RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1

Marysia Nazarczuk

Ćwiczenia 1

Model klasyczny, kombinatoryka

Definicja: Model klasyczny prawdopodobieństwa to

$$P = \frac{\#(\text{wszystkie wyniki sprzyjające})}{\#(\text{wszystkie wyniki})}$$

przy czym zakładamy, że wszystkie wyniki są równo prawdopodobne.

Zadanie 1.
Pudełko zawiera 90 śrub dobrych i 10 śrub złych. Z tego pudełka użyto 10 śrub. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna z nich nie była wadliwa?

Rozwiązanie:
Na $\binom{90}{10}$ sposobów wybieramy dobre śruby i na $\binom{100}{10}$ sposobów wybieramy ogólnie 10 śrub, skąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}}$$

Zadanie 2.
Jeżeli n kul rozrzucimy losowo w n komórkach, to jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna komórka pozostanie pusta?

Rozwiązanie:
Wybieramy na n sposobów miejsce gdzie będą dwie kule i na $\binom{n}{2}$ sposoby wybieramy te dwie kule. Potem na $n-1$ sposobów wybieramy gdzie będzie puste miejsce. A na koniec na $(n-2)!$ sposobów permutujemy $n-2$ kule i wkładamy je w odpowiednie miejsca. Wszystkich rozstawień kul jest n^n, zatem prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{n\binom{n}{2}(n-1)(n-2)!}{n^n}$$

Zadanie 3.
Pewien człowiek ma n kluczy, z których dokładnie jeden pasuje do zamka. Klucze są wybierane i próbowane losowo (bez powtórzeń). To postępowanie może wymagać $1, 2, \ldots, n$ prób. Pokazać, że każdy z tych wyników ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{n}$.

Rozwiązanie:
Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy klucz za k-tym razem wynosi tyle samo ile prawdopodobieństwo tego, że jedynka pojawi się dokładnie na k-tym miejscu w losowej permutacji.

Ustawiamy jedynkę na k-te miejsce, a następnie pozostałe liczby permutujemy na $(n-1)!$ sposobów. Prawdopodobieństwo wynosi więc

$$P(A) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Zadanie 4.
Niech a, b, c, d oznaczają cztery nieujemne liczby całkowite, takie, że $a+b+c+d = 13$. Znaleźć prawdopodobieństwo $p(a, b, c, d)$, że przy grze w brydża gracze N, E, S i W mają odpowiednio a, b, c, d pików.

Rozwiązanie:
52 karty na 4 osoby rozkładamy na $\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}$ sposobów. Graczowi N karty wybieramy na $\binom{13}{a}\binom{39}{13-a}$ sposobów. Graczowi E karty wybieramy na $\binom{13-a}{b}\binom{26+a}{13-b}$ sposobów. Graczowi S karty wybieramy na $\binom{13-a-b}{c}\binom{13+a+b}{13-c}$ sposobów. Pozostałe karty lecą do gracza W. Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{\binom{13}{a}\binom{39}{13-a} \cdot \binom{13-a}{b}\binom{26+a}{13-b} \cdot \binom{13-a-b}{c}\binom{13+a+b}{13-c} \cdot 1}{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}}$$

Zadanie 5.
Niech a, b, c, d oznaczają cztery nieujemne liczby całkowite, takie że $a+b+c+d = 13$. Znaleźć prawdopodobieństwo $q(a, b, c, d)$, że grający w brydża będzie miał a pików, b kierów, c kar i d trefli.

Rozwiązanie:
Wszystkie możliwe wybory trzynastu kart to $\binom{52}{13}$, natomiast wszystkie możliwe wybory spełniające warunki zadania to $\binom{13}{a}\binom{13}{b}\binom{13}{c}\binom{13}{d}$, stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{\binom{13}{a}\binom{13}{b}\binom{13}{c}\binom{13}{d}}{\binom{52}{13}}$$

Zadanie 6.
Sprawdź, co jest bardziej prawdopodobne:

a) otrzymanie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kośćmi

b) otrzymanie co najmniej raz dwóch jedynek na obu kościach przy 24 rzutach 2 kośćmi

Rozwiązanie:

a) Prawdopodobieństwo, że ani razu nie wyrzucimy jedynki wynosi $\left(\frac{5}{6}\right)^4$, zatem szukane prawdopodobieństwo to

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,51$$

a) Prawdopodobieństwo, że ani razu nie wyrzucimy dwóch jedynek wynosi $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, zatem szukane prawdopodobieństwo to

$$P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,49$$

Zadanie 7.
Pewnych n osób, wśród których są A i B ustawia się w szereg. Policz prawdopodobieństwo, że między A i B jest dokładnie r osób. A co, jeśli ustawią się oni nie w szereg, a w pierścień? Policz prawdopodobieństwo, że będzie dokładnie r osób między A i B patrząc od A do B zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Rozwiązanie:
Na 2 sposoby ostawiamy A i B, następnie na $\binom{n-2}{r}$ sposobów wybieramy osoby które będą stały między A i B i na $r!$ sposobów ustawiamy je. Teraz A i B oraz r osób traktujemy jako jeden bloczek i łącznie z $n-r-2$ osobami ustawiamy na $(n-r-2+1)!$ sposobów. Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{2 \cdot \binom{n-2}{r} \cdot r! \cdot (n-r-1)!}{n!}$$

Jeśli ustawiamy osoby w okrąg, to możemy zaczynać od osoby A. Ustawiamy ją, następnie na $\binom{n-2}{r}$ sposobów wybieramy osoby które będą stały między nią a B i ustawiamy je na $r!$ sposobów. Ustawiamy osobę B, a następnie pozostałe $n-r-2$ osoby ustawiamy na $(n-r-2)!$ sposobów. Liczba zdarzeń elementarnych jest równa $(n-1)!$ (bo A stoi na pierwszym miejscu), skąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(B) = \frac{\binom{n-2}{r} \cdot r! \cdot (n-2-r)!}{(n-1)!}$$

Zadanie 8.
Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe, przy czym ulic każdego typu jest po $N = 2n+1$. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg. Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.

Rozwiązanie:
Drogę możemy wyznaczyć przez wskazanie w którym miejscu chcemy skręcić. Dróg przez środek miasta będzie więc $\binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n}$, natomiast łącznie wszystkich dróg jest $\binom{4n}{2n}$ (ze wszystkich możliwych zakrętów wybieramy połowę). Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{\binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n}}{\binom{4n}{2n}}$$

Zadanie 9.
W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów, przy czym $k \leq n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

a) wśród wylosowanych butów jest co najmniej jedna para,

b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para

Rozwiązanie:

a) Prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych butów jest co najmniej jedna para jest równe

$$1 - P(\text{ nie ma żadnej pary })$$

Z kolei liczba możliwości, że nie ma żadnej pary jest równa $\binom{n}{k} \cdot 2^k$, bo z wybieramy na $\binom{n}{k}$ sposobów k par butów a potem z każdej pary na 2 sposoby wybieramy buta. Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{n}{k} \cdot 2^k}{\binom{2n}{k}}$$

b) Wybieramy na n sposobów jedną parę, a potem z pozostałych $n-1$ par wybieramy $k-2$ buty tak aby wśród nich nie było żadnej pary. Prawdopodobieństwo wynosi więc

$$P(B) = \frac{n \cdot \binom{n-1}{k-2} \cdot 2^{k-2}}{\binom{2n}{k}}$$

Zadanie 10.
Każdy z n chromosomów w komórce wystawionej na promieniowanie dzieli się na dwie części różnych typów - typu A i typu B. Części te następnie ponownie łączą się w pary, przy czym możliwe jest także połączenie w parę dwóch części tego samego typu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

a) części połączą się w takich samych kombinacjach jak przed podziałem

b) po połączeniu każda z par będzie się składać z części różnych typów

Rozwiązanie:

1	2	3	...	n
$1A$	$2A$	$3A$	...	nA
$1B$	$2B$	$3B$	...	nB

Rozwiązanie:

a) Liczba zdarzeń sprzyjających jest równa 1. Policzmy liczbę zdarzeń elementarnych. Spermutujmy $2n$ chromosomów, a następnie bierzmy po kolei pary. Otrzymujemy w ten sposób n par. Liczba permutacji $2n$ chromosomów to $(2n)!$. Kolejność chromosomów w parze nie ma znaczenia, więc musimy podzielić przez 2^n. Również kolejność par nie ma znaczenia więc musimy podzielić przez $n!$. Stąd liczba zdarzeń elementarnych to $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$, więc prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{1}{\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}}$$

b) Liczba zdarzeń sprzyjających jest równa $n!$, bo dla ustalonych chromosomów z A permutujemy chromosomy z B i przyłączamy je do chromosomów z A. Permutacji n elementów jest $n!$. Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(B) = \frac{n!}{\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}}$$

Zadanie 11.
Klasa liczy 10 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

Rozwiązanie:
Szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$1 - P(\text{ nie każdy uczeń będzie przepytany }) = 1 - P(A_1 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{10})$$

gdzie A_i oznacza te zdarzenia, że i-ty uczeń nie został przepytany. Mamy

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{10}) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots - P(A_1 \cap \ldots \cap A_{10})$$

Oczywiście mamy $P(A_i) = \left(\frac{9}{10}\right)^{16}$, $P(A_i \cap A_j) = \left(\frac{8}{10}\right)^{16}$, …, $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{10}) = 0$.

Zadanie 12.
W mieście o $n+1$ mieszkańcach, jedna osoba powtarza plotkę drugiej, która z kolei powtarza ją trzeciej osobie itp. Za każdym razem plotka powtarzana jest osobie wybranej losowo spośród n osób. Znaleźć prawdopodobieństwo, że plotka zostanie powtórzona r razy:

a) bez powrotu do osoby, która zapoczątkowała plotkę

b) bez powtarzania dwa razy tej samej osobie

Rozwiązanie:

a) Musimy wybrać r osób i wśród nich nie ma być osoby pierwszej

$$|A| = n \cdot (n-1)^{r-1}$$

bo pierwsza osoba wybiera z pozostałych n osób komu powie plotkę, a następnie każda z $r-1$ osób wybiera z pozostałych $n-1$ osób komu powie plotkę. Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{n(n-1)^{r-1}}{n^r}$$

b) Wybieramy bez powtarzania

$$|B| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

bo pierwsza r-tek która wybiera $r+1$-szą osobę na $n-r+1$ sposobów. Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(B) = \frac{n^{\underline{r}}}{n^r}$$

Zadanie 13.
W ramach loterii losuje się pewien r elementowy podzbiór L zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, gdzie $r \leq n$. Ty również zaznaczasz na karcie pewien r elementowy podzbiór. Podaj prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

a) twój wybór jest dokładnie taki sam jak L

b) udało ci się wskazać poprawnie dokładnie k liczb

c) podczas losowania, kolejne elementy L pojawiały się w porządku rosnącym

d) L nie zawiera żadnych dwóch kolejnych liczb

e) L zawiera dokładnie jedną parę kolejnych liczb

Rozwiązanie:

a) $P(A) = \frac{1}{\binom{n}{r}}$, bo na $\binom{n}{r}$ sposobów wybieramy r elementowy podzbiór zbioru n elementowego.

b) $P(B) = \frac{\binom{r}{k}\cdot\binom{n-r}{r-k}}{\binom{n}{r}}$, bo na $\binom{r}{k}$ wybieramy te liczby co są dobre i na $\binom{n-r}{r-k}$ sposobów wybieramy te liczy co są złe.

c) $P(C) = \frac{\binom{n}{r}\cdot 1}{\binom{n}{r}\cdot r!}$, bo wybrane r elementów w dowolny sposób możemy ustawić na $r!$ sposobów a w ciąg rosnący na jeden sposób.

d) $P(D) = \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}}$, bo chcemy ustawić r kresek i $n-r$ kropek tak aby dwie kreski nie stały obok siebie. Ustawiamy więc kropki, które wyznaczają $n-r+1$ miejsc z czego wybieramy r miejsc, gdzie wstawiamy kreski.

e) $P(E) = \frac{(n-r+1)\binom{n-r}{r-2}}{\binom{n}{r}}$, bo najpierw z $n-r+1$ miejsc wybieramy miejsce dla dwóch kresek, a następnie z pozostałych $n-r$ miejsc wybieramy miejsca dla $r-2$ kresek.

Zadanie 14.
Losujesz 5 kart ze standardowej talii. Podaj prawdopodobieństwa zdarzeń:

a) jedna para

b) dwie pary

c) trójka

d) kolor

e) full

f) kareta

g) poker królewski

Pamiętaj, że dwie pary nie są jedną parą, kareta nie jest trójką, itd.

Rozwiązanie:

a) $P(A) = \frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{12\cdot4\cdot11\cdot4\cdot10\cdot4}{3!}}{\binom{52}{5}}$, bo na 13 sposobów wybieram która wartość będzie parą, a następnie na $\binom{4}{2}$ sposoby wybieram dwie karty z czterech na parę. Na 12 sposobów wybieram wartość trzeciej karty i na 4 sposoby jej kolor. Na 11 sposobów wybieram wartość czwartej karty i na 4 sposoby jej kolor. Na 10 sposobów wybieram wartość piątej karty i na 4 sposoby jej kolor. Kolejność w jakiej wybrałam trzy różne karty nie ma znaczenia więc dzielimy przez 3!. Wszystkich możliwych wyborów 5 kart z talii jest $\binom{52}{5}$.

b) $P(B) = \frac{\frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot12\cdot\binom{4}{2}}{2}\cdot44}{\binom{52}{5}}$, bo na 13 sposobów wybieram wartość dla pierwszej pary i na $\binom{4}{2}$ sposoby wybieram kolory dla tych kart. Na 12 sposobów wybieram wartość dla drugiej pary i na $\binom{4}{2}$ sposoby wybieram kolory dla tych kart. Kolejność par nie ma znaczenia wiec dzielimy przez 2. Na 44 sposoby wybieram piątą kartę.

c) $P(C) = \frac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot\frac{12\cdot4\cdot11\cdot4}{2}}{\binom{52}{5}}$, bo na 13 sposobów wybieram która wartość będzie trójką, a następnie na $\binom{4}{3}$ sposoby wybieram trzy karty z czterech na trójkę. Na 12 sposobów wybieram wartość czwartej karty i na 4 sposoby jej kolor. Na 11 sposobów wybieram wartość piątej karty i na 4 sposoby jej kolor. Kolejność w jakiej wybrałam dwie różne karty nie ma znaczenia więc dzielimy przez 2.

d) $P(D) = \frac{4\cdot\binom{13}{5}-8}{\binom{52}{5}}$, bo na 4 sposoby wybieram kolor a następnie na $\binom{13}{5}$ sposobów wybieram karty w tym kolorze oraz odejmuję 8 pokerów.

e) $P(E) = \frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot12\cdot\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}}$, bo na 13 kolorów wybieram wartość dla pary i na $\binom{4}{2}$ wybieram dwie karty do pary, a następnie na 12 sposobów wybieram wartość dla trójki i na $\binom{4}{3}$ sposoby wybieram karty do trójki.

f) $P(F) = \frac{13\cdot48}{\binom{52}{5}}$, bo na 13 sposobów wybieram wartość dla karety i na 48 sposobów wybieram piątą kartę.

g) $P(G) = \frac{4}{\binom{52}{4}}$, bo na 4 sposoby wybieram kolor na pokera.

Zadanie 15.
Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wypuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?

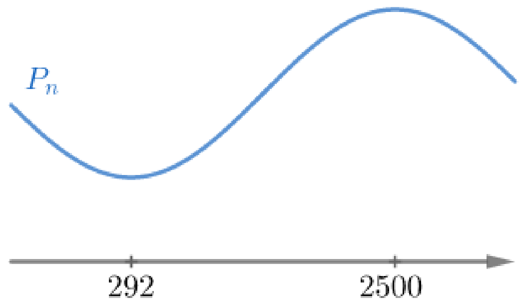
Rozwiązanie:
Prawdopodobieństwo, że z jeziora gdzie jest n ryb z czego 200 jest oznakowanych, wylosujemy 100 ryb z czego 8 będzie oznakowanych, wynosi

$$P_n = \frac{\binom{200}{8}\binom{n-200}{92}}{\binom{n}{100}}$$

Dalej mamy

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{(n-200)(n-100)}{n(n-292)}$$

Zatem P_n jest malejące gdy $\frac{P_n}{P_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow (n-2500)(n-292) > 0$ i rosnące gdy $\frac{P_n}{P_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow (n-2500)(n-292) < 0$.



Stąd najbardziej prawdopodobna liczba ryb w jeziorze to 2500 (bo 200 odpada, bo losując 100 ryb z takiej liczby nie możemy wylosować 92 nieoznakowanych bo ich tam nie ma).

Zadanie 16.
N listów nieświadomie pomieszano i całkiem losowo umieszczono w N zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo, że

a) żaden list nie trafi do właściwego adresata

b) dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów

Rozwiązanie:

a) Od liczby wszystkich możliwych permutacji odejmujemy te, gdzie co najmniej jeden jest dobry, dodajemy te gdzie co najmniej dwa są dobre, itd. Z zasady włączeń-wyłączeń mamy więc

$$|A_n| = n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \ldots = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

Skąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A_n) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

b) Na $\binom{n}{k}$ sposobów wybieramy osoby, które dostaną swój list, a następnie na $|A_{n-k}|$ sposobów układamy złe listy pozostałym osobom. Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A_{n,k}) = \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{k} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)!$$

Zadanie 17.
W kolejce po bilety na mecz stoi n kibiców. Każdy z nich nosi szalik w kolorze A lub B. Załóżmy, że wszystkie możliwe układy kolorów są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwa, że

a) żadne dwie kolejne osoby nie mają szalików w tym samym kolorze

b) żadne dwie kolejne osoby nie mają szalików w kolorze A

Rozwiązanie:

a) Wszystkich możliwych rozmieszczeń jest $n! \cdot 2^n$, bo na $n!$ sposobów ustawiamy osoby a potem na 2^n sposobów dajemy im szaliki. Ustawień sprzyjających jest $n! \cdot 2$, bo na $n!$ ustawiamy osoby, a potem na dwa sposoby wybieramy kolor szalika dla pierwszej osoby (osoby w kolejce muszą mieć na przemian kolory szalików). Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{2 \cdot n!}{2^n \cdot n!} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

b) Niech x_n to liczba możliwych ustawień n osób. Jeśli chcemy mieć kolejkę której ostatnią osobą jest osoba z szalikiem B, to musimy ustawić $n-1$ osób, a następnie ustawiamy osobę z szalikiem B. Jeśli chcemy mieć kolejkę której ostatnią osobą jest osoba z szalikiem A, to musimy ustawić $n-2$ osób, a następnie ustawiamy osobę z szalikiem B i potem dopiero osobę z szalikiem w kolorze A. Mamy więc rekurencję

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

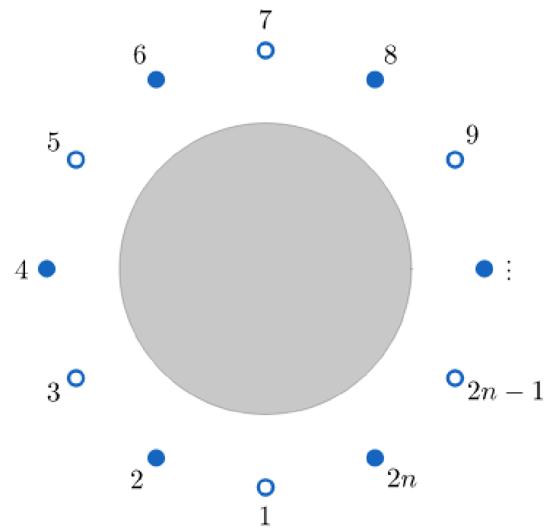
gdzie $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Jest to ciąg Fibonacciego przesunięty o dwa indeksy, zatem $x_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$. Liczba wszystkich ciągów o elementach ze zbioru $\{A, B\}$ jest równa 2^n, zatem

$$P(B) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{2^n}$$

Zadanie 18.
Jest wiek XVIII. Na obiad przy okrągłym stole zaproszono n heteroseksualnych par. Etykieta nakazuje, by w tej sytuacji kobiety i mężczyźni siedzieli na przemian. Stosując się do tej zasady, gości usadzono jednak w losowy sposób. Pokaż, że prawdopodobieństwo iż żadna z zaproszonych par nie siedzi obok siebie to

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!\right]$$

Rozwiązanie:
Mężczyzn siadamy przy stole na $n! \cdot 2$ sposoby, bo na $n!$ sposobów permutujemy mężczyzn, a potem na 2 sposoby wybieramy czy siadają na parzystych czy nieparzystych miejscach. Ustalmy więc, że mężczyźni siadają na numerach parzystych (po ewentualnym przenumerowaniu miejsc).



Małżonka mężczyzny który siedzi na miejscu i-tym nie może usiąść na miejscu $i+1$-szym oraz na miejscu $i-1$-szym (modulo n). Zadanie sprowadza się więc do znalezienia liczby permutacji zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ takich, że $\sigma(i)\neq i$ oraz $\sigma(i)\neq i+1$ (modulo n). Niech dla $i=1,2,\ldots,2n$ określmy

$$A_i=\left\{\sigma\in S_n \mid \sigma\left(\left\lfloor\frac{i+1}{2}\right\rfloor\right)=\left\lfloor\frac{i+1}{2}\right\rfloor+((i+1)\bmod 2)\right\}$$

innymi słowy niech A_i to zbiór tych permutacji, że jeśli i jest nieparzyste to kobieta siedzi na prawo obok swojego małżonka, a jeśli i jest parzyste to siedzi na lewo obok swojego małżonka. Od wszystkich możliwych permutacji będziemy odejmować te gdzie co najmniej jedna para siedzi obok siebie, dodawać te gdzie co najmniej dwie siedzą obok siebie itd. Niech $[n]_k$ to podzbiór zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ długości k taki, że i oraz $i+1$ nie należą do tego zbioru jednocześnie (modulo n). Z zasady włączania-wyłączania mamy więc, że liczba szukanych permutacji to

$$\sum_{i=0}^{2n}(-1)^n\cdot\sum_{[2n]_i}\left|\bigcap_{k\in[2n]_i}A_k\right|$$

Permutacji takich, że mamy ustalone i miejsc jest $(n-i)!$. Tu już widzimy że sumowanie dalej niż do n nie ma sensu. Pozostaje nam więc do policzenia ile jest dla ustalonego k zbiorów $[n]_k$. Twierdzimy że jest ich $\frac{n}{n-k}\cdot\binom{n-k}{k}$. By pokazać to co chcemy pokazać będziemy rozumowali analogiczni jak w dowodzie, że liczba k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, gdzie dwie sąsiednie liczby nie należą do tego zbioru jest równa $\binom{n-k+1}{k}$. Narysujmy $n-k$ kropek. Kropki te wyznaczają nam $n-k$ miejsc (inaczej niż w poprzednim dowodzie jednego miejsca nie bierzemy, bo będziemy sklejać taki łańcuch w okrąg). Z tych miejsc na $\binom{n-k}{k}$ sposoby wybieramy miejsca dla kresek. Jako, że sklejamy teraz ten łańcuch, to nie istotne które wolne miejsce jest pierwsze, więc musimy podzielić przez $n-k$. Mamy więc taki sklejony łańcuch i aby wyznaczyć z niego jakiś łańcuch co będzie generował nam zbiór musimy go przeciąć. Przecięcie możemy zrobić w dowolnym miejscu, zatem wykonujemy to na n sposobów. Stąd ostatecznie liczba takich zbiorów spełniających oczekiwane warunki to

$$\binom{n-k}{k}\cdot\frac{n}{n-k}$$

Zatem ostatecznie liczba szukanych permutacji to

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^n \cdot \binom{2n-i}{i} \cdot \frac{2n}{2n-i} \cdot (n-i)!$$

Zdarzeń sprzyjających mamy

$$2 \cdot n! \cdot \sum_{i=0}^{n}(-1)^n \cdot \binom{2n-i}{i} \cdot \frac{2n}{2n-i} \cdot (n-i)!$$

Liczba zdarzeń elementarnych jest równa

$$2 \cdot n! \cdot n!$$

bo na $2 \cdot n!$ sposoby wybieramy jak siedzą mężczyźni, a następnie na $n!$ sposobów wybieramy jak siedzą kobiety. Stąd prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!\right]$$

Ćwiczenia 2

Prawdopodobieństwo geometryczne, proste własności

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ to zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a

$$0 < \lambda_n(\Omega) < \infty$$

i niech dana jest rodzina

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ jest mierzalne w sensie Lebes'gue'a } \}$$

Wówczas mamy

$$P(A) = \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(\Omega)}$$

Zadanie 1.
Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo liczbę x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że x jest niewymierna?

Rozwiązanie:
Zachodzi równość

$$P(\ x \text{ niewymierna }) = 1 - P(\ x \text{ wymierna })$$

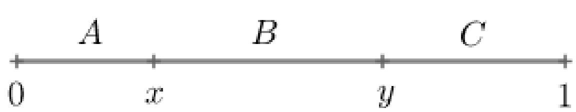
Zbiór $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest mierzalny, bo jest przeliczalną sumą punktów, a każdy punkt jest domknięty, czyli jest borelowski, czyli jest λ mierzalny. Dalej

$$\lambda[\mathbb{Q} \cap [0,1]] = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\{q_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Zatem $P(\ x \text{ wymierna }) = 0$, skąd $P(\ x \text{ niewymierna }) = 1 - 0 = 1$.

Zadanie 2.
Z przedziału $[0,1]$ wybrano w sposób losowy dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

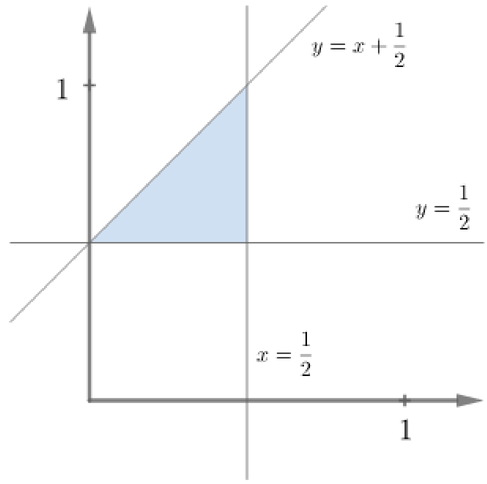
Rozwiązanie:
Losowanie dwóch punktów z odcinka $[0,1]$ możemy utożsamić z losowaniem jednego punktu z kwadratu $[0,1]^2$.



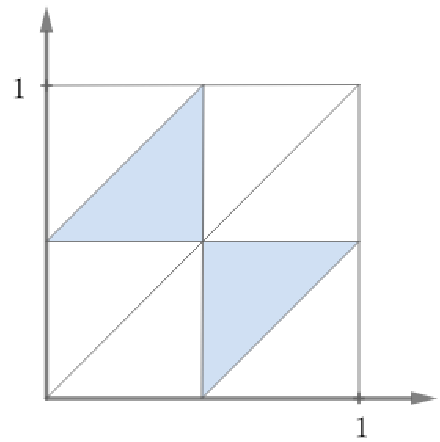
Chcemy, aby z trzech odcinków dało się zbudować trójkąt, czyli aby $\max(A,B,C) < \frac{1}{2}$. Jeśli $y > x$, to muszą zachodzić nierówności

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 1 - y < \frac{1}{2} \\ y - x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

czyli punkty muszą leżeć w obszarze ograniczonym prostymi $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ oraz $y = x + \frac{1}{2}$



Jako, że równie dobrze może zachodzić $x > y$, to wszystkie szukane punkty będą leżały w obszarze



Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi $P(x, y) = \frac{1}{4}$.

Zadanie 3.
Z przedziału $[0, 1]$ losujemy liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w rozwinięciu dziesiętnym tej liczby nie pojawi się cyfra 6.

Rozwiązanie:
Niech A_6 to zbiór tych liczb, w których w rozwinięciu dziesiętnym nie ma szóstki. Niech A_6^k to zbiór tych liczb w których w rozwinięciu dziesiętnym nie ma szóstki na pierwszych k miejscach po przecinku. Mamy

$$A_6^1 = [0, 1] \setminus [0,6\ ,\ 0,7], \quad A_6^2 = A_6^1 \setminus ([0,06\ ,\ 0,07] \cup \ldots \cup [0,96\ ,\ 0,97]) \quad \ldots$$

Mamy $A_6^{k+1} \subseteq A_6^k$, czyli ciąg A_6^k jest zstępujący oraz $A_6 = \bigcap_k A_6^k$, zatem z twierdzenia o ciągłości mamy

$$P(A_6) = P(\bigcap_k A_6^k) = \lim_{k \to \infty} P(A_6^k) = 0$$

Ostatnia równość bierze się stąd, że

$$P(A_6^{k+1}) = \frac{9}{10} \cdot P(A_6^k) = \ldots = \left(\frac{9}{10}\right)^k \cdot P(A_6^1) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$$

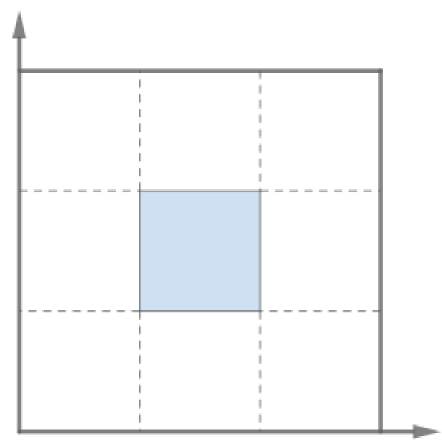
Zadanie 4.
Na nieskończoną szachownicę o boku jednego pola równym 1 rzucono monetę o średnicy $\frac{2}{3}$. Policz prawdopodobieństwo tego, że moneta:

a) znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól

b) przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy

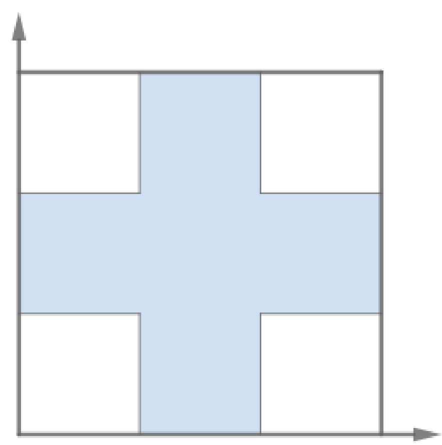
Rozwiązanie:

a) Środek monety musi znajdować się w zaciemnionym obszarze



Zatem prawdopodobieństwo będzie równe $P = \frac{1}{9}$.

b) Środek monety musi znajdować się w zaciemnionym obszarze



Zatem prawdopodobieństwo będzie równe $P = \frac{5}{9}$.

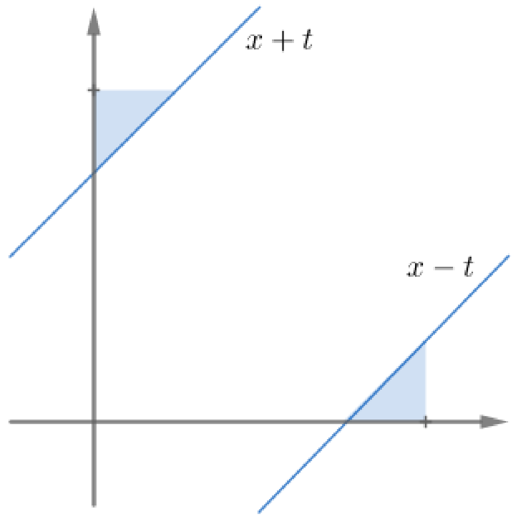
Zadanie 5.
Z odcinka $[0, 1]$ losujemy

a) dwie liczby. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że są one od siebie odległe o co najmniej t, gdzie t jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

b) trzy liczby. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że z odcinków o wylosowanych długościach da się zbudować trójkąt.

Rozwiązanie:

a) Oczywiście dla $t > 1$ prawdopodobieństwo wynosi 0, zatem załóżmy, że $t \in [0, 1]$. Wybranie dwóch liczb możemy utożsamić z wyborem punktu na płaszczyźnie. Będziemy wybierać liczby z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Punkty spełniające warunki zadania będą leżeć w obszarze poza prostymi $y = x + t$ oraz $y = x - t$.



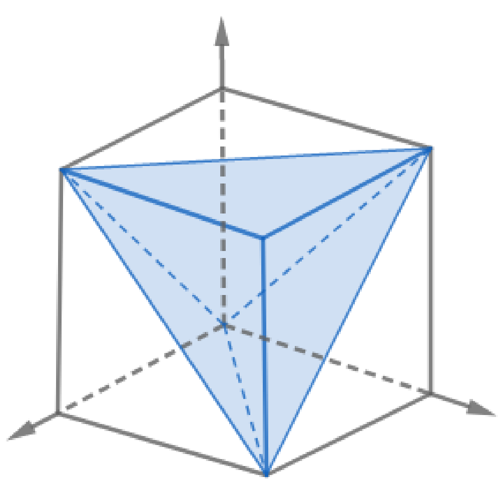
Pole zaciemnionego obszaru jest równe

$$\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(1-t)^2}{2} = (1-t)^2$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{(1-t)^2}{1} = (1-t)^2$$

b) Wybranie trzech liczb możemy utożsamić z wyborem punktu w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Będziemy wybierać liczby z sześcianu $[0, 1]^3$.



Szukane punkty będą leżały w zaciemnionym obszarze (bez krawędzi). Pole zaciemnionego obszaru jest równe

$$1 - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^3 = \frac{1}{2}$$

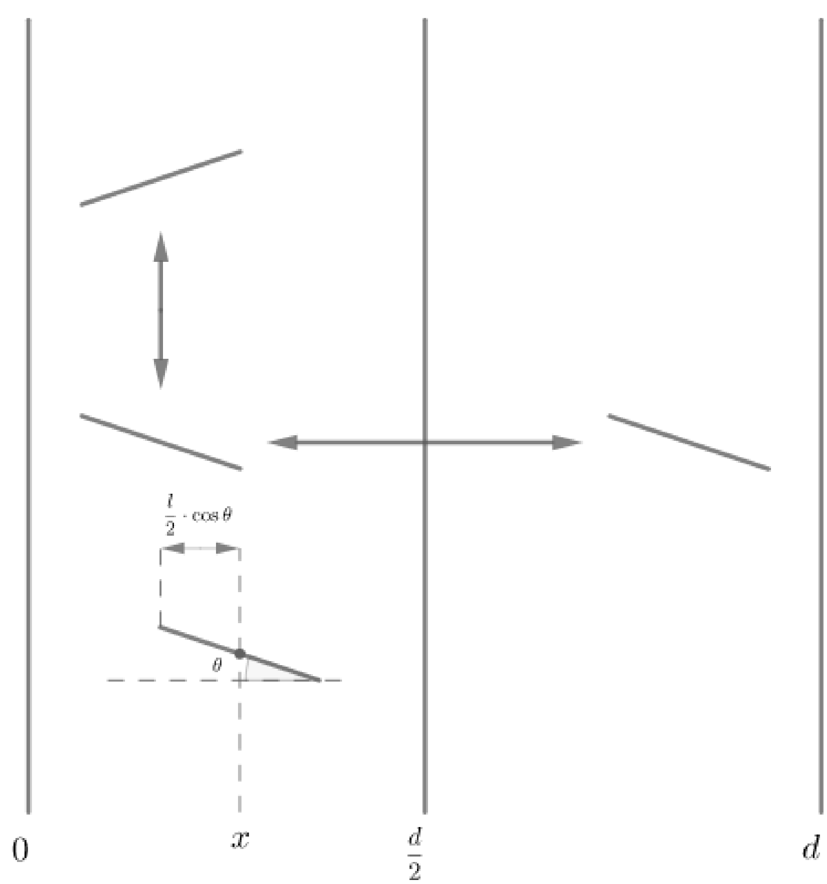
Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 6.
Igłę o długości l rzucono losowo na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.

Rozwiązanie:
Możemy rozważyć jedynie jedną parę linii, a właściwie odległość $\frac{d}{2}$ od jednej linii. Położenie igły możemy rozważać od 0 do 90°, ponieważ możemy odbić ją symetrycznie nie zmieniając jej odległości od linii. Zatem mamy

$$\Omega = \left[0, \frac{d}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Zdarzenie A to będzie zdarzenie w którym igła przecina linię, czyli sytuacja gdy $\frac{l}{2}\cos\theta \geq x$. Zatem

$$A = \left\{(x,\theta) \in \Omega \mid \cos\theta \cdot \frac{l}{2} \geq x\right\}$$

Miara zbioru A jest równa

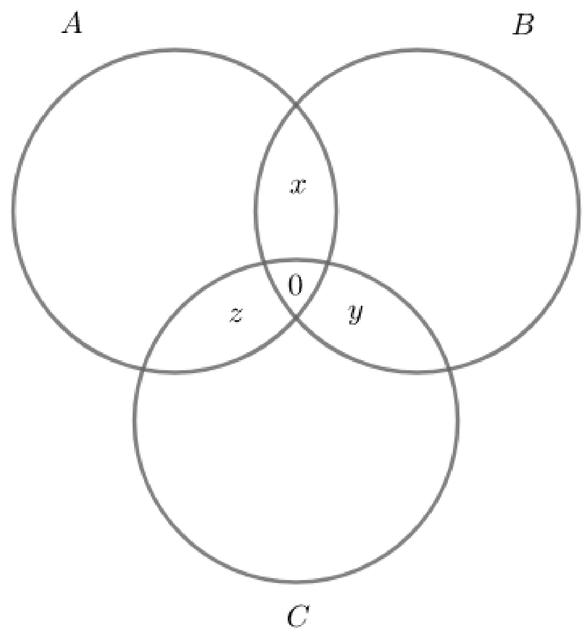
$$\lambda(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{l}{2} \cdot \theta \; d\theta = \frac{l}{2} \cdot \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2}$$

Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{d}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{\pi d}$$

Zadanie 7.
Załóżmy, że $P(A) \geq \frac{2}{3}$, $P(B) \geq \frac{2}{3}$, $P(C) \geq \frac{2}{3}$ i $P(A \cap B \cap C) = 0$. Oblicz $P(A)$.

Rozwiązanie:
Niech $x = P((A \cap B) \setminus C)$, $y = P((B \cap C) \setminus A)$ oraz $z = P((C \cap A) \setminus B)$.



Mamy

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)) + 0$$

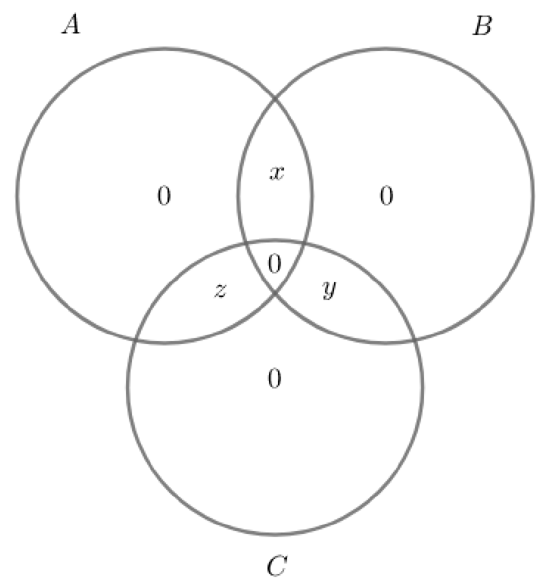
skąd

$$P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) \geq 1$$

wiec

$$1 \leq x + y + z$$

Jako, że zdarzenia $(A \cap B) \setminus C$, $(B \cap C) \setminus A$ oraz $(C \cap A) \setminus B$ są rozłączne, to $x + y + z = 1$.



Dalej, jeśli $P(A) > \frac{2}{3}$, to $x+y > \frac{2}{3}$, bo $P(A \setminus (B \cup C)) = 0$. Analogicznie $y+z > \frac{2}{3}$ oraz $z+x > \frac{2}{3}$, a stąd $2(x+y+z) > 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \Leftrightarrow (x+y+z) > 1$. Skąd oczywiście $x+y = \frac{2}{3}$, $y+z = \frac{2}{3}$ oraz $y+z = \frac{2}{3}$ czyli $x = y = z = \frac{1}{3}$. Stąd otrzymujemy oczywiście $P(A) = x+y = \frac{2}{3}$.

Zadanie 8.
Załóżmy, że $P(A \cup B \cup C) = 1$, $P(B) = 2 \cdot P(A)$, $P(C) = 3 \cdot P(C)$ oraz

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A)$$

Pokaż, że $\frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie:
Niech $z = P(A \setminus (B \cup C))$, $x = P((A \cap B) \setminus C)$ oraz $y = P(A \cap B \cap C)$, wówczas $P((A \cap C) \setminus B) = x$, $P((C \cap B) \setminus A) = x$ oraz $P(B \setminus (A \cup C)) = 2z + 2x + y$ i $P(C \setminus (A \cap B)) = 3z + 4x + 2y$. Mamy więc

$$1 = P(A \cup B \cup C) = 6 \cdot P(A) - 3 \cdot P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C) = 6 \cdot P(A) - 3 \cdot (x+y) + y$$

skąd

$$P(A) = \frac{1 + 3x + 2y}{6} \geq \frac{1}{6}$$

Dalej mamy

$$1 = 4 \cdot P(A) + 2 \cdot (z + 2x + y) - 3 \cdot (x+y) + y = 4 \cdot P(A) + 2z + x$$

skąd

$$P(A) = \frac{1 - 2z - x}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Zadanie 9.
Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ zachodzą nierówności

a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

b) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$

Rozwiązanie:

a) Zdarzenia A_i nie są parami niezależne. Niech więc $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_i$. Mamy $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ oraz zdarzenia B_i są parami rozłączne, czyli $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Dalej mamy $B_i \subseteq A_i$, zatem $P(B_i) \leq P(A_i)$, bo $P(B_i) + P(A_i \setminus B_i) = P(A_i)$, skąd

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

b) Mamy

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right]^c\right) = 1 - P\left(\bigcup A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

Zadanie 10.
Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ zachodzi nierówność

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \geq \sum_{r=1}^{n} P(A_r) - \sum_{r<k} P(A_r \cap A_k)$$

Rozwiązanie:
Dowód będzie przebiegał indukcją po n. Dla $n = 1$ teza oczywiście działa. Załóżmy więc, że teza działa dla n. Dla $n + 1$ mamy

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) = P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) - P\left(\bigcup_{r=1}^{n} (A_r \cap A_{n+1})\right)$$

Z założenia indukcyjnego mamy

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \geq \sum_{r=1}^{n} P(A_r) - \sum_{r<k\leq n} P(A_r \cap A_k)$$

Mamy również

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{n} (A_r \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{r\leq n} P(A_r \cap A_{n+1})$$

skąd

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \geq \sum_{r=1}^{n} P(A_r) + P(A_{n+1}) - \sum_{r<k\leq n} P(A_r \cap A_k) - \sum_{r\leq n} P(A_r \cap A_{n+1})$$

zatem teza jest prawdziwa.

Zadanie 11.
Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Pokaż, że jeśli σ-ciało $\mathcal{F}$ jest skończone, to $|\mathcal{F}| = 2^n$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{Z}_+$.

Rozwiązanie:
Dla $x \in \Omega$ położmy $A_x = \bigcap_{A \in \mathcal{F}, x \in A} A$. Wówczas $A_x \neq \emptyset$, bo $x \in A_x$ oraz $A_x \in \mathcal{F}$, ponieważ mamy tu przecięcie przeliczalnie wielu zbiorów mierzalnych. Dalej $\{A_x\}_{x \in \Omega}$ jest skończonym podziałem Ω, to znaczy

1. $\bigcup_x A_x = \Omega$, co jest oczywiste
2. $A_x \neq A_y \;\Rightarrow\; A_x \cap A_y = \emptyset$. Jeśli $x \notin A_y$ to $x \in A_y^c$, czyli $A_x \subseteq A_y^C$, skąd $A_x \cap A_y = \emptyset$. Analogicznie jeśli $y \notin A_x$ to $A_x \cap A_y = \emptyset$. Jeśli $x \in A_y$ i $y \in A_x$, to $A_x \subseteq A_y$ oraz $A_y \subseteq A_x$ czyli $A_x = A_y$.

Niech teraz $A \in \mathcal{F}$. Zauważmy, że $A = \bigcup_{x \in A} A_x$, skąd każdy $A \in \mathcal{F}$ jest sumą rozłączną pewnych elementów $\{A_x\}_{x \in \Omega}$. Niech $|\{A_x\}_{x \in \Omega}| = n$, wówczas $|\mathcal{F}| = 2^n$.

Zadanie 12.
Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Pokaż, że jeśli σ-ciało $\mathcal{F}$ jest nieskończone, to $\mathcal{F}$ jest nieprzeliczalne.

Rozwiązanie:
Niech $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ spełnia

1. $\Omega \in \mathcal{S}$
2. $|\mathcal{S}| = \aleph_0$
3. $A \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{S}$

Pytany się czy istnieje rodzina $\mathcal{S}$ spełniająca powyższe warunki. Weźmy rodzinę $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{F}$ taką że $|\mathcal{S}'| = \aleph_0$. Dokładając Ω do tego zbioru oraz dopełnienie każdego zbioru otrzymujemy zbiór $\mathcal{S}$ spełniający szukane własności. Dla $x \in \Omega$ położmy $A_x = \bigcap_{A \in \mathcal{S}\ x \in A} A$. Ponieważ $\mathcal{S}$ jest przeliczalne, to $A_x \in \mathcal{F}$ dla każdego $x \in \Omega$. Dalej $\{A_x\}_{x \in \Omega}$ jest podziałem Ω oraz jeśli $A \in \mathcal{S}$ to $A = \bigcup_{x \in A} A_x$. Dalej $\{A_x\}_{x \in \Omega}$ jest nieskończone, ponieważ jeśli byłoby skończone, to $\mathcal{S}$ miałoby 2^n elementów dla pewnego n, a wiemy że $\mathcal{S}$ jest nieskończone. Mamy $|\mathcal{F}| \geq 2^{|\{A_x\}_{x \in \Omega}|} > \aleph_0$.

Ćwiczenia 3

Niezależność zdarzeń, Schemat Bernoulliego

Niezależność zdarzeń

- Dwa zdarzenia A_1 i A_2 są niezależne gdy $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.
- Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne gdy
$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$
dla wszystkich $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, dla $k = 1, 2 \ldots, n$
- Rodzina zdarzeń $\{A_i\}_{i \in I}$ jest niezależna jeśli niezależna jest każda skończona jej podrodzina.

Zadanie 1.

Zdarzenia A, B i C są parami niezależne. Wyjaśnij, czy niezależne są również

a) A, B, C łącznie

b) $A \cap B$ i C

c) $A \cup B$ i C

Rozwiązanie:

a) Niech A to zdarzenie polegające na wyrzuceniu orła w pierwszym rzucie, B to zdarzenie polegające na wyrzuceniu orła w drugim rzucie, natomiast C to zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzyście wiele orłów, wówczas $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4}$ oraz $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$, zatem zdarzenia A, B i C nie są łącznie niezależne.

b) Załóżmy, że $A \cap B$ oraz C są niezależne, wówczas
$$P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
czyli A, B i C są łącznie niezależne.

c) Załóżmy, ze $A \cup B$ oraz C są nie zależne, wówczas mamy
$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C)$$
Mamy
$$P(A \cup B) \cdot P(C) = (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \cdot P(C) =$$
$$= (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) \cdot P(C)$$
oraz
$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup P(B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) =$$
$$= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A \cap B \cap C)$$
skąd po przyrównaniu mamy
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Zadanie 2.
Zdarzenia A, B są niezależne oraz $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

Rozwiązanie:
Mamy $1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ czyli $1 - P(B) = P(A)(1 - P(B))$. Jeśli $P(B) = 1$, to mamy tezę. Jeśli $P(B) \neq 1$, to po podzieleniu $P(A) = 1$.

Zadanie 3.
Niech $\Omega = \{1, 2, \ldots, p\}$ gdzie p jest liczbą pierwszą, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ i $P(A) = \frac{|A|}{p}$ dla $A \in \mathcal{F}$. Pokaż, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to choć jedno z nich jest równe $\emptyset$ lub Ω.

Rozwiązanie:
Niech $|A| = a$, $|B| = b$ oraz $|A \cap B| = c$, wówczas jeśli A i B są niezależne to

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ \Leftrightarrow \ \frac{c}{p} = \frac{a}{p} \cdot \frac{b}{p} \ \Leftrightarrow \ p \cdot c = a \cdot b$$

stąd a lub b musi dzielić się przez p lub któreś z nich musi być zerem, skąd wynika teza.

Zadanie 4.
Jako warunek wstępu do klubu tenisowego *nowicjusz* N rozgrywa trzy mecze z graczami D *dobrym* i T *topowym*. By przejść test N musi wygrać dwa mecze z rzędu. Graczowi N pozwolono jednak wybrać, czy woli grać zgodnie z harmonogramem D, T, D lub T, D, T. Co powinien zrobić?

Rozwiązanie:
Niech $P(N$ wygra z $D) = d$ oraz $P(N$ wygra z $T) = t$, przy czym $t < d$. Gdy gra harmonogramem T, D, T, to trzy scenariusze

T	D	T	prawdopodobieństwo
w	w	w	$t \cdot d \cdot t$
w	w	p	$t \cdot d \cdot (1-t)$
p	w	w	$t \cdot d \cdot (1-t)$

skąd prawdopodobieństwo, że wygra dwa razy wynosi $t \cdot d \cdot (2-t)$. Analogicznie dla harmonogramu D, T, D mamy prawdopodobieństwo równe $t \cdot d \cdot (2-d)$, zatem lepszy jest harmonogram T, D, T.

Schemat Bernoulliego

- Powtarzamy k razy jednakowe i niezależne doświadczenie, każde z nich ma dwa możliwe wyniki: sukces z prawdopodobieństwem p oraz porażkę z prawdopodobieństwem $1 - p$.
- Prawdopodobieństwo dokładnie k sukcesów w n próbach wynosi

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Zadanie 5.
Gracze A, B i C rzucają na zmianę symetryczną monetą. Grę wygrywa gracz, który jako pierwszy wyrzuci orła. Policz szansę, że grę wygra gracz:

a) który rzuca jako pierwszy

b) który rzuca jako drugi

Rozwiązanie:

a) Niech

$$A_0 = \{ \text{ rzuty zaczynające się od } O \ \}$$
$$A_1 = \{ \text{ rzuty zaczynające się od } RRRO \ \}$$
$$\vdots$$
$$A_n = \{ \text{ rzuty zaczynające się od } \underbrace{RR\ldots R}_{3n}O \ \}$$

wówczas

$$\{ \ A \text{ wygrywa } \} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A_i jest równe $\left(\frac{1}{2}\right)^{3i+1}$. Zbiory A_i są parami rozłączne, zatem

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = \frac{4}{7}$$

b) Rozumując analogicznie mamy $P(B) = \frac{2}{7}$

Zadanie 6.
Oblicz szansę otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoullego z prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie równym p.

Rozwiązanie:
I sposób:
Prawdopodobieństwo będzie wynosić

$$P = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot p^{2k} \cdot (1-p)^{n-2k}$$

Dla n parzystego $n = 2m$ mamy

$$P = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} \cdot p^{2k} \cdot (1-p)^{2m-2k} = \frac{1}{2}\left[((1-p)+p)^{2m} + ((1-p)-p)^{2m}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^{2m}$$

Dla n nieparzystego $n = 2m+1$ mamy

$$P = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} \cdot p^{2k} \cdot (1-p)^{2m+1-2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^{2m}$$

II sposób:

Niech P_n to prawdopodobieństwo parzystej liczby sukcesów w n próbach. Wówczas zachodzi

$$\begin{cases} P_n = p(1-P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1} \\ P_1 = 1-p \end{cases}$$

skąd po rozwiązaniu rekurencji otrzymujemy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n$.

Zadanie 7.
Wykonujemy ciąg podwójnych rzutów sześcienną kostką. W każdym podwójnym rzucie sumujemy uzyskane dwie liczby oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że 5 pojawi się przed 7?

Rozwiązanie:
Niech A to zdarzenie polegające na tym, że 5 pojawi się przed 7, oraz niech A_n to zbiór zdarzeń takich, że w pierwszych $n-1$ rzutach nie ma ani 5 ani 7, natomiast w n-tym mamy 5. Wówczas

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Zdarzenia A_i są rozłączne, czyli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Mamy więc

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Policzmy prawdopodobieństwo zdarzenia A_n. Mamy

$$5 = 4+1 = 3+2 = 2+3 = 1+4 \quad \text{oraz} \quad 7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 3+4 = 2+5 = 1+6$$

zatem $P(A_n) = \left(1 - \frac{4+6}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{36}$. Skąd

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{36} = \frac{4}{10}$$

Zadanie 8.
Dana jest liczba całkowita dodatnia n podzielna przez 3. Jaka jest szansa, że liczba orłów w n rzutach symetryczną monetą też jest podzielna przez 3?

Rozwiązanie:
Ze schematu Bernoulliego szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots + \binom{n}{n}\right] \cdot 2^{-n}$$

Zadanie sprowadza się więc do policzenia sumy $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots + \binom{n}{n}$. Niech

$$S_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots + \binom{n}{n}$$

$$S_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \ldots + \binom{n}{n-2}$$

oraz

$$S_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \ldots + \binom{n}{n-1}$$

Mamy $S_0 + S_1 + S_2 = 2^n$. Wprowadźmy pomocniczo pierwiastek trzeciego stopnia z 3

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}$$

Mamy

$$\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3} \quad \text{oraz} \quad \omega^3 = 1$$

Dalej mamy

$$S_0 + \omega \cdot S_1 + \omega^2 \cdot S_2 = (1+\omega)^n \quad \text{oraz} \quad S_0 + \omega^2 \cdot S_1 + \omega \cdot S_2 = (1+\omega^2)^n$$

ponadto $1 + \omega + \omega^2 = 0$, więc $(1+\omega)^3 = 1 + 3\omega + 3\omega^2 + \omega^3 = -1$ oraz $(1+\omega^2)^3 = -1$, skąd

$$S_0 + \omega \cdot S_1 + \omega^2 \cdot S_2 = (-1)^{\frac{n}{3}} \quad \text{oraz} \quad S_0 + \omega^2 \cdot S_1 + \omega \cdot S_2 = (-1)^{\frac{n}{3}}$$

Dodając te równości oraz równość $S_0 + S_1 + S_2 = 2^n$ mamy

$$3S_0 + (1+\omega+\omega^2)(S_1+S_2) = 2^n + 2 \cdot (-1)^{\frac{n}{3}} \Leftrightarrow S_0 = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^{\frac{n}{3}}}{3}$$

Zadanie 9.

Dane są liczby $m, n \in \mathbb{Z}_+$ oraz liczby nieujemne p, q takie, że $p + q = 1$. Wykazać, że

$$(1-p^n)^m + (1-q^m)^n \geq 1$$

Rozwiązanie:

Niech p to prawdopodobieństwo wyrzucenia orła i q to prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki. Wówczas rozważmy szachownicę $n \times m$ (n wierszy i m kolumn). Wyrażenie $1 - p^n$ można zinterpretować w ten sposób, że w n rzutach wypadła co najmniej jedna reszka, czyli że w całej jednej kolumnie jest co najmniej jedna reszka. Wyrażenie $(1-p^n)^m$ można interpretować w ten sposób, że w każdej kolumnie wypadła co najmniej jedna reszka. Analogicznie wyrażenie $(1-q^m)^n$ można interpretować w ten sposób że w każdym wierszu wypadł co najmniej jeden orzeł. Zatem wyrażenie

$$(1-p^n)^m + (1-q^m)^n$$

można interpretować w ten sposób że w każdej kolumnie wypadła co najmniej jedna reszka lub w każdym wierszu wypadł co najmniej jeden orzeł. To zdarzenie jest pewne, zatem jest równe co najmniej jeden.

Zadanie 10.

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka liczba sukcesów jest najbardziej prawdopodobna?

Rozwiązanie:

Jeśli p to prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie, to prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach to

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k \quad \text{(schemat Bernoulliego)}$$

Mamy
$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^k}{\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

P_n maleje gdy $\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} < 1 \Leftrightarrow k > np+p$ oraz rośnie gdy $\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} > 1 \Leftrightarrow k < np+p$, zatem maksimum osiąga dla $k = np+p$.

Zadanie 11.
Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo liczbę x. Niech A_i oznacza zdarzenie, że i-ta cyfra rozwinięcia dwójkowego x to 0. Pokaż, że rodzina $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ jest niezależna.

Rozwiązanie:
Niech A_i to będzie zdarzenie polegające na tym, że i-ta cyfra rozwinięcia dwójkowego to 0. Mamy $x = 0,1101 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{0}{8}+\frac{1}{16}$. W przypadku liczb wymiernych pojawia się problem z niejednoznacznością (np. $\frac{1}{2} = 0,1 = 0,0111\ldots$). W przypadku liczb niewymiernych ten problem znika. Jednak zbiór liczb wymiernych ma miarę zero, więc jeśli będziemy pomijać zbiór z niejednoznacznością, to pominiemy zbiór miary zero. Połóżmy $\widetilde{A_1} = [0,\frac{1}{2}]$, $\widetilde{A_2} = [0,\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ itd. Zauważmy, że $\{A_i\}_i$ jest niezależna wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\widetilde{A_i}\}_i$ jest niezależna, więc nie będziemy rozróżniać A_i od $\widetilde{A_i}$.Połóżmy teraz $A_i^0 = A_i$ oraz $A_i^1 = A_i^c$. Wystarczy więc, że pokażemy $P(A_1^{\varepsilon_1}\cap\ldots\cap A_n^{\varepsilon_n}) = \frac{1}{2^n}$, gdzie $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Ale mamy $A_1^{\varepsilon_1}\cap\ldots\cap A_n^{\varepsilon_n} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i} + 2^{-n}\right]$, skąd wynika teza.

Zadanie 12.
Rozważmy taką przestrzeń probabilistyczną $(\Omega,\mathcal{F},P)$, że Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Pokaż, że nie istnieje taka niezależna rodzina zdarzeń $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$, że $P(A_i) = \frac{1}{2}$ dla wszystkich i.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że istnieje taka rodzina $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$, która jest niezależna i $P(A_i) = \frac{1}{2}$ dla każdego i. Ustalmy $\omega\in\Omega$ i połóżmy
$$B_i = \begin{cases} A_i & \text{gdy } \omega \in A_i \\ A_i^c & \text{gdy } \omega \notin A_i \end{cases}$$

Zdarzenia B_i są nadal niezależne, natomiast $P(B_i) = \frac{1}{2}$ dla każdego i. Ponadto $\omega \in \bigcap_{i=1}^\infty B_i$, zatem
$$P(\{\omega\}) \le P\left(\bigcap_{i=1}^\infty B_i\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

Zadanie 13.
Z okręgu wybieramy losowo n półokręgów. Jaka jest szansa, że wylosowane półokręgi pokrywają cały wyjściowy okrąg?

Rozwiązanie:
Losowanie półokręgu możemy utożsamić z wylosowaniem punktu (będzie to jeden z końców, drugi będzie generowany automatycznie) i strony na którą pada ten półokrąg. Położenie punktów na okręgu (czyli odległość między punktami) nie ma znaczenia dla liczenia prawdopodobieństwa. Znaczenie ma tylko to na którą stronę pada półokrąg. n półokręgów generuje nam więc $2n$ punktów,

które z kolei generują nam $2n$ obszarów. Policzmy dopełnienie szukanego prawdopodobieństwa. Pytamy się równoważnie jakie jest prawdopodobieństwo tego, co najmniej jeden z obszarów nie zostanie przykryty. Zauważmy, że co najwyżej jeden z obszarów może zostać nieprzykryty. Obszar ten możemy wybrać na $2n$ sposobów. Dalej, wszystkie obszary muszą padać na jedną ustaloną stronę, bo w przeciwnym przypadku przykryją wyróżniony obszar. Liczba zdarzeń elementarnych jest równa 2^n, bo dla każdego półokręgu wybieramy na którą stronę pada. Zatem prawdopodobieństwo dopełnienia wynosi $\frac{2n}{2^n}$, skąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

Ćwiczenia 4

Prawdopodobieństwo warunkowe, Wzór Baysea, Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B jest równe

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{gdzie } A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ wykluczają się parami i mają prawdopodobieństwa dodatnie, to dla każdego zdarzenia A zawartego w sumie zdarzeń $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots$

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n) + \ldots$$

Wzór Bayesa

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ wykluczają się parami i mają prawdopodobieństwa dodatnie, to dla każdego zdarzenia A zawartego w sumie zdarzeń

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n) + \ldots}$$

Zadanie 1.

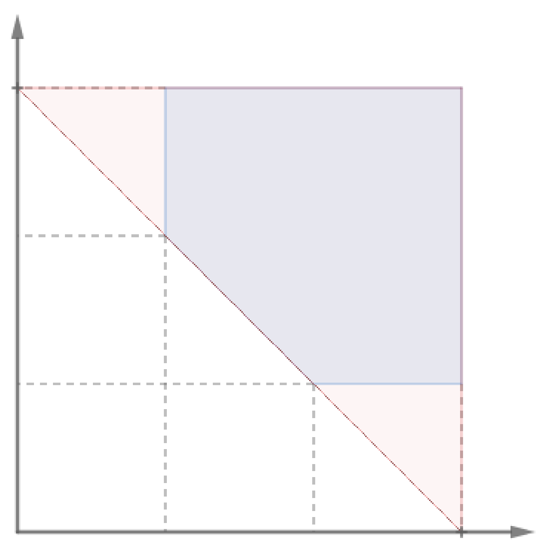
Z odcinka $[0, 1]$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie większa z nich przekracza $\frac{1}{3}$, jeśli wiadomo, że suma tych liczb to co najmniej jeden.

Rozwiązanie:

Musimy obliczyć prawdopodobieństwo

$$P\left(\min(x, y) \geq \frac{1}{3} \;\middle|\; x + y \geq 1\right)$$

Wybór dwóch punktów możemy utożsamić z wyporem punktu z płaszczyzny



Mamy

$$P(x+y \geq 1) = \frac{\text{Pole czerwonego obszaru}}{1} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$P\left(\min(x,y) \geq \frac{1}{3},\ x+y \geq 1\right) = \frac{\text{pole niebieskiego obszaru}}{1} = \frac{7}{18}$$

Skąd

$$P\left(\min(x,y) \geq \frac{1}{3} \;\middle|\; x+y \geq 1\right) = \frac{P\left(\min(x,y) \geq \frac{1}{3},\ x+y \geq 1\right)}{P(x+y \geq 1)} = \frac{7}{9}$$

Zadanie 2.
Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził że nie ma asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz w ogóle nie ma asa?

Rozwiązanie:
Wynikiem doświadczenia będzie uporządkowana para (W, N) (widziane / niewidziane), taka że $|W \cup N| = 13$, $W \cap N = \emptyset$, $|W| = 8$, $|N| = 5$ oraz $W, N \subseteq 52$ elementowa talia. Mamy $|\Omega| = \binom{52}{8} \cdot \binom{44}{5}$. Niech A to zdarzenie polegające na tym, że w $W \cup N$ nie ma asa, natomiast B to zdarzenie polegające na tym, że w N nie ma asa. Wówczas

$$P(B) = \frac{\binom{48}{8} \cdot \binom{44}{5}}{|\Omega|} \qquad P(A \cap B) = \frac{\binom{48}{8} \cdot \binom{40}{5}}{|\Omega|}$$

skąd

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{40}{5}}{\binom{44}{5}}$$

Zadanie 3.
Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. W wyniku rzutu wybraną losową monetą wypada orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

Rozwiązanie:
Niech O to zdarzenie polegające na tym, że podczas jednego rzutu monetą wypadł orzeł, zaś A to zdarzenie polegające na tym, że wylosowaną moneta jest asymetryczna. Szukamy prawdopodobieństwa że wylosowana moneta jest asymetryczna pod warunkiem, że wypadł orzeł, czyli

$$P(A \mid O) = \frac{P(O \mid A) \cdot P(A)}{P(O \mid A) \cdot P(A) + P(O \mid S) \cdot P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{k}{n}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{k}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-k}{n}}$$

Zadanie 4.
Rzucamy N kostkami, gdzie $N \in \mathbb{Z}_+$ jest losową liczbą. Niech A_i będzie zdarzeniem, że $N = i$. Zakładamy, że $P(A_i) = 2^{-i}$, dla $i \geq 1$. Przez S oznaczamy sumę wszystkich wyrzuconych oczek. Znajdź prawdopodobieństwo, że

a) $S = 4$ wiedząc, że N jest parzyste

b) $N = 2$ wiedząc, że $S = 4$ i na pierwszej kości wypadło 1

c) największa liczba oczek spośród wszystkich wyrzuconych to r

Rozwiązanie:

a) Z definicji mamy

$$P(S=4 \mid N \text{ jest parzyste}) = \frac{P(S=4 \;\cap\; N \text{ jest parzyste})}{P(N \text{ jest parzyste})}$$

Prawdopodobieństwo, że N jest parzyste wynosi $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$. Prawdopodobieństwo, że $S=4$ oraz że N jest parzyste jest równe sumie prawdopodobieństwa że $S=4$ i N jest równe 2 oraz że $S=4$ i $N=4$. Mamy

$$P(S=4 \;\cap\; N \text{ jest parzyste}) = P(S=4\cap N=2)+P(S=4\cap N=4)=$$

$$=P(S=4\mid N=2)\cdot P(N=2)+P(S=4\mid N=4)\cdot P(N=4)=\frac{3}{36}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6^4}\cdot\frac{1}{16}$$

b) Mamy

$$P(N=2 \mid S=4\cap K_1=1)=\frac{P(N=2\cap(S=4\cap K_1=1))}{P(S=4\cap K_1=1)}=$$

$$=\frac{P((S=4\cap K_1=1)\cap N=2)\cdot P(N=2)}{P(S=4\cap K_1=1)\cdot P(N=2)}=\frac{P(S=4\cap K_1=1\mid N=2)\cdot P(N=2)}{P(S=4\cap K_1=1)}=$$

Dalej mamy

$$\text{licznik} \;=\; \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{4}$$

oraz

$$\begin{aligned}\text{mianownik} \;&=\; P(S=4\cap K_1=1\mid N=2)\cdot P(N=2)+\\ &+\; P(S=4\cap K_1=1\mid N=3)\cdot P(N=3)+\\ &+\; P(S=4\cap K_1=1\mid N=4)\cdot P(N=4)=\\ &=\; \frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{36}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{6^4}\cdot\frac{1}{16}\end{aligned}$$

c) Oznaczmy przez M maksimum z wyrzuconych kości ($1\le M\le 6$). Mamy

$$P(M=r)=P(M\le r)-P(M\le r-1)$$

gdzie $r\in[1,6]$. Wystarczy więc, że policzymy $P(M\le r)$. Mamy

$$P(M\le r)=\sum_{i=1}^{\infty}P(M\le r\mid N=i)\cdot P(N=i)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{r}{6}\right)^i\cdot\frac{1}{2^i}=\frac{r}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{r}{12}}=\frac{r}{12-r}$$

Zadanie 5.

W wypadku drogowym brała udział taksówka, która uciekła jednak z miejsca zdarzenia. W danym mieście funkcjonują dokładnie dwie firmy taksówkarskie - Zielona i Niebieska. Świadek zdarzenia zidentyfikował kolor taksówki jako Niebieski. Wiadomo, że:

1. 85% taksówek należy do filmy Zielonej, 15% do Niebieskiej
2. świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% i myli się w 20% przypadków - niezależnie od koloru

Jaka jest szansa, że szukana taksówka jest niebieska?

Rozwiązanie:
Niech S_N to zdarzenie polegające na tym, że świadek zdarzenia rozpoznał niebieską taksówkę, N to zdarzenie polegające na tym, że poszukiwana taksówka jest niebieska, zaś Z to zdarzenie polegające na tym, że poszukiwana taksówka jest zielona. Wówczas szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(N \mid S_N) = \frac{P(S_N \mid N) \cdot P(N)}{P(S_N \mid N) \cdot P(N) + P(S_N \mid Z) \cdot P(Z)} = \frac{0,8 \cdot 0,15}{0,8 \cdot 0,15 + 0,85 \cdot 0,2} \approx 0,41$$

Zadanie 6.
W fabryce rygli maszyny A, B, C wyprodukowują odpowiednio $24, 35$ i 40 procent całej produkcji. Pierwsza z nich daje 5 procent, druga 4, a trzecia 2 procent braków. Rygiel zostaje wybrany losowo z partii wyprodukowanych i okazuje się, że jest wadliwy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że został on wyprodukowany przez maszynę A, B, C?

Rozwiązanie:
Szukamy prawdopodobieństwa tego, że wylosowany rygiel pochodzi z maszyny A pod warunkiem że jest wadliwy, czyli

$$P(A \mid W) = \frac{P(W \mid A) \cdot P(A)}{P(W \mid A) \cdot P(A) + P(W \mid B) \cdot P(B) + P(W \mid C) \cdot P(C)} =$$

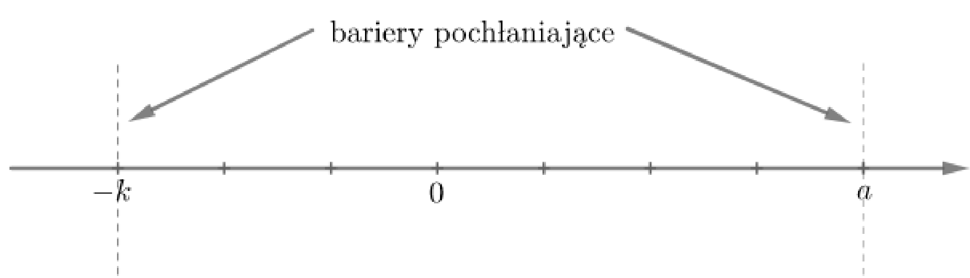
$$= \frac{5 \cdot 25}{5 \cdot 25 + 35 \cdot 4 + 40 \cdot 2} = \frac{125}{345}$$

Analogicznie

$$P(B \mid W) = \frac{140}{345} \qquad P(C \mid W) = \frac{80}{345}$$

Zadanie 7.
Gracz rzuca monetą symetryczną. Jeśli wypadnie reszka, to wygrywa on 1 zł, a jeśli orzeł to traci 1 zł. Na początku gry gracz ma k zł. Gra kończy się, gdy gracz wygra z góry ustaloną kwotę a zł albo przegra wszystkie pieniądze. Jakie jest prawdopodobieństwo zrujnowania się gracza?

Rozwiązanie:



Szukamy prawdopodobieństwa

$$P(\text{RUINA}) = P(\text{RUINA} \mid \text{START z } 0)$$

Określmy funkcję $P_x = P(\text{RUINA} \mid \text{START z } x)$ dla $x \in [-k, a]$. Wówczas $P(\text{RUINA}) = P_0$. Mamy $P_a = a$ oraz $P\_k = 1$. Ponadto

$$P_x = \frac{1}{2} \cdot P_{x-1} + \frac{1}{2} \cdot P_{x+1} \;\Leftrightarrow\; P_x - P_{x-1} = P_{x+1} - P_x := C$$

czyli możemy napisać że $P_x = 0 - (a-x) \cdot C$, skąd $1 = P_{-k} = -(a+k) \cdot C \Leftrightarrow C = \frac{-1}{a+k}$. Ostatecznie $P_x = \frac{a-x}{a+k}$, czyli $P(\text{RUINA}) = \frac{a}{a+k}$.

Zadanie 8.
Niech prawdopodobieństwo p_n oznacza, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci i niech będzie równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & \text{dla } n = 1, 2, \ldots \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha p^i & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$

Przypuśćmy również, że wszystkie rozkłady płci n dzieci są tak samo prawdopodobne. Pokaż, że dla $k \geq 1$ szansa, że rodzina ma dokładnie k chłopców jest równa

$$\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$P(k \text{ chłopców}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(k \text{ chłopców} \mid n \text{ dzieci}) \cdot P(n \text{ dzieci}) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \alpha \cdot p^n$$

Zachodzi $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Dla $k \geq 2$ zdefiniujmy

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^n = S_k \cdot \frac{p}{2} + S_{k-1} \cdot \frac{p}{2}$$

skąd $S_k = \frac{p}{2-p} S_{k-1}$. Pozostaje do pokazania, że $S_1 = \frac{2p}{(2-p)^2}$. Mamy $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^n$. Rozważmy szereg $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ dla $|x| < 1$. Szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie na zwartym podzbiorze koła zbieżności (na przykład na $[0, \frac{1}{2}] \ni \frac{p}{2}$). Zatem możemy różniczkować wyraz po wyrazie, czyli $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$. Stąd $S_1 = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{p}{2})^2} = \frac{2p}{(2-p)^2}$.

Zadanie 9.
W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Powtarzamy n razy następującą operację: losujemy kule z urny, następnie wkładamy ją z powrotem, dokładając dodatkowo jeszcze a kul tego samego koloru

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie k razy kulę czarną?

b) Wykazać, że szansa wylosowania za n-tym razem kuli białej wynosi $\frac{b}{b+c}$.

Rozwiązanie:

a) Niech B_i to zdarzenie polegające na tym, że mamy białą kulę w i-tym losowaniu, zaś C_i to zdarzenie polegające na tym, że mamy czarną kulę w i-tym losowaniu. Rozważmy przypadek dla $n = 3$. Mamy

$$P(B_1, C_2, C_3) = P(B_1) \cdot P(C_2 \mid B_1) \cdot P(C_3 \mid B_1, C_2) = \frac{b}{c+b} \cdot \frac{c}{c+b+a} \cdot \frac{c+a}{c+b+2a}$$

analogicznie

$$P(C_1, B_2, C_3) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{b}{c+b+a} \cdot \frac{c+a}{c+b+2a}$$
$$P(C_1, C_2, B_3) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{c+a}{c+b+a} \cdot \frac{b}{c+b+2a}$$

Stąd wniosek (który można łatwo udowodnić), że prawdopodobieństwo zależy tylko od liczby kul czarnych / białych, ale nie od kolejności ich wyjmowania. Zatem

$$P(\text{ } k \text{ czarnych kul w } n \text{ próbach }) = \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(c + i \cdot a) \cdot \prod_{i=0}^{n-k-1}(b + i \cdot a)}{\prod_{i=0}^{n-1}(c + b + a \cdot i)}$$

b) Rozważmy wynik $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, gdzie $w_i \in \{C, B\}$. Dla dowolnej permutacji $\pi : [n] \to [n]$ mamy $P(w_1, \ldots, w_n) = P(w_{\pi(1)}, \ldots, w_{\pi(n)})$, skąd

$$P(B_n) = P(w_n = B) = P(w_1 = B) = P(B_1) = \frac{b}{b+c}$$

bo możemy skorzystać z dowolnej permutacji π takiej, że $\pi(1) = n$.

Zadanie 10.

Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, gdzie $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.

Rozwiązanie:

Szukane prawdopodobieństwo jest równe (skorzystamy ze wzoru Bayesa)

$$\begin{aligned}
P(\text{ będzie } l \text{ potomków }) &= \sum_{k=l}^{\infty} P(\text{ będzie } l \text{ potomków} \mid \text{będzie } k \text{ jaj }) \cdot P(\text{ będzie } k \text{ jaj }) = \\
&= \sum_{k=l}^{\infty} \binom{k}{l} \cdot p^l (1-p)^{k-l} \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \\
&= \sum_{k=l}^{\infty} \frac{k!}{l!(k-l)!} \cdot p^l (1-p)^{k-l} \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^l}{l!} \cdot \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(1-p)^{k-l} \cdot \lambda^{k-l}}{(k-l)!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda} \cdot (p\lambda)^l}{l!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k \cdot \lambda^k}{k!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda} \cdot (p\lambda)^l}{l!} \cdot e^{\lambda - \lambda p} = \frac{e^{-\lambda p} \cdot (p\lambda)^l}{l!}
\end{aligned}$$

Zadanie 11.

a) Rzucono trzy kości do gry i na żadnej z nich nie wypadła ta sama ilość oczek. Jaka jest szansa, że przynajmniej na jednej z nich wypadło jedno oczko?

b) Wiadomo, że rzut 10 kośćmi dał co najmniej na jednej z nich jedno oczko. Jaka jest szansa, że zaszło to na dwóch lub więcej kościach?

Rozwiązanie:

a) Nie musimy uwzględniać kolejności kości, czyli możemy zakładać że na pierwszej kości wypadła jedynka. Szukane prawdopodobieństwo będzie równe

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie A to zdarzenie polegające na tym, że na pierwszej kostce wypadła jedynka, natomiast B to zdarzenie polegające na tym, że wyniki na kostkach się różnią. Mamy $|A \cap B| = \binom{5}{2}$, ponieważ wybieramy wartości dla dwóch pozostałych kostek na tyle sposobów. Mamy $|B| = \binom{6}{3}$, ponieważ wybieramy różne wartości na tyle sposobów. Stąd

$$P(A \mid B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}$$

(liczba zdarzeń elementarnych przy liczeniu obu prawdopodobieństw jest taka sama).

b) Niech A to zdarzenie polegające na tym, że wypadły co najmniej dwie jedynki, a B to zdarzenie polegające na tym, że wypadły co najmniej jedna jedynka. Wówczas szukane Prawdopodobieństwo to

$$P(A \mid B) = 1 - P(A' \mid B) = 1 - \frac{P(A' \cap B)}{P(B)}$$

gdzie A' oznacza że wypadła maksymalnie jedna jedynka. Mamy $P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$, bo dopełnienie zdarzenia że wypadła co najmniej jedna jedynka jest równe prawdopodobieństwu, że wypadło zero jedynek. Dalej $P(A' \cap B)$ to prawdopodobieństwo że wypadła dokładnie jedna jedynka i jest równe $P(A' \cap B) = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$, skąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A \mid B) = 1 - \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{10 \cdot \frac{5^9}{6^{10}}}{1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}} = 1 - \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10} - 5^{10}} = \frac{6^{10} - 3 \cdot 5^{10}}{6^{10} - 5^{10}}$$

Zadanie 12.
Harry Potter zgubił się na ulicy Pokątnej. Dwie trzecie spacerujących ulicą to dobrzy czarodzieje, którzy spytani o drogę odpowiadają poprawnie z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$ (ich odpowiedzi na powtórzone pytanie są niezależne, nawet gdy Harry pyta tę samą osobę kolejny raz o to samo). Pozostała jedna trzecia spacerujących to źli czarnoksiężnicy. Zły czarnoksiężnik spytany o drogę zawsze podaje złą odpowiedź.

a) Harry spytał losowego przechodnia, czy powinien skręcić w prawo czy w lewo. Usłyszał, że w prawo. Jaka jest szansa, że jest to odpowiedź poprawna?

b) Harry spytał tę samą osobę drugi raz o to samo. Znów usłyszał, że w prawo. Jaka jest szansa że jest to odpowiedź poprawna?

c) Harry spytał tę samą osobę trzeci raz o to samo. Znów usłyszał, że w prawo. Jaka jest szansa że jest to odpowiedź poprawna?

d) Harry spytał tę samą osobę czwarty raz o to samo. Znów usłyszał, że w prawo. Jaka jest szansa że jest to odpowiedź poprawna?

e) Załóżmy, że za czwartym razem przechodzień zmienił jednak zdanie i pierwszy raz odpowiedział, że w lewo. Jaka jest szansa, że jest to odpowiedź poprawna?

Podaj wartości liczbowe wyników.

Rozwiązanie:

a) Szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$H_1 = P(A \mid B)$$

gdzie A to zdarzenie polegające na tym, że droga w prawo jest dobra, natomiast B to zdarzenie polegające na tym, że człowiek powiedział „w prawo". Z twierdzenia Bayesa mamy

$$P(H_1) = P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A') \cdot P(A')}$$

gdzie A' oznacza że prawo to zła droga. Prawdopodobieństwo $P(B \mid A)$, czyli że randomowy człowiek powie że droga w prawo jest dobra, pod warunkiem że rzeczywiście jest dobra, wynosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ bo z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ spytamy dobrego człowieka i on odpowie dobrze z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Prawdopodobieństwo $P(A)$, czyli że droga w prawo jest dobra wynosi $\frac{1}{2}$. Prawdopodobieństwo $P(B \mid A')$, czyli że randomowy człowiek powie że droga w prawo jest dobra, pod warunkiem że jest ona zła jest równe $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$, ponieważ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ spytamy złego czarodzieja i on skłamie oraz z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ spytamy dobrego czarodzieja, ale on się pomyli z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Oczywiście Prawdopodobieństwo $P(A')$, czyli że droga w prawo jest dobra wynosi $\frac{1}{2}$. Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(H_1) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Analogicznie rozumując można pokazać, że wzór na to że odpowiedź jest poprawna gdy osoba k-ty raz powie to samo to

$$P(H_k) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \cdot \frac{1}{2}}$$

Mamy więc

b) $P(H_2) = \frac{1}{2}$

c) $P(H_3) = \frac{9}{20}$

d) $P(H_4) = \frac{27}{70}$

e) Niech A to zdarzenie polegające na tym, że droga w lewo jest dobra, natomiast B to zdarzenie polegające na tym, że człowiek powiedział „prawo, prawo, prawo, lewo". Z twierdzenia Bayesa mamy

$$\begin{aligned} P(H_L) = P(A \mid B) &= \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A') \cdot P(A')} = \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Przy czym przez A' oznaczyliśmy zdarzenie polegające na tym, że droga w prawo jest dobra.

Zadanie 13.
Ron jest w takiej samej sytuacji jak Harry, ale ma powody by sądzić, że z prawdopodobieństwem ε należy skręcić w prawo, czyli $P($ prawo jest dobre $) = \varepsilon$. Pokaż, że

a) bez względu na to jaka będzie pierwsza odpowiedź, Ron nadal będzie uważał, że należy skręcić w prawo z prawdopodobieństwem ε.

b) jeśli pierwsze dwie odpowiedzi będą takie same, Ron nadal będzie uważał, że należy skręcić w prawo z prawdopodobieństwem ε.

c) co uzna Ron po usłyszeniu trzech takich samych odpowiedzi? Policz

$$P(\text{ należy iść w prawo } \mid PPP) \quad \text{i} \quad P(\text{ należy iść w prawo } \mid LLL)$$

Podaj wartość liczbową tych prawdopodobieństw dla $\varepsilon = \frac{9}{20}$.

Rozwiązanie:

a) Rozumowanie jest identyczne jak w zadaniu 2. z tym, że prawdopodobieństwo, że droga w prawo jest dobra wynosi ε zamiast $\frac{1}{2}$. Mamy więc

$$P(\text{ należy iść w prawo } \mid P) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \varepsilon}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \varepsilon + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4})(1-\varepsilon)} = \varepsilon$$

oraz

$$P(\text{ należy iść w prawo } \mid L) = \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \varepsilon}{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \varepsilon + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot (1-\varepsilon)} = \varepsilon$$

b) Analogicznie

$$P(\text{ należy iść w prawo } \mid PP) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \varepsilon}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \varepsilon + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4})(1-\varepsilon)} = \varepsilon$$

oraz

$$P(\text{ należy iść w prawo } \mid LL) = \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \varepsilon}{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \varepsilon + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot (1-\varepsilon)} = \varepsilon$$

c) Tu również mamy analogiczne uzasadnienie ze wzoru Bayes'a

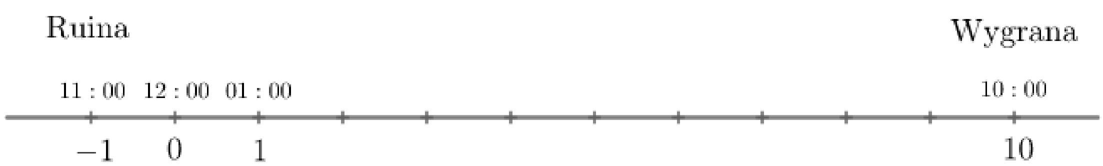
$$P(\text{ należy iść w prawo } | \; PPP) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\varepsilon}{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\varepsilon + \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)(1-\varepsilon)} \overset{\varepsilon=\frac{9}{20}}{=} \frac{81}{202}$$

oraz

$$P(\text{ należy iść w prawo } | \; LLL) = \frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)\cdot\varepsilon}{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)\cdot\varepsilon + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot(1-\varepsilon)} \overset{\varepsilon=\frac{9}{20}}{=} \frac{99}{198}$$

Zadanie 14.
W zaczarowanym zegarze wskazówka ustawiona jest początkowo na godzinę dwunastą. Co godzinę wskazówka porusza się jednak z równymi prawdopodobieństwami w prawo lub w lewo. Wiedząc, że wraz z wybiciem ostatniej niepokazanej wcześniej godziny zegar zamiera już na zawsze, wyznacz prawdopodobieństwo, że godziną wskazaną jako ostatnia będzie jedenasta.

Rozwiązanie:
Wykorzystamy metodę z zadania o ruinie gracza. Przegraną będzie dojście do godziny $11:00$, startem będzie godzina $12:00$, natomiast wygraną będzie godzina $10:00$, ponieważ nie chcemy dojść do godziny $11:00$ przed dojściem do godziny $10:00$.



Stąd $k=1$, $a=10$, więc szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(\text{ Wygrana }) = 1 - P(\text{ Ruina }) = 1 - \frac{a}{a+k} = 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$$

Zadanie 15.
Pan Weasley oraz $n-1$ nie-czarodziejów leci mugolskimi liniami lotniczymi z Londynu do Glasgow. W samolocie jest n miejsc, a bilety są numerowane. Pech chciał, że pan Weasley wchodzi jako pierwszy i siada na losowym miejscu. Kolejni pasażerowie siadają na swoich miejscach jeśli te są jeszcze puste. W przeciwnym przypadku siadają na miejscu wybranym losowo z miejsc niezajętych. Policz prawdopodobieństwo, że ostatni pasażer usiądzie na swoim miejscu.

Rozwiązanie:
I sposób:
Miejsce na jakie może usiąść ostatnia osoba wchodząca to właściwe miejsce lub miejsce Pana Weasleya, ponieważ jeśli wolne byłoby miejsce i-te, to znaczy że i-ta osoba nie usiadła na swoim miejscu choć mogła. Zatem jeśli osoba wchodzi na pokład i jej miejsce jest zajęte, to wolne są miejsca zarówno Pana Weasleya jak i ostatniego pasażera, bo w przeciwnym przypadku ona mogłaby zająć przez przypadek te drugie miejsce. Czyli jeśli osoba wchodzi na pokład i wolne jest miejsce Pana Weasleya albo ostatniego pasażera (albo w znaczeniu wykluczającym), to osoba siada na swoim miejscu. Stąd prawdopodobieństwo, że ostatnie miejsce to miejsce ostatniego pasażera

jest równe prawdopodobieństwu, że miejsce Pana Weasley'a zostało zajęte przed miejscem ostatniej osoby. Gdy randomowa osoba wchodzi do samolotu i musi wybrać randomowe miejsce, pytamy jakie jest prawdopowobieństwo, że wybierze miejsce Pana Weasley'a pod warunkiem że wybiera z miejsca Pana Weasley'a i ostatniego pasażera. To prawdopodobieństwo jest równe oczywiście $\frac{1}{2}$, zatem tyle też wynosi szukane prawdopodobieństwo.

II sposób:
Osoby i miejsca na które siadają możemy utożsamić z permutacją zbioru n-elementowego

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

gdzie i to i-ty pasażer, a $\sigma(i)$ to miejsce na którym siada. Problem z zadania możemy więc utożsamić z tym, że 1 i n nie znajdują się w jednym cyklu. Szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$1 - P(\text{ 1 i } n \text{ są w tym samym cyklu })$$

Policzmy więc prawdopodobieństwo, że 1 i n są w tym samym cyklu. Niech k oznacza długość cyklu w którym są 1 i n, wówczas liczba permutacji, że 1 i n są w tym samym k-cyklu jest równa

$$\binom{n-2}{k-2} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!$$

bo na $\binom{n-2}{k-2}$ sposoby wybieramy elementy do k-cyklu i wraz z n-em permutujemy je na $(k-1)!$ sposobów, a pozostałe $n-k$ elementów permutujemy normalnie na $(n-k)!$ sposobów. Szukane prawdopodobieństwo jest więc równe

$$1 - \frac{\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!}{n!} = 1 - \frac{(n-2)! \cdot \sum_{k=2}^{n} (k-1)}{n!} = 1 - \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

III sposób:
Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$P(n) = P(A \mid W_i) \cdot P(W_i)$$

gdzie A oznacza zdarzenie, że ostatni pasażer usiadł na swoim miejscu, zaś W_i oznacza zdarzenie, że Pan Weasley usiadł na miejscu i-tego pasażera. Mamy więc

$$P(n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} P(n-1) \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n}$$

bo jeśli Pan Weasley usiadł na miejscu i-tego pasażera, to mamy analogiczną sytuację, tylko że i-ty pasażer dokonuje losowego wyboru. Mamy więc rekurencję

$$n \cdot P(n) = 1 + (n-2) \cdot P(n-1)$$

Indukcją można łatwo pokazać, że $P(n) = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenia 5

Lemat Borela-Cantellego

Lemat Borela-Cantellego

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$, wówczas jeśli

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty \ \text{ to } \ P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n} A_k\right) = 0$$

Mamy

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n} A_k \ \Leftrightarrow \ \forall_n \ \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ \Leftrightarrow \ \forall_n \ \exists_{k>n} \ \omega \in A_k$$

czyli inaczej, że ω należy do nieskończenie wielu zbiorów A_i. Równoważnie możemy napisać

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty \ \Rightarrow \ P(A_i \text{ i.o.}) = 0$$

gdzie i.o. to skrót od infinitely often.

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ będą **niezależne**, wówczas jeśli

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty \ \text{ to } \ P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n} A_k\right) = 1 \ \text{ lub inczej } \ P\left(A_i \text{ i.o.}\right) = 0$$

Założenie niezależności można osłabić, wystarczy na przykład niezależność parami. Pewne ograniczenia są jednak konieczne.

Zadanie 1.
Niech b_n oznacza pierwsze n cyfr po przecinku z rozwinięcia dwójkowego liczby $\frac{e}{\pi}$. Rzucamy symetryczną monetą nieskończenie wiele razy. Kodując orzeł jako 1 oraz reszka jako 0, jaka jest szansa, że:

a) uzyskamy nieskończenie wiele wystąpień ciągu b_{2021}

b) wystąpią wszystkie podciągi b_n, $n \geq 1$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{e}{\pi} \stackrel{2}{=} 0,11011101\ldots$$

$b_1 = (1)$, $b_2 = (11)$, $b_3 = (110)$ itd.

a) Podzielmy wszystkie rzuty na kolejne bloki po 2021 prób, to znaczy rzuty $1-2021$, $2022-4022$, itd. Wyniki w każdym bloku są niezależne, bo bloki są rozłączne. Możemy skorzystać z lematu Borela-Cantellego. Prawdopodobieństwo uzyskania b_{2021} jest w każdym bloku takie samo i wynosi $p_{2021} = 2^{-2021}$. Zatem

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\text{ uzyskamy } b_{2021} \text{ w } i\text{-tym bloku }) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{2021} = \infty$$

skąd szukane prawdopodobieństwo wynosi 1.

b) Szansa uzyskania b_k to 1 dla każdego k, bo rozumowanie wyżej działa też dla $k \neq 2021$. Przecięcie przeliczalnej liczby zbiorów o prawdopodobieństwie 1 pozostaje zbiorem o prawdopodobieństwie 1, ponieważ jeśli $P(B_n) = 1$, to

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1 - P\left(\left[\bigcap B_n\right]^c\right) = 1 - P\left(\bigcup B_n^c\right) \geq 1 - \sum P(B_n^c) = 1 - \sum 0 = 1$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi 1.

Zadanie 2.
Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ są niezależne oraz $P(A_n) < 1$ dla wszystkich n. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

a) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n

b) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n

Rozwiązanie:
a) $\Rightarrow$ b) Z lematu Borela-Cantellego, wystarczy pokazać że $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$. Prawdopodobieństwo, że zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n wynosi 1 możemy zapisać jako

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 \text{ jest to równoważne temu, że } P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = 0$$

jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ są niezależne, to również niezależne są zdarzenia $A_1^c, \ldots, A_n^c, \ldots$, skąd

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; 0 = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

Załóżmy, że $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$. Niech $a_n = P(A_n)$ i ustalmy $\varepsilon \in (0,1)$. Istnieje wówczas $N \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n < \varepsilon$. Dalej, dla każdego $m > N$ mamy

$$\prod_{i=N}^{m} (1 - a_n) > 1 - \sum_{i=N}^{m} a_n > 1 - \varepsilon > 0$$

skąd

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_n) = \prod_{i=1}^{N-1} (1 - a_i) \cdot \prod_{i=N}^{\infty} (1 - a_i) > \prod_{i=1}^{N-1} (1 - a_i) \cdot (1 - \varepsilon) > 0$$

Mamy sprzeczność, zatem $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$, skąd wynika teza.

b) $\Rightarrow$ a) Skoro z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń, to również zajdzie co najmniej jedno.

Zadanie 3.
Wykonujemy nieskończenie wiele niezależnych eksperymentów. Szansa sukcesu w n-tej próbie wynosi $n^{-\alpha}$, a prawdopodobieństwo porażki to $1-n^{-\alpha}$, gdzie $\alpha > 0$. Interesuje nas zdarzenie polegające na uzyskaniu k kolejnych sukcesów nieskończenie wiele razy. Jakie są jego szanse?

Rozwiązanie:
Niech S_n oznacza sukces za n-tym razem, czyli $P(S_n) = n^{-\alpha}$. Ciąg eksperymentów dzielimy na bloki długości k. Bloki są rozłączne oraz wyniki na poszczególnych blokach są niezależne. Stąd prawdopodobieństwo samych sukcesów w jednym bloku będzie równe

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} S_i\right) = 1^{-\alpha}\cdot 2^{-\alpha}\cdot\ldots\cdot k^{-\alpha} \geq k^{-k\alpha}$$

$$P\left(\bigcap_{i=k+1}^{2k} S_i\right) = (k+1)^{-\alpha}\cdot\ldots\cdot(k+k)^{-\alpha} \geq (2k)^{-k\alpha}$$

$$\vdots$$

$$P\left(\bigcap_{i=nk+1}^{k(n+1)} S_i\right) = (nk+1)^{-\alpha}\cdot\ldots\cdot(nk+k)^{-\alpha} \geq (nk)^{-k\alpha}$$

skąd

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=kn+1}^{k(n+1)}\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty}(nk)^{-k\alpha} = k^{-k\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k\alpha}$$

szereg ten jest rozbieżny o ile $\alpha k \leq 1$ i wówczas z lematu Borela-Cantellego szukane prawdopodobieństwo wynosi 1. Dla $\alpha k > 1$ mamy

$$\sum_{n=k}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=n-k+1}^{n} S_i\right) = \sum_{n=k}^{\infty}[n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)]^{-\alpha} \leq \sum_{n=k}^{\infty}(n-k+1)^{-k\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k\alpha} < \infty$$

więc z lematu Borela-Cantellego szukana szansa wynosi 0.

Zadanie 4.
Ciąg zdarzeń A_n spełnia:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

Jaka jest szansa, że zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n?

Rozwiązanie:

$$P = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n-k}^{\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k} A_n \setminus A_{n+1}^{-} + \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \setminus A_{n+1}\right) + P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{k\to\infty} P\left(\sum_{n=k}^{\infty} A_n \setminus A_{n+1}\right) + P\left(\bigcap_{n-k}^{\infty} A_n\right) = 0$$

Drugie wyrażenie zbiega do zera na mocy drugiej kropki, zaś dla pierwszego wyrażenia mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n+1}) < \infty$$

czyli ciąg sum częściowych ma skończoną granicę, czyli od pewnego wyrazu zbiega do zera. Zatem z lematu B-C $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$

Ćwiczenia 6

$\pi - \lambda$ układy

- Rodzina $\Pi \subseteq \mathcal{F}$ jest π-układem jeśli $A, B \in \Pi$ pociąga za sobą $A \cap B \in \Pi$.
- Rodzina $\Lambda \subseteq \mathcal{F}$ jest λ-układem jeśli
  1. $\emptyset, \Omega \in \Lambda$
  2. jeśli $A, B \in \Lambda$ i $A \subseteq B$ to $B \setminus A \in \Lambda$
  3. jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Lambda$ i $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda$

Lemat: (O π-λ układach) Jeśli π-układ Π jest zawarty w λ-układzie Λ, to σ-ciało generowane przez Π jest zawarte w Λ

$$\Pi \subseteq \Lambda \;\Rightarrow\; \sigma(\Pi) \subseteq \Lambda$$

Jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, to $\sigma(\mathcal{A})$ to najmniejsze σ-ciało zawierające $\mathcal{A}$, czyli $\displaystyle\bigcap_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F},\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}} \mathcal{H}$.

Zadanie 1.
Niech $\mu, \nu : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ będą miarami probabilistycznymi na prostej. Wykazać, że jeśli $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$ dla wszystkich $a < b$ to $\mu \equiv \nu$ dla wszystkich zbiorów borelowskich.

Rozwiązanie:
Zbiór $\Pi = \{[a,b] \mid a < b\} \cup \{\emptyset\}$ jest π-układem, bo przecięcie zbiorów postaci $[a,b]$ jest zbiorem postaci $[a,b]$. Ten π-układ generuje $B(\mathbb{R})$. Zbiór $\Lambda = \{A \in B(\mathbb{R}) \mid \mu(A) = \nu(A)\}$ jest λ-układem, bo

1. μ, ν są miarami probablistycznymi, więc $\emptyset, \mathbb{R} \in \Lambda$
2. niech $\mu(A) = \nu(A)$, $\mu(B) = \nu(B)$ oraz $A \subseteq B$, wówczas $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$
3. niech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Lambda$, czyli $\mu(A_i) = \nu(A_i)$ dla każdego i. Wówczas

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

zatem $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda$

Stąd z lematu o π-λ układach, σ-ciało generowane przez Π, czyli $B(\mathbb{R})$ jest zawarte w Λ, zatem $\mu \equiv \nu$ dla wszystkich zbiorów borelowskich.

Zadanie 2.
Niech $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ będzie miarą skończoną na prostej. Niech teraz $f \in L^1(\lambda)$ będzie funkcją spełniającą

$$\int_{(-\infty,x]} f \, d\lambda = 0$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że $f \equiv 0$ p.w.

Rozwiązanie:
Zbiór $\Pi = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ jest π-układem generującym $B(\mathbb{R})$. Zbiór $\Lambda = \{A \in B(\mathbb{R}) \mid \int_A f\, d\lambda = 0\}$ jest λ-układem, bo

1. $\emptyset \in \Lambda$ oraz z twierdzenia lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f \cdot \chi_{(-\infty,n]}\ \lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(-\infty,n]} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

   zatem $\mathbb{R} \in \Lambda$

2. Niech $A, B \in \Lambda$, wówczas

$$\int_{B\setminus A} f\, d\lambda = \int_B f\, d\lambda - \int_A f\, d\lambda = 0 - 0 = 0$$

   zatem $B \setminus A \in \Lambda$

3. Niech $\int_{A_n} f\, d\lambda = 0$ dla każdego n oraz $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$, wówczas dla $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mamy

$$\int_A f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_A\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_{A_n}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

   zatem $A \in \Lambda$

Dalej z lematu o π-λ układach mamy $\Lambda = B(\mathbb{R})$. Mamy

$$A_+ = \{f > 0\} \in \Lambda \quad \text{oraz} \quad A_- = \{f < 0\} \in \Lambda$$

zatem

$$0 = \int_{A_+} f\, d\lambda = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{f \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})} f\, d\lambda + \int_{f\geq 1} f\, d\lambda \geq$$

$$\geq \sum_{n=2}^{\infty} \lambda\left(\left\{f \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)\right\}\right) \cdot \frac{1}{n} + \lambda(\{f \geq 1\}) \cdot 1$$

skąd $\lambda(\{f \geq 1\}) = 0$ oraz dla każdego $n \geq 2$ mamy $\lambda\left(\left\{f \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)\right\}\right) = 0$. Analogicznie mamy dla A_-, skąd $f = 0$ prawie wszędzie.

Ćwiczenia 7

Zmienne losowe, Dystrybuanty

Zmienne losowe, rozkład, dystrybuanta

- Rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^n$ nazywamy każdą miarę probablistyczną na $B(\mathbb{R}^n)$
- Zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy wszystkie takie odwzorowania $X : \Omega \to \mathbb{R}$, że $A \in B(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$
- Wektorem losowym na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy wszystkie takie odwzorowania $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, że $A \in B(\mathbb{R}^n) \Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$
- Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy rozkład μ_X określony na $B(\mathbb{R})$ jako
$$\forall_{A \in B(\mathbb{R})} \quad \mu_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(X \in A)$$
- Rozkładem wektora losowego X nazywamy rozkład μ_X określony na $B(\mathbb{R}^n)$ jako
$$\forall_{A \in B(\mathbb{R}^n)} \quad \mu_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(X \in A)$$
- Powiemy, że rozkład μ na $\mathbb{R}^n$ ma gęstość f, gdzie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, jeśli
$$\mu(A) = \int_A f(x)\, dx \ \ \forall_{A \in B(\mathbb{R}^n)}$$
Idea jest taka, że zamiast pracować na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, R)$, chcemy pracować na przestrzeni $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \mu)$
- Dystrybuantą rozkładu μ na $\mathbb{R}^n$ nazywamy $F_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$F_\mu(t_1, \ldots, t_n) = \mu((-\infty, t_1] \times \ldots \times (-\infty, t_n])$$
- Dystrybuantą wektora losowego $(X_1, \ldots, X_n)$ nazywamy
$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = P(X_1 \leq t_1, \ldots, X_n \leq t_n)$$
- Dystrybuantą zmiennej losowej
$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

Uwaga: Jeśli $(X_1, \ldots, X_n)$ i $(Y_1, \ldots, Y_n)$ mają tę samą dystrybuantę F, to mają ten sam rozkład. Dystrybuanta wyznacza jednoznacznie rozkład.

Własności dystrybuanty

1. F_μ jest niemalejąca
2. $\lim\limits_{t \to \infty} F_\mu(t) = 1$ oraz $\lim\limits_{t \to -\infty} F_\mu(t) = 0$

3. F_μ jest prawostronnie ciągła

Zadanie 1.
Co jest większe: prawdopodobieństwo, że kwadrat losowo wybranej liczby z przedziału $[0, 10]$ będzie większy niż 25, czy prawdopodobieństwo, że pierwiastek kwadratowy losowo wybranej liczby z przedziału $[0, 100]$ będzie większy niż 5?

Rozwiązanie:
Niech X to losowo wybrana liczba z $[0, 10]$ oraz Y to losowo wybrana liczba z $[0, 100]$. Wówczas

$$P(X^2 > 25) = P(X > 5 \cup X < -5) = P(X > 5) + P(X < -5) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

oraz

$$P(\sqrt{Y} > 5) = P(Y > 25) = \frac{3}{4}$$

Zadanie 2.
Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p, aż do wypadnięcia k-tego orła (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

Rozwiązanie:
Mamy

$$P(X = n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n < k \\ \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} & \text{gdy } n \geq k \end{cases}$$

Zadanie 3.
Na przejściu dla pieszych przez ulicę Pawińskiego światło zielone świeci się przez 30 sekund, a czerwone – przez 60 sekund. Pani Klementyna podchodzi do tego przejścia dla pieszych w losowym momencie.

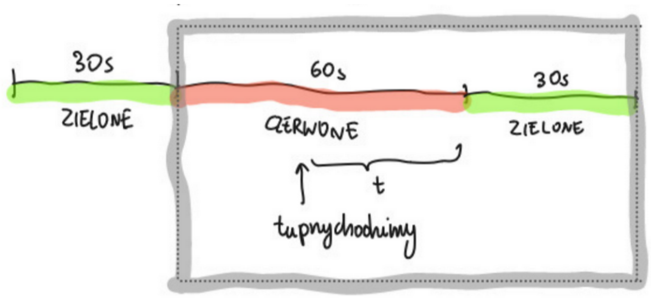
a) Wyznaczyć rozkład czasu oczekiwania Pani Klementyny na zielone światło.

b) Pani Klementyna czeka na zielone światło od 30 sekund. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie czekać przez co najmniej 10 kolejnych sekund?

Rozwiązanie:

a) Rozkład jest jednoznacznie wyznaczony przez dystrybuantę

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t < 0 \\ 1 & \text{gdy } t \geq 60 \\ \frac{30+t}{90} & \text{gdy } t \in [0, 60) \end{cases}$$



b) Mamy

$$P(\text{czeka jeszcze} \geq 10\ s \mid \ \text{czeka już } 30\ s) = \frac{P(\text{czeka jeszcze} \geq 10\ s \text{ i czeka już } 30\ s)}{P(\text{czeka już } 30\ s)}$$

Zdarzenie polegające na tym, że będzie czekać jeszcze co najmniej 10 sekund i czeka już 30 sekund jest równe temu, że będzie czekać co najmniej 40 sekund, czyli że przyszła w pierwszych 20 sekundach czasu trwania czerwonego światła. Zdarzenie polegające na tym, ze czeka już 30 sekund oznacza, że przyszła w pierwszych 30 sekundach. Stąd

$$\frac{P(\text{czeka jeszcze} \geq 10\ s \text{ i czeka już } 30\ s)}{P(\text{czeka już } 30\ s)} = \frac{\frac{20}{90}}{\frac{30}{90}} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 4.
Rzucamy dwa razy kostką. Niech X i Y oznaczają odpowiednio minimalną i maksymalną liczbę oczek uzyskanych w jednym rzucie. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X i Y. Wykazać, że zmienne X i $7-Y$ mają ten sam rozkład.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy dystrybuante X mamy

$$P(X \leq k) = P(\text{min rzut z dwóch} \leq k) = 1 - P(\text{min rzut z dwóch} > k) =$$

$$= 1 - P(\text{min rzut z dwóch} \geq k+1) = 1 - P(\text{na obu kostkach} \geq k+1) =$$

$$= 1 - P(\text{na kostce} \geq k+1)^2 = 1 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^2$$

Można też inaczej

$$P(X = k) = P(\text{na obu kostkach } k \cup \text{na jednej } k \text{ a na drugiej} > k) =$$

$$= P(\text{na obu kostkach } k) + P(\text{na jednej } k \text{ a na drugiej } > k) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{6-k}{6}\right) = \frac{1+12-2k}{36} = \frac{13-2k}{36}$$

Stąd

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{13-2k}{36} & \text{gdy } k \in \{1,2,\ldots,6\} \\ 0 & \text{gdy } k \notin \{1,2,\ldots,6\} \end{cases}$$

$$P(Y = k) = P(\text{na obu kostkach } k \cup \text{na jednej } k \text{ a na drugiej} < k) =$$

$$= P(\text{na obu kostkach } k) + P(\text{na jednej } k \text{ a na drugiej } < k) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{k-1}{6}\right) = \frac{1+2k-2}{36} = \frac{2k-1}{36}$$

Stąd

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{36} & \text{gdy } k \in \{1, 2, \ldots, 6\} \\ 0 & \text{gdy } k \notin \{1, 2, \ldots, 6\} \end{cases}$$

Sprawdźmy, że zmienne X oraz $7 - Y$ mają ten sam rozkład

$$P(7 - Y = k) = P(Y = 7 - k) = \frac{2 \cdot (7-k) - 1}{36} = \frac{13 - 2k}{36} = P(X = k)$$

Zadanie 5.

a) Zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4 są niezależne oraz $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{1}{3}$, $P(A_3) = \frac{2}{3}$ i $P(A_4) = \frac{1}{4}$. Obliczyć $P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)$ oraz $P\left((A_1 \cup A_2) \setminus (A_3 \cup A_4)\right)$.

b) W urnie znajduje się jedna kula biała i jedna czarna. Wykonujemy następujący ciąg losowań: losujemy jedną kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy ją z powrotem i dorzucamy jedną kulę czarną. Czynność powtarzamy do momentu wylosowania kuli białej. Niech X oznacza liczbę wykonanych losowań. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

Zadanie 6.
Z trójkąta równobocznego ABC o polu 3 losujemy punkt D. Niech X oznacza najmniejsze spośród pól trójkątów ABD, BCD, CAD. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X.

Zadanie 7.
Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -2, \\ \frac{6+3t}{20} & \text{dla } t \in [-2, 2), \\ \frac{4}{5} & \text{dla } t \in [2, 4), \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Wyznaczyć

a) $P(X < 0)$,=

b) $P(X = -2)$

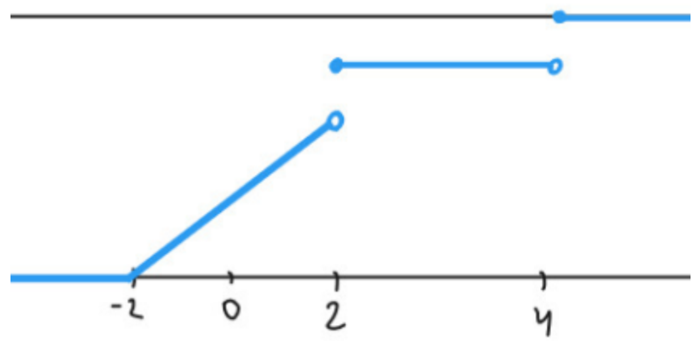
c) $P(X = 2)$

d) $P(1 \neq X < 3)$

e) $P(X \geq 4)$

f) $P(X > 4)$.

Rozwiązanie:



a) $P(X<0)=P(X\leq 0)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, bo X jest ciągłe w 0

b) $P(X=-2)=P(X\leq -2)-P(X<-2)=P(X\leq -20-P(X\leq -2)=0$, bo X ciągłe w -2

c) $P(X=2)=P(X\leq 2)-P(X<2)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$, bo $P(X<2)=\lim\limits_{h\to 0^-}P(X\leq 2+h)=\frac{3}{5}$

d) $P(1\leq X<3)=P(X<3)-P(X<1)=\frac{4}{5}-\frac{9}{20}=\frac{7}{20}$

e) $P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

f) $P(X>4)=1-P(X\geq 4)=1-1=0$

Zadanie 8.
Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & \text{dla } t<0,\\ \frac{t}{2} & \text{dla } t\in[0,2),\\ 1 & \text{dla } t\geq 2.\end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę zmiennych losowych

a) $Y=\max\{1,X\}$

b) $Z=\min\{X,X^2\}$.

Rozwiązanie:

a)
$$P(Y\leq k)=P(\max\{1,X\}\leq k)=P(X\leq k\wedge 1\leq k)=$$
$$=P(X\leq k)\cdot P(1\leq k)=\begin{cases}0 & \text{gdy } k<1\\ P(X\leq k) & \text{gdy } k\geq 1\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{gdy } k<1\\ \frac{k}{2} & \text{gdy } k\in[1,2)\\ 1 & \text{gdy } k\geq 2\end{cases}$$

b)

$$P(Z \leq k) = P(\min\{X, X^2) \leq k) = P(X \leq k \vee X^2 \leq k) =$$
$$= 1 - P((X \leq k \vee X^2 \leq k)^c) = 1 - P((X \leq k)^c \wedge (X^2 \leq k)^c) =$$
$$= 1 - P(X > k \wedge X^2 > k) = \begin{cases} 1 - P(X > k) & \text{gdy } k \geq 1 \\ 1 - P(X^2 > k) & k < 1 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} P(X \leq k) & \text{gdy } k \geq 1 \\ P(X^2 \leq k) & \text{gdy } k < 1 = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k < 0 \\ \sqrt{\frac{k}{2}} & \text{gdy } k \in [0,1) \\ \frac{k}{2} & \text{gdy } k \in [1,2) \\ 1 & \text{gdy } k \geq 2 \end{cases} \end{cases}$$

Zadanie 9.
Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leq t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leq t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } \frac{3}{7} \leq t \end{cases}$$

Policz

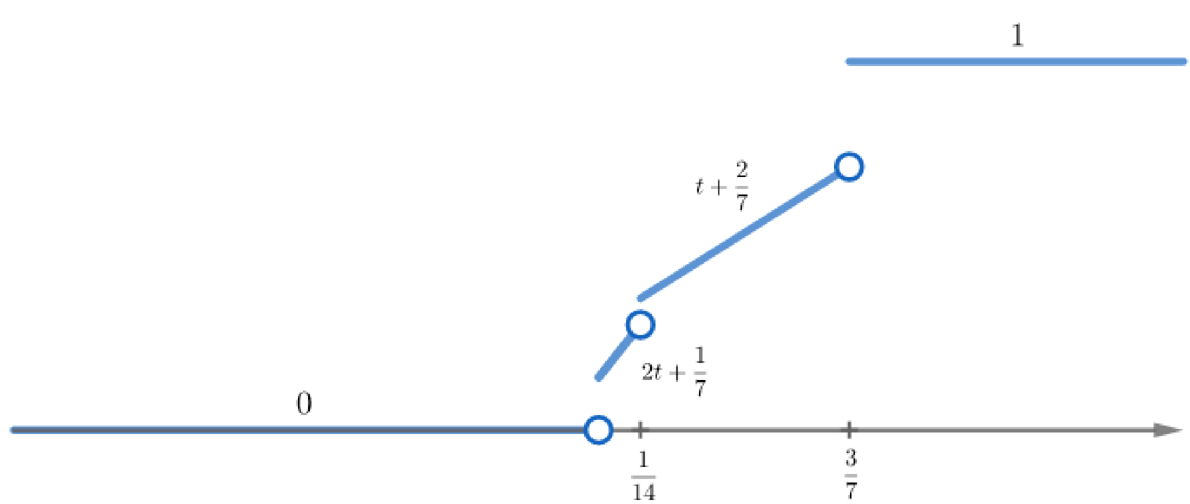
a) $P(X \geq \frac{3}{7})$

b) $P(0 < X < \frac{3}{7})$

c) $P(X = 0)$

d) $P(\frac{1}{14} \leq X \leq \frac{3}{7})$

Rozwiązanie:



Mamy

$$P(X<t)=P\left(\bigcup_{s_n\to t^-, s_n<t}\{X\le s_n\}\right)=\lim_{s_n\to t^-}P(X\le s_n)=\lim_{s_n\to t^-}F_X(s_n)=F_X(t^-)$$

zatem

a) $P(X\ge \frac{3}{7})=1-P(X<\frac{3}{7})=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$

b) $P(0<X<\frac{3}{7})=P(X<\frac{3}{7})-P(X\le 0)=\frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$

c) $P(X=0)=P(X\le 0)-P(X<0)=\frac{1}{7}-0=\frac{1}{7}$

d) $P(\frac{1}{14}\le X\le \frac{3}{7})=P(X\le\frac{3}{7})-P(X<\frac{1}{14})=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

Zadanie 10.
Dana jest zmienna losowa X o dystrybuancie F. Wyznaczyć dystrybuanty zmiennych

a) $X^+=\max\{0,X\}$

b) $X^-=-\min\{0,X\}$

c) $|X|=X^+-X^-$

d) $-X$

Rozwiązanie:

a) $F_{X^+}=P(\max\{0,X\}\le t)$ zatem dla $t<0$ mamy $F_{X^+}=0$, natomiast dla $t\ge 0$ mamy $F_{X^+}=P(0\le t, X\le t)=P(X\le t)=F_X(t)$

b) $F_{X^-}(t)=P(-\min\{0,X\}\le t)$ zatem dla $t<0$ mamy $F_{X^-}(t)=0$, natomiast dla $t\ge 0$ mamy $F_{X^-}(t)=P(\min\{0,X\}\ge -t)=P(0\ge -t, X\ge -t)=P(X\ge -t)=1-P(X<-t)=1-F_X(-t^-)$

c) $F_{|X|}(t)=P(|X|\le t)$ zatem dla $t<0$ mamy $F_{|X|}(t)=0$, natomiast dla $t\ge 0$ mamy $F_{|X|}(t)=P(-t\le X\le t)=P(X\le t)-P(X<t)=F_X(t)-F_X(-t^-)$

d) $F_{-X}(t)=P(-X\le t)=P(X\ge -t)=1-P(X<-t)=1-F_X(-t^-)$

Zadanie 11.
Zmienna losowa X ma ten sam rozkład co e^{X-1}. Udowodnić, że $P(X=1)=1$.

Rozwiązanie:
Skoro $X\sim e^{X-1}$, to $P(X=e^{X-1})=1 \Leftrightarrow P(e^{\ln X}=e^{X-1}=1\Leftrightarrow P(\ln X=X-1)=1\Leftrightarrow P(X=1)=1$

Zadanie 12.
Załóżmy, że $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ jest prawostronnie ciągłą, niemalejącą funkcją spełniającą $\lim_{t\to-\infty}F(t)=$

0, $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Niech $\Omega = (0,1)$, niech F będzie σ-ciałem zbiorów borelowskich na Ω, a P niech będzie prawdopodobieństwem geometrycznym na Ω. Zdefiniujmy zmienną losową X na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) wzorem

$$X(t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : F(s) \neq t\}.$$

Wykazać, że F jest dystrybuantą zmiennej losowej X.

Zadanie 13.
Wyznaczyć wszystkie takie zmienne losowe X o wartościach w $\{0,1,2,\ldots\}$, że $P(X=n) > 0$ oraz $P(X = m+n \,|\, X = n) = P(X=m)$ dla wszystkich $m, n \in \{0,1,2,\ldots\}$.

Definicja: Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $S \subseteq \mathbb{R}$ takie że $S = \{s_1, \ldots, s_n, \ldots\}$ (gdzie $|S| \leq \aleph_0$) oraz $\forall_{A\in B(\mathbb{R})}\ P(X \in A) = \sum_i P(X = s_i)$, gdzie $s_i \in A$.

Niech $S_X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(X = x) > 0\}$. Jeśli $P(X \in S_X) = 1$, to mówimy, że X ma rozkład dyskretny (to znaczy P_X jest dyskretny) i mamy

$$P(X = x)P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - \lim_{h\to 0^-} F_X(x+h) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

Przykłady rozkładów dyskretnych

- Rozkład skupiony w punkcie a, oznaczamy δ_a
$$P(X = a) = 1 \qquad S_X = \{a\}$$
- Rozkład dwupunktowy skupiony w a, b, gdzie $a \neq b$ oraz $p \in (0,1)$
$$P(X = a) = p \quad P(X = b) = 1 - p \qquad S_X = \{a, b\}$$
- Rozkład Bernoulliego z parametrami n, p oznaczamy $B(n,p)$
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad S_X = \{(0,1,2,3,\ldots,n\} \ni k$$
- Rozkład geometryczny z parametrem p, oznaczamy $Geom(p)$
$$P(X = k) = (1-p)^k \cdot p \qquad S_X = \{0,1,2,3,\ldots\} \ni k$$
- Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, oznaczamy $Poiss(\lambda)$
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad S_X = \{0,1,2,3,\ldots\} \ni k$$

Zadanie 14.

a) Pokazać, że $F_X(x)$ jest ciągła w $x = x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(X = x_0) = 0$

b) Pokazać, że rzeczywista zmienna losowa ma rozkład dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy jej dystrybuanta jest czysto skokowa, to znaczy

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} \Big(F_X(x) - F_X(x^-)\Big) = 1$$

c) Wskazać zmienną o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuanta jest ściśle rosnąca

Rozwiązanie:

a) Mamy $\{x_0 \mid x_0 = X\} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{y_i \mid y_i < X \leq x_0\}$. gdzie y_i to ciąg rosnący zbiegający do x_0. Zatem

$$P(X = x_0) = \lim_{y_i\to x_0} P(y_i < X \leq x_0) = \lim_{y_i\to x_0} (P(X \leq x_0) - P(X \leq y_i)) =$$

$$= P(X \leq x_0) - \lim_{y_i\to x_0} P(y_i \leq x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

Dalej mamy, że F_X jest ciągłe w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $F_X(x_0) = F_X(x_0^+) = F_X(x_0^-)$.

b) $\Rightarrow$ Jeśli X jest dyskretna, to istnieje S takie, że $S = \{s_1, \ldots, s_n, \ldots\}$ (gdzie $|S| \leq \aleph_0$) oraz $\forall_{A\in B(\mathbb{R})}\ P(X \in A) - \sum_{i \ \mid\ s_i\in A} P(X = s_i)$, więc

$$1 = P(X \in \mathbb{R}) = \sum_i P(X = s_i) \leq \sum_i (F_X(s_i) - F_X(s_i^-)) = \sum_{x\in\mathbb{R}} F_X(x) - F_X(x^-)) \leq 1$$

$\Leftarrow$ Jeśli dystrybuanta zmiennej losowej jest czysto skokowa, czyli $\sum_{x\in\mathbb{R}} \Big(F_X(x) - F_X(x^-)\Big) = 1$, to $|\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) - F_X(x^-)\} \neq 0| \leq \aleph_0$. Niech $S := \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) - F_X(x^-) \neq 0\}$. Wówczas

$$1 = \sum_{x\in\mathbb{R}}(F_X(x) - F_X(x^-)) = \sum_{x\in S}(F_X(x) - F_X(x^-)) = \sum_{x\in S} P(X = x) = P(X \in S)$$

Zatem biorąc $A \in B(\mathbb{R})$ mamy

$$\sum_{x\in A} P(X = x) = \sum_{x\in(A\cap S)} P(X = x) = P(X \in A)$$

c) Ustawmy liczby wymierne w ciąg $Q := \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$. Niech $P(X = q_n) = 2^{-n}$ i niech $t > s$ oraz m takie że $q_m \in (s, t)$. Wtedy

$$F_X(t) - F_X(s) = P(X \leq t) - P(X \leq s) \geq P(X \leq q_m) - P(X < q_m)$$

bo $P(X \leq t) \geq P(X \leq q_m)$ oraz $P(X < q_m) > P(X \leq s)$. Zatem

$$F_X(t) - F_X(s) \geq P(X = q_m) = 2^{-m} > 0$$

Zadanie 15.
Niech $F : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ będzie taką prawostronnie ciągłą i niemalejącą funkcją, że

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 1 \qquad \lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$$

Wykaż, że F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej.

Zadanie 16.
Załóżmy, że dystrybuanta F jest prawie wszędzie różniczkowalna. Pokaż, że dla $a \leq b$ zachodzi

$$\int_a^b F'(s)\ ds \leq F(b) - F(a)$$

Rozwiązanie:
Korzystając z lematu Fatou w pierwszej nierówności mamy

$$\int_a^b F'(s)\ ds = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \frac{F(s+\frac{1}{n}) - F(s)}{\frac{1}{n}}\ ds = \int_a^b \liminf_{n\to\infty} \frac{D(s+\frac{1}{n)-F(s)}}{\frac{1}{n}}\ ds \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{F(s+\frac{1}{n}) - F(s)}{\frac{1}{n}}\ ds = \liminf_{n\to\infty} \frac{\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(s)\ ds - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(s)\ ds}{\frac{1}{n}} = F(b) - F(A)$$

Przy czym w ostatniej równości korzystamy z prawostronnej ciągłości.

Zadanie 17.
Pokaż, że

a) jeśli dystrybuanta F jest prawie wszędzie różniczkowalna oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(s)\ ds = 1$$

to F' jest gęstością rozkładu o dystrybuancie F

b) jeśli dystrybuanta F jest ciągła i kawałkami klasy C^1 to f jest gęstością rozkładu o dystrybuancie F, gdzie

$$f(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{jeśli } F'(t) \text{ istnieje} \\ 0 & \text{jeśli } F'(t) \text{ nie istnieje} \end{cases}$$

Zadanie 18.
Oblicz miarę Lebesgue'a zbioru

$$\left\{ x \in [0,1] \mid \left| x - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^p} \text{ dla nieskończenie wielu par } (a,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}$$

Zadanie 19.
Niech X będzie zmienną o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

i niech $Y = X^2$. Znajdź

a) $P(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2})$

b) $P(1 \le X < 2)$

c) $P(Y \le X)$

d) $P(X \le 2Y)$

e) $P(X + Y \le \frac{3}{4})$

f) dystrybuantę zmiennej $Z = \sqrt{X}$

Rozwiązanie:

a) $P(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}) = P(X \le \frac{3}{2}) - P(X < \frac{1}{2}) = F_X(\frac{3}{2}) - F_X(\frac{1}{2}^-) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

b) $P(1 \le X < 2) = P(X < 2) - P(X < 1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$

c) $P(Y \le X) = P(X^2 \le X) = P(0 \le X \le 1) = P(X \le 1) - p(X < 0) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{2}$

d) $P(X \le 2Y) = P(X \le 2X^2) = 1 - P(X(2x-1)) \le 0) = 1 - P(0 \le X \le \frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 0) = \frac{3}{4}$

e) $P(X + Y \le \frac{3}{4}) = P((X - \frac{1}{2})(X + \frac{3}{4}) \le 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$

f) $F_{\sqrt{X}}(t) = P(\sqrt{X} \le t) = F_X(t^2)$, zatem

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{dla } t \in [0, \sqrt{2}] \\ 1 & \text{dla } t > \sqrt{2} \end{cases}$$

Zadanie 20.

a) Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 \cdot \chi_{[0,7]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuantę X.

b) Czy funkcja

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-xy} & \text{dla } 0 \le x, y < \infty \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } y < 0 \end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnego wektora losowego (X, Y)? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

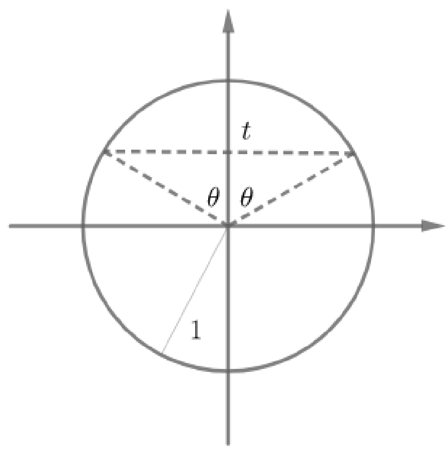
a) Mamy $\mu(\mathbb{R}) = 1 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} c \cdot x^2 \cdot \chi_{[0,7]}(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^7 cx^2\, dx = 1 \Leftrightarrow c \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^7 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{7^3}$.
Dystrybuanta wynosi

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{t^3}{343} & \text{dla } t \in [0,7] \\ 1 & \text{dla } t > 1 \end{cases}$$

b) $F(X,Y)$ nie spełnia warunku że dla każdego $u_1, u_2 \geq 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\triangle_{u_1,u_3} F(x,y) \geq 0$, vo dla $(1,1,1,1)$ mamy $\triangle_{1,1} F(1,1) = F(2,2) - F(2,1) - F(1,2) + F(1,1) = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^4} - \frac{1}{e} < 0$, zatem $F(X,Y)$ nie jest dystrybuantą.

Zadanie 21.
Losujemy punkt z okręgu o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$. Przez (X,Y) oznaczamy współrzędne tego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (jeśli istnieje) zmiennej X.

Rozwiązanie:



$$F_X(t) = P(X \leq t) = \frac{2\pi - 2\arccos t}{2\pi} \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ 1 - \frac{\arccos t}{\pi} & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{dla } t > 1 \end{cases}$$

$$F'_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{dla } t > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(s)\, ds = \int_{-\infty}^{1} 0\, ds + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, dx + \int_{1}^{\infty} 0\, ds = 0 + \frac{\pi}{\pi} + 01$$

ponad to F jest prawie wszędzie różniczkowalna więc $f = F'(t)$.

Ćwiczenia 8

Zmienne losowe, rozkład, gęstość

Przypomnijmy, że dla zmiennej losowej X

- jej rozkład określony jest wzorem $P_X(B) = P(X \in B) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$
- jej dystrybuanta określona jest wzorem $F_X(t) = P(X \leq t)$
- dystrybuanta wyznacza jednoznacznie rozkład i na odwrót, rozkład wyznacza jednoznacznie dystrybuantę

Definicja: Mówimy, że zmienna losowa d-wymiarowa X ma rozkład ciągły, jeśli istnieje funkcja borelowska $g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ taka, że dla dowolnego podzbioru borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$P(X \in B) = P_X(B) = \int_B g(x)\, dx.$$

Funkcję g nazywamy wówczas gęstością rozkładu.

Przykłady:

1. Rozkład jednostajny na zbiorze $K \in B(\mathbb{R}^d)$, oznaczamy $X \sim Unif(K)$

$$g(x) = \frac{\mathbf{1}_K(x)}{\lambda_d(K)} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_d(K)} & \text{gdy } x \in K \\ 0 & \text{gdy } x \notin K \end{cases}$$

   dla $B \in B(\mathbb{R}^d)$ mamy $P_X(B) = P(X \in B) = \int_B g(x)\ dx$

2. Rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, oznaczamy $X \sim Exp(\lambda)$

$$g_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ -e^{-\lambda x} - 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Rozkład normalny (gaussowski) jednowymiarowy o średniej a i wariancji δ^2, oznaczamy $X \sim \mathcal{B}(a, \delta^2)$

$$g_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \delta} \cdot \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\delta^2}\right)$$

Zadanie 1.
Zmienna losowa X ma gęstość $cx^4\mathbf{1}_{[-1,2]}(x)$. Wyznaczyć c oraz dystrybuantę X.

Rozwiązanie:
Mamy $P_X(\mathbb{R}) = 1$, zatem

$$\int_{\mathbb{R}} c \cdot x^4 \cdot \mathbf{1}_{[-1,2]}(x)\ dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{2} cx^4\ dx = 1 \Leftrightarrow c \cdot \left(\frac{x^5}{5}\right)\ \Big|_{-1}^{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \frac{33}{5} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{5}{33} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{5}{33}$$

Wówczas dystrybuanta wynosi

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ \frac{t^5}{33} & \text{dla } t \in [-1, 2) \\ 1 & \text{dla } t \geq 2 \end{cases}$$

Zadanie 2.
Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2\mathbf{1}_{[0,3]}(x)$. Wyznaczyć c, $P(\lfloor X \rfloor = 0 \mid \lfloor X \rfloor \leq 1)$ oraz gęstość rozkładu zmiennej $Z = \sqrt{X}$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$P(X \in \mathbb{R}) = 1 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} cx^2\mathbf{1}_{[0,3]}(x)\ dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 cx^2\ dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Zatem

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \in (-\infty, 0) \\ \frac{t^3}{9} & \text{gdy } t \in [0, 3) \\ 1 & \text{gdy } t \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Mamy

$$P(\lfloor X \rfloor = 0 \mid \lfloor X \rfloor \leq 1) = \frac{P(\lfloor X \rfloor = 0 \wedge \lfloor X \rfloor \leq 1)}{P(\lfloor X \rfloor \leq 1)} = \frac{P(\lfloor X \rfloor = 0)}{P(\lfloor X \rfloor \leq 1)} =$$

$$= \frac{P(X \in [0, 1))}{P(X \in (-\infty, 2))} = \frac{P(X < 1) - P(X < 0)}{P(X < 2)} = \frac{\frac{1}{9} - 0}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{8}$$

Wyznaczmy teraz dystrybuantę $Z = \sqrt{X}$. Mamy

$$F_X(t) = P(Z \leq t) = P(\sqrt{X} \leq t) = P(X \leq t^2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t^2} \frac{1}{9} \cdot x^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,3]}(x)\ dx = \mathbf{1}_{[0,3]}(t) \int_0^{t^2} \frac{1}{9} \cdot x^2\ dx = \frac{t^6}{27}$$

czyli

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t < 0 \\ \frac{t^6}{27} & \text{gdy } t \in [0, \sqrt{3}) \\ 1 & \text{gdy } t \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

Mamy $F'_Z(t) = \frac{2}{9} \cdot t^5 \cdot \mathbf{1}_{[0,\sqrt{3}]}(t)$ oraz sprawdzamy, że

$$\int_{\mathbb{R}} F'_Z(t)\ dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{9} \cdot t^5\ dt = \frac{t^6}{27}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 1$$

Zatem gęstość $Z = \sqrt{X}$ to $g_Z(t) = F'_Z(t) = \frac{2}{9} \cdot t^5 \cdot \mathbf{1}_{[0,\sqrt{3}]}(t)$.

Zadanie 3.
Pokaż, że jeśli $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ są zmiennymi losowymi, ale zbiór A jest nieprzeliczalny, to $\sup_{\alpha\in A} X_\alpha$ nie musi być zmienną losową.

Rozwiązanie:
Niech $A \subseteq [0,1]$ będzie taki, że $A \notin B([0,1])$. Dla $\alpha \in A$ kładziemy

$$X_\alpha(x) = \mathbf{1}_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = \alpha \\ 0 & \text{dla } x \neq \alpha \end{cases}$$

Wówczas X_α jest zmienną losową dla każdego α, ale $\sup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha =: X$ nie jest zmienną losową, bo $X = 1_A$, ale $X^{-1}(1) = A \notin B([0,1])$.

Zadanie 4.
Dany jest wektor losowy X o wartościach w $\mathbb{R}^n$ i o rozkładzie ciągłym z gęstością g_X. Pokaż, że jeśli istnieje taki podzbiór otwarty $S \subset \mathbb{R}^n$, dla którego $P(X \in S) = 1$, oraz dyfeomorfizm $\Phi : S \to \Phi(S) \subset \mathbb{R}^n$, to gęstość wektora losowego $Y = \Phi(X)$ ma postać:

$$g(y) = v(\Phi^{-1}(y)) \cdot \left|\det D\Phi^{-1}\right| \cdot \mathbf{1}_{\Phi(S)}(y).$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$P(\Phi(x) \in A) = P(X \in \Phi^{-1}(A)) = \int_{\Phi^{-1}(A)} g_X(x)\ dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} y = \Phi(x) \\ x = \Phi^{-1}(y) \\ dx = |\det D\Phi^{-1}(y)|\ dy \end{array} \right| = \int_A g_X(\Phi^{-1}(y)) \cdot |\det D\Phi^{-1}(y)|\ dy$$

Skąd

$$g_{\Phi(X)}(y) = v(\Phi^{-1}(y)) \cdot \left|\det D\Phi^{-1}\right| \cdot \mathbf{1}_{\Phi(S)}(y).$$

Twierdzenie: Jeśli X jest zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^d$ o gęstości g_x, zaś $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją klasy C^1 i różnowartościową, to $\varphi(x)$ ma gęstość daną wzorem

$$g_{\varphi(x)}(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{Im}\varphi(x)} \cdot g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot |\det D\varphi^{-1}(x)|$$

Przykład: Dla zmiennej X o gęstości $g_X(x) = \frac{1}{9} \cdot x^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,3]}(x)$ mamy $\varphi(X) = \sqrt{X}$, $\varphi^{-1}(X) = X^2$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = 2x$, skąd

$$g_{\sqrt{X}}(x) = \mathbf{1}_{[-\sqrt{3},\sqrt{3}]} \cdot \frac{1}{9} \cdot (x^2)^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,3]} \cdot 2x = \mathbf{1}_{[0,\sqrt{3}]}(x) \cdot \frac{2}{9} \cdot x^5$$

Zadanie 5.
Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$ (tzn. X ma gęstość równą $1_{[0,1]}(x)$). Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Y = -\ln X$.

Rozwiązanie:
Mamy $X \sim Unif([0,1])$, zatem $g_X(x) = \frac{\mathbf{1}_{[0,1]}(x)}{1} = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Niech $\varphi : [0,1] \to (0,\infty)$ zadane będzie wzorem $\varphi(X) = -\ln X$, wówczas $\varphi^{-1}(X) = e^{-X}$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = -e^{-X}$, skąd

$$g_Y(x) = \int_{[0,\infty)}(x) \cdot g_X(e^{-x}) \cdot e^{-x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(e^{-x}) \cdot e^{-x} =$$

$$= \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot e^{-x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot e^{-x}$$

bo to że $e^{-x} \in [0,1]$ jest równoważne temu, że $x \in [0,\infty)$. Zatem gęstość Y jest gęstością rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$.

Zadanie 6.
Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$ (tzn. X ma gęstość równą $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$). Wyznaczyć gęstości zmiennych

a) $Y = e^X$

b) $Z = X^2$

c) $U_{\delta,a} = \sigma X + a$.

Rozwiązanie:

a) Niech $\varphi : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ określone będzie wzorem $\varphi(X) = e^X$, wówczas $Y = \varphi(X)$. Mamy $\varphi^{-1}(X) = \ln X$ oraz $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{x}$, skąd

$$g_Y(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

b) Określmy $\varphi(X) = X^2$. Przekształcenie nie jest jednak różnowartościowe. Więc musimy zrobić inaczej niż w punkcie a). Weźmy $A \subsetneq (0,\infty)$, wtedy

$$P(Z \in A) = P(X^2 \in A) = P(X \in \sqrt{A} \cup -X \in \sqrt{A}) = P(X \in \sqrt{A} \cup X \in -\sqrt{A}) =$$

$$= P(X \in \sqrt{A}) + P(X \in -\sqrt{A}) = \int_{\sqrt{A}} g_X(x)\, dx + \int_{-\sqrt{A}} g_X(x)\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \int_{-\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \left| \begin{array}{c} y = -x \\ \text{w drugiej całce} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \int_{\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 2 \cdot \int_{\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{A}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \left| \begin{array}{c} y = x^2 \\ x = \sqrt{x} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy \end{array} \right| = \int_A \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

Zatem $g_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$

c) Niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane będzie wzorem $\varphi(X) = a + X\delta$, wówczas $\varphi^{-1}(X) = \frac{X-a}{\delta}$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = \frac{1}{\delta}$, skąd

$$g_{U_{a,\delta}}(x) = g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(\frac{x-a}{\delta})^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\delta^2}\right)$$

Zadanie 7.
Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ (tzn. $\lambda > 0$ oraz X ma gęstość równą $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$ – sprawdzić, że to jest gęstość rozkładu prawdopodobieństwa). Wyznaczyć gęstości zmiennych

a) $Y = e^X$

b) $Z = X^2$

c) $U_{\delta,a} = \sigma X + a$.

Rozwiązanie:

a) Niech $\varphi : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ zadaną wzorem $\varphi(X) = e^X$. Mamy $\varphi^{-1}(X) = \ln X$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = \frac{1}{X}$. Mamy

$$g_Y(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(X) \cdot g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{1}_{[0,\infty)]}(x) \cdot \lambda e^{-\lambda \ln x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\ln X)\frac{1}{x} =$$

$$= \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot x^{-\lambda} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) = \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) \cdot \lambda \cdot x^{-(\lambda+1)}$$

b) Weźmy $A \subseteq (0,\infty)$, wtedy

$$P(Z \in A) = P(X^2 \in A) = P(X \in \sqrt{A} \cup -X \in \sqrt{A}) = P(X \in \sqrt{A} \cup X \in -\sqrt{A}) =$$

$$= P(X \in \sqrt{A}) + P(X \in -\sqrt{A}) = \int_{\sqrt{A}} g_X(x)\ dx + \int_{-\sqrt{A}} g_X(x)\ dx ==$$

$$= \int_{\sqrt{A}} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\ dx + \int_{-\sqrt{A}} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\ dx = \left| \begin{array}{c} y = -x \\ \text{w drugiej całce} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{A}} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\ dx + \int_{\sqrt{A}} \lambda e^{-\lambda y} \cdot \mathbf{1}_{(\infty,0]}(y)\ dy = \int_{\sqrt{A}} \lambda e^{-\lambda x}\ dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} y = x^2 \\ x = \sqrt{y} \end{array} \right| = \int_A \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\ dy$$

Zatem $g_Z(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \lambda e^{-\lambda\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone będzie wzorem $\varphi(X) = a + X\delta$, wówczas $\varphi^{-1}(X) = \frac{X-a}{\delta}$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = \frac{1}{\delta}$. Mamy więc

$$g_{U_{a,\delta}}(x) = g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\delta} = \lambda e^{-\lambda\left(\frac{x-a}{\delta}\right)} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \cdot \frac{1}{\delta} = \lambda e^{-\lambda\left(\frac{x-a}{\delta}\right)} \cdot \mathbf{1}_{[-\frac{a}{\delta},\infty)}(x) \cdot \frac{1}{\delta}$$

Zadanie 8.
Dana jest zmienna losowa X o gęstości f_X oraz liczby $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Wyznacz gęstość zmiennej $Y = aX + b$.

Rozwiązanie:
Niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone będzie wzorem $\varphi(X) = aX + b$, wówczas $\varphi^{-1}(X) = \frac{X-b}{a}$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = \frac{1}{a}$. Wtedy

$$g_Y(x) = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Zadanie 9.
Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 2\pi]$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = \sin X$.

Rozwiązanie:
Niech $\widetilde{X} \sim Unif[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oraz niech $\widetilde{Y} \sim \sin \widetilde{X}$. Pokażemy, że Y oraz $\widetilde{Y}$ mają taki sam rozkład. Wystarczy, że pokażemy dla każdego $t \in \mathbb{R}$

$$(\sin X \leq t) = P(\sin \widetilde{X} \leq t)$$

Dla $t > 1$ lub $t < -1$ oba prawdopodobieństwa są równe 0. Ustalmy $t \in [0, 1]$. Niech $A_i = [0, \frac{\pi}{2}] + \frac{\pi}{2} \cdot (i-1)$ dla $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Mamy

$$P(\sin X \leq t) = \sum_{i=1}^{4} P(\sin X \leq t \mid X \in A_i) \cdot P(X \in A_i)$$

oraz

$$P(\sin \widetilde{X} \leq t) = \sum_{i=0}^{1} P(\sin \widetilde{X} \leq t \mid \widetilde{X} \in A_i) \cdot P(\widetilde{X} \in A_i)$$

Mamy $P(\widetilde{X} \in A_i) = \frac{1}{2}$ oraz $P(X \in A_i) = \frac{1}{4}$ dla odpowiednich i. Mamy też

$$P(\sin X \leq t \mid X \in A_1) = P(\sin X \leq t \mid X \in A_2) = P(\sin \widetilde{X} \leq t \mid \widetilde{X} \in A_1)$$

oraz

$$P(\sin X \leq t \mid X \in A_3) = P(\sin X \leq t \mid X \in A_4) = P(\sin \widetilde{X} \leq t \mid \widetilde{X} \in A_0)$$

Skąd wynika, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$

$$(\sin X \leq t) = P(\sin \widetilde{X} \leq t)$$

Funkcja $\varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1])$ określona wzorem $\varphi(X) = \sin X$ jest różnowartościowa. Mamy $\varphi^{-1}(X) = \arcsin X$ oraz $(\varphi^{-1}(X))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Zatem

$$g_Y(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \cdot g_X(\arcsin(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Zadanie 10.
Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $p \in (0, 1)$, aż do momentu wyrzucenia pierwszego orła. Niech X oznacza liczbę rzutów. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

Rozwiązanie:
Policzmy $P(X=k)$, to jednoznacznie nam wyznacza rozkład. Mamy

$$P(X=k) = P(\text{pierwszy orzeł za } k\text{-tym razem}) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{1}{1-(1-p)} \cdot p = 1$$

zatem z prawdopodobieństwem 0 nigdy nie wyrzucimy orła.

Zadanie 11.
Przypuśćmy, że monetą rzucamy teraz n razy na sekundę, zaś prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $\frac{\lambda}{n}$, gdzie $\lambda > 0$. Niech X_n ponownie oznacza liczbę rzutów aż do momentu pierwszego orła. Czas oczekiwania (liczony w sekundach) wynosi wtedy $\frac{1}{n}X_n$. Wyznacz dystrybuantę zmiennej $\frac{1}{n}X_n$ i zbadaj jej zachowanie przy $n \to \infty$.

Zadanie 12.
Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $p \in (0,1)$, aż do momentu wyrzucenia $k \geq 1$ orłów (niekoniecznie po kolei). Niech X oznacza liczbę wyrzuconych reszek. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

Rozwiązanie:
Mamy

$$P(x=m) = \binom{m+k-1}{k-1} \cdot (1-p)^m \cdot p^k$$

bo ostatni rzut musi zakończyć się orłem, czyi pozostaje uporządkować pozostałe m reszek oraz $k-1$ orłów. Musimy jeszcze pokazać, że $P(X=\infty) =$. Zdarzenie że wypadnie nieskończenie wiele reszek jest równoważne temu, że wypadnie mniej niż k orłów. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że wypadło mniej niż k orłów. Niech B_n to zdarzenie polegające na tym, że w n-tym rzucie wypadł orzeł. Wtedy zdarzenia $B_1, B_2, \ldots$ są niezależne oraz z lematu Borela-Cantellego mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$, wiec z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzen B_n. Stąd $P(A) = 0$.

Zadanie 13.
Wykazać, że rozkłady geometryczny i wykładniczy mają następującą własność braku pamięci: jeśli X jest zmienną losową o danym rozkładzie, to

$$P(X > t+s | X > t) = P(X > s),$$

gdzie w przypadku rozkładu ciągłego $t, s \in \mathbb{R}^+$, a w przypadku rozkładu dyskretnego $t, s \in \mathbb{N}$.

Zadanie 14.
Wykazać, że jedynym rozkładem z własnością braku pamięci oraz odpowiednio

a) dyskretnym, na $\{1, 2, 3, \ldots\}$, jest rozkład geometryczny,

b) ciągłym (o dodatnich ogonach), na $(0, \infty)$, jest rozkład wykładniczy.

Zadanie 15.

a) Rzucamy dwa razy kostką. Niech X, Y oznaczają odpowiednio minimum oraz maksimum z uzyskanych liczb oczek. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X, Y oraz sprawdzić, że zmienne X i $7 - Y$ mają ten sam rozkład.

b) Wykazać, że funkcja

$$g(x) = 3x^2 \cdot e^{-x^3} \cdot \chi_{(0,\infty)}(x)$$

jest gęstością prawdopodobieństwa. Niech X będzie zmienną losową o tej gęstości. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \max(X^2, 3X)$.

Zadanie 16.

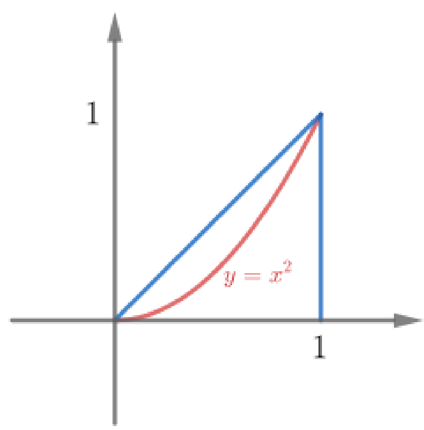
a) Wektor (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$. Obliczyć $P(Y \leq X^2)$.

b) Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = C \cdot e^{-x} \cdot 1_{\{0 \leq y \leq 2x\}}(x, y)$. Wyznaczyć

1. stałą C
2. rozkład X
3. $P(Y \leq \frac{X}{2})$

Rozwiązanie:

a) Musimy obliczyć stosunek pola pod krzywą $y = x^2$ (ograniczonego do kwadratu) w stosunku do pola kwadratu.



Pole pod krzywą wynosi

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

zaś pole trójkąta wynosi $\frac{1}{2}$, skąd $P(Y \leq X^2) = \frac{2}{3}$.

b) Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \, d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} C \cdot e^{-x} \cdot 1_{\{0 \leq y \leq 2x\}}(x, y) \, d^2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2x} C \cdot e^{-x} \, dy \, dx =$$

$$= C \cdot \int_0^\infty 2xe^{-x}\, dx = 2C$$

Przyrównujemy to do 1 i otrzymujemy $2C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$. Dalej

$$P(X \leq t) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\; dy\; dx$$

Dla $t < 0$ mamy $F_X(t) = 0$, zaś dla $t \geq 0$ mamy

$$F_X(t) = \int_0^t \int_0^{2x} C \cdot e^{-x}\; dt\; dx = \int_0^t C \cdot e^{-x} \cdot 2x\; dx = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^t = 1 - e^{-t}(t+1)$$

Dalej

$$P\left(Y \leq \frac{X}{2}\right) = \int_{\{y \leq \frac{x}{2}\}} g(x,y)\; d\lambda^2 = \int_0^\infty \int_0^{\frac{X}{2}} e^{-x} \cdot \frac{1}{2}\; dy\; dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{x}{4} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 17.

a) Znajdź rozkład łączny $Y_1 = \frac{(X_1+X_2)}{\sqrt{2}}$ i $Y_2 = \frac{(X_1-X_2)}{\sqrt{2}}$

b) Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego to znaczy, z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Udowodnić, że zmienne X i $\frac{1}{X}$ mają ten sam rozkład.

c) Zmienna X ma rozkład normalny na prostej. Zmienna Y ma rozkład normalny na prostej.

- Czy wektor (X, Y) może mieć rozkład normalny na płaszczyźnie?
- Czy wektor (X, Y) musi mieć rozkład normalny na płaszczyźnie?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 18.
Załóżmy, że μ jest ustalonym wektorem w $\mathbb{R}^d$, a Σ jest symetryczną i dodatnio określoną macierzą o wymiarach $d \times d$. Pokaż, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dx = 1,$$

gdzie

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right],$$

jest gęstością d-wymiarowego rozkładu normalnego $N(\mu, \Sigma)$.

Zadanie 19.
Wektor losowy X o wartościach w $\mathbb{R}^d$ ma rozkład normalny $N(\mu, \Sigma)$. Dana jest również macierz A, $\det A \neq 0$, oraz wektor $b \in \mathbb{R}^d$. Wyznaczyć gęstość wektora $AX + b$.

Zadanie 20.
X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Znaleźć rozkład zmiennych:

$Y = \frac{1}{X+1}$

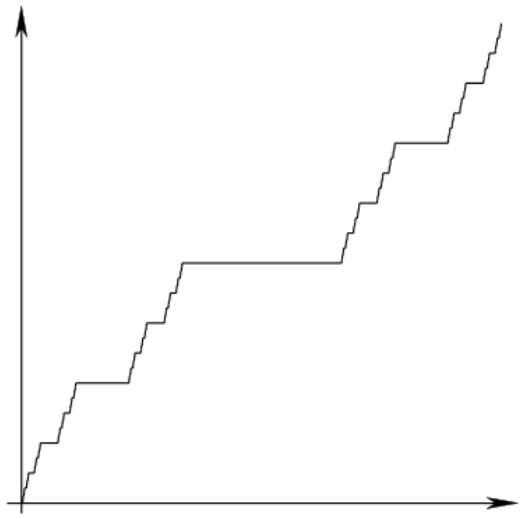
$Z = \sqrt{X}$

Zadanie 21.
Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{2}\sin x \cdot 1_{[0,\pi]}(x)$. Wyznaczyć $P(\sin^2 X \neq \frac{1}{2})$ oraz rozkład zmiennej losowej $\max\{\sin X, \frac{1}{2}\}$.

Zadanie 22.
Podać przykład zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuanta jest ściśle rosnąca.

Zadanie 23.
Podać przykład zmiennej losowej X o ciągłej dystrybuancie, której rozkład nie jest ciągły (tzn. nie ma gęstości).

Rozwiązanie:
Przykładem takiej funkcji są schody Cantora



Niech $f_0(x) = x$ oraz

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot f_n(3x) & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot f_n(3x-2) & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

wówczas f_n zbiega jednostajnie do funkcji ciągłej f (nazywanej funkcją Cantora). Funkcja f jest ciągła, niemalejąca oraz istnieją przedziały gdzie jest stała. W minus nieskończoności ma granicę 0, zaś w nieskończoności ma granicę 1. Zatem funkcja ta jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X.

Weźmy zbiór Cantora $\mathcal{C}$, wówczas $P(X \in \mathcal{C}) = 1$, bo poza zbiorem Cantora funkcja jest stała.

Gdyby X miała gęstość, to

$$1 = P(X \in \mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} g(x)\ dx = 0$$

bo $\lambda_1(\mathcal{C}) = 0$. Zatem X nie ma gęstości.

Zadanie 24.
Dana jest zmienna losowa X o dystrybuancie F różniczkowalnej w prawie wszystkich punktach prostej rzeczywistej.

a) Wykazać, że jeśli $\int_{\mathbb{R}} F'(x)dx = 1$, to X ma rozkład ciągły o gęstości F'.

b) Podać przykład zmiennej losowej X, dla której $\int_{\mathbb{R}} F'(x)dx \neq 1$.

c) Czy istnieje zmienna losowa X, dla której $\int_{\mathbb{R}} F'(x)dx > 1$?

d) Udowodnić, że jeśli F jest ciągła i kawałkami klasy C^1, to X ma rozkład ciągły o gęstości F'.

Rozwiązanie:

a) Jeśli $\int_{\mathbb{R}} F(x)\ dx = 1$, to F' jest gęstością zmiennej losowej o dystrybuancie F. Z jednoznaczności wynika więc, że X ma rozkład o gęstości F'.

b) Niech dystrybuanta F dana będzie worem dla $0 < 1$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < 0 \\ t + (1-\theta) & \text{gdy } x \in [0, \theta) \\ 1 & \text{gdy } x \geq \theta \end{cases}$$

Wtedy F' istnieje na $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ oraz $\int_{\mathbb{R}} F'(t)\ dt = \int_0^{\theta} 1\ dt = \theta$.

c)

Zadanie 25.
Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że X_i ma gęstość $g_{X_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$. Policzmy $F_Y(t)$. Mamy

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = (\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq t) = P(X_1 \leq t \cap \ldots \cap X_n \leq t) =$$

$$= P(X_1 \leq t) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq t) = P(X_1 \in (-\infty, t]) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in (-\infty, t]) =$$

$$= \left(\int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}\ dx \right) \cdot \left(\int_0^t \lambda_n e^{-\lambda_n x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}\ dx \right) =$$

$$= \left(\int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\ dx \right) \cdot \ldots \cdot \left(\int_0^t \lambda_n e^{-\lambda_n x}\ dx \right) \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t) = (1 - e^{\lambda_1 t}) \cdot \ldots \cdot (1 - e^{\lambda_n t}) \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$$

F_Y jest ciągła i klasy C^1 na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$ zatem Y ma prawie wszędzie gęstość równą

$$F_Y'(t) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{j=1,\ j\neq i}^{n} (1 - e^{-\lambda_j t}) \cdot \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

Zadanie 26.
Niech $F, G : \mathbb{R} \to [0,1]$ będą dystrybuantami. Połóżmy

$$d_L(F,G) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pokaż, że d_L jest metryką na przestrzeni jednowymiarowych dystrybuant.

Ćwiczenia 9

Niezależność zmiennych losowych

Definicja: Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, a $\{X_i\}_{i\in I}$ jest rodziną zmiennych losowych, przy czym X_i przyjmuje wartości w $\mathbb{R}^{d_i}$. Mówimy, że zmienne te są niezależne, jeśli σ-ciała generowane przez te zmienne są niezależne.

Innymi słowy, zmienne $\{X_i\}_{i\in I}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n, dowolnych parami różnych $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ oraz dowolnych $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_{i_1}}), \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_{i_n}})$ zachodzi

$$P(X_{i_1} \in B_1, X_{i_2} \in B_2, \ldots, X_{i_n} \in B_n) = P(X_{i_1} \in B_1) \cdot P(X_{i_2} \in B_2) \cdot \ldots \cdot P(X_{i_n} \in B_n)$$

Zadanie 1.
Dane są zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Wykazać, że z prawdopodobieństwem równym 1 ciąg (X_n) jest rozbieżny do nieskończoności.

Rozwiązanie:
Chcemy pokazać, że $P(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty) = 1$, czyli równoważnie, że dla każdego $M > 0$ istnieje $N(M) \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > N$ zachodzi $X_n > M$. Ustalmy więc M i niech $A_n := \{X_n > M\}$, wtedy

$$P(\exists_{N\in N}\ \forall_{n>N}\ A_n) = P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n^c\right)$$

Pokażemy z lematu Borella-Cantellego, że $P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n^c\right) = 0$. Mamy

$$P(A^c) = P(X_n \le M) = \sum_{k=0}^{M} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{M} \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-n}$$

zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = \sum_{k=0}^{M} \sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot e^{-n} \le \sum_{k=0}^{M} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}} < \infty$$

Niech $B_M := \exists_{N\in N}\ \forall_{n>N}\ A_n$ Wiemy już że dla każdego $M > 0$ zachodzi $P(B_M) = 1$. Musimy pokazać, że $P\left(\bigcap_{M\in\mathbb{N}} B_M\right) = 1$. Ale mamy

$$P\left(\bigcap_{M\in\mathbb{N}} B_M\right) = \lim_{M\to\infty} P(B_M) = 1$$

Zadanie 2.
Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady geometryczne z parametrami odpowiednio p i q. Obliczyć $P(X \le Y)$ oraz $P(X = Y)$.

Rozwiązanie:
Mamy $\{X \le Y\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = k \le Y\}$, przy czym zdarzenia po których sumujemy są rozłączne.

Zatem

$$P(X \leq Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k \cap k \leq Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \cdot P(Y \geq k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \cdot (1-p) \cdot \left(\sum_{i=k}^{\infty} q^{i-1}(1-q) \right) = (1-p) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \cdot \left((1-p) \cdot \sum_{i=k}^{\infty} q^{i-1} \right) =$$

$$= (1-p) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \left((1-q) \cdot q^{k-1} \cdot \frac{1}{1-q} \right) = (1-p) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} pq = \frac{1-p}{1-pq}$$

Mamy więc

$$P(X \leq Y) = \frac{1-p}{1-pq} \qquad \text{oraz analogicznie} \qquad P(Y \leq X) = \frac{1-q}{1-pq}$$

Mamy

$$P(X \leq Y) + P(Y \leq X) + P(X = Y) = 1$$

zatem

$$P(X = Y) = \frac{1-p}{1-pq} + \frac{1-q}{1-pq} - 1 = \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}$$

Zadanie 3.
Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady geometryczne z parametrami odpowiednio p i q. Wyznaczyć rozkłady zmiennych $X + Y$ oraz $X - Y$.

Twierdzenie: Załóżmy, że $g_1, g_2, \ldots, g_n$ są gęstościami. Wówczas zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o rozkładach z gęstościami $g_1, g_2, \ldots, g_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ma gęstość

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot \ldots \cdot g_n(x_n$$

Zadanie 4.
Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio λ i μ. Obliczyć $P(X \leq Y)$ oraz $P(X = Y)$.

Rozwiązanie:
Liczymy

$$P(X \leq Y) = \int_{x \leq y} g_{(X,Y)}(x, y)\ d\lambda_2(x, y) = \int_{x \leq y} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu y}\ d\lambda_2(x, y) =$$

$$= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} \cdot \left(\int_0^y \lambda e^{-\lambda x}\ dx \right)\ dy = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} \cdot \left(1 - e^{-\lambda y}\right)\ dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y}\ dy - \int_0^{\infty} \mu e^{-(\lambda+\mu) y}\ dy = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

Stąd

$$P(X = Y) = P(X \geq Y) + P(Y \geq X) - 1 = 0$$

Można też powiedzieć, że $P(X = Y) = 0$, bo $\int_{\{x=y\}} g_{(X,Y)}(x,y)\ d\lambda_2(x,y) = 0$, bo zbiór $\{x = y\}$ ma miarę zero.

Zadanie 5.
Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = ce^{-x} \cdot 1_{\{|y| \le x\}}$. Wyznaczyć c oraz dystrybuantę i gęstość zmiennej $\frac{Y}{X}$. Czy zmienne $\frac{Y}{X}$ i X są niezależne?

Zadanie 6.
Dla $\omega \in [0, 1]$ niech $X_n(\omega)$ oznacza n-tą cyfrę po przecinku w zapisie dziesiętnym liczby ω. Wykazać, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L}_1)$.

Zadanie 7.
Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne oraz $P(X_n = 1) = \frac{1}{2} = P(X_n = -1)$.

a) Czy zmienne losowe $X_1 + X_2$ oraz X_1X_2 są niezależne?

b) Czy zmienne losowe $X_1 + X_2$, $X_3X_4 + X_5$ oraz X_6X_7 są niezależne?

c) Czy zmienne losowe $X_1, X_1X_2, X_1X_2X_3, \dots$ są niezależne?

Rozwiązanie:

a) Pokażemy, że te zmienne są zależne. Mamy $X_1+X_2 \in \{-2, 0, 2\}$ oraz $X_1X_2 \in \{-1, 1\}$. Mamy

$$P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

analogicznie $P(X_1 + X_2 = -2) = \frac{1}{4}$, więc $P(X_1 + X_2 = 0) = \frac{1}{2}$ oraz mamy

$$P(X_1X_2 = 1) = P(\{X_1, X_2 = 1\} \cup \{X_1, X_2 = -1\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

więc $P(X_1X_2 = -1) = \frac{1}{2}$. Zauważmy, że $X_1X_2 = 1 \Leftrightarrow X_1 + X_2 \ne 0$, zatem

$$P(X_1X_2 = 1 \wedge X_1 + X_2 = 0) = 0 \ne \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X_1X_2 = 1) \cdot P(X_1 + X_2 = 0)$$

Stąd $X_1 + X_2$ oraz X_1X_2 są zależne.

b) Wektory (X_1, X_2), (X_3, X_4, X_5) oraz (X_6, X_7) są niezależne z twierdzenia o paczkowaniu niezależności. Ale $X_1 + X_2$ to obraz (X_1, X_2) przy funkcji ciągłej. Podobnie $X_3X_4 + X_5$ oraz X_6X_7 to obrazy (X_3, X_4, X_5) oraz (X_6, X_7) przy funkcji ciągłej. Zatem $X_1 + X_2$, $X_3X_4 + X_5$ są niezależne.

c) Niech $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1X_2$, $Y_3 = X_1X_2X_3$ itd. Ustalmy $Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_n}$, gdzie $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ oraz $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Mamy

$$P(Y_{i_1} = \varepsilon_{i_1}) \cdot P(Y_{i_2} = \varepsilon_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(Y_{i_n} = \varepsilon_{i_n}) = \frac{1}{2^n}$$

Zauważmy, że $Y_{i_2} = Y_{i_1} \cdot X_{i_1+1} \cdot \ldots \cdot X_{i_2}$ czyli $Y_{i_1} = \varepsilon_{i_1} \cdot \varepsilon_{i_1} \cdot \varepsilon_{i_2}$ itd, zatem

$$P(Y_{i_1} = \varepsilon_{i_1}, \ldots, Y_{i_n} = \varepsilon_{i_n}) = P(X_1 \cdot \ldots \cdot X_{i_1} = \varepsilon_{i_1},\ \ldots,\ X_{i_{n-1}+1} \cdot \ldots \cdot X_{i_n} = \varepsilon_{i_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{i_n})$$

Z twierdzenia o paczkowaniu niezależności wynika, że $X_1 \cdot \ldots \cdot X_{i_1}$, …, $X_{i_{n-1}+1} \cdot \ldots \cdot X_{i_n}$ są niezależne, zatem

$$P(X_1 \cdot \ldots \cdot X_{i_1} = \varepsilon_{i_1},\ \ldots,\ X_{i_{n-1}+1} \cdot \ldots \cdot X_{i_n} = \varepsilon_{i_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{i_n}) =$$
$$= P(X_1 \cdot \ldots \cdot X_{i_1} = \varepsilon_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(X_{i_{n-1}+1} \cdot \ldots \cdot X_{i_n} = \varepsilon_{i_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{i_n}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Stąd wynika, że zdarzenia $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n}$ są niezależne.

Zadanie 8.
Zmienna losowa X jest niezależna od siebie samej. Wykazać, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że $P(X = x) = 1$.

Rozwiązanie:
Skoro X jest niezależna od samej siebie, to

$$P(X = x \wedge X = x) = P(X = x) \cdot P(X = x)$$

Ale $P(X = x \wedge X = x) = P(X = x)$, zatem $P(X = x) = 1$.

Zadanie 9.
Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X nie ma atomów (tzn. dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $P(X = x) = 0$). Wykazać, że $P(X = Y) = 0$.

Rozwiązanie:
Niech μ_X, μ_Y oznaczają odpowiednio rozkłady zmiennych X i Y. Skoro zmienne te są niezależne, to rozkładem wektora (X, Y) jest rozkład produktowy $\mu(X, Y) = \mu_X \otimes \mu_Y$. Przechodząc na wektor, mamy $P(X = Y) = P((X, Y) \in \Delta)$, gdzie $\Delta = \{(x, y) : x = y\}$ jest przekątną. W szczególności

$$P(X = Y) = \mu(X, Y)(\Delta) = \int_\Delta 1\, d(\mu_X \otimes \mu_Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{y\}} d\mu_X\, d\mu_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu_X(\{y\})\, d\mu_Y(y)$$

Zauważmy, że
$$\mu_X(\{y\}) = P(X = y) = F_X(y) - F_X(y^-) = 0$$
bo dystrybuanta zmiennej X jest ciągła zgodnie z założeniem. Czyli, $P(X = Y) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mu_Y = 0$.

Ćwiczenia 10

Wartość oczekiwana, Wariancja, Kowariancja

Definicja: Mówimy, że X ma wartość oczekiwaną, jeśli istnieje całka $\int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$. Całkę tę nazywamy wartością oczekiwaną i oznaczamy EX.
Innymi słowy, jeśli X ma rozkład dystkretny to

$$E(X) = \sum_{k \in S_X} k \cdot P(X = k)$$

zaś jeśli X ma rozkład ciągły o gęstości $g(x)$ to

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x \cdot g(x)\, dx$$

Definicja: Liczbę $Var(X) = E(X - EX)^2$ nazywamt wariancją zmiennej X.

Własności:

- $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$
- $Var(X) \geq 0$, przy czym $Var(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład jednopunktowy
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Twierdzenie: Załóżmy, że zmienna X ma rozkład z gęstością g. Wówczas dla dowolnej borelowskiej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy

$$Ef(X) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\, dx$$

oraz

$$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot g(x)\, dx - (EX)^2$$

Zadanie 1.

a) Obliczyć $E[X]$, gdzie X jest sumą wyrzuconych oczek przy stukrotnym rzucie kostką.

b) Kupujemy k losów na loterii, w której M losów przegrywa i N losów wygrywa. Niech Y będzie liczbą losów wygrywających, które kupiliśmy. Obliczyć $E[Y]$.

Rozwiązanie:

a) Niech X_i to wynik i-tego rzutu kostką. Wówczas suma wyrzuconych oczek wynosi $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, zatem

$$EX = E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} EX_i$$

Mamy $P(X_i = k)$, zatem

$$EX_i = \sum_{k=0}^{6} k \cdot P(X_i = k) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

skąd

$$EX = 100 \cdot EX_i = 100 \cdot 3,5 = 350$$

b) Niech Y_i oznacza zmienną losową równą 1 gdy i-ty los jest wygrywający oraz 0 gdy i-ty los jest przegrywający. Mamy $P(Y_i = 1) = \frac{N}{M+N}$ oraz $Y = \sum_{i=1}^{k} Y_i$, zatem

$$EY = E\sum_{i=1}^{k} Y_i = \sum_{i=1}^{k} EY_i = k \cdot \frac{N}{M+N}$$

Zadanie 2.
Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje rozkładów:

a) jednostajnego na odcinku $[a, b]$,

b) Bernoulliego z parametrami n i p dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $p \in (0, 1)$,

c) wykładniczego z parametrem λ,

d) geometrycznego z parametrem $p \in (0, 1)$,

e) Poissona z parametrem $\lambda > 0$,

f) gaussowskiego (normalnego) $\mathcal{N}(a, \delta^2)$

g) gamma $\Gamma(r, \lambda)$

Rozwiązanie:

a) Mamy

$$EX = \int_{\mathbb{R}} xg(x)\ dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x\ dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

oraz

$$VarX = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2\ dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

b) Niech X ma rozkład Bernoulliego. Rozważmy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o rozkładzie dwupunktowym zadanym wzorem $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$. Wówczas $X = X_1 + \ldots + X_n$, zatem

$$EX = E(X_1 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n = n \cdot p$$

Ponadto

$$EX^2 = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 + 2 \cdot \sum_{k<l} EX_l X_l$$

Dla dowolnych różnych k, l zmienna $X_k X_l$ ma rozkład dwupunktowy skoncentrowany na $\{0, 1\}$, przy czym

$$P(X_k X_l = 1) = P(X_k = 1, X_l = 1) = P(X_k = 1) \cdot P(X_l = 1) = p^2$$

na mocy niezależności X_k oraz X_l. Zatem

$$EX^2 n \cdot p + 2\binom{n}{2} p^2 = np + n(n-1)p^2$$

zatem

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

c) Mamy

$$EX = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

oraz

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$$

d)

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \cdot (1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

e) Niech X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Wówczas

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

oraz

$$VarX = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} - (EX)^2 = \lambda$$

f) Mamy

$$EX = \int_{\mathbb{R}} xg(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \cdot x \cdot \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\delta^2}\right)\ dx = \begin{vmatrix} y = \frac{x-a}{\delta} \\ x = y\delta + a \\ dx = \delta\ dy \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} (\delta y + a) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} y e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy = a$$

oraz

$$VarX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}\right)\ dx = \frac{\delta^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy =$$

$$= \frac{\delta^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot (-ye^{-\frac{y^2}{2}})\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\delta^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy = \delta^2$$

Zadanie 3.
Pokaż, że momenty zmiennej o rozkładzie $Y \sim N(0,1)$ spełniają:

$$EY^m = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \text{ nieparzystych,} \\ (m-1)!! & \text{dla } m \text{ parzystych} \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Ustalmy $m \in \mathbb{Z}_+$. Mamy

$$EY^m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-1} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + (m-1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-2} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\right) =$$

$$= (m-1) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = (m-1) EY^{m-2}$$

Z rozumowania indukcyjnego wynika więc, że

$$EY^m = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \text{ nieparzystych,} \\ (m-1)!! & \text{dla } m \text{ parzystych} \end{cases}$$

Zadanie 4.
Załóżmy, że $P(X=1) = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = \frac{1}{2}$ i $P(X=3) = \frac{1}{6}$. Obliczyć $E(X)$, $E\left(\frac{1}{X}\right)$ oraz $\mathrm{Var}(X)$.

Rozwiązanie:
Mamy

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} k \cdot P(X=k) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

oraz

$$E(\frac{1}{X}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} \cdot P(X=k) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{23}{36}$$

oraz

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2 \cdot P(X = k) = \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$$

zatem

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{23}{6} - \frac{11}{6} = \frac{12}{6}$$

Zadanie 5.
Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ. Obliczyć $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ oraz $E(tX)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Wiemy już, że $E(X) = \lambda$ oraz $Var(X) = \lambda$. Liczymy

$$E(tX) = \sum_{k=0}^{\infty} (t \cdot k) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = t \cdot \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = t \cdot \lambda$$

Zadanie 6.
Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X.

Rozwiązanie:
Wszystkich trójkątów jest łącznie $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$. Niech

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i\text{-ty trójkąt jest jednobarwny} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wówczas $X = X_1 + \ldots + X_{20}$. Jako, że $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_j$ dla $i \neq j$, to $\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_{20} = 20 \cdot \mathbb{E}X_1 = 20 \cdot P(X_1 = 1) = 20 \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{3^3}$.

Zadanie 7.
Rzucamy kostką aż do momentu wypadnięcia wszystkich możliwych liczb oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

Rozwiązanie:
Niech X_i to liczba rzutów pomiędzy pojawieniem się $i-1$-szego nowego wyniku a pojawieniem się i-tego nowego wyniku wliczając nową wyrzuconą wartość. Zmienne X_i to zmienne o rozkładzie geometrycznym z prawdopodopieństwem sukcesu porażki $\frac{i-1}{6}$ oraz prawdopodobieństwem sukcesu $\frac{6-i+1}{6} = \frac{7-i}{6}$. Mamy więc $\mathbb{E}X_i = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X_i = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{i-1}{6}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7-i}{6}\right) = \frac{7-i}{6} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{i-1}{6}\right)^2} = \frac{6}{7-i}$.
Mamy $X = X_1 + \ldots + X_6$, skąd wartość oczekiwana wynosi $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_6 = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = \frac{147}{10}$.

Zadanie 8.
Liczby $1, 2, \ldots, 100$ ustawiono losowo w ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$. Niech N będzie największą liczbą taką, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$. Wyznaczyć rozkład zmiennej N oraz $\mathbb{E}N$.

Rozwiązanie:
Mamy $N \in \{1, \ldots, 100\}$. Mamy $P(N \geq n) = \frac{\binom{100}{n} \cdot 1 \cdot (100-n)!}{100!} = \frac{1}{n!}$ skąd otrzymujemy $P(N = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, więc $\mathbb{E}N = \sum_{n=1}^{100} n \cdot \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \sum_{n=1}^{100} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

Zadanie 9.
Z urny zawierającej 15 kul białych i 5 kul czarnych losujemy 4 kule bez zwracania. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wylosowanych kul białych.

Rozwiązanie:
Mamy $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Można policzyć że $P(X = i) = \frac{\binom{15}{i} \cdot \binom{5}{4-i}}{\binom{20}{4}}$ i potem wartość oczekiwaną ze wzoru $\mathbb{E}X = \sum_{i=0}^{4} i \cdot P(X = i)$. Ale można też inaczej. Niech

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i\text{-ta kula jest biała} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wówczas jako że $P(X_i = 1)$ oznacza prawdopodobieństwo na to, że i-ta kula jest biała, czyli z symetrii również na to, że pierwsza kula jest biała, to zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają taki sam rozkład prawdopodobieństwa, czyli $\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \mathbb{E}X_3 + \mathbb{E}X_4 = 4 \cdot \mathbb{E}X_1 = 4 \cdot \frac{15}{20} = 3$.

Definicja: Załóżmy, że X, X są zmiennymi losowymi całkowalnymi z kwadratem. Liczbę

$$Cov(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$$

nazywamy kowariancją zmiennych X i Y. W przypadku gdy $Cov(X, Y) = 0$ mówimy, że zmienne X i Y sa nieskorelowane.

Własności:

- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $Cov(X, X) = Var(X)$
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
- dla $a \in \mathbb{R}$ mamy $Cov(X, a) = 0$

Twierdzenie: Dla dowolnych $X_1, \ldots, X_n$ całkowalnych z kwadratem zachodzi

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + 2 \cdot \sum_{k<l}^{C} ov(X_k, X_l)$$

w szczególności jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są nieskorelowane to

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)$$

Zadanie 10.
Jest N listów i N zaadresowanych kopert z różnymi adresami. Każdy list odpowiada dokładnie jednemu adresowi i na odwrót. Włożono listy do kopert na chybił trafił, po jednym liście do każdej koperty. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

Rozwiązanie:
Niech

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i\text{-ty list trafił do właściwej koperty} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wówczas $\mathbb{E}X_i = P(X_i = 1) = \frac{1}{N}$. Mamy $X = X_1 + \ldots + X_N$, więc $\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_N) = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_N = \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N} = 1$. Dalej mamy $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_N) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Var}X_j + 2 \cdot \sum_{1 \le j < k \le N} \mathrm{Cov}(X_j, X_k) = N \cdot \mathrm{Var}X_1 + 2 \cdot \binom{N}{2} \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$. Policzmy $\mathrm{Var}X_1$. Mamy $\mathrm{Var}X_1 = \mathbb{E}X_1^2 + (\mathbb{E}X)^2 = [1^2 \cdot P(X_1 = 1) + 0^2 \cdot P(X_1 = 0)] + \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} = \frac{N-1}{N^2}$. Policzmy $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$. Mamy $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}X_2 = 0 \cdot P(X_1 \cdot X_2 = 0) + 1 \cdot P(X_1 \cdot X_2 = 1) - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N \cdot (N-1)} - \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N^2 \cdot (N-1)}$. Skąd $\mathrm{Var}(X) = N \cdot \frac{N-1}{N^2} + 2 \cdot \frac{N \cdot (N-1)}{2} \cdot \frac{1}{N^2 \cdot (N-1)} = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{N}{N} = 1$.

Zadanie 11.
Średnia liczba błędów na pojedynczej stronie skryptu wynosi $0,2$. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że na następnej stronie będą co najmniej 2 błędy.

Rozwiązanie:
Niech X to liczba błędów na stronie. Szukamy $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. Niech n to liczba znaków na stronie oraz niech p to prawdopodobieństwo tego, że znak będzie źle wpisany. Zmienna X to zmienna o rozkładzie Bernoullego $B(n, p)$, gdzie mamy $n \cdot p = 0,2$ oraz n jest duże. Możemy więc rozkład Bernoullego przybliżyć rozkładem Poissona $\mathrm{Poiss}(\lambda)$, gdzie $\lambda = n \cdot p = 0,2$. Wówczas $P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!}$ oraz $P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!}$, skąd $P(X \geq 2) = 1 - \left(e^{-0,2} + 0,2 \cdot e^{-\lambda}\right) \approx 0,0177$

Zadanie 12.
W 100 torebkach cukru umieszczono 200 oznakowanych kryształków. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że ustalona torebka zawiera co najmniej trzy oznakowane kryształki.

Rozwiązanie:
Niech X to liczba oznakowanych kryształków w ustalonej torebce. Rozważmy schemat Bernoullego

$n = 200$ prób włożenia oznakowanych kryształków do ustalonej torebki z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{100}$, czyli zmienna X ma rozkład Bernoullego $B(n, p)$. Możemy założyć, że n jest stosunkowo duże i przybliżyć rozkład Bernoullego rozkładem Poissonowskim Poiss(λ), gdzie $\lambda = n \cdot p = 2$. Wówczas $P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left(\frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!}\right) = 1 - \frac{5}{e^2} \approx 0,3233$. Błąd przybliżenia wynosi $\frac{\lambda^2}{n} = \frac{2^2}{200} = 0,02$

Zadanie 13.
Do punktu badania jakości wody dostarczono 100 próbek. Prawdopodobieństwo tego, że w danej próbce znajdują się bakterie E. coli wynosi 0,1. W celu zaoszczędzenia na badaniach, próbki podzielono na 10 grup po dziesięć w każdej. Następnie, w obrębie każdej grupy zmieszano wodę i przeprowadzono badanie. Jeśli wynik jest negatywny, wszystkie dziesięć próbek jest wolnych od bakterii. Jeśli natomiast wynik jest pozytywny, przeprowadza się dodatkowe 10 badań, dla każdej próbki z osobna. Niech X oznacza liczbę przeprowadzonych badań. Oblicz $\mathbb{E}X$.

Rozwiązanie:
Niech

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy w danej próbie wszystkie próbki są nieskażone} \\ 11 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wówczas $X = X_1 + \ldots + X_{10}$ oraz $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_j$ dla $i \neq j$, więc $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_{10} = 10 \cdot \mathbb{E}X_1$. Mamy $\mathbb{E}X_1 = 1 \cdot P(X_1 = 1) + 11 \cdot P(X_1 = 11) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + 11 \cdot \left(1 - (\frac{9}{10})^{10}\right) = 11 - 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$.

Zadanie 14.
Na terytorium Polski odnotowuje się średnio 3 poważne pożary lasów w ciągu lipca. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że

a) w następnym lipcu nie będzie pożarów.

b) w następnym lipcu będzie parzysta liczba pożarów.

Rozwiązanie:

a) Podzielmy lipiec na n części. W każdej z tych n części pożar może wystąpić raz z jednakowym prawdopodobieństwem p. Wówczas średnio $n \cdot p$ razy w ciągu lipca pojawi się pożar. Mamy więc $n \cdot p = 3$. Niech X oznacza liczbę pożarów w lipcu. Jeśli n jest dostatecznie duże, to zmienna X ma rozkład Poissona Poiss(λ), gdzie $\lambda = n \cdot p = 3$. Mamy więc $P(X = 0) = \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = e^{-3}$.

b) Zdarzenia $X = 2k$ i $X = 2k+2$ są rozłączne, zatem jeśli $P(\text{parz})$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że liczba pożarów w lipcu będzie parzysta, to mamy $P(\text{parz}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-3} \cdot 3^{2k}}{(2k)!} = e^{-3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{(2k)!} = e^{-3} \cdot \frac{e^3 + e^{-3}}{2} = \frac{1 + e^{-6}}{2}$.

Zadanie 15.
W pojemniku znajdują się dwie monety. Na pierwszej orzeł wypada z prawdopodobieństwem 0,6, na drugiej z prawdopodobieństwem 0,3. Losujemy monetę i wykonujemy nią rzut. Możemy postawić x zł ($0 \leq x \leq 10$) na to, że wypadnie orzeł. W przypadku gdy tak się stanie, zyskujemy x zł, w przeciwnym razie tracimy x zł.

a) Jaka jest wartość oczekiwana wygranej? Jaka jest optymalna strategia?

b) Załóżmy, że za dodatkowe $c \geq 0$ złotych możemy kupić informację która moneta została wylosowana (na tej podstawie tej informacji możemy wybrać wysokość stawki). Dla jakich c opłaca się przyjąć tę ofertę? Jaka jest optymalna strategia?

Rozwiązanie:

a) Niech X to wartość wygranej. Policzmy rozkład X. Mamy $P(X = x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{20}$ oraz $P(X = -x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{11}{20}$. Wartość oczekiwana wygranej wynosi więc $\mathbb{E}X = x \cdot P(X = x) + (-x) \cdot P(X = -x) = \frac{9x}{20} - \frac{11x}{20} = -\frac{x}{10}$. Zatem strategią wygrywającą w tym przypadku jest nie brać udziału w grze, czyli postawić $x = 0$ zł.

b) Niech Y oznacza wartość wygranej przy założeniu, że mamy monetę lepszą. Wówczas $P(Y = x) = \frac{6}{10}$ oraz $P(Y = -x) = \frac{4}{10}$, więc $\mathbb{E}Y = x \cdot P(Y = x) + (-x) \cdot P(Y = -x) = \frac{6x}{10} - \frac{4x}{10} = \frac{x}{5}$. Wówczas strategią wygrywającą jest postawienie jak najwyższej kwoty. Niech Z oznacza wartość wygranej przy założeniu, że mamy monetę gorszą. Wówczas $P(Z = x) = \frac{3}{10}$ oraz $P(Z = -x) = \frac{7}{10}$, więc $\mathbb{E}Z = x \cdot P(Z = x) + (-x) \cdot P(Z = -x) = \frac{3x}{10} - \frac{7x}{10} = -\frac{2x}{5}$. Wówczas strategią wygrywającą w tym przypadku jest nie brać udziału w grze, czyli postawić $x = 0$ zł. Jeśli X oznacza wartość wygranej, to mamy $\mathbb{E}X = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{5} + \frac{1}{2} \cdot 0 - c = 1 - c$. Jeśli $c < 1$, to opłaca się ogólnie kupić informację i jeśli wylosowaliśmy lepszą kostkę to postawić 10 złotych. Jeśli zaś $c \geq 1$ to nie opłaca się w ogóle grać.

Zadanie 16.

Załóżmy, że X jest zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Wykazać, że

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

oraz

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P(X > n)$$

Zadanie 17.

Dane są liczby całkowite dodatnie $m \leq n$. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ losujemy m liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną różnicy pomiędzy największą a najmniejszą z tych liczb.

Rozwiązanie:

Niech X oznacza różnicę pomiędzy największą a najmniejszą liczbą. Mamy $X \in \{m-1, \ldots, n-1\}$. Wyznaczmy rozkład prawdopodobieństwa, czyli $P(X = k)$. Najpierw wybieramy największą liczbę, możemy tego dokonać na $n - (k+1) + 1 = n - k$ sposoby. Wówczas najmniejsza liczba jest wyznaczona jednoznacznie. Pozostaje jeszcze dobrać $m - 2$ liczby spośród $k + 1 - 2$ liczb, możemy tego dokonać na $\binom{k-1}{m-2}$ sposoby. Stąd $P(X = k) = \frac{(n-k) \cdot 1 \cdot \binom{k-1}{m-2}}{\binom{n}{m}}$. Pozostaje nam policzyć wartość oczekiwaną. Mamy $\mathbb{E}X = \sum\limits_{k=m-1}^{n-1} k \cdot \frac{(n-k) \cdot \binom{k-1}{m-2}}{\binom{n}{m}}$.

Zadanie 18.
Pięć uczennic i pięciu uczniów bierze udział w teście. Następnie tworzą listę rankingową. Zakładamy, że żadne dwa wyniki nie mogą się powtórzyć. Niech X oznacza najwyższe miejsce osiągnięte przez uczennicę. Wyznacz rozkład X.

Rozwiązanie:
Oznaczmy uczennice liczbami od 1 do 5 oraz uczniów od 6 do 10. Mamy $X \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Niech $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \mid x_i \in \{1,\ldots,10\},\ x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ oraz niech P to prawdopodobieństwo klasyczne. Wówczas $P(X = j) = \frac{5! \cdot 5 \cdot (10-j)!}{10! \cdot (5-j+1)!}$, bo najpierw siadamy $i-1$ chłopców na $\frac{5!}{(5-i+1)!}$ sposobów, następnie wybieramy najzdolniejszą dziewczynkę na 5 sposobów oraz pozostałe 4 dziewczynki i $5-i+1$ chłopców ustawiamy na końcu na $(10-i)!$ sposobów. Całość dzielimy przez 10!, bo tyle jest permutacji 10 osób.

Zadanie 19.
Pięć kartek ponumerowanych liczbami od 1 do 5 rozdano pięciu graczom A, B, C, D oraz E, po jednej kartce każdemu. Następnie gracz A porównuje numer swojej kartki z odpowiednim numerem gracza B. Jeśli numer A jest większy, to wygrywa gracz A i w następnej rundzie porównuje swój numer z numerem gracza C. Jeśli numer gracza A jest większy, to zostaje on zwycięzcą drugiej i w następnej grze porównuje numery z graczem D. Końcowa runda (jeśli do niej dojdzie) polega na porównaniu numerów z graczem E. Niech X oznacza liczbę zwycięstw gracza A. Oblicz rozkład X, jej średnią i wariację.

Rozwiązanie:

I sposób:
Mamy $X \in \{0,1,2,3,4\}$. Prawdopodobieństwo, że $X = n$ to jest prawdopodobieństwo, że wśród $n+2$ graczy największą liczbę ma ostatni gracz, a następną w kolejce ma gracz A. Wówczas dla $n = 0,1,2,3$, mamy $P(X = n) = \frac{\binom{5}{n+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot n! \cdot (5-(n+2))!}{5!}$, zaś dla $n = 4$ mamy $P(X = n) = \frac{1}{5}$. Mamy $\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{4} n \cdot P(X = n)$. Wzór na wariancję dany jest wzorem $\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2$, przy czym mamy $EX^2 = \sum_{n=0}^{4} n^2 \cdot P(X = n)$.

II sposób:
Prawdopodobieństwo, że $X \geq n$ jest równe prawdopodobieństwu, że wśród $n+1$ graczy, gracz A ma największy numer. Mamy $P(X \geq n) = \frac{1}{n+1}$, zatem dla $n = 0,1,2,3$ mamy $P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ oraz dla $n = 4$ mamy $P(X = n) = \frac{1}{5}$.

Zadanie 20.
Z urny zawierającej n kul ponumerowanych liczbami od 1 do n losujemy kolejno po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu wyciągnięcia tej samej kuli co w poprzednim losowaniu. Niech X oznacza liczbę losowań. Wyznaczyć rozkład zmiennej X, jej wartość oczekiwaną i wariację.

Rozwiązanie:
Mamy $X \in \{2,3,\ldots\}$ oraz $P(X = k) = \frac{n \cdot (n-1)^{k-2} \cdot 1}{n^k} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2}$. Ponadto $\sum_{k=2}^{\infty} P(X = k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{n-1}{n}} = 1$, zatem $P(X = \infty) = 0$. Mamy więc $\mathbb{E}X = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot P(X =$

$k) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \sum\limits_{k=2}^{\infty} k \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$. Mamy $\sum\limits_{k=2}^{\infty} kx^{k-1} = \left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x\cdot(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$, zatem $\mathbb{E}X = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}$. Mamy też $\left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} x^k\right)'' = \left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} k \cdot x^{k-1}\right)' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot x^{k-2} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k^2 \cdot x^{k-2} - \sum\limits_{k=2}^{\infty} k \cdot x^{k-2} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k^2 \cdot x^{k-2} - \frac{1}{x} \cdot \sum\limits_{k=2}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$, więc $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k^2 \cdot x^{k-2} = \left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} x^k\right)'' + \frac{1}{x} \cdot \sum\limits_{k=2}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{4x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} = \frac{x^2-3x+4}{(1-x)^3}$. Stąd $\mathbb{E}X^2 = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k^2 \cdot P(X = k) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=2}^{\infty} k^2 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2-3\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)+4}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^3}$, skąd $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2-3\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)+4}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^3} - \left(\frac{1}{n-1} \cdot \frac{2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)^2$

Zadanie 21.
Kij złamano w losowym miejscu. Niech X oznacza stosunek długości lewego kawałka do długości prawego kawałka. Wyznacz rozkład zmiennej X.

Rozwiązanie:
Mamy $X \in [0, \infty)$ oraz X jest rozkładem ciągłym. Zachodzi $X = \frac{x}{1-x}$ oraz $\frac{x}{1-x} \leq t \Leftrightarrow x \leq \frac{t}{t+1}$, zatem

$$F_\lambda(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{t+1} & t \geq 0 \end{cases}$$

Wiadomo też, że dystrybuanta wyznacza rozkład.

Zadanie 22.
Wybieramy losowo niepusty podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (wybór każdego podzbioru jest tak samo prawdopodobny). Niech X oznacza moc wylosowanego podzbioru. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

Rozwiązanie:
Mamy $2^n - 1$ niepustych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Zbiorów o mocy k jest $\binom{n}{k}$, zatem $P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n-1}$. Stąd $\mathbb{E}X = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \frac{1}{2^n-1} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot \binom{n}{k}$. Mamy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$, co udowodnimy przez interpretację kombinatoryczną. Z jednej strony, wybieramy z n osób k osób i wśród tych osób wybieramy lidera otrzymując wszystkie podziały n osób na dwie grupy (z liderem lub bez). Z drugiej strony wybieramy lidera na n sposobów, a następnie pozostałe $n-1$ osób dzielimy na dwie grupy (z liderem lub bez). Stąd $\mathbb{E}X = \frac{2^{n-1}\cdot n}{2^n-1}$.

Ćwiczenia 11

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja: Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech B będzie zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie. Jeśli X jest całkowalną zmienną losową, to warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem B nazywamy liczbę

$$E(X \mid B) \int_{\Omega} X(\omega)\ P(d\omega \mid B)$$

Twierdzenie: Zachodzi wzór

$$E(X \mid B) = \frac{\int_B X\ dP}{P(B)}$$

Zadanie 1.

Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $B(n,p)$, a Y ma rozkład Bernoulliego $B(m,n)$. Wyznaczyć $E(X+Y|X)$ oraz $E(X|X+Y)$.

Zadanie 2.

Dane są niezależne zmienne losowe ε_1, ε_2, ε_3 o tym samym rozkładzie $P(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2} = P(\varepsilon_i = -1)$. Obliczyć $E(\varepsilon_1\varepsilon_2|\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ oraz $E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3|\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)$.

Zadanie 3.

Rzucono kostką najpierw raz, a następnie tyle razy, ile oczek wypadło w pierwszym rzucie. Obliczyć wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek oraz liczby wyrzuconych trójek.

Zadanie 4.

W woreczku znajduje się pewna liczba monet: część z nich jest symetryczna, a część sfałszowana, z orłem po obu stronach. Wiadomo, że stosunek liczby monet sfałszowanych do symetrycznych wynosi $p : (1-p)$. Powtarzamy n-krotnie następujące doświadczenie: losujemy z woreczka monetę, rzucamy nią, a następnie zwracamy ją do woreczka. Niech O oznacza liczbę wyrzuconych orłów, zaś F – liczbę wylosowanych sfałszowanych monet. Obliczyć $E(O|F)$ oraz $E(F|O)$.

Zadanie 5.

W urnie znajduje się a kul amarantowych, b kul białych i c kul czarnych. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli do momentu wyciągnięcia kuli czarnej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby losowań, w których wyciągnięto białą kulę.

Zadanie 6.

Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wyznaczyć: (a) $E(S_n|X_1)$, $E(S_{2n}|X_1)$; (b) $E(S_n|S_k)$, $E(S_{2n}|S_k)$ oraz $E(e^{-S_n}|S_k)$ dla $k \neq n$; (c) $E(S_k|S_n)$ dla $k \neq n$

Zadanie 7.
Zmienne losowe G, X, ε są niezależne, przy czym G ma rozkład $N(0,1)$, X jest nieujemna i ograniczona, zaś $P(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = P(\varepsilon = -1)$. Obliczyć $E(e^{GX}|X)$ oraz $E(e^{GX}|\varepsilon X)$.

Zadanie 8.
Dane są niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Wyznaczyć $P(X \in A|X+Y) = E(1_{X\in A}|X+Y)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Obliczyć $E(e^{\frac{X}{2}}|X+Y)$.

Zadanie 9.
Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma gęstość

$$g(x,y) = \frac{x^3}{2}e^{-x(y+1)}\mathbf{1}_{x,y>0}.$$

Wyznaczyć $E(Y|X)$, $E(Y^2|X^2)$ oraz $P(Y > 1|X^3+1)$.
Wskazówka: jak się ma $E(Y^2|X^2)$ do $E(Y^2|X)$ oraz do $E(Y^2|X^3+1)$?

Zadanie 10.
Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest taką zmienną losową, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem X. Wyznaczyć rozkład Y oraz gęstość łączną wektora (X,Y).

Zadanie 11.
Zmienne N, X_1, X_2, ... są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$ dla wszystkich $n = 1,2,\ldots$. Wyznaczyć $E(X_1 + \ldots + X_{N+1})$.

Ćwiczenia 12

Zbieżność zmiennych losowych

Zadanie 1.
Załóżmy, że $X_n \xrightarrow{P} X$ oraz $X_n \xrightarrow{P} Y$. Udowodnić, że $P(X = Y) = 1$.

Zadanie 2.
Wykazać, że $X_n \xrightarrow{P} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} E\min\{|X_n - X|, 1\} = 0$.

Zadanie 3.
Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Załóżmy, że $E|X_1| < \infty$. Wykazać, że $\frac{1}{n}\max_{1\le i\le n}|X_i| \xrightarrow{P} 0$.

Zadanie 4.
Załóżmy, że $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\text{p.n.}} Y$. Wykazać, że $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X + Y$ oraz $X_nY_n \xrightarrow{\text{p.n.}} XY$.

Zadanie 5.
Załóżmy, że $X_n \xrightarrow{P} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} Y$. Wykazać, że $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$ oraz $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$.

Zadanie 6.
Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$, przy czym $X_n \sim \text{Poiss}(1/n)$. Zbadać zbieżność ciągu $(X_n)_n$ w $L^{3/2}$, w L^2, według prawdopodobieństwa oraz prawie na pewno.

Zadanie 7.
Dane są liczby $p, q \in (1, \infty)$ spełniające zależność $1/p + 1/q = 1$. Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{L^p} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{L^q} Y$, to $X_nY_n \xrightarrow{L^1} XY$.

Zadanie 8.
Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Załóżmy, że $EX_1^2 < \infty$. Wykazać, że $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} EX_1$.

Zadanie 9.
Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

a) Wykazać, że jeśli $\lambda > 1$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi zdarzenie $\{X_n < \log n$ dla dostatecznie dużych $n\}$.

b) Wykazać, że jeśli $\lambda < 1$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń $\{X_n > \log n\}$.

c) Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągu $\left(\frac{X_n}{\log n}\right)_{n=2}^{\infty}$.

Zadanie 10.

Dany jest ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ oraz zmienna X. Pokaż, że zbiór

$$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\},$$

jest zdarzeniem.

Zadanie 11.

a) Pokazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{L^r} X$ dla pewnego $r > 0$, to $X_n \xrightarrow{P} X$.

b) Niech $(A_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem zdarzeń niezależnych takim, że $\sum_n P(A_n) = \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Połóżmy $X_n = \frac{1}{A_n}$. Pokaż, że:

1. $X_n \xrightarrow{P} 0$,
2. $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ dla $p \in (0, \infty)$,
3. $(X_n)_{n\geq 1}$ nie jest zbieżny prawie na pewno.

c) Niech $\Omega = (0, 1]$, $B_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ oraz $Y_n = 2^n \cdot 1_{B_n}$. Pokaż, że:

1. $Y_n \xrightarrow{\text{p.n.}} 0$ (stąd również $X_n \xrightarrow[P]{} 0$),
2. $(Y_n)_{n\geq 1}$ nie jest zbieżny w L^p dla żadnego $p > 0$.

Zadanie 12.

a) Niech $X_n \sim U\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Pokaż, że $X_n \xrightarrow{L^r} 0$ dla $r \in (0, \infty)$.

b) Niech $Y_n \sim N(0, \frac{1}{n})$. Pokaż, że $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

c) Niech $Z_1, Z_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $U[0, 1]$. Połóżmy $Z(n) = \max_{1\leq i\leq n} Z_i$. Pokaż, że $Z_{(n)} \xrightarrow{P} 1$.

Zadanie 13.

Pokazać, że $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq N} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Zadanie 14.

Niech X_n będą niezależnymi i całkowalnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Udowodnić, że

$$\frac{1}{n} \max_{i\leq n} |X_i| \xrightarrow{P} 0$$

Zadanie 15.

Pokazać, że jeśli $\left(\sqrt{X_n}\right)_{n\geq 1}$ jest zbieżny w L^2, to ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny w L^1.

Zadanie 16.

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geq 1}$ spełnia:

1. $E[X_n] \xrightarrow{n\to\infty} C$,
2. $D^2[X_n] \leq \frac{C}{n^2}$,

gdzie $C > 0$ jest stałą. Pokaż, że $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} C$.

Zadanie 17.
Ciąg zmiennych losowych $(Y_n)_{n\geq 1}$ spełnia:

1. $E[Y_n] \xrightarrow{n\to\infty} C$,
2. $D^2[Y_n] \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

gdzie $C > 0$ jest stałą. Pokaż, że $Y_n \xrightarrow{P} C$.

Zadanie 18.
Pokaż, że jeśli $(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} (X, Y)$ oraz dana jest $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będąca funkcją ciągłą na otwartym zbiorze A spełniającym $P((X, Y) \in A) = 1$, to $f[(X_n, Y_n)] \xrightarrow{P} f[(X, Y)]$.

Zadanie 19.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim wspólnym rozkładzie, że $E[X_1] = \mu$ oraz $D^2(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Pokaż, że $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$.

Zadanie 20.
Niech $(X_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Pokaż, że zdarzenia:

a) $A = \{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ istnieje i jest skończona}\}$,

b) $B = \{\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty\}$,

c) $C = \{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \leq 5\}$,

mogą mieć wyłącznie prawdopodobieństwo 0 lub 1.

Zadanie 21.
Załóżmy, że $X_n \xrightarrow{L^2} X$. Czy wynika stąd, że $E[X_n^2] \xrightarrow{n\to\infty} E[X^2]$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 22.
Dany jest ciąg $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots > 0$, taki że $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Pokaż, że jeśli

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty$$

to $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$.

Zadanie 23.
Wkładamy losowo n kul do n pudełek. Niech N_n oznacza liczbę pudełek, które pozostały puste. Pokaż, że $\frac{1}{n}N_n \xrightarrow{P} e^{-1}$.

Ćwiczenia 13

Prawa wielkich liczb - szeregi liczbowe

Zadanie 1.
Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Poissona z parametrem λ. Wykazać, że następujące ciągi zmiennych losowych są zbieżne prawie na pewno i wyznaczyć ich granice: (a) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}$; (b) $X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}$.

Zadanie 2.
Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$. Wykazać, że ciąg zmiennych losowych $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ jest zbieżny prawie na pewno i wyznaczyć jego granicę.

Zadanie 3.
Do pewnej tabeli wpisano 10000 liczb. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza liczba została źle wpisana, wynosi 0.5%. Wprowadzone liczby są sprawdzane przez kontrolera, który wychwytuje (i poprawia) błędną liczbę z prawdopodobieństwem 98%. Podaj przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po weryfikacji przez kontrolera tabela zawiera przynajmniej dwie błędne liczby.

Zadanie 5.
Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 51.7%. Oszacować prawdopodobieństwo tego, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt.

Zadanie 6.
Na kampusie uniwersyteckim znajdują się dwie stołówki, a w każdej z nich jest po 215 miejsc. Wiadomo, że w czasie przerwy 400 osób będzie chciało zjeść obiad, a każda wybierze losowo jedną ze stołówek. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w którejś ze stołówek zabraknie miejsc?

Zadanie 7.
Ile osób należy przepytać w sondażu przed drugą turą wyborów prezydenckich, aby z prawdopodobieństwem 95% wynik sondażowy nie różnił się o więcej niż 2 punkty procentowe od wyniku wyborów?