TOPOLOGIA I

Marysia Nazarczuk

Ćwiczenia 1

Powtórzenie z WDM

Zadanie 1.
Oblicz następujące sumy i przekroje przedziałów na prostej:

a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right)$

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, n\right)$

d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (n, n+3)$

e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+3)$

f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$

g) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(n - n^2, \frac{1}{n}\right)$

Rozwiązanie:

a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$

c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, n\right) = (0, +\infty)$

d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (n, n+3) = \emptyset$

e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+3) = (1, +\infty)$

f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1) = (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$

g) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(n - n^2, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$

Zadanie 2.
Oblicz sumy przedziałów na prostej

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \quad \text{gdzie } a_{n+1} \leq a_n < b_n \leq b_{n+1}$$

Rozwiązanie:
Mamy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) = (a, b)$, gdzie $a = \lim a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ oraz $b = \lim b_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Mamy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \begin{cases} [a, b] \\ (a, b) \\ [a, b) \\ (a, b] \end{cases}$, gdzie $a = \lim a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ oraz $b = \lim b_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Jeśli ciąg będzie stały od pewnego miejsca, to będziemy mieli koniec domknięty, natomiast jeśli nie będzie stały, to koniec będzie otwarty.

Zadanie 3.
Oblicz przekroje przedziałów na prostej

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \quad \text{gdzie } a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$$

Rozwiązanie:
Mamy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) = \begin{cases} \{a\} \\ (a, b) \\ (a, b] \\ [a, b) \\ [a, b] \end{cases}$, gdzie $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$ oraz $b = \lim b_n \in \mathbb{R}$. Koniec otwarty będziemy mieli, gdy ciąg będzie stały od pewnego miejsca, natomiast jeśli ciąg nie będzie stały, to będziemy mieli koniec domknięty.
Mamy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \begin{cases} [a, b] \\ \{a\} \end{cases}$, gdzie $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$ oraz $b = \lim b_n \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.
Wyraź przedział domknięty $[a, b]$ jako pewien przekrój przedziałów otwartych. Podobnie wyraź przedział otwarty (a, b) jako pewną sumę przedziałów domkniętych.

Rozwiązanie:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

Zadanie 5.
Udowodnij, że przedział $[0, 1]$ nie jest sumą (nawet nieskończoną) przedziałów postaci (a, b). Podobnie, przedział otwarty $(0, 1)$ nie jest przekrojem przedziałów postaci $[a, b]$.

Rozwiązanie:
Przedział otwarty (a, b) jest zbiorem otwartym na prostej. Suma zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Odcinek domknięty nie jest zbiorem otwartym na prostej. Stąd $[0, 1]$ nie będący zbiorem otwartym nie może być sumą przedziałów postaci (a, b), czyli zbiorów otwartych.

Zbiór $F \subseteq X$ jest domknięty, jeśli $X \setminus F$ jest otwarty. Skoro suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, to przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Odcinek $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym, bo $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, a to jest zbiór otwarty. Zbiór $(0, 1)$ nie jest jednak zbiorem domkniętym, zatem przedział otwarty $(0, 1)$ nie jest przekrojem przedziałów postaci $[a, b]$.

Zadanie 6.
Udowodnij, że dla każdego przedziału otwartego (a, b) na prostej, istnieją liczby $q \in \mathbb{Q}$ i $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ należące do tego przedziału.

Rozwiązanie:
Niech $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, wówczas dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $[n \cdot a] \leq n \cdot a < [n \cdot a] + 1$, skąd $\frac{[n \cdot a]}{n} \leq a \leq \frac{[n \cdot a]}{n} + \frac{1}{n}$. Wówczas dla dostatecznie dużego n zachodzi $\frac{[n \cdot a]}{n} + \frac{1}{n} < b$, bo zachodzi $\frac{1}{n} < b - a$.

Niech $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$, wówczas $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dla dostatecznie dużych n, zachodzi $q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b$, bo zachodzi $\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q$.

Definicja: Obraz zbioru A funkcji f to

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Przeciw obraz zbioru B funkcji f to

$$f^{-1}[B] = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$$

Zadanie 7.
Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją pomiędzy zbiorami X i Y. Załóżmy, że $A \subseteq B \subseteq X$ oraz $C \subseteq D \subseteq Y$. Udowodnij, że $f(A) \subseteq f(B) \subseteq Y$ oraz $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

Rozwiązanie:
Mamy $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ oraz $f(B) = \{f(x) \mid x \in B\} = \{f(x) \mid x \in A \cup (B \setminus A)\} = \{f(x) \mid x \in A\} \cup \{f(x) \mid x \in B \setminus A\} = f(A) \cup \{f(x) \mid x \in B \setminus A\}$, skąd $f(A) \subseteq f(B)$ oczywiście $f(B) \subseteq Y$. Mamy $f^{-1}(C) = \{x \in X \mid f(x) \in C\}$ oraz $f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\} = \{x \in X \mid f(x) \in C \cup (D \setminus C)\} = \{x \in X \mid f(x) \in C\} \cup \{x \in X \mid f(x) \in D \setminus C\} = f^{-1}(C) \cup \{x \in X \mid f(x) \in D \setminus C\}$, skąd $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

Zadanie 8.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Wyznacz zbiory

a) $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

b) $f([0, \infty))$

c) $f^{-1}([0, 1])$

d) $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$

e) $f^{-1}([-1, 1])$

Rozwiązanie:

a) $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1]$

b) $f([0, \infty)) = [-1, 1]$

c) $f^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, 2k\pi + \pi] \cup [-2k\pi, -2k\pi + \pi]$

d) $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{6}] \cup [2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \pi] \cup [-2k\pi, -2k\pi + \frac{\pi}{6}] \cup [-2k\pi + \frac{5\pi}{6}, -2k\pi + \pi]$

e) $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$

Zadanie 9.
Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją i niech $A, B \subseteq X$. Udowodnij, że $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(A \setminus B) \cap f(B) = \emptyset$. Wywnioskuj, że jeśli f jest różnowartościowa, to $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Zadanie 10.
Powiemy, że zbiór $U \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $\varepsilon > 0$, taki że $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. Zbiór $C \subseteq \mathbb{R}$ jest domknięty, jeśli $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ jest otwarty. Sprawdź, czy następujące podzbiory prostej są otwarte lub domknięte.

a) $\mathbb{R}$

b) $\emptyset$

c) $[0, 1]$

d) $[0, 1)$

e) $\mathbb{Q}$

f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

g) $(-1, 0) \cup (0, 1)$

Rozwiązanie:

a) Zbiór $\mathbb{R}$ jest otwarty, bo wynika to wprost z definicji. Jest to również zbiór domknięty, ponieważ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$, a zbiór $\emptyset$ jest otwarty.

b) Zbiór $\emptyset$ jest otwarty, ponieważ nie ma w nim żadnego elementu, zatem zawsze spełniony jest poprzednik implikacji. Jest również domknięty, ponieważ $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ a to jest zbiór otwarty.

c) Zbiór $[0, 1]$ nie jest otwarty, bo dla $x = 0$ nie istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $x - \varepsilon \in [0, 1]$, bo $-\varepsilon < 0$. Jest to zbiór domknięty, bo $\mathbb{R} \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, a ten zbiór jest otwarty, bo wynika to z definicji.

d) Zbiór $[0, 1)$ nie jest otwarty, bo mamy problem w lewym końcu. Zbiór ten nie jest też domknięty, ponieważ $\mathbb{R} \setminus [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, a ten zbiór nie jest otwarty, ponieważ dla $x = 1$ nie istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $x - \varepsilon \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, bo $-\varepsilon < 0$.

e) Zbiór liczb naturalnych nie jest otwarty, bo w małym otoczeniu każdej liczby naturalnej, nie znajdziemy innej liczby naturalnej. Jest to zbiór domknięty, ponieważ zachodzi związek $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n-1, -n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$, a to jest suma zbiorów otwartych, czyli zbiór otwarty.

f) Zbiór liczb wymiernych nie jest otwarty, ponieważ dla $q \in \mathbb{Q}$, w przedziale $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ istnieje liczba niewymierna (wynika to z gęstości liczb niewymiernych). Zbiór $\mathbb{Q}$ nie jest też domknięty, ponieważ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest otwarte.

g) Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest ani otwarty ani domknięty.

h) Zbiór $(-1, 0) \cup (0, 1)$ jest zbiorem otwartym i nie jest zbiorem domkniętym.

Ćwiczenia 2

Przestrzenie metryczne i topologiczne

Definicja: Metryką na zbiorze X nazywa się funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki

1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ dla $x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dla $x, y, z \in X$

Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Definicja: Funkcja $|| \cdot || : X \to [0, \infty)$ określona na (rzeczywistej) przestrzeni liniowej X nazywa się normą na X, gdy spełnia następujące warunki dla dowolnych $x, y \in X$ i $t \in \mathbb{R}$

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
3. $||tx|| = |t|||x||$

Zadanie 1.
Udowodnij, że jeśli $|| \cdot ||$ jest normą na przestrzeni X, to funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jak $d(x, y) = ||x - y||$ jest metryką na X.

Rozwiązanie:
Musimy sprawdzić, czy funkcja ta spełnia warunki na bycie metryką.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = ||x - y|| = | - 1| \cdot ||x - y|| = ||(-1)(x - y)|| = ||y - x|| = d(y, x)$
3. $d(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(y, z)$

Zatem funkcja $d(x, y) = ||x - y||$ jest metryką na X.

Zadanie 2.
Sprawdź, że następujące funkcje są metrykami na podanych zbiorach

a) $d_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_e$ (metryka euklidesowa), gdzie $||\mathbf{x}||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$ (norma euklidesowa) dla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ dla normy $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2}$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \dots)$ w przestrzeni Hilberta

$$l_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2 < \infty\}$$

c) $d(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_i - y_i|$ dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in [0,1]^\infty$ (kostka Hilberta).

d)

$$d_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} d_e(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \text{gdy } 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ są współliniowe} \\ ||\mathbf{x}||_e + ||\mathbf{y}||_e & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (metryka „kolejowa”).

e) Na płaszczyźnie określamy odległość punktów $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$

$$d_r(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} d_e(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \text{gdy } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

(metryka „rzeka”).

f) W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ rozważa się często dwie inne normy

1. $||\mathbf{x}||_s = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
2. $||\mathbf{x}||_m = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, prowadzące odpowiednio do metryk

1. $d_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_s$
2. $d_m(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_m$

Rozwiązanie:

a) Wystarczy, że udowodnimy, że $||\mathbf{x}||_e$ jest normą.

1. Mamy $||\mathbf{x}||_e = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$
2. Musimy udowodnić nierówność

$$\sqrt{\sum (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum x_i^2} + \sqrt{\sum y_i^2} \Leftrightarrow \sum x_i y_i \leq \sqrt{\left(\sum x_i^2\right) \cdot \left(\sum y_i^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

co jest prawdziwe, ponieważ jest to nierówność Cauchy'ego-Schawarza.

3. Mamy $\sqrt{\sum (t x_i)^2} = \sqrt{t^2 \cdot \sum x_i^2} = |t| \cdot \sqrt{\sum x_i^2}$

Zatem $||\mathbf{x}||_e$ jest normą, skąd $d_e(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_e$ jest metryką.

Zadanie 3.
Czy metryki „kolejowa" i „rzeka" pochodzą od norm w $\mathbb{R}^2$?

Rozwiązanie:
Zbadajmy, czy istnieje norma $||\cdot||$ na $\mathbb{R}^2$ taka, że $d_k(x,y) = ||x-y||$ dla tej normy. Jeśli ma zachodzić równość $||x-y|| = d_k(x,y)$ dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^2$, to w szczególności $||x|| = d_k(x,0)$, czyli

$$||x|| = d_k(x,0) = d_e(x,0) = ||x||_e$$

czyli jeśli metryka kolejowa pochodzi od normy, to byłaby normą euklidesową. Norma euklidesowa nie daje jednak metryki kolejowej, ponieważ $d_k((1,0),(0,1)) = 2$, natomiast $||(1,0)-(0,1)||_e = \sqrt{2}$.

Zbadajmy, czy istnieje norma $||\cdot||$ na $\mathbb{R}^2$ taka, że $d_r(x,y) = ||x-y||$ dla tej normy. Jeśli ma zachodzić równość $||x-y|| = d_k(x,y)$ dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^2$, to w szczególności $||x|| = d_k(x,0)$, czyli dla $x = (x_1, x_2)$ mamy

$$||x| = d_r(x,0) = |x_1| + |x_2|$$

czyli jeśli metryka kolejowa pochodzi od normy, to byłaby normą „suma". Weźmy punkt $(1,1)$ oraz $(2,1)$, wówczas $d_r((1,1),(2,1)) = 3$ oraz $||(1,1)-(2,1)||_s = ||(1,0)|| = 1$, zatem również metryka kolejowa nie pochodzi od normy.

Ćwiczenia 3

Zadanie 1.
Narysuj kule o środku p i promieniu r w metrykach d_r, d_k, d_m, d_s na płaszczyźnie, gdzie

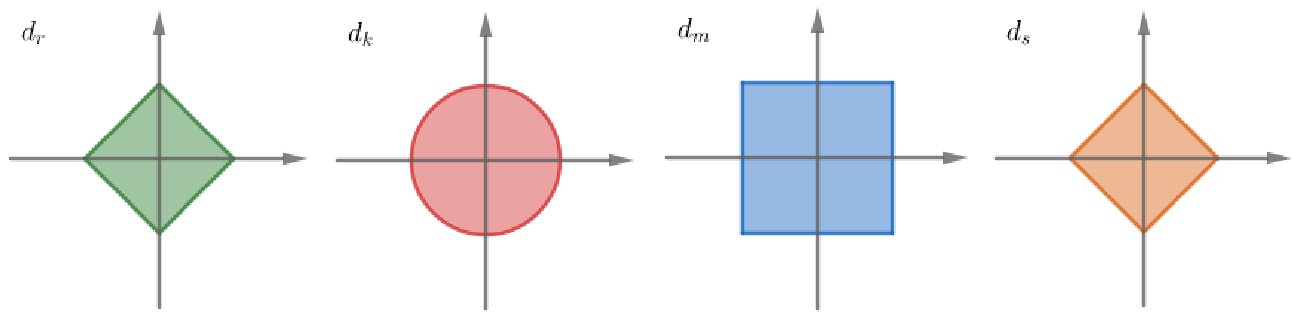
a) $p = (0, 0)$, $r = 1$

b) $p = (1, 1)$, $r = 1$

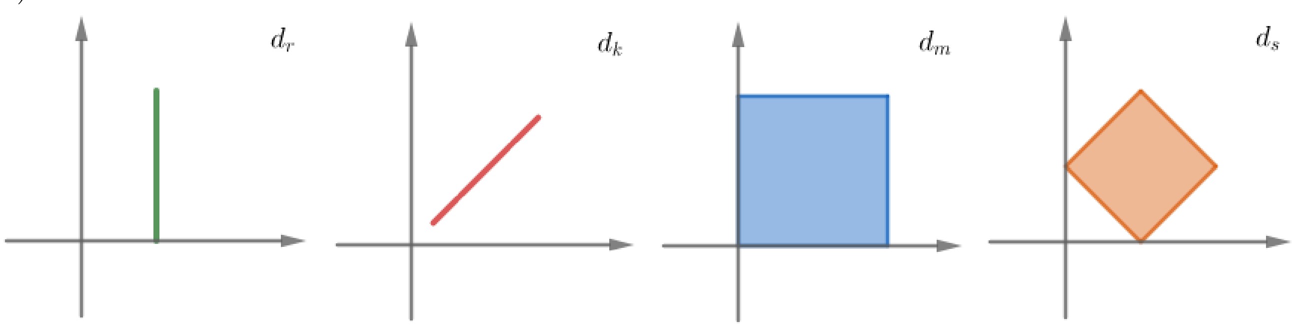
c) $p = (1, 1)$, $r = 2$

Rozwiązanie:

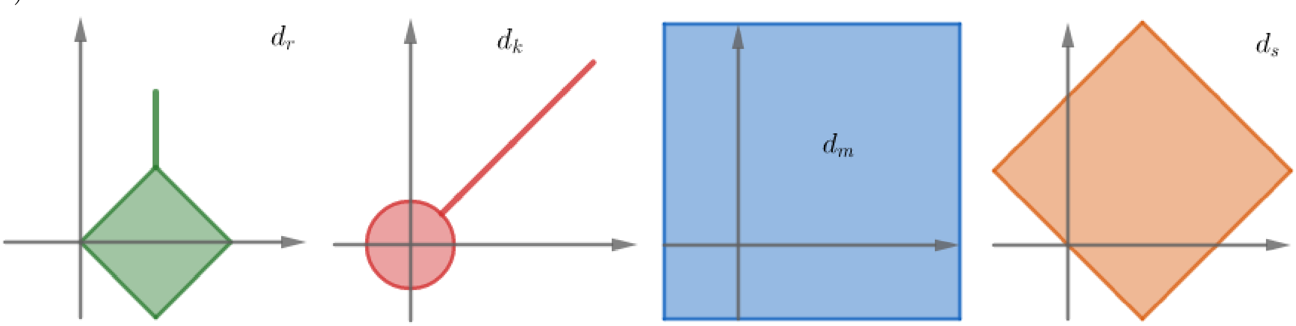
a)



b)



c)



Zadanie 2.
Czy w nieskończonej przestrzeni metrycznej musi być nieskończenie wiele różnych kul?

Rozwiązanie:
Załóżmy nie wprost, że kul jest skończenie wiele. Niech $B(x_1,r_1), B(x_2,r_2), \ldots, B(x_n,r_n)$ to te kule. Skoro X jest nieskończony, to istnieje $x \in X \setminus \{x_1,\ldots,x_n\}$. Niech $r = \min\{d(x,x_i) \mid i = 1,\ldots,n\}$. Wówczas kula $B\left(x,\frac{r}{2}\right)$ nie zawiera punktów $x_1,\ldots,x_n$, ponieważ $d(x_i,x) \geq r > \frac{r}{2}$. Stąd $B\left(x,\frac{r}{2}\right) \neq B(x_i,r_i)$ dla $i = 1,\ldots,n$. Kula $B\left(x,\frac{r}{2}\right)$ jest nową kulą, co przeczy założeniu. Stąd kul w nieskończonej przestrzeni metrycznej jest nieskończenie wiele.

Zadanie 3.
Pokaż, że zbiór U jest otwarty w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_r)$ (tzn. płaszczyznę rozpatrujemy z metryką rzeka) wtedy i tylko wtedy, gdy przekrój zbioru U z każdą prostą pionową jest otwarte w topologii euklidesowej tej prostej, oraz, jeśli $\mathbf{a} = (t,0) \in U$, to U zawiera pewną kulę euklidesową ośrodku w $\mathbf{a}$.

Rozwiązanie:
$\Rightarrow$ Ustalmy prostą pionową l. Chcemy sprawdzić, że zbiór $U \cap l$ jest otwarty z metryką euklidesową. Niech $\mathbf{x} \in U \cap l$. Z otwartości zbioru U w metryce rzecznej wiemy, że istnieje kula o środku w $\mathbf{x}$ zawarta w U, czyli że $B_r(\mathbf{x}, r) \subseteq U$ dla $r < |x_2|$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$. Jest to kula euklidesowa na prostej l, czyli $B_r(x,r) \subseteq U \cap l$, czyli $U \cap l$ jest otwarte w topologi euklidesowej tej prostej. Jeśli $\mathbf{x} = (t,0)$ i $\mathbf{x} \in U$, to istnieje kula w metryce rzeka o środku w punkcie $\mathbf{x}$ w całości zawarta w zbiorze U. W tę kulę możemy wpisać kulę w metryce euklidesowej. Zatem U zawiera pewną kulę euklidesową o środku w punkcie $\mathbf{x}$.

$\Leftarrow$ Ustalmy zbiór U, który spełnia założenia zadania. Ustalmy $\mathbf{x} \in U$ oraz niech $\mathbf{x} \neq (t,0)$. Wówczas dla l_1 będącą prostą pionową przechodzącą przez punkt $\mathbf{x}$ mamy $U \cap l_1 \neq \emptyset$, bo $\mathbf{x} \in l_1$ i $\mathbf{x} \in U$ oraz $U \cap l_1$ jest otwarte na l_1 z d_e z założenia. Wówczas istnieje w tym zbiorze kula w metryce rzeka o środku w punkcie $\mathbf{x}$, ponieważ jest to kula w metryce euklidesowej na prostej. Skoro w $U \cap l_1$ istnieje kula w metryce rzeka, to również istnieje kula w zbiorze U dla dowolnego punktu $\mathbf{x} \neq (t,0)$. Ustalmy punkt $\mathbf{x} \in U$ i niech $\mathbf{x} = (t,0)$. Wówczas U zawiera pewną kulę euklidesową o środku w punkcie $\mathbf{x}$. Niech ta kula to $B_e(\mathbf{x}, r)$. Wówczas $B_r(\mathbf{x}, r) \subseteq B_e(\mathbf{x}, r)$. Zatem dla dowolnego punktu $\mathbf{x} \in U$ potrafimy wskazać kulę w metryce rzeka, w całości zawartą w U. Stąd U jest otwarte w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_r)$.

Zadanie 4.
Rozważmy zbiór $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jest ciągła}\}$ rzeczywistych funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$, wyposażony w metrykę supremum, to znaczy

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

Uzasadnij, które z podanych niżej zbiorów są otwarte w przestrzeni metrycznej $(C([0,1], d_{\sup})$.

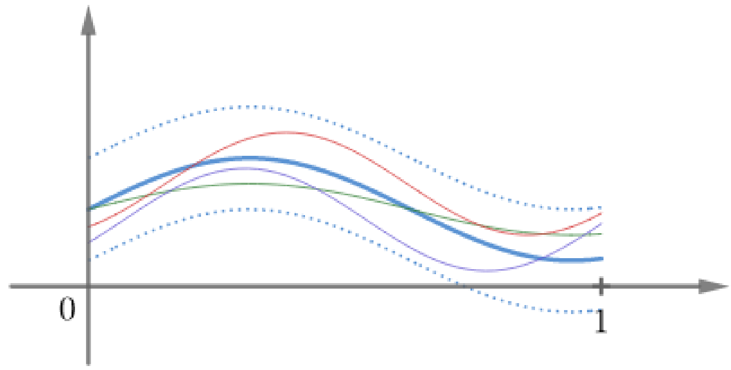
a) $A = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) > 0 \text{ dla } x \in [0,1]\}$

b) $B = \{f \in C([0,1]) \mid \exists_{x\in[0,1]}\ f(x) = 0\}$

c) $C = \{f \in C([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|dx < 1\}$

d) $D = \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ jest ściśle rosnąca }\}$

Rozwiązanie:
Kulą w przestrzeni $C([0,1])$ z metryką $d_{\sup}$ o promieniu r będzie zbiór wszystkich funkcji zawartych w pasku o szerokości $2r$ otaczającego daną funkcję.



a) Niech $f \in A$, wówczas z twierdzenia Weierstrassa, funkcja ta przyjmuje w pewnym punkcie swoją wartość najmniejszą. Niech wartość ta jest równa $y_{\min}$. Wówczas kula o $B(f, r)$, gdzie $r = \frac{y_{\min}}{2}$ nie przecina osi OX, czyli w całości zawiera się w A. Skąd zbiór A jest otwarty.

b) Dla funkcji f stale równej zero, żadna kula nie będzie w całości zawarta w zbiorze B, ponieważ jeśli promień kuli wynosi r, wystarczy wziąć funkcję $g(x) = \frac{r}{2}$ dla $x \in [0, 1]$. Wówczas funkcja g nie przyjmuje wartości 0, czyli nie należy do B. Stąd zbiór B nie jest otwarty.

c) Niech $f \in C$, wówczas $\int_0^1 |f(x)|dx < 1$. Niech $r < 1 - \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Pokażemy, że $B(f, r) \subseteq C$. Niech $g \in B(f, r)$, wówczas $|f(x) - g(x)| < r$, czyli

$$\int_0^1 |g(x)|dx \le \int_0^1 |f(x)| + rdx \le \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 rdx = \int_0^1 |f(x)|dx + r$$

Zatem zbiór C jest otwarty.

d) Niech $f(x) = x$, wówczas $f \in D$. Rozpatrzmy kulę $B(f, r)$. Funkcja

$$g(x) = \begin{cases} \frac{r}{2} & \text{dla } x \in \left[0, \frac{r}{2}\right] \\ x - \frac{r}{2} & \text{dla } x \in \left(\frac{r}{2}, 1\right] \end{cases}$$

wówczas $g \in B$, natomiast g nie jest ściśle rosnąca, czyli nie należy do D, skąd kula B nie zawiera się w D, czyli zbiór D nie jest otwarty.

Ćwiczenia 4

Przestrzenie metryczne i topologiczne

Zadanie 1.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnij, że dla każdego punktu $x \in X$, zbiór $\{x\}$ jest domknięty w (X, d) (tzn. równoważnie $X \setminus \{x\}$ jest otwarty w (X, d)). Wywnioskuj, że każdy skończony podzbiór $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ jest domknięty w (X, d). Podaj przykład przestrzeni topologicznej i punktu tej przestrzeni, którego singleton nie jest zbiorem domkniętym.

Rozwiązanie:
Niech $y \in X \setminus \{x\}$, wówczas niech $r = d(y, x)$, stąd $B(y, r) \subseteq X \setminus \{x\}$, czyli $X \setminus \{x\}$ jest zbiorem otwartym. Oznaczmy teraz przez $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, wówczas dla $x \in X \setminus Y$ niech $r = \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}$. Zachodzi więc $B(x, r) \subseteq X \setminus Y$, czyli $X \setminus Y$ jest zbiorem otwartym.

Niech $X = \{0, 1\}$ oraz niech $\tau = \{\emptyset, X\}$, wówczas dowolny singleton nie jest zbiorem domkniętym, ponieważ jego dopełnienie nie jest otwarte, bo nie należy do τ.

Ogólnie jeśli X jest przestrzenią Hausdorffa, to każdy singleton (lub zbiór skończony) jest domknięty.

Zadanie 2.
Sprawdź, które z metryk d_e, d_k, d_r, d_m, d_s wyznaczają te same topologie na $\mathbb{R}^2$?

Rozwiązanie:
Weźmy punkt $(1, 1)$ wówczas kula B_r w metryce rzeka o promieniu $\frac{1}{2}$ to pionowy odcinek długości 1. Żadna kula w metryce kolejowej nie będzie się zawierała w kuli B_r. Zatem metryki d_r i d_k nie generują tej samej topologii. Również żadna kula w metryce euklidesowej nie będzie się zawierała w kuli B_r. Zatem metryki d_r i d_e nie generują tej samej topologii. Również dla kuli B_k o środku w punkcie $(1, 1)$ i promieniu $\frac{1}{2}$ nie istnieje kula w metryce euklidesowej w całości zawarta w kuli B_k. Zatem metryki d_e i d_k nie generują tej samej topologii. Metryki d_m, d_s, d_e wyznaczają te same topologie na $\mathbb{R}^2$, ponieważ w każdej kuli w danej metryce, dla każdego punktu do niej należącego, możemy znaleźć taką kulę w innej metryce, że kula ta zawiera się w całości w tej większej kuli.

Zadanie 3.
Ile różnych topologii można określić na zbiorze trzyelementowym $\{0, 1, 2\}$? Które z tych topologii są wyznaczone przez pewną metrykę? Które z tych topologii są Hausdorffa?

Rozwiązanie:
Wypiszemy przestrzenie w zależności od liczby singletonów otwartych

- Gdy mamy 0 singletonów otwartych, to daje nam to możliwości możliwości $\{\emptyset, X\}$ lub $\{\emptyset, \{a, b\}, X\} \times 3$. Dwóch podzbiorów dwuelementowych nie może być w topologii, ponieważ ich przecięcie jest singletonem.
- Gdy mamy 1 singleton otwarty, to mamy cztery możliwości $\{\emptyset, \{a\}, X\} \times 3$, $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\} \times 6$, $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\} \times 3$ lub $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\} \times 3$.
- Jeśli mamy 2 singletony otwarte, to mamy wówczas trzy możliwości $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\} \times 3$, $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\} X\} \times 3$ lub $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\} X\} \times 3$. Nie może zachodzić, by jednocześnie $\{a, c\}$ oraz $\{b, c\}$ były otwarte, bo wówczas również $\{c\}$ musiałby być otwarty.

- Jeśli mamy 3 singletony otwarte, to mamy do czynienia z topologią dyskretną.

Zatem w sumie mamy 29 różnych topologii. Jedynie topologia dyskretna jest Hausdorffa, a więc również jako jedyna pochodzi od metryki.

Zadanie 4.
Czy kwadrat $[0,1]\times[0,1]$ z metryką „rzeka" jest podprzestrzenią płaszczy euklidesowej?

Rozwiązanie:
Pokażemy, że kwadrat $[0,1]\times[0,1]$ z metryką „rzeka" nie jest podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej. Zbiór będący małym otoczeniem punktu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, czyli pionowym odcinkiem, jest otwarty w $\tau(d_r)$ na $[0,1]^2$, ale nie jest otwartym zbiorem w topologii podprzestrzeni. Innymi słowy, nie istnieje zbiór otwarty w $(\mathbb{R}^2, d_e)$ którego ślad na $[0,1]^2$ byłby pionowym odcinkiem. Ale pionowy odcinek jest otwarty w $\tau(d_r)$.

Twierdzenie: Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną podzbiorów X taką, że

1. $\bigcup\mathcal{B} = X \quad (B_1)$
2. $\forall_{B_1,B_2\in\mathcal{B}}\ \forall_{x\in B_1\cap B_2}\ \exists_{B\in\mathcal{B}}\ x\in B\subseteq B_1\cap B_2 \quad (B_2)$

Wtedy rodzina

$$\tau = \{U\subseteq X \mid \text{ jeśli } x\in U \text{ to } x\in B\subseteq U \text{ dla pewnego } B\in\mathcal{B}\}$$

jest topologią w X, a $\mathcal{B}$ jest jej bazą.

Zadanie 5.
Strzałka: Sprawdź, że rodzina przedziałów $\{[a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$ spełnia warunki $(B1)$ i $(B2)$, i tym samym jest bazą pewnej topologii na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}$ rozpatrywany z tą topologią nazywamy *strzałką* lub *prostą Sorgenfreya*. Przekonaj się, że przedział $[a,b)$, gdzie $a<b$ jest zarówno zbiorem otwartym jak i domkniętym w topologii strzałki.

Rozwiązanie:
Niech $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$. Pokażemy, że jest to baza rozpatrywanej topologii. Oczywiście suma wszystkich przedziałów postaci $[a,b)$ to prosta $\mathbb{R}$, ponieważ $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[k,k+1)$. Niech $A=[a,b)$ oraz $B=[c,d)$ będą podzbiorami $\mathcal{B}$ o niepustym przekroju. Niech bez straty ogólności $c<b$ i $a<d$, wówczas $[a,b)\cap[c,d) = [c,b)$, zatem przekrój $A\cap B$ należy do $\mathcal{B}$.

Pokażemy teraz, że zbiór $[a,b)$ dla $a<b$ jest zbiorem otwarto-domkniętym (clopen). Jest to zbiór otwarty, ponieważ jest zbiorem bazowym w tej topologii. Jest to zbiór domknięty, ponieważ jego dopełnienie jest otwarte. Mamy $\mathbb{R}\setminus[a,b) = (-\infty,a)\cup[b,+\infty)$. Ustalmy $x\in(-\infty,a)$, wówczas $x<a$, zatem przedział $\left[x, x+\frac{a-x}{2}\right)$ jest zbiorem bazowym otaczającym punkt x, zatem $\left[x, x+\frac{a-x}{2}\right)\subseteq(-\infty,a)$, czyli zbiór $(-\infty,a)$ jest zbiorem otwartym. Analogicznie pokazujemy, że $[b,+\infty)$ jest otwarty. Inaczej, możemy przedstawić każdą z półprostych jako nieskończoną sumę przedziałów. Mamy

$$(-\infty,a) = \bigcup_{n=2}^{\infty}\left[a-n, a-\frac{1}{n}\right) \qquad [b,+\infty) = \bigcup_{n=2}^{\infty}[b, b+n)$$

Stąd $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ jest otwarty.

Zadanie 6.
Kwadrat leksykograficzny: Niech $(X, <)$ będzie zbiorem co najmniej dwuelementowym z wyróżnionym porządkiem liniowym $<$. Sprawdź, że rodzina przedziałów postaci $\{y \mid y < x\}$, $\{y \mid y > x\}$ i $\{z \mid x < z < y\}$ spełnia warunki $(B1)$ i $(B2)$, i tym samym jest bazą pewnej topologii w zbiorze X. Topologię wprowadzoną przez tę bazę oznaczamy przez $\tau(<)$.

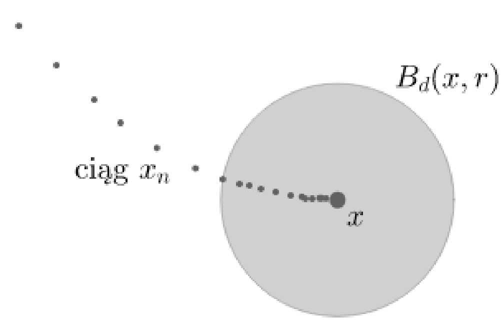
Rozwiązanie:
Niech $\mathcal{B}$ to rodzina zbiorów rozpatrywana w zadaniu. Weźmy dwa punkty $a, b \in X$ takie, że $a < b$, wówczas zbiory $\{y \mid y < b\}$ oraz $\{y \mid y > a\}$ należą do $\mathcal{B}$. Suma tych zbiorów to cała przestrzeń X, ponieważ te przedziały się zazębiają. Niech $A = (a, b), B = (c, d) \in \mathcal{B}$ oraz niech bez straty ogólności $c < b$ i $a < d$ (chcemy aby te dwa zbiory miały niepuste przecięcie). Niech $x \in A \cap B$, wówczas $x \in (c, b)$, zatem przekrój $A \cap B$ należy do $\mathcal{B}$.

Zadanie 7.
Udowodnij, że metryki d i ρ generują tę samą topologię w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) w X i dla każdego punktu $x \in X$ mamy

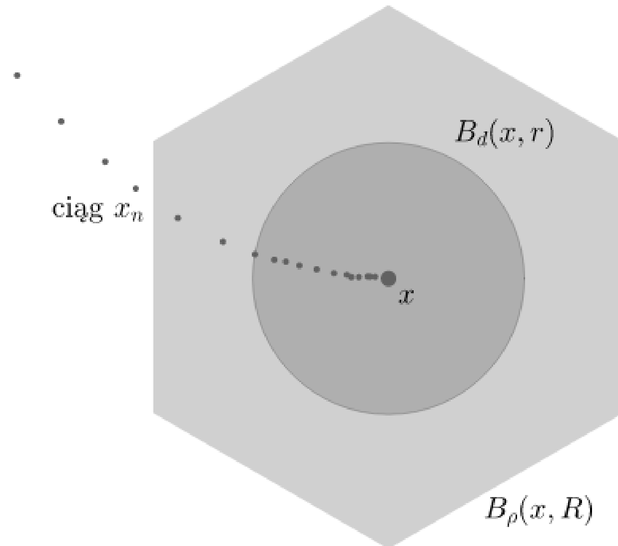
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

Rozwiązanie:

$\Rightarrow$ Załóżmy, że metryki d i ρ generują tę samą topologię. Niech $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Skoro $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, to dla każdego $r > 0$ istnieje takie N, że dla każdego $n > N$ zachodzi $x_n \in B_d(x, r)$, czyli innymi słowy, dla dowolnej kuli o środku w punkcie x, zaledwie skończenie wiele wyrazów ciągu x_n jest poza kulą.



Skoro metryki d i ρ generują tę samą topologię, to zbiór otwarty w metryce d jest również otwarty w metryce ρ. Ustalmy więc promień $R > 0$ i rozważmy kulę $B_\rho(x, R)$. Wówczas istnieje promień $r > 0$ taki, że kula w metryce d jest zawarta w kuli w metryce ρ, czyli $B_d(x, r) \subseteq B_\rho(x, R)$.



Wynika stąd, że dla dowolnego $R > 0$ kula $B_\rho(x,R)$ mieści w sobie prawie wszystkie elementy ciągu x_n, czyli dla każdego $R > 0$ istnieje takie N, że dla $n > N$ zachodzi $x_n \in B_\rho(x,R)$. Skąd mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0$.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że dla każdego ciągu $(x_n) \in X$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0$$

Załóżmy, że $A \subseteq X$ będzie otwarty w metryce d, natomiast niech A nie będzie otwarty w metryce ρ. Wówczas istnieje $x \in A$ taki, że dla pewnego $r > 0$ zachodzi $B_d(x,r) \subseteq A$ oraz dla każdego $R > 0$ zachodzi $B_\rho(x,R) \nsubseteq A$. Wówczas żadna kula w metryce ρ o środku w x nie będzie zawarta w kuli $B_d(x,r)$. Określmy ciąg (x_n) taki, że $x_n \in B_\rho\left(x, \frac{1}{n}\right)$, Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0$ oraz skoro $(x_n) \nsubseteq B_d(x,r)$ dla pewnego $r > 0$, to wynika stąd, że $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) \neq 0$. Stąd mamy sprzeczność, czyli A nie może nie być otwarty w metryce ρ, czyli jest otwarty. Stąd d i ρ generują tę samą topologię.

Ćwiczenia 5

Podstawowe pojęcia topologiczne

Zadanie 1.
Udowodnij, że $\overline{A} = \bigcap\{F \subseteq X \mid A \subseteq F \text{ oraz } F \text{ jest domknięty w } X\}$, to znaczy domknięcie $\overline{A}$ zbioru A w przestrzeni X jest najmniejszym (w sensie zawierania) zbiorem domkniętym w X zawierającym A.

Rozwiązanie:
$\subseteq$ Załóżmy, że $x \in \overline{A}$ oraz $x \notin \bigcap\{F \subseteq X \mid A \subseteq F \text{ oraz } F \text{ jest domknięty w } X\}$. Wówczas istnieje domknięte F takie, że $A \subseteq F$ oraz $x \notin F$. Skoro $x \notin F$, to $x \in X \setminus F$. Skoro F jest zbiorem domkniętym, to $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym. Wówczas $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$. Zbiór $X \setminus F$ jest więc otwartym otoczeniem x, które nie przecina zbioru A. Mamy więc sprzeczność z tym, że $x \in \overline{A}$.

$\supseteq$ Jeśli $x \notin \overline{A}$, to istnieje zbiór otwarty U taki, że $x \in U$ oraz $U \cap A = \emptyset$. Zbiór $X \setminus U$ jest zbiorem domkniętym oraz $A \subseteq (X \setminus U)$. Skoro $x \notin X \setminus U$ oraz $X \setminus U \in \{F \subseteq X \mid A \subseteq F \text{ oraz } F \text{ jest domknięty w } X\}$, to znaczy, że $x \notin \bigcap\{F \subseteq X \mid A \subseteq F \text{ oraz } F \text{ jest domknięty w } X\}$. Mamy więc sprzeczność z założeniem.

Zadanie 2.
Udowodnij, że $\mathrm{Int}(A) = \bigcup\{U \subseteq A \mid U \text{ jest otwarty w } X\}$, to znaczy $\mathrm{Int}(A)$ jest największym (w sensie zawierania) zbiorem otwartym zawartym w A.

Rozwiązanie:
$\subseteq$ Niech $x \in \mathrm{Int}A$, wówczas istnieje otwarty zbiór U taki, że $x \in U$ oraz $U \subseteq A$. Zatem jako, że $U \in \{U \subseteq A \mid U \text{ jest otwarty w } X\}$, to $x \in \bigcup\{U \subseteq A \mid U \text{ jest otwarty w } X\}$.

$\supseteq$ Niech $x \in \bigcup\{U \subseteq A \mid U \text{ jest otwarty w } X\}$, wówczas istnieje otwarte U takie, że $x \in U$ oraz $U \subseteq A$, czyli $x \in \mathrm{Int}A$.

Stąd wynika, że $\mathrm{Int}A$ jest zbiorem otwartym, bo jest pewną sumą zbiorów otwartych.

Zadanie 3.
Udowodnij, że operacja domknięcia ma następujące własności

a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$

c) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Rozwiązanie:

a) Wiemy, że dla dowolnych zbiorów X i Y zachodzi $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$, ponieważ jeśli $x \in \overline{X}$, to każda kula o środku w x przecina zbiór X. Jako, że $X \subseteq Y$, to również każde otoczenie przecina zbiór Y, czyli $x \in \overline{Y}$. Zatem skoro $A \cap B \subseteq A$ oraz $A \cap B \subseteq B$, to $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ oraz $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$, skąd otrzymujemy $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Niech $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$, wówczas $x \in \overline{A}$ oraz $x \notin \overline{B}$. Zatem każde otoczenie punktu x przecina zbiór A oraz istnieje pewne otoczenie punktu x, które nie przecina zbioru B. Weźmy więc dowolne otoczenie U punktu x i ograniczmy się do tej części U', która nie przecina B. Mamy $U' \subseteq U$, zatem wystarczy pokazać, że U' przecina zbiór $A \setminus B$. Zbiór U' przecina zbiór A, ponieważ jest pewnym otoczeniem punktu x. Zbiór U' nie przecina zbioru B, wprost z jego definicji. Zatem zbiór U' przecina zbiór $A \setminus B$, czyli $x \in \overline{A \setminus B}$, skąd mamy $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

c) $\subseteq$ Mamy $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ oraz $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, skąd $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

$\supseteq$ Weźmy dowolny $x \in \overline{A \cup B}$, wówczas każda kula o środku w punkcie x przecina zbiór $A \cup B$. Mamy pokazać, że każde otoczenie punktu x przecina ZAWSZE zbiór A lub ZAWSZE zbiór B (a nie że pewne przecina A a inne przecina B). Jeśli $x \in \overline{A}$ to kończymy dowód. Załóżmy więc, że $x \notin \overline{A}$. Wówczas istnieje otwarte otoczeniu U punktu x takie, że $U \cap A = \emptyset$. Pokażemy, że $x \in \overline{B}$. Ustalmy dowolne otwarte otoczenie V punktu x. Wówczas $U \cap V \subseteq V$ jest otwartym otoczeniem punktu x. Otoczenie to przecina $A \cup B$ oraz nie przecina zbioru A, czyli musi przecinać zbiór B. Stąd i V zawsze przecina zbiór B. Zatem każde otoczenie otwarte punktu x przecina ZAWSZE zbiór B. Stąd dla każdego $x \in \overline{A \cup B}$ mamy $x \in \overline{A}$ lub $x \in \overline{B}$ czyli $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Zatem $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$.

d) Niech $B = \overline{A}$, wówczas B jest zbiorem domkniętym, czyli $B = \overline{B}$, skąd $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Zadanie 4.
Czy prawdą jest, że $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$? Czy któraś z inkluzji zachodzi?

Rozwiązanie:
Niech $X = (\mathbb{R}, d_e)$. Niech $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, wówczas

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1) \neq [0,1] = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$$

Zatem nie jest prawdziwa inkluzja $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Jeśli $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, to istnieje taki zbiór A_n, że $x \in \overline{A_n}$. Zatem każde otoczenie U punktu x przecina zbiór A_n. Wówczas U przecina też $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, zatem $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$. Skąd mamy inkluzję $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$.

Zadanie 5.
Udowodnij, że dla dowolnej przestrzeni topologicznej X mamy

a) $\mathrm{Int} U = U$ wtedy i tylko wtedy gdy U jest zbiorem otwartym

b) $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$

c) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

d) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$

e) $\mathrm{Int}(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$

Zadanie 6.
Udowodnij wzory

a) $\mathrm{bd}(A \cup B) \subseteq \mathrm{bd}A \cup \mathrm{bd}B$

b) $\mathrm{bd}(A \cap B) \subseteq \mathrm{bd}A \cup \mathrm{bd}B$

c) $\mathrm{bd}A = \mathrm{bd}(X \setminus A)$

d) $\mathrm{bd}(\mathrm{Int}A) \subseteq \mathrm{bd}A$

e) $\mathrm{bd}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{bd}A$

f) $\mathrm{bd}A = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest otwarto-domknięty

Rozwiązanie:

a) Stwierdzenie $x \in \mathrm{bd}A$ oznacza, że $x \in \overline{A} \setminus \mathrm{Int}A$, czyli każde otoczenie punktu x przecina zbiór