \mathbb{R}^2$ w standardowym układzie bazowym $(0,0);(1,0),(0,1)$ jest opisana równaniem: $5x_1^2+2x_2^2-6x_1x_2-2x_1+1=0$. Znaleźć równanie opisujące X w układzie bazowym $(1,1);(1,1),(1,2)$.

Rozwiązanie:
Niech (y_1, y_2) to współrzędne punktu (x_1, x_2) w zadanym układzie bazowym. Mamy

$$(x_1, x_2) = (1,1) + y_1(1,1) + y_2(1,2)$$

czyli $x_1 = y_1 + y_2 + 1$ oraz $x_2 = y_1 + 2y_2 + 1$. Podstawiamy te równania do równania wyjściowego $5x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 - 2x_1 + 1 = 0$ i dostajemy

$$5(y_1 + y_2 + 1)^2 + 2(y_1 + 2y_2 + 1)^2 - 6(y_1 + y_2 + 1)(y_1 + 2y_2 + 1) - 2(y_1 + y_2 + 1) + 1 = 0$$

co po uproszczeniu daje nam

$$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$$

To zadanie jest przykładem najważniejszego typu obserwacji jakie będziemy robić w związku z hiperpowierzchniami. Mamy hiperpowierzchnię X opisaną w standardowym układzie bazowym jakimś równaniem. Aby zrozumieć jak wygląda X opisujemy ją równaniem w innym układzie bazowym, który jest dobrany tak, aby to nowe równanie było prostsze.

Zadanie 2.
Krzywa $Y \in \mathbb{R}^2$ jest w układzie bazowym $(2,1); (1,1), (1,0)$ opisana równaniem $x_1x_2 - 3x_2 + 5 = 0$. Znaleźć równanie opisujące Y w układzie bazowym $(4,2); (1,2), (3,5)$.

Rozwiązanie:
Znajdujemy współrzędne y_1, y_2 w drugim układzie bazowym

$$(2,1) + x_1(1,1) + x_2(1,0) = (4,2) + y_1(1,2) + y_2(3,5).$$

Stąd

$$\begin{cases} 2 + x_1 + x_2 = 4 + y_1 + 3y_2 \\ 1 + x_1 = 2 + 2y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

Czyli

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2y_1 + 5y_2 \\ x_2 = 1 - y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Dostajemy

$$(1 + 2y_1 + 5y_2)(1 - y_1 - 2y_2) - 3(1 - y_1 - 2y_2) + 5 = 0$$

Przypomnienie:
Jeśli $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ są bazami przestrzeni liniowej V nad ciałem K oraz $x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$, to mamy równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

gdzie $C = M(id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ (zwana macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{C}$ do $\mathcal{B}$)

Zadanie 3.
Niech $p_0; \mathcal{B}$ i $q_0; \mathcal{C}$ (gdzie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$) będą układami bazowymi przestrzeni afinicznej H. Niech $p_0 + x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = q_0 + y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$. Znaleźć równanie macierzowe wyrażające zależność $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ od $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:
Niech $q_0 = p_0 + d_1v_1 + \ldots + d_nv_n$. Wówczas

$$p_0 + x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = p_0 + d_1v_1 + \ldots + d_nv_n + y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$$

Zatem
$$p_0 + (x_1 - d_1)v_1 + \ldots + (x_n - d_n)v_n = p_0 + y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$$
czyli
$$(x_1 - d_1)v_1 + \ldots + (x_n - d_n)v_n = y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$$
Macierzowo mamy
$$\begin{bmatrix} x_1 - d_1 \\ \vdots \\ x_n - d_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
gdzie $C = M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$. Zatem otrzymujemy
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.
Określić typ afiniczny następującej krzywej w $\mathbb{R}^2$
$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 - 10x_2 = 0\}$$

Rozwiązanie:
Zmieniając układ bazowy, upraszczamy równanie opisujące X tak, aż dostaniemy równanie z listy.

Pozbywamy się wyrazów mieszanych (postaci x_ix_j dla $i \neq j$), to znaczy diagonalizujemy formę kwadratową $x_1^2-5x_2^2+2x_1x_2$. Odpowiada jej forma dwuliniowa h o macierzy (w bazie standardowej) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$. Przykład bazy prostopadłej dla formy h to $\mathcal{C} = \{(1,0), (-1,1)\}$. Wówczas mamy $G(h;\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$, czyli dla $C = M(id)^{st}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mamy $C^TAC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$. Mamy
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$
czyli $x_2 = y_1 + y_2$, $x_2 = -y_2$. Podstawiając do równania opisującego X dostajemy:
$$y_1^2 - 6y_2^2 + 2y_1 + 12y_2 = 0$$

Pozbywamy się wyrazów stopnia pierwszego.
$$y_1^2 - 6y_2^2 + 2y_1 + 12y_2 = 0$$
Wtedy
$$(y_1 + 1)^2 - 1 - 6(y_2 - 1)^2 + 6 = 0$$
Czyli
$$(y_1 + 1)^2 - 6(y_2 - 1)^2 + 5 = 0$$

Podstawiając
$$z_1 = y_1 + 1, z_2 = y_2 - 1$$
mamy
$$z_1^2 - 6z_2^2 + 5 = 0$$
Już widać, że X jest hiperbolą.

Jeśli chcemy dojść dokładnie do równania z listy, to dzielimy nasze równanie przez 5:
$$\frac{1}{5}z_1^2 - \frac{6}{5}z_2^2 + 1 = 0$$
i bierzemy $s_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}z_1$ i $s_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}z_2$.

Ćwiczenia 29

Hiperpowierzchnie c.d.

Zadanie 1.
Określić typ afiniczny hiperpowierzchni

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 5x_2^2 + 24x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 20x_2x_3 + 2x_2 - 19 = 0\}$$

Rozwiązanie:
Macierz części kwadratowej równania opisującego wynosi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 10 & 24 \end{bmatrix}$$

Przykład bazy prostopadłej dla formy zadanej macierzą A to $v_1 = (1,0,0), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (5,-4,1)$. Wówczas dla $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ mamy

$$C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz $C^T AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Przyjmując

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + 5y_3 \\ x_2 = y_2 - 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Podstawiając do równania opisującego X dostajemy:

$$x_1^2 + 5x_2^2 + 24x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 20x_2x_3 + 2x_2 - 19 =$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 2(y_2 - 4y_3) - 19 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 2y_2 - 8y_3 - 19 =$$
$$= y_1^2 + (y_2+1)^2 - 1 - (y_3+4)^2 + 16 - 19 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 4$$

Mamy przy tym:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - 1 \\ y_3 = z_3 - 4 \end{cases}$$

więc

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + 5y_3 = z_1 - 2z_2 + 2 + 5z_3 - 20 = z_1 - 2z_2 + 5z_3 - 18 \\ x_2 = y_2 - 4y_3 = z_2 - 1 - 4z_3 + 16 = z_2 - 4z_3 + 15 \\ x_3 = y_3 = z_3 - 4 \end{cases}$$

czyli macierzowo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 \\ 15 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.
Rozwiązać Zadanie 1. metodą Lagrange'a (uzupełnianie do kwadratów).

Zadanie 3.
Niech $Y_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 8x_1 + t = 0\}$. Dla jakich rzeczywistych t hiperpowierzchnia Y_t ma ten sam typ afiniczny co hiperpowierzchnia X z Zadania 1?

Rozwiązanie:

Ćwiczenia 30

Powtórzenie wiadomości

Zadanie 1.
Dla endomorfizmu $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (-9x_4, x_1 + 24x_4, x_2 - 22x_4, x_3 + 8x_4)$$

znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych.

Rozwiązanie:
Weźmy bazę standardową przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wówczas

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Wówczas, korzystając z rozwinięcia Laplace'a dla pierwszego wiersza, mamy

$$w_\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -9 \\ 1 & -\lambda & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -\lambda & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}(-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 24 \\ 1 & -\lambda & -22 \\ 0 & 1 & 8-\lambda \end{bmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+4}(-9) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-\lambda)[(-\lambda)(-\lambda)(8-\lambda) + 24 - (-22)(-\lambda)] + (-1)(-9) =$$

$$= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 = (x-3)^2(x-1)^2$$

Wartości własne endomorfizmu ϕ to 1 i 3.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & -1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -1 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 == 9x_4 \\ x_2 = 15x_4 \\ x_3 = -7x_4 \end{cases}$$

$(-9x_4, 15x_4, -7x_4, x_4) = x_4(-9, 15, -7, 1)$, zatem $V_{(1)} = \text{lin}((-9, 15, -7, 1))$.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_{(3)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & -3 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_4 \\ x_2 = 7x_4 \\ x_3 = -5x_4 \end{cases}$$

$(-3x_4, 7x_4, -5x_4, x_4) = x_4(-3, 7, -5, 1)$, zatem $V_{(3)} = \text{lin}((-3, 7, -5, 1))$.

Zadanie 2.
Czy endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dany wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (-7x_1 + 2x_2 + 6x_3, -4x_1 + 2x_2 + 3x_3, -8x_1 + 2x_2 + 7x_3)$$

jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to podać przykłady bazy $\mathcal{A}$ złożonej z wektorów własnych endomorfizmu ϕ i znaleźć $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Rozwiązanie:
Weźmy bazę standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$w_\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -7-\lambda & 2 & 6 \\ -4 & 2-\lambda & 3 \\ -8 & 2 & 7-\lambda \end{bmatrix} = (-7-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda) - 48 - 48 + 48(2-\lambda) +$$

$$+6(7+\lambda) + 8(7-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda-1)^2$$

Zatem wartości własne tego endomorfizmu to 1 i 0.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \\ -4 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 4x_1 - 3x_3$$

$(x_1, 4x_1 - 3x_3, x_3) = x_1(1,4,0) + x_3(0,-3,1)$, zatem $V_{(1)} = \text{lin}((1,4,0),(0,-3,1))$.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{(0)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$\left(x_3, \frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{1}{2}x_3(2,1,2)$, zatem $V_{(0)} = \text{lin}((2,1,2))$.

$V = V_{(0)} + V_{(1)}$, ponieważ wektory $(2,1,2), (1,4,0), (0,-3,1)$ są liniowo niezależne. Niech więc $\mathcal{A} = \{(1,4,0),(0,-3,1),(2,1,2)\}$, wówczas $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.
Niech

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dla każdej z powyższych macierzy A_i, $i = 1,2,3$ zbadać, czy A_i jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$ oraz czy A_i jest ciagonalizowalna nad $\mathbb{C}$.

Jeśli A_i jest diagonalizowalna nad K (dla $K = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$), to znaleźć taką macierz odwracalną $C_i \in M_{3\times3}(K)$, że macierz $C_i^{-1}A_iC_i$ jest diagonalna.

Rozwiązanie:
Obliczmy wartości własne dla każdej macierzy.

Niech $A_1 = M(\phi_1)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, wówczas $w_{\phi_1}(\lambda) = -(\lambda-3)^2(\lambda-2)$, zatem wartości własne tej macierzy to 3 i 2 dla $K = \mathbb{R}$ oraz $K = \mathbb{C}$.

Niech $A_2 = M(\phi_2)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, wówczas $w_{\phi_2}(\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2+1)$, zatem wartości własne tej macierzy to 5 dla $K = \mathbb{R}$ oraz $5, i, -i$ dla $K = \mathbb{C}$.

Niech $A_3 = M(\phi_3)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. wówczas $w_{\phi_3}(\lambda) = -(x\lambda 3)^2(\lambda-2)$, zatem wartości własne tej macierzy to 3 i 2 dla $K = \mathbb{R}$ oraz $K = \mathbb{C}$.

Dla każdej macierzy obliczamy bazy odpowiadających im przestrzeni własnych w odpowiednim ciele. Następnie sprawdzimy, czy macierz jest diagonalizowalna.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{1(2)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = -5x_2 \end{cases}$$

$(2x_2, x_2, -5x_2) = x_2(2, 1, -5)$, zatem $V_{1(2)} = \text{lin}((2, 1, -5))$.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{1(3)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$(x_1, x_1, x_3) = x_1(1, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$, zatem $V_{1(3)} = \text{lin}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$.

$V_{1(2)} + V_{1(3)} = 3$, zatem macierz A_1 jest diagonalizowalna nad ciałem liczb rzeczywistych i zespolonych.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{2(5)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_3 = 0$$

$(0, x_2, 0) = x_2(0, 1, 0)$, zatem $V_{2(5)} = \text{lin}((0, 1, 0))$.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{2(i)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-i & 0 & 13 \\ 0 & 5-i & 0 \\ -2 & 0 & -5-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{(5+i)}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\left(-\frac{(5+i)}{2}x_3, 0, x_3\right) = -\frac{1}{2}x_3(5+i, 0, -2)$, zatem $V_{2(i)} = \text{lin}((5+i, 0, -2))$.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{2(-i)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5+i & 0 & 13 \\ 0 & 5+i & 0 \\ -2 & 0 & -5+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{(5-i)}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\left(-\frac{(5-i)}{2}x_3, 0, x_3\right) = -\frac{1}{2}x_3(5-i, 0, -2)$, zatem $V_{2(i)} = \text{lin}((5-i, 0, -2))$.

Macierz A_2 ma w ciele liczb rzeczywistych tylko jedną podprzestrzeń własną, której wymiar jest równy 1, zatem macierz A_2 nie jest diagonalizowalna w ciele liczb rzeczywistych. Mamy $V_{2(5)} + V_{2(i)} + V_{2(-i)} = 3$, zatem macierz A 2 jest diagonalizowalna w ciele liczb zespolonych.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{3(2)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$(x_1, -x_1, 0) = x_1(1, -1, 0)$, zatem $V_{3(2)} = \text{lin}((1, -1, 0))$.

$$(x_1, x_2, x_3) \in V_{3(3)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$(x_1, -2x_1, 0) = x_1(1, -2, 0)$, zatem $V_{3(3)} = \text{lin}((1, -2, 0))$. $V_{3(2)} + V_{3(3)} = 2$, zatem macierz A_3 nie jest diagonalizowalna ani nad ciałem liczb rzeczywisrych, ani nad ciałem liczb zespolonych.

Znajdźmy teraz taką macierz odwracalną C_i, że $C_i^{-1} A_i C_i$ jest diagonalna.

Niech $\mathcal{B}_1 = \{(2, 1, -5), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ oraz niech $B_1 = M(\phi_1)_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, wówczas macierz $C_1 = M(\phi_1)_{\mathcal{B}_1}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ spełnia warunek $B_1 = C_1^{-1} A_1 C_1$.

Niech $\mathcal{B}_2 = \{(0, 1, 0), (5+i, 0, -2), (5-i, 0, -2)\}$ oraz niech $B_2 = M(\phi_2)_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$, wówczas macierz $C_2 = M(\phi_2)_{\mathcal{B}_2}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 5+i & 5-i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ spełnia warunek $B_2 = C_2^{-1} A_2 C_2$.

Zadanie 4.
Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Dla jakich liczb całkowitych m spełniających warunek $|m| \leq 20$ macierz A jest diagonalizowalna nad

a) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{C}$

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy ogólnie, dla jakiego m macierz jest diagonalizowalna.

Niech $A = M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, wówczas $w_\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & m \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix} = (\lambda + \sqrt{3m})(\lambda - \sqrt{3m})$, zatem wartości własne ϕ to $\sqrt{3m}$ i $-\sqrt{3m}$.

$$(x_1, x_2) \in V_{(\sqrt{3m})} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{3m} & m \\ 3 & -\sqrt{3m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3m}}{3} x_2$$

$\left(\frac{\sqrt{3m}}{3}x_2, x_2\right) = \frac{1}{3}x_2(\sqrt{3m}, 3)$, zatem $V_{(\sqrt{3m})} = \text{lin}((\sqrt{3m}, 3))$.

$$(x_1, x_2) \in V_{(-\sqrt{3m})} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3m} & m \\ 3 & \sqrt{3m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3m}}{3}x_2$$

$\left(\frac{-\sqrt{3m}}{3}x_2, x_2\right) = \frac{1}{3}x_2(-\sqrt{3m}, 3)$, zatem $V_{(-\sqrt{3m})} = \text{lin}((-\sqrt{3m}, 3))$.

Aby A była diagonalizowalna, to wektory $(\sqrt{3m}, 3), (-\sqrt{3m}, 3)$ muszą być liniowo niezależne, czyli $m \neq 0$.

a) Nad ciałem liczb wymiernych

$$(\sqrt{3m}, 3) \in \mathbb{Q}^2 \Leftrightarrow \sqrt{3m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow m \in \{3, 12\}$$

b) Nad ciałem liczb rzeczywistych

$$(\sqrt{3m}, 3) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \sqrt{3m} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3m > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Leftrightarrow m \in \{1, 2, \ldots, 19, 20\}$$

c) Nad ciałem liczb zespolonych

$$(\sqrt{3m}, 3) \in \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow \sqrt{3m} \in \mathbb{C} \Leftrightarrow m \in \{-20, -19, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, 19, 20\}$$

Zadanie 5.
Niech $A_{n\times n}(K)$ będzie macierzą mającą dokładnie jedną wartość własną w K. Wykazać, że A jest diagonalizowalna nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest diagonalna.

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest diagonalizowalna nad ciałem K, wtedy i tylko wtedy, gdy

- wielomian charakterystyczny macierzy A ma n (niekoniecznie różnych) pierwiastków
- dla każdej wartości własnej macierzy A można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego

Niech wartość własna macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ to a. Zatem jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi = End(V)$ jest diagonalizowalna, to ma n pierwiastków równych a, czyli $w_A(\lambda) = (a-\lambda)^n$. Mogę zatem wybrać n liniowo niezależnych wektorów własnych. Niech $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ to te wektory własne. Wówczas $\phi(\alpha_i) = a \cdot \alpha_i$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, zatem mamy $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, czyli

$$\phi(\alpha) = \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_{)} = a_1 \cdot a \cdot \alpha_1 + \ldots + a_n \cdot a \cdot \alpha_n = a \cdot \alpha$$

Zatem $A = M(\phi)_{st}^{st} = a \cdot I$.

Jeśli macierz jest w postaci diagonalnej, to oczywiście jest diagonalizowalna, bo jest podobna do samej siebie. □

Zadanie 6.

Znaleźć postać Jordana macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie:
Obliczmy wielomian charakterystyczny dla danej macierzy. Z rozwinięcia Laplace'a dla trzeciej kolumny mamy

$$w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^4$$

Zatem wartość własna tej macierzy to 1. Dalej mamy

$$(A-I)^1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$r((A-I)^0) - r((A-I)^1) = 4 - 2 = 2$, zatem mamy dwie klatki rozmiaru co najmniej 1.

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$r((A-I)^1) - r((A-I)^2) = 2 - 1 = 1$, zatem jest jedna klatka rozmiaru co najmniej 2. Zatem

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7.
Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ następujące macierze $A_1, A_2 \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ są podobne?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 5 & -3 \\ r & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:
Obliczmy wielomian charakterystyczny dla każdej macierzy

$$w_{A_1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ r & 0 & 5-\lambda & -3 \\ r & 0 & 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

$$w_{A_2}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-2)^2$$

Dla macierzy A_2 znajdźmy jej postać Jordana.

$$(A_2 - 2I)^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r((A_2-2I)^0) - r((A_2-2I)^1) = 4-2 = 2$, zatem są dwie klatki rozmiaru co najmniej 1.

$$(A_2 - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r((A-2I)^1) - r((A-2I)^2) = 2-1 = 1$, zatem jest jedna klatka rozmiaru co najmniej 2. Zatem

$$A_{2J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dla macierzy A_1 znajdźmy jej postać Jordana.

$$(A_1 - 2I)^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 3 & -3 \\ r & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$r((A_1-2I)^0) - r((A_1-2I)^1) = 4-2 = 2$, zatem są dwie klatki rozmiaru co najmniej 1.

$$(A_1 - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -r & 0 & 0 \\ r & -r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r((A_1-2I)^1) - r((A_1-2I)^2) = \begin{cases} 2-1=1 & \text{dla } r \neq 0 \\ 2-0=2 & \text{dla } r = 0 \end{cases}$ Dla $r \neq 0$ mamy jedną klatkę rozmiaru co najmniej 2, natomiast dla $r = 0$ mamy dwie klatki rozmiaru co najmniej 2. Chcemy aby macierz A_1 była podobna do macierzy A_2, czyli aby jej postać Jordana była taka sama (z dokładnością do kolejności klatek). Zatem postać Jordana macierzy A_1 musi mieć jedną klatkę rozmiaru 3×3 i jedną klatkę rozmiaru 1×1. Tak będzie, gdy $r \neq 0$.

Zadanie 8.

Znaleźć bazy Jordana dla następujących endomorfizmów $\phi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

a) $\phi_1((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 - 5x_3, -x_1 + x_2 + 6x_3)$

b) $\phi_2((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 - x_2, 4x_1, 8x_1 - 4x_2 + 2x_3)$

Rozwiązanie:

a) Znajdźmy macierz przekształcenia w bazie standardowej

$$A_1 = M(\phi_1)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Wówczas jej wielomian charakterystyczny to

$$w_{\phi_1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ -1 & 1 & 6-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 3)^3$$

Znajdźmy postać Jordana dla danej macierzy

$$(A_1 - 3I)^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2^-5 & \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$r((A_1 - 3I)^0) - r((A_1 - 3I)^1) = 3 - 2 = 1$, zatem jest jedna klatka rozmiaru co najmniej 1. Zatem

$$A_{1J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Wyznaczmy teraz bazę Jordana. Wiemy, że $\alpha_3 \in \ker(\phi_1 - 3id)^3 \setminus \ker(\phi_1 - 3id)^2$. Wyznaczmy zatem $\ker(\phi_1 - 3id)^3$ oraz $\ker(\phi_1 - 3id)^2$.

Macierzą $\ker(\phi_1 - 3id)^3$ jest

$$B_3 = (A_1 - 3I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy takiego wektora v, że $B_3 \cdot v = 0$ (przy czym v traktujemy jako wektor kolumnowy o współczynnikach w bazie standardowej). Te równanie spełnia oczywiście każdy wektor, zatem $\ker(\phi_1 - 3id)^3 = \mathbb{R}^3$.

Macierzą $\ker(\phi_1 - 3id)^2$ jest

$$B_2 = (A_1 - 3id)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Szukamy takiego wektora w, że $B_2 \cdot w = 0$ (przy czym w traktujemy jako wektor kolumnowy o współrzędnych w bazie standardowej). Niech $w = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_3$$

zatem $\ker(\phi_1 - 3id)^2 = \text{lin}((1,0,1),(0,1,0))$.

Zatem wektor należący do $\ker(\phi_1 - 3id)^3 \setminus \ker(\phi_1 - 3id)^2$ to na przykład $\alpha_3 = (1,0,0)$. Dalej mamy

$$\alpha_2 = (\phi_1 - 3id)(\alpha_3) = (-1,1,-1)$$

$$\alpha_1 = (\phi_1 - 3id)(\alpha_2) = (-1,2,-1)$$

Zatem przykładowa baza Jordana to $\mathcal{J} = \{(-1,2,-1),(-1,1,-1),(1,0,0)\}$.

b) Znajdźmy macierz przekształcenia w bazie standardowej

$$A_2 = M(\phi_2)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Wówczas jej wielomian charakterystyczny to

$$w_{\phi_2}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 8 & -4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 2)^3$$

Znajdźmy postać Jordana dla danej macierzy

$$(A_2 - 2I)^1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$r((A_2 - 2I)^0) - r((A_2 - 2I)^1) = 3 - 1 = 2$, zatem są dwie klatki rozmiaru co najmniej 1. Zatem

$$A_{2J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczmy teraz bazę Jordana. Wiemy, że $\alpha_2 \in \ker(\phi_2 - 2id)^2 \setminus \ker(\phi_2 - 2id)^1$. Wyznaczmy zatem $\ker(\phi_2 - 2id)^2$ oraz $\ker(\phi_2 - 2id)^1$.

Macierzą $(\phi_2 - 2id)^2$ jest

$$B_2 = (A_2 - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy takiego wektora v, że $B_2 \cdot v = 0$ (przy czym v traktujemy jako wektor kolumnowy o współrzędnych w bazie standardowej). Te równanie spełnia oczywiście każdy wektor. Zatem $\ker(\phi_2 - 2id)^2 = \mathbb{R}^3$.

Macierzą $(\phi_2 - 2id)^1$ jest

$$B_1 = (A_2 - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy takiego w, że $B_2 \cdot w = 0$ (przy czym w traktujemy jako wektor kolumnowy o współrzędnych w bazie standardowej). Niech $w = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 = x_2$$

zatem $\ker(\phi_2 - 2id)^1 = \text{lin}((1,2,1),(0,0,1))$. Zauważmy, że $\ker(\phi_2 - 2id)^1 = V_{(2)}$, zatem wektor α_2 może być wybrany jako dowolny niezerowy wektor nie własny. Niech więc na przykład $\alpha_2 = (0,1,0)$. Wówczas mamy

$$\alpha_1 = (\phi_2 - 2id)(\alpha_2) = (-1,-1,-4)$$

Wektor α_3 możemy dobrać do wektora α_1 jako liniowo niezależny wektor własny przekształcenia. Niech więc na przykład $\alpha_3 = (0,0,1)$.

Zatem przykładowa baza Jordana to $\mathcal{J} = \{(-1,-2,-4),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Zadanie 9.
Dla macierzy $A_1, A_2 \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ obliczyć A_i^m dla $m \in \mathbb{N}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Zadanie 10.
Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- Istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że A^k jest macierzą zerową
- $w_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$

Rozwiązanie:
Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, wówczas $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Rozpatrzmy więc macierz A w ciele liczb zespolonych. Wiemy, że dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ istnieje macierz w postaci Jordana A_J. Macierz ta jest podobna do macierzy A, zatem istnieje taka macierz odwracalna $C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, że $A = C^{-1}A_JC$.

$\Rightarrow$ Skoro A jest podobne do A_J, to A^k jest podobne do A_J^k i macierz C realizuje podobieństwo między macierzami A i A_J. Skoro istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że A^k jest macierzą zerową, to jako że C nie jest macierzą zerową, to również A_J^k jest macierzą zerową. Skoro macierze A i A_J są podobne, to ich wyznacznik jest taki sam. Również ich wielomian charakterystyczny jest taki sam. Jeśli więc macierz A_J miałaby dowolną klatkę Jordana odpowiadającą niezerowej wartości własnej, to nie istnieje $k \in \mathbb{N}$, takie że A_J^k jest macierzą zerową. A zatem A_J ma na przekątnej same zera. Czyli jej wielomian charakterystyczny to $w_{A_J}(\lambda) = \det(A_J - \lambda I) = (-\lambda)^n = (-1)^n\lambda^n$. Zatem również $w_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$.

Twierdzenie: Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Następujące warunki są równoważne:

- macierze A, B są podobne
- istnieje $\phi \in End(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ oraz $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

Twierdzenie: (O triangularyzowalności) Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem K oraz niech $\phi \in End(V)$. Następujące warunki są równoważne:

- $w_\phi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe
- istnieje baza $\mathcal{A}$, w której macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna. Macierz ta ma na przekątnej wszystkie pierwiastki swojego wielomianu charakterystycznego.

$\Leftarrow$ Niech $A = M(\phi)_{st}^{st}$. Jeśli $w_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$, to istnieje baza $\mathcal{B}$, w której macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ jest górnotrójkątna. Macierz ta jest podobna do macierzy A. Macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ma na przekątnej wszystkie pierwiastki swojego wielomianu charakterystycznego i jako, że $w_A(\lambda) = w_B(\lambda)$, toteż $w_B(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$, czyli wartości własne macierzy $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ to 0. Czyli macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ jest macierzą górnotrójkątną i ma na przekątnej same zera. Istnieje więc takie $k \in \mathbb{N}$, że $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ jest zerowa. Skoro $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^k}$ jest podobna do A^k, to również A^k jest macierzą zerową.

Zadanie 11.
Niech $\langle\ ,\ \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. Wykazać, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ zachodzi

a) $|\langle\alpha, \beta\rangle| = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \Leftrightarrow$ wektory α, β są liniowo zależne

b) $||\alpha + \beta|| = ||\alpha|| + ||\beta|| \Leftrightarrow$ istnieje $t \geq 0$ takie, że $\alpha = t\beta$ lub $\beta = t\alpha$

Rozwiązanie:

a) Jeśli któryś z wektorów α, β jest zerowy, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że wektory nie są zerowe. Rozważmy funkcję zmiennej rzeczywistej t daną wzorem

$$f(t) = ||t\alpha + \beta||^2$$

Mamy więc

$$f(t) = t^2||\alpha||^2 + 2t\langle\alpha, \beta\rangle + ||\beta||^2$$

Funkcja $f(t)$ jest więc trójmianem kwadratowym przyjmującym wartości nieujemne, zatem wyróżnik tego wielomianu jest niedodatni. Mamy więc

$$4\langle\alpha, \beta\rangle - 4 \cdot ||\alpha||^2 \cdot ||\beta||^2 \leq 0 \Leftrightarrow \langle\alpha, \beta\rangle^2 \leq ||\alpha||^2 \cdot ||\beta||^2 \Leftrightarrow |\langle\alpha, \beta\rangle| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$$

Jeśli w powyższej nierówności zachodzi równość, to wyróżnik trójmianu $f(t)$ jest równy zero, zatem istnieje takie $t_0 \neq 0$, że $f(t_0) = 0$, czyli $t_0\alpha + \beta = 0$, czyli wektory α, β są liniowo zależne. Z drugiej strony, jeśli α, β są liniowo zależne, czyli $\alpha = a \cdot \beta$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, to mamy

$$\langle a \cdot \beta, \beta \rangle = a \cdot \langle \beta, \beta \rangle = \sqrt{a^2 \cdot \langle \beta, \beta \rangle} \cdot \sqrt{\langle \beta, \beta \rangle} = \sqrt{\langle a \cdot \beta, a \cdot \beta \rangle} \cdot \sqrt{\langle \beta, \beta \rangle} = ||\alpha|| \cdot ||\beta||$$

b) Mamy ciąg równoważnych równości

$$||\alpha + \beta|| = ||\alpha|| + ||\beta||$$

$$||\alpha + \beta||^2 = ||\alpha||^2 + 2 \cdot ||\alpha|| \cdot ||\beta|| + ||\beta||^2$$
$$||\alpha||^2 + 2 \cdot \langle \alpha, \beta \rangle + ||\beta||^2 = ||\alpha||^2 + 2 \cdot ||\alpha|| \cdot ||\beta|| + ||\beta||^2$$
$$\langle \alpha, \beta \rangle = ||\alpha|| \cdot ||\beta||$$

Wartość $\langle \alpha, \beta \rangle$ musi być nieujemna. Z podpunktu a) wiemy, że wektory α oraz β są liniowo zależne, czyli $\alpha = t\beta$. Jeśli $t < 0$, to mamy

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle t\beta, \beta \rangle = t\langle \beta, \beta \rangle < 0$$

Zatem musi zachodzić $t \geq 0$. W drugą stronę implikacja jest oczywista, bo dla $\alpha = t\beta$, gdzie $t \geq 0$ mamy

$$||t\beta + \beta|| = (t+1)||\beta|| = t||\beta|| + ||\beta|| = ||t\beta|| + ||\beta||$$

Zadanie 12.

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wzór $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i y_j$, gdzie $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 2 & t & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ zadaje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^4$?

Rozwiązanie:

Niech $\langle\ ,\ \rangle$ zadane w zadaniu to funkcja f. Aby funkcja f była iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^4$, to musi zachodzić warunek $\det A^{(i)} > 0$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Sprawdźmy więc dla jakiego $t \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest ta nierówność.

Policzmy wyznacznik macierzy $A^{(4)}$. Mamy

$$\det A^{(4)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 2 & t & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -5t^2 + 18$$

Zatem

$$\det A^{(4)} > - \Leftrightarrow -5t^2 + 18 > 0 \Leftrightarrow t \in \left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

Policzmy wyznacznik macierzy $A^{(3)}$. Mamy

$$\det A^{(3)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & t \\ 2 & t & 6 \end{bmatrix} = -2t^2 + 8$$

Zatem
$$\det A^{(3)} > 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 8 > 9 \Leftrightarrow t \in (-2, 2)$$
Wyznaczniki macierzy $A^{(2)}$ i $A^{(1)}$ są niezależne od wartości parametru t, zatem dla $t \in \left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ wzór $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i y_j$ zadaje iloczyn na $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 13.
Niech $W = \text{lin}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 0, 1, 0))$ i niech Z będzie podprzestrzenią opisaną układem równań
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$
Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni W oraz bazę ortonormalną przestrzeni Z

a) w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym

b) w $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym danym wzorem
$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_1 + 2x_4y_4$$

Rozwiązanie:

a) Znajdźmy najpierw bazę prostopadłą przestrzeni W. Niech $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (2, 0, 1, 0)$. Wektory te są liniowo niezależne. Znajdźmy układ równań opisujący podprzestrzeń W. Mamy równanie opisujące $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ oraz szukamy a_1, a_2, a_3, a_4. Muszą one spełniać układ równań
$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 2a_1 \\ a_3 = -2a_1 \\ a_4 = -a_1 \end{cases}$$
Rozwiązanie ogólne układu to na przykład $(a_1, 2a_1, -2a_1, -a_1) = a_1(1, 2, -2, -1)$, zatem układ opisujący W to
$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$
Bierzemy dowolny niezerowy wektor $\beta_1 \in W$ na przykład $\beta_1 = (1, 0, 0, 1)$. Szukamy takiego $\beta_2 \in W$, że $\beta_2 \perp \beta_1$. Jeśli $\beta_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, to daje nam to układ dwóch równań na β_2
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$
Zatem na przykład $\beta_2 = (0, 1, 1, 0)$. Szukamy takiego $\beta_3 \in W$, że $\beta_3 \perp \beta_2$ oraz $\beta_3 \perp \beta_1$. Jeśli $\beta_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, to daje to układ trzech równań na β_3
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Zatem na przykład $\beta_3 = (2, -1, 1, -2)$. Baza prostopadła przestrzeni W to

$$\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, -1, 1, -2)\}$$

Znajdźmy bazę ortonormalną przestrzeni Z. W tym celu znajdźmy najpierw bazę ortogonalną tej przestrzeni. Wyznaczmy najpierw bazę przestrzeni Z

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{5}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 \\ x_4 = -\frac{2}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 \end{cases}$$

Zatem baza Z to na przykład $\{(7, 0, -5, -2), (0, 7, -6, -1)\}$. Bierzemy dowolny niezerowy wektor $\gamma_1 \in Z$ na przykład $\gamma_1 = (7, 0, -5, -2)$. Szukamy takiego $\gamma_2 \in Z$, że $\gamma_2 \perp \gamma_1$. Jeśli $\gamma_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, to daje nam to układ dwóch równań na γ_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 7x_1 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Zatem na przykład $\gamma_2 = (16, -39, 22, 1)$. Baza prostopadła przestrzeni Z to

$$\{(7, 0, -5, -2), (16, -39, 22, 1)\}$$

Aby wyznaczyć bazę ortonormalną, podzielimy każdy wektor przez jego długość. Policzmy długość wektora γ_1. Mamy

$$||\gamma_1|| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{78}$$

Policzmy długość wektora γ_2. Mamy

$$||\gamma_2|| = \sqrt{16^2 + 39^2 + 22^1 + 1^2} = \sqrt{2262}$$

Zatem baza ortonormalna przestrzeni Z to

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{78}}(7, 0, -5, -2), \frac{1}{\sqrt{2262}}(16, -39, 22, 1) \right\}$$

Zadanie 14.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $W = \text{lin}((1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0))$. Znaleźć bazę przestrzeni W otrzymaną z bazy $(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)$ ortogonalizacją Grama-Schmidta.

Rozwiązanie:
Oznaczmy $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1, 0)$. Wówczas

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \cdot \beta_1 = (0, 1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle\alpha_3, \beta_2\rangle}{\langle\beta_2, \beta 2\rangle} \cdot \beta_2 - \frac{\langle\alpha_3, \beta_1\rangle}{\langle\beta_1, \beta_1\rangle} \cdot \beta_1 = (1,1,1,0) + \frac{1}{4}(-1,1,-1,1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(0,1,0,-1)$$

Zatem baza prostopadła przestrzeni W to $\{(1,1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,-1,1), \frac{1}{2}(0,1,0,-1)\}$.

Zadanie 15.
W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć wzór na przekształcenie

a) będące rzutem prostopadłym na $W = \text{lin}((1,-1,-1,1))$

b) będące symetrią prostopadłą względem W

Rozwiązanie:

a) Wyznaczmy najpierw bazę prostopadłą przestrzeni W. Jako, że podprzestrzeń W jest jednowymiarowa, to szukana baza to $(1,-1,-1,1)$. Zatem mamy

$$\phi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = \frac{\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(1,-1,-1,1)\rangle}{\langle(1,-1,-1,1),(1,-1,-1,1)\rangle} \cdot (1,-1,-1,1) =$$

$$= \frac{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{4}(1,-1,-1,1) =$$

$$= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2 + x_3 - x_4, -x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

b) Wyznaczmy najpierw bazę prostopadłą do przestrzeni $W^\perp$. Mamy

$$W^\perp = \{\alpha \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \perp \beta \text{ dla każdego } \beta \in W\}$$

$$W^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$
$$W^\perp = \text{lin}((1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1))$$

Wyznaczmy teraz bazę prostopadłą przestrzeni $W^\perp$. Bierzemy dowolny wektor $\beta_1 \in W^\perp$ na przykład $\beta_1 = (1,1,0,0)$. Szukamy takiego $\beta_2 \in W^\perp$, że $\beta_2 \perp \beta_1$. Jeśli $\beta_2 = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, to daje to układ równań na β_2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Zatem na przykład $\beta_2 = (0,0,1,1)$. Szukamy takiego $\beta_3 \in W^\perp$, że $\beta_3 \perp \beta_2$ oraz $\beta_3 \perp \beta_1$. Jeśli $\beta_3 = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ to daje nam to układ równań na β_3

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Zatem na przykład $\beta_3 = (1,-1,1,-1)$. Baza prostopadła przestrzeni $W^\perp$ to

$$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,-1,1,-1)\}$$

Mamy więc

$$\psi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = \frac{\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(1,-1,-1,1)\rangle}{\langle(1,-1,-1,1)\rangle}\cdot(1,-1,-1,1)-$$

$$-\frac{\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(1,1,0,0)\rangle}{\langle(1,1,0,0),(1,1,0,0)\rangle}\cdot(1,1,0,0)-\frac{\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(0,0,1,1)\rangle}{\langle(0,0,1,1),(0,0,1,1)\rangle}\cdot(0,0,1,1)-$$

$$-\frac{\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(1,-1,1,-1)\rangle}{\langle(1,-1,1,-1),(1,-1,1,-1)\rangle}\cdot(1,-1,1,-1)=$$

$$=\frac{x_1-x_2-x_3+x_4}{4}(1,-1,-1,1)-\frac{x_1+x_2}{2}(1,1,0,0)-$$

$$-\frac{x_3+x_4}{2}(0,0,1,1)-\frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{4}(1,-1,1,-1)=$$

$$=\frac{1}{2}(-x_1-x_2-x_3+x_4,-x_1-x_2+x_3-x_4,-x_1+x_2-x_3-x_4,x_1-x_2-x_3-x_4)$$

Zadanie 16.
Przekształcenie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ jest zadane wzorem $f((x_1,x_2))=(tx_1+tx_2,-tx_1+sx_2)$. Dla jakich $s,t\in\mathbb{R}$ przekształcenie f jest izometrią przestrzeni $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym?

Rozwiązanie:
Macierz tego przekształcenia to

$$A=\begin{bmatrix} t & t\\ -t & s\end{bmatrix}$$

Szukamy zatem takiego $s,t\in\mathbb{R}$, że $A^T\cdot A=I$. Mamy

$$A^T\cdot A=\begin{bmatrix} t & -t\\ t & s\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} t & t\\ -t & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t^2 & t^2-st\\ t^2-st & s^2+t^2\end{bmatrix}$$

Daje nam to układ równań

$$\begin{cases} 2t^2=1\\ t^2-st=0\\ s^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} s=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ t=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\vee\begin{cases} s=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ t=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Zatem przekształcenie f jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest ortogonalna, czyli gdy $s=t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ lub gdy $s=t=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 17.
Niech $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ będzie 2-wymiarową, zorientowaną, przestrzenią euklidesową. Załóżmy, że przekształcenie liniowe $f:V\to V$ w pewnej ortonormalnej, dodatnio zorientowanej bazie $\mathcal{B}$ przestrzeni V ma macierz $A_t=\begin{bmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}$ dla pewnego $t\in\mathbb{R}$. Wykazać, że wówczas f w KAŻDEJ ortonormalnej, dodatnio zorientowanej bazie przestrzeni $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ ma macierz A_t.

Rozwiązanie:
Wiemy, że przekształcenie liniowe $f:V\to V$ w pewnej otronolmalnej, dodatnio zorientowanej

bazie $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ przestrzeni V ma macierz $A_t = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. Weźmy więc dowolną ortonormalną dodatnio zorientowaną bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni V. Chcemy pokazać, że przekształcenie liniowe $f : V \to V$ ma w tej bazie macierz A_t. W tym celu pokażemy, że $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A_{t_x}$ dla pewnego kąta t_x. Mamy

$$M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x_{11}\beta_1 + x_{21}\beta_2 \\ \alpha_2 = x_{12}\beta_1 + x_{22}\beta_2 \end{cases}$$

Dalej mamy

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \langle x_{11}\beta_1 + x_{21}\beta_2, x_{11}\beta_1 + x_{21}\beta_2 \rangle = x_{11}\langle \beta_1, x_{11}\beta_1 + x_{21}\beta_2 \rangle + x_{21}\langle \beta_2, x_{11}\beta_1 + x_{21}\beta_2 \rangle =$$

$$= x_{11}^2\langle \beta_1, \beta_1 \rangle + x_{11}x_{21}\langle \beta_1, \beta_2 \rangle + x_{21}x_{11}\langle \beta_2, \beta_1 \rangle + x_{21}^2\langle \beta_2, \beta_2 \rangle$$

Jako, że $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 1$ oraz $\langle \beta_1, \beta_1 \rangle = 1$, $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = 0$, $\langle \beta_2, \beta_1 \rangle = 0$, $\langle \beta_2, \beta_2 \rangle = 1$, toteż mamy

$$x_{11}^2 + x_{21}^2 = 1$$

Mamy analogicznie

$$x_{22}^2 + x_{12}^2 = 1$$

oraz

$$x_{11} \cdot x_{12} + x_{21} \cdot x_{22} = 0$$

Iloczyn macierzy $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ oraz macierzy transponowanej do niej wynosi więc

$$(M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^T \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^2 + x_{21}^2 & x_{11} \cdot x_{12} + x_{21} \cdot x_{22} \\ x_{12} \cdot x_{11} + x_{22} \cdot x_{21} & x_{12}^2 + x22^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokazaliśmy więc, że macierz $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ jest ortogonalna. Zatem skoro bazy $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{C}$ są dodatnio zorientowane, toteż $\det(M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) > 0$, czyli jest to macierz obrotu, czyli $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A_{t_x}$. Dalej mamy

$$M(f)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = A_{t_x} \cdot A_t \cdot A_{t_x}^{-1} = A_t \cdot I = A_t$$

Pokazaliśmy więc, że f w każdej ortonormalnej, dodatnio zorientowanej bazie przestrzeni $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ma macierz A_t.

Zadanie 18.
W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Przestawić f jako złożenie co najwyżej trzech symetrii prostopadłych względem podprzestrzeni wymiaru 2.

Zadanie 19.
Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_3, 0, rx_1)$ jest przekształceniem samosprzężonym przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

Rozwiązanie:
f jest przekształceniem samosprzężonym, gdy dla każdych $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ zachodzi

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_3, 0, ry_1) \rangle = \langle (x_3, 0, tx_1), (y_1, y_2, y_3) \rangle$$

czyli

$$x_1y_3 + 2x_3rt_1 + rx_1y_1 + x_3y_3 = x_3y_1 + 2rx_1y_3 + x_3y_3 + rx_1y_1$$

$$x_1y_3 + 2x_3ry_1 = x_3y_1 + 2ry_3x_1$$

Aby równość ta zachodziła, dla każdych x_i, y_i, to musi zajść

$$\begin{cases} x_1y_3(1-2r) = 0 \\ x_3y_1(2r-1) = 0 \end{cases}$$

Skąd otrzymujemy $r = \frac{1}{2}$.

Zadanie 20.
Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest zadane wzorem $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_4, x_3, x_2, x_1)$. Dla $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym, znaleźć bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych przekształcenia f.

Rozwiązanie:
Macierz tego przekształcenia w bazie standardowej to

$$A = M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

czyli

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

Dalej mamy

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4_{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Zatem $\mathbb{R}^4_{(1)} = \mathrm{lin}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4_{(-1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Zatem $\mathbb{R}^4_{(-1)} = \text{lin}((1,0,0,-1),(0,1,-1,0))$. Mamy

$$||(1,0,0,1)|| = ||(1,0,0,-1)|| = ||(0,1,1,0)|| = ||(0,1,-1,0)|| = \sqrt{2}$$

Zatem baza ortonormalna złożona z wektorów własnych to

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{(1,0,0,1),(1,0,0,-1),(0,1,1,0),(0,1,-1,0)\}$$

Zadanie 21.
Forma dwuliniowa h na przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest zadana warunkiem

$$G(h,\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \mathcal{A} = \{(1,1,1,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(0,0,0,1)\}$$

a) Znaleźć $G(h, st)$

b) Dla $W_t = \text{lin}((1,1,0,2),(1,0,0,t))$ znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $W_t^{\perp}$, w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

a) Mamy $G(h, st) = C^T \cdot A \cdot C$, gdzie

$$C = M(id)^{\mathcal{A}}_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ czyli } C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zatem mamy

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Mając $G(h, st)$ łatwo wyznaczyć formę h, mamy

$$h((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Dalej mamy

$$h((x_1,x_2,x_3,x_4),(1,1,0,2)) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$h((x_1,x_2,x_3,x_4),(1,0,0,t)) = x_1 + x_2 + tx_4$$

Zatem przestrzeń $W_t^{\perp}$ opisana jest układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + tx_4 = 0 \end{cases}$$

Dla $t \neq 1$ mamy
$$(-x_2, x_2, x_3, 0) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0)$$
Zatem $W_t^{\perp} = \text{lin}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$. Dla $t = 1$ mamy
$$(-x_2 - x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)$$
Zatem $W_1^{\perp} = \text{lin}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$.

Zadanie 22.
W przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$, gdzie
$$h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1$$
podprzestrzeń Z_s opisana jest układem równań
$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ sx_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$
Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{R}^4 = Z_s \oplus Z_s^{\perp}$?

Rozwiązanie:

Twierdzenie: Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

1. $V = W \oplus W^{\perp}$
2. W jest nieosobliwa

Musimy zbadać więc dla jakiego s podprzestrzeń Z_s jest nieosobliwa.

Definicja: Mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa, jeśli dla pewnej (równoważnie każdej) bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V macierz $G(h, \mathcal{A})$ jest odwracalna.

Wyznaczmy bazę podprzestrzeni Z_s w zależności od s. Mamy
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 0, -x_1s) = x_1(1, 0, 0, -s) + x_2(0, 1, 0, 0)$$
Zatem $Z_s = \text{lin}((1, 0, 0, -s), (0, 1, 0, 0))$. Niech $v_1 = (1, 0, 0, s)$ oraz $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, wówczas
$$h(v_1, v_1) = -2s$$
$$h(v_1, v_2) = 0$$
$$h(v_2, v_1) = 0$$
$$h(v_2, v_2) = 0$$

Zatem dla $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ mamy

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} -2s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nie istnieje więc takie $s \in \mathbb{R}$, że macierz ta jest odwracalna, zatem nie istnieje taki $s \in \mathbb{R}$, że podprzestrzeń Z_s jest osobliwa, zatem nie istnieje takie $s \in \mathbb{R}$, że $\mathbb{R}^4 = Z_s \oplus Z_s^\perp$.

Zadanie 23.
Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$, gdzie h jest dana wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_2 + x_1y_4 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_1 + x_4y_3$$

Obliczyć rząd i sygnatueœ formy h.

Rozwiązanie:

Definicja: W przestrzeni dwuliniowej (V, h) wektor v jest izotropowy, jeśli $h(v, v) = 0$.

Bierzemy nieizotropowy wektor. Niech $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$h((x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4)) \neq 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \neq 0$$

Zatem nieizotropowy wektor to na przykład $v_1 = (1, 1, 1, 1)$. Wyznaczmy teraz $\text{lin}(v_1)^\perp$.

$$h((1, 1, 1, 1), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Zatem $\text{lin}(v_1)^\perp = \text{lin}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$. Wybieramy nieizotropowy wektor z $\text{lin}(v_1)^\perp$. Takie jest na przykład $v_2 = (0, 0, 1, -1)$. Wyznaczmy teraz $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp$.

$$h((1, 1, 1, 1), (x_2, x_2, x_3, x_4)) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$h((0, 0, 1, -1), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0 \Leftrightarrow -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Zatem $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp = \text{lin}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$. W $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp$ nie ma nieizotropowych wekotrów, zatem wybieramy dowolny $v_2 = (1, 0, -1, 0)$ oraz $v_4 = (1, 0, -1, 0)$. Zatem przykładowa baza prostopadła przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ to

$$\mathcal{A} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, -1), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$$

Definicja: Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Rzędem przestrzeni (V, h) nazywamy rząd macierzy $G(h, \mathcal{A})$ dla dowolnej bazy.

Dla przestrzeni $(\mathbb{R}^4, h)$ oraz bazy $\mathcal{A}$ macierz $G(h, \mathcal{A})$ ma zera poza przekątną. Wystarczy więc obliczyć wyrazy na przekątnej. Mamy

$$h((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)) = 8$$

$$h((0, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1)) = 2$$

$$h((1, 0, -1, 0), (1, 0, -1, 0)) = 0$$

$$h((0,1,0,-1),(0,1,0,-1)) = 0$$

Zatem

$$G(h,\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja: Niech (V,h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Sygnaturą przestrzeni (V,h) nazywamy liczbę $r_+(A) - r_-(A)$, gdzie dla pewnej prostopadłej bazy $\mathcal{A}$ $r_+(A)$ oznacza liczbę dodatnich elementów na przekątnej, natomiast $r_-(A)$ oznacza liczbę ujemnych elementów na przekątnej.

Rząd formy h to $r(h) = 2$, natomiast sygnatura wynosi $s(h) = 0$.

Zadanie 24.

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & r & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Dla jakich $r \in \mathbb{C}$ macierze A, B są kongruentne nad $\mathbb{C}$?

b) Dla jakich $r \in \mathbb{C}$ macierze A, B są kongruentne nad $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie:

a)

Zadanie 26.

W $\mathbb{R}^5$ rozpatrzmy przestrzeń afiniczną H opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -4 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 14 \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę punktową przestrzeni H.

b) Znaleźć układ bazowy przestrzeni H i parametryzację przestrzeni H.

c) Znaleźć współrzędne barycentryczne punktu $(1,-2,1,2,1)$ w otrzymanej w a) bazie punktowej.

d) Znaleźć współrzędne punktu $(1,-2,1,2,1)$ w otrzymanym w b) układzie bazowym.

Rozwiązanie:

a) Znajdźmy najpierw układ bazowy przestrzeni H.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -4 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5x_3 + 11x_4 + 10x_5 - 26 \\ x_2 = 2x_3 - 7x_4 - 6x_5 + 16 \end{cases}$$

Zatem

$$T(H) = \text{lin}((-5, 2, 1, 0, 0), (11, -7, 0, 1, 0), (10, -6, 0, 0, 1))$$

czyli również

$$H = (-26, 16, 0, 0, 0) + \text{lin}((-5, 2, 1, 0, 0), (11, -7, 0, 1, 0), (10, -6, 0, 0, 1))$$

Układ bazowy to $(-26, 16, 0, 0, 0); (-5, 2, 1, 0, 0), (11, -7, 0, 1, 0), (10, -6, 0, 0, 1)$, zatem baza punktowa to $(-26, 16, 0, 0, 0), (-31, 18, 1, 0, 0), (-15, 9, 0, 1, 0), (-16, 10, 0, 0, 1)$.

b) Skoro układ bazowy H to $(-26, 16, 0, 0, 0); (-5, 2, 1, 0, 0), (11, -7, 0, 1, 0), (10, -6, 0, 0, 1)$, to parametryzacja przestrzeni H to

$$u(t_1, t_2, t_3) = (-26, 16, 0, 0, 0) + t_1(-5, 2, 1, 0, 0) + t_2(11, -7, 0, 1, 0) + t_3(10, -6, 0, 0, 1) =$$

$$= (-26 - 5t_1 + 11t_2 + 10t_3, 16 + 2t_1 - 7t_2 - 6t_3, t_1, t_2, t_3)$$

c) Mamy $(1, -2, 1, 2, 1) = -3 \cdot (-26, 16, 0, 0, 0) + 1 \cdot (-31, 18, 1, 0, 0) + 2 \cdot (-15, 9, 0, 1, 0) + 1 \cdot (-16, 10, 0, 0, 1)$, zatem współrzędne barycentryczne punktu $(1, -2, 1, 2, 1)$ w bazie punktowej to $-3, 1, 2, 1$.

d) Mamy $(1, -2, 1, 2, 1) = 1 \cdot (-26, 16, 0, 0, 0) + 1 \cdot (-5, 2, 1, 0, 0) + 2 \cdot (11, -7, 0, 1, 0) + 1 \cdot (10, -6, 0, 0, 1)$, zatem współrzędne punktu $(1, -2, 1, 2, 1)$ w układzie bazowym to $1, 1, 2, 1$.

Zadanie 27.
Czy istnieje prosta w $\mathbb{R}^4$ przechodząca przez punkt $p = (2, -1, 2, 0)$ i przecinająca zarówno prostą $L = (1, 0, 2, 0) + \text{lin}((1, 0, -1, 0))$ jak i płaszczyznę $H = (7, 0, 0, 0) + W$, gdzie $W = \text{lin}((1, 0, -1, 0), (5, -1, 0, -1))$. Jeśli tak, to podać parametryzację takiej prostej.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy płaszczyznę H', w której leżą punkt p oraz prosta L. Niech $p_1 = (1, 0, 2, 1)$ oraz $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, wówczas $v = \overrightarrow{pp_1} = (1, 0, 2, 0) - (2, -1, 2, 0) = (-1, 1, 0, 0)$, zatem

$$H' = p_1 + \text{lin}(v_1, v) = (1, 0, 2, 0) + \text{lin}((1, 0, -1, 0), (-1, 1, 0, 0))$$

Układ opisujący $T(H')$ to

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Zatem H' opisana jest układem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Dalej mamy $\mathrm{lin}((1,0,-1,0),(5,-1,0,-1)) = \mathrm{lin}((1,0,-1,0),(0,-1,5,-1))$, zatem układ opisujący $T(H)$ to

$$\begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Zatem H jest opisane układem

$$\begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Szukana prosta leży w obu płaszczyznach, zatem musi spełniać układ opisujący H' oraz H

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Układ ten jest sprzeczny, zatem taka prosta nie istnieje.

Zadanie 28.
Dane są dwie przestrzenie afiniczne $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^4$ opisane układami równań:

$$H_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \qquad H_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 + sx_4 = t \end{cases}$$

Dla jakich wartości $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$? Dla każdej takiej pary s, t obliczyć $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Rozwiązanie:

$$H_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 3x_4 + 5 \\ x_2 = x_4 - 2 \end{cases}$$

Zatem

$$H_1 = (5,-2,0,0) + \mathrm{lin}((-1,0,1,0),(-3,1,0,1))$$

Dalej mamy

$$H_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 + sx_4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + \frac{s-16}{3}x_4 + \frac{24-t}{3} \\ x_2 = \frac{10-s}{3}x_4 = \frac{t-15}{3} \end{cases}$$

Zatem

$$H_2 = \left(\frac{24-t}{3}, \frac{t-15}{3}, 0, 0\right) + \mathrm{lin}\left((1,0,-1,0), \left(\frac{s-16}{3}, \frac{10-s}{3}, 0, 1\right)\right)$$

Żeby $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ to układ powstały przez połączenie układów opisujących H_1 oraz H_2 ma być niesprzeczny.

$$H_1 \cap H_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 + sx_4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_2 - x_4 = -2 \\ (s-7)x_4 = t-9 \end{cases}$$

Układ ten będzie sprzeczny gdy $s = 7$ oraz $t \neq 9$, układ nie będzie sprzeczny dla $s = 7$ i $t = 9$ lub dla $s \neq 7$ i t dowolnego.
Dla $s = 7$ i $t = 9$ mamy $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$, natomiast dla $s \neq 7$ i t dowolnego $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$.
Ponadto dla $s = 7$ i $t = 9$ mamy

$$H_1 = H_2 = H_1 \cap H_2 = (5, -2, 0, 0) + \operatorname{lin}\left((1, 0, -1, 0), (-3, 1, 0, 1)\right)$$

Zadanie 29.
W $\mathbb{R}^4$ dana jest hiperpłaszczyzna $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1\}$ oraz prosta $W = \operatorname{lin}((1, 1, 0, 1))$.

a) Niech $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na H wzdłuż W. Znaleźć wzór na f.

b) Niech $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem H wzdłuż W. Obliczyć $g((1, 1, 1, 4))$.

Rozwiązanie:

a)
$$H = (1, 0, 0, 0) + \operatorname{lin}((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (2, 0, 0, -1))$$

czyli
$$T(H) = \operatorname{lin}((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (2, 0, -1, 0))$$

Jeśli $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest rzutem na H wzdłuż W, to $f' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest rzutem $T(H)$ wzdłuż $T(W)$.
$$T(W) = \operatorname{lin}((1, 1, 0, 1))$$

Mamy $T(H) \oplus T(W) = \mathbb{R}^4$, zatem skoro f' jest rzutem $T(H)$ wzdłuż $T(W)$, to mamy

$$f'((1, 1, 0, 1)) = (0, 0, 0, 0)$$
$$f'((1, 1, 0, 0)) = (1, 1, 0, 0)$$
$$f'((1, 0, -1, 0)) = (1, 0, -1, 0)$$
$$f'((2, 0, 0, -1)) = (2, 0, 0, -1)$$

Zatem

$$f'((1, 0, 0, 0)) = \frac{1}{2}(f'((2, 0, 0, -1)) + f'((1, 1, 0, 1)) - f'((1, 1, 0, 0))) = \frac{1}{2}(1, -1, 0, -1)$$
$$f'((0, 1, 0, 0)) = f'((1, 1, 0, 0) - f'((1, 0, 0, 0)) = \frac{1}{2}(1, 3, 0, 1)$$
$$f'((0, 0, 1, 0)) = f'((1, 0, 0, 0)) - f'((1, 0, -1, 0)) = \frac{1}{2}(-1, -1, 2, -1)$$
$$f'((0, 0, 0, 1)) = 2f'((1, 0, 0, 0) - f'((2, 0, 0, -1)) = (-1, -1, 0, 0)$$

Mamy więc

$$f'((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1 f'((1, 0, 0, 0)) + x_2 f'((0, 1, 0, 0)) + x_3 f'((0, 0, 1, 0)) + x_4 f'((0, 0, 0, 1))$$

$$f'((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4, -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4, 2x_3, -x_1 + x_2 - x_3)$$

Przekształcenie f będące rzutem na H wzdłuż W będzie dane wzorem

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3-2x_4+b_1, -x_1+3x_2-x_3-2x_4+b_2, 2x_3+b_3, -x_1+x_2-x_3+b_4)$$

Wiemy, że dla $p \in H$ zachodzi $f(p) = p$, zatem biorąc $p = (1, 0, 0, 0)$ mamy $f((1, 0, 0, 0)) = \frac{1}{2}(1+b_1, -1+b_2, b_3, -1+b_4)$, skąd po przyrównaniu do $f((1, 0, 0, 0)) = (1, 0, 0, 0)$, otrzymujemy $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0, b_4 = 1$, czyli ostatenicze wzór na przekształcenie f to

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 1, -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 1, 2x_3, -x_1 + x_2 - x_3 + 1)$$

b)

$$H = (1, 0, 0, 0) + \mathrm{lin}((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (2, 0, 0, -1))$$

czyli

$$T(H) = \mathrm{lin}((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (2, 0, -1, 0))$$

Jeśli $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest symetrią względem H wzdłuż W, to $f' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest symetrią względem $T(H)$ wzdłuż prostej $T(W)$.

$$T(W) = \mathrm{lin}((1, 1, 0, 1))$$

Mamy $T(H) \oplus T(W) = \mathbb{R}^4$, zatem skoro g' jest symetrią względem $T(H)$ wzdłuż $T(W)$, to mamy

$$g'((1, 1, 0, 1)) = -(1, 1, 0, 1)$$
$$g'((1, 1, 0, 0)) = (1, 1, 0, 0)$$
$$g'((1, 0, -1, 0)) = (1, 0, -1, 0)$$
$$g'((2, 0, 0, -1)) = (2, 0, 0, -1)$$

Zatem

$$g'((1, 0, 0, 0)) = \frac{1}{2}(g'((2, 0, 0, -1)) + g'((1, 1, 0, 1)) - g'((1, 1, 0, 0))) = (0, -1, 0, -1)$$
$$g'((0, 1, 0, 0)) = g'((1, 1, 0, 0) - g'((1, 0, 0, 0)) = (1, 2, 0, 1)$$
$$g'((0, 0, 1, 0)) = g'((1, 0, 0, 0)) - g'((1, 0, -1, 0)) = (-1, -1, 1, -1)$$
$$g'((0, 0, 0, 1)) = 2g'((1, 0, 0, 0) - g'((2, 0, 0, -1)) = (-2, -2, 0, -1)$$

Mamy więc

$$g'((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1 g'((1, 0, 0, 0)) + x_2 g'((0, 1, 0, 0)) + x_3 g'((0, 0, 1, 0)) + x_4 g'((0, 0, 0, 1))$$

$$g'((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_2 - x_3 - 2x_4, -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4, x_3, -x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

Przekształcenie g będące symetrią względem H wzdłuż W będzie dane wzorem

$g'((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (x_2-x_3-2x_4+b_1, -x_1+2x_2-x_3-2x_4+b_2, x_3+b_3, -x_1+x_2-x_3-x_4+b_4)$

Wiemy, że dla $p \in H$ zachodzi $g(p) = p$, zatem biorąc $p = (1,0,0,0)$ mamy $g((1,0,0,0)) = (b_1, -1+b_2, b_3, -1+b_4)$, skąd po przyrównaniu do $g((1,0,0,0)) = (1,0,0,0)$, otrzymujemy $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0, b_4 = 1$, czyli ostatecznie wzór na przekształcenie g to

$g'((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (x_2-x_3-2x_4+1, -x_1+2x_2-x_3-2x_4+1, x_3, -x_1+x_2-x_3-x_4+1)$

Mamy więc

$$g((1,1,1,4)) = (-7,-7,1,-4)$$

Zadanie 30.
Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o środku $(1,0,1)$ i skali 5 oraz niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na prostą $L = (3,2,1) + \mathrm{lin}((1,2,1))$ wzdłuż płaszczyzny $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$. Wyznacz przekształcenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$ przez podanie ich wartości na wybranych bazach punktowych przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$. Czy $f \circ g = g \circ f$?

Rozwiązanie:
Wyznaczmy najpierw wzór na przekształcenie f. Skoro f jest jednokładnością o środku w punkcie $(1,0,1)$ i skali 5, to

$$f((x_1,x_2,x_3)) = f((1,0,1) + (x_1-1, x_2, x_3-1)) = (1,0,1) + (5x_1-5, 5x_2, 5x_3-5)$$

Zatem

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (5x_1-4, 5x_2, 5x_3-4)$$

Wyznaczmy wzór na przekształcenie g.

$$L = (3,2,1) + \mathrm{lin}((1,2,1))$$

czyli

$$T(L) = \mathrm{lin}((1,2,1))$$

Jeśli $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem na L wzdłuż W, to $g' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem $T(L)$ wzdłuż $T(W)$.

$$T(W) = \mathrm{lin}((2,1,0),(1,0,1))$$

Mamy $T(L) \oplus T(W) = \mathbb{R}^3$, zatem skoro g' jest rzutem $T(L)$ wzdłuż $T(W)$, to mamy

$$g'((2,1,0))) = (0,0,0)$$
$$g'((1,0,1)) = (0,0,0)$$
$$g'((1,2,1)) = (1,2,1)$$

Zatem

$$g'((1,0,0)) = \frac{1}{4}(2g'((2,1,0)) - g'((1,2,1)) + g'((1,0,1))) = \frac{1}{4}(-1,-2,-1)$$
$$g'((0,1,0)) = \frac{1}{2}(g'((1,2,1)) - g'((1,0,1))) = \frac{1}{2}(1,2,1)$$

$$g'((0,0,1)) = g'((1,0,1)) - g'((1,0,0)) = \frac{1}{4}(1,2,1)$$

Mamy więc

$$g'((x_1,x_2,x_3)) = x_1 g'((1,0,0)) + x_2 g'((0,1,0)) + x_3 g'((0,0,1))$$
$$g'((x_1,x_2,x_3)) = \frac{1}{4}(-x_1+2x_2+x_3, -2x_1+4x_2+2x_3, -x_1+2x_2+x_3)$$

Przekształcenie g będące rzutem na L wzdłuż W będzie dane wzorem

$$g((x_1,x_2,x_3)) = \frac{1}{4}(-x_1+2x_2+x_3+b_1, -2x_1+4x_2+2x_3+b_2, -x_1+2x_2+x_3+b_3)$$

Wiemy, że dla $p \in L$ zachodzi $g(p) = p$, zatem biorąc $p = (3,2,1)$ mamy $g((3,2,1)) = \frac{1}{4}(2+b_1, 4+b_2, 2+b_3)$, skąd po przyrównaniu do $f((3,2,1)) = (3,2,1)$, otrzymujemy $b_1 = 10, b_2 = 4, b_3 = 2$, czyli ostatecznie wzór na przekształcenie g to

$$g((x_1,x_2,x_3)) = \frac{1}{4}(-x_1+2x_2+x_3+10, -2x_1+4x_2+2x_3+4, -x_1+2x_2+x_3+2)$$

Mamy więc przekształcenia

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (5x_1-4, 5x_2, 5x_3-4)$$

$$g((x_1,x_2,x_3)) = \frac{1}{4}(-x_1+2x_2+x_3+10, -2x_1+4x_2+2x_3+4, -x_1+2x_2+x_3+2)$$

i pytamy się o wartość przekształcenia $f \circ g$ oraz przekształcenia $g \circ f$ na bazie punktowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$. Weźmy więc bazę punktową $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Wówczas mamy

$$f(g((0,0,0))) = f\left(\frac{1}{4}(10,4,2)\right) = \frac{1}{4}(34,20,-6)$$
$$f(g((1,0,0))) = f\left(\frac{1}{4}(9,2,1)\right) = \frac{1}{4}(29,10,-11)$$
$$f(g((0,1,0))) = f((3,2,1)) = (11,10,1)$$
$$f(g((0,0,1))) = f\left(\frac{1}{4}(11,6,3)\right) = \frac{1}{4}(39,30,-1)$$

$$g(f((0,0,0))) = g((-4,0,-4)) = \frac{1}{4}(10,4,2)$$
$$g(f((1,0,0))) = g((1,0,-4)) = \frac{1}{4}(5,-6,-3)$$
$$g(f((0,1,0)) = g((-4,5,-4)) = (5,6,3)$$
$$g(f((0,0,1)) = g((-4,0,1)) = \frac{1}{4}(15,14,7)$$

Zatem oczywiście $f \circ g \neq g \circ f$.

Zadanie 31.

Hiperpowierzchnia $X \subset \mathbb{R}^3$ jest w standardowym układzie bazowym $(0,0,0); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

opisana równaniem $x_1^2+5x_2^2+10x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3+4x_2+6x_3+8=0$. Znaleźć równanie opisujące X w układzie bazowym $(1,2,3);(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że hiperpowierzchnia w standardowym układzie bazowym opisana jest równaniem

$$x_1^2+5x_2^2+10x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3+4x_2+6x_3+8=0$$

Szukamy równania na X w układzie bazowym $(1,2,3);(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)$. Zatem dla tego układu mamy

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,2,3)+y_1(1,1,0)+y_2(0,1,1)+y_3(1,0,0)$$

i hiperpowierzchnia jest opisana równaniem

$$(y_1+y_3+1)^2+5(y_1+y_2+2)^2+10(y_2+3)^2+4(y_1+y_3+1)(y_1+y_2+2)+$$

$$+6(y_1+y_3+1)(y_2+3)+12(y_1+y_2+2)(y_2+3)+4(y_1+y_2+2)+6(y_2+3)+8=0$$

czyli

$$10y_1^2+32y_2y_1+6y_3y_1+92y_1+27y_2^2+y_3^2+160y_2+10y_2y_3+28y_3+243=0$$

Zadanie 32.
Określić typ afiniczny krzywej $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2-8x_2^2-2x_1x_2-10x_2-2=0\}$. Wykonać schematyczny rysunek.

Rozwiązanie:
Równanie $3x_1^2-8x_2^2-2x_1x_2$ to forma kwadratowa $q((x_1,x_2))=3x_1^2-8x_2^2-2x_1x_2$. Odpowiadająca jej forma dwuliniowa $h((x_1,x_2),(y_1,y_2))=3x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1-8x_2y_2$ ma w bazie standardowej macierz $G(h,st)=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & -8\end{bmatrix}$. Przyładowa baza prostopadła dla formy h to $\mathcal{B}=\{(1,0),(1,3)\}$. Forma ma w tej bazie macierz $G(h,\mathcal{B})=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -75\end{bmatrix}$. Dla macierzy $C=M(id)^{st}_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ mamy $G(h,\mathcal{B})=C^T\cdot G(h,st)\cdot C$. Mamy

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=C\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1+y_2\\ 3y_2\end{bmatrix}$$

Zatem krzywa w standardowym układzie bazowym opisana jest równaniem

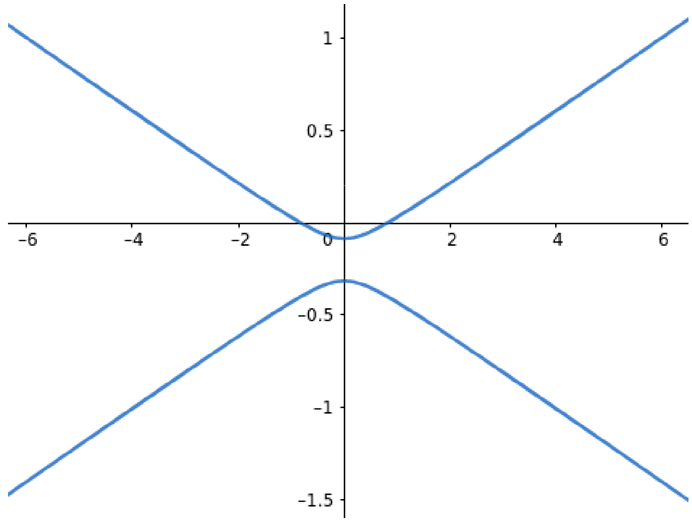
$$3\cdot(y_1+y_2)^2-8\cdot(3y_2)^2-2\cdot(y_1+y_2)(3y_2)-10\cdot(3y_2)-2=0$$

czyli

$$3y_1^2-75y_2^2-30y_2-2=0$$

$$3y_1^2-75\left(y_2+\frac{1}{5}\right)^2+1=0$$

Krzywą tą nazywamy hiperbolą.



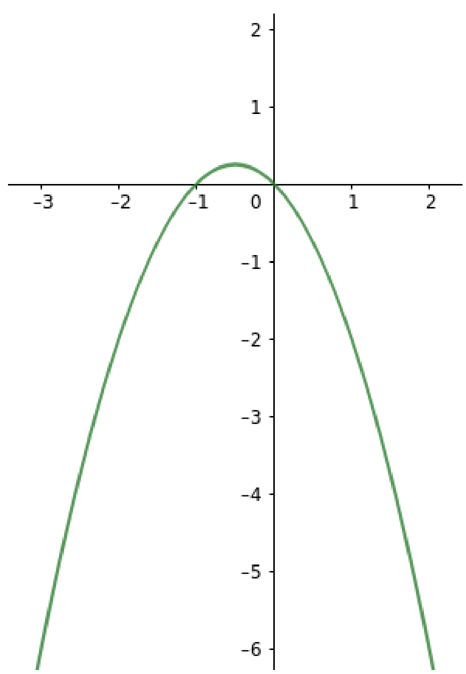
Zadanie 33.
Określić typ afiniczny krzywej, która powstaje z przecięcia hiperpowierzchni $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + x_3 = 0\}$ płaszczyzną $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Wykonać schematyczny rysunek.

Rozwiązanie:
Z równania $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ mamy $x_3 = -x_1 - x_2$. Wstawiając to do równania $2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + x_3 = 0$ otrzymujemy

$$2x_1^2 - 3x_2^2 + 2 \cdot (-x_1 - x_2)^2 + 4x_1 \cdot (-x_1 - x_2) + (-x_1 - x_2) = 0$$

$$x_2^2 + x_1 + x_2 = 0$$

Krzywą tą nazywamy parabolą.



Zadanie 34.
Określić typ afiniczny hiperpowierzchni $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 2 = 0\}$. Wykonać schematyczny rysunek.

Rozwiązanie:
Formie kwadratowej $q((x_1, x_2, x_3)) = -5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$ odpowiada forma dwuliniowa $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$. Forma ta ba w bazie standardowej macierz $G(h, st) = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Przyładowa baza prostopadła dla formy h to $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (2, 5, 5)\}$. Forma ma w tej bazie macierz $G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 47 \end{bmatrix}$. Dla macierzy $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ mamy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 2y_3 \\ 5y_3 \\ y_2 + 5y_3 \end{bmatrix}$$

Zatem

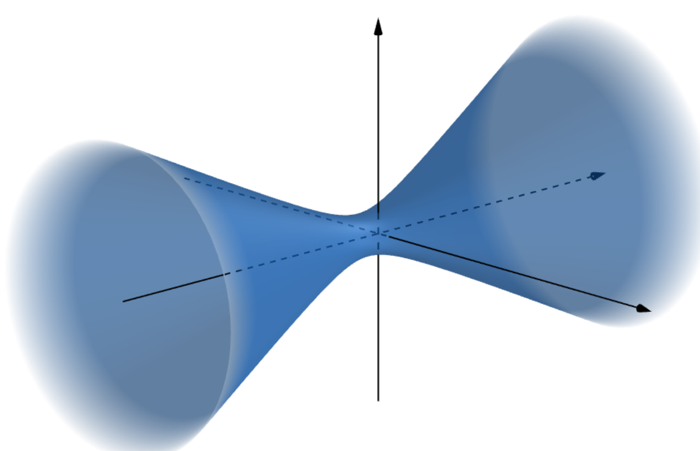
$$-5 \cdot (y_1 + 2y_3)^2 + 2 \cdot (5y_3)^2 + (y_2 + 5y_3)^2 + 4(y_1 + 2y_3)(5y_3) - 2 \cdot (5y_3)(y_2 + 5y_3) - 2 \cdot (y_1 + 2y_3) + 2 \cdot (5y_3) - 2 = 0$$

$$-5y_1^2 - 2y_1 + y_2^2 + 45y_3^2 + 6y_3 - 2 = 0$$

$$-5\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + y_2^2 + 45\left(y_3 + \frac{1}{15}\right)^2 - 2 = 0 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{5}{2}\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{45}{2}\left(y_3 + \frac{1}{15}\right)^2 + 1 = 0$$

Krzywą tą nazywamy hiperbolą jednopowłokową.



Zadanie 35.
Dla jakich wartości parametrów $r, s \in R$ hiperpowierzchnie $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2 + 9 = 0\}$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3,) \in \mathbb{R}^3 \mid (2r-4)x_1^2 + x_2^2 + (1-s)x_3^2 + 2x_2 + 3 = 0\}$ mają ten sam typ afiniczny?

Rozwiązanie:
Formie kwadratowej $q((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ odpowiada forma dwuliniowa $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$. Forma ta ma w bazie standardowej macierz $G(h, st) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Przykładowa baza prostopadła to $\mathcal{B} = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,1,-2)\}$. Forma ma w tej bazie macierz $G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dla macierzy $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ mamy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 + y_3 \\ y_1 - 2y_3 \end{bmatrix}$$

zatem

$$3 \cdot (y_3)^2 - (y_2 + y_3)^2 + (y_1 - 2y_3)^2 + 2 \cdot (y_3)(y_2 + y_3) + 4 \cdot (y_3)(y_1 - 2y_3) + 6 \cdot (y_2 + y_3) + 9 = 0$$

$$y_1^2 - y_2^2 + 6y_2 + 6y_3 + 9 = 0$$
$$y_1^2 - (y_2 - 3)^2 + 6(y_3 + 3) = 0$$

Krzywą tą nazywamy parabolą hiperboliczną. Dalej mamy

$$(2r-4)x_1^2 + x_2^2 + (1-s)x_3^2 + 2x_2 + 3 = 0$$

$$(2r-4)x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + (1-s)x_3^2 + 2 = 0$$

Nie istnieją więc takie $t, s \in \mathbb{R}$ dla których hiperpowierzchnia Y byłaby parabolą hiperboliczną, ponieważ w równaniu jej występuje wyraz wolny. Po za tym w równaniu tym wszystkie trzy zmienne są w drugiej potędze, a w równaniu paraboli hiperbolicznej tylko dwie zmienne są w drugiej potędze.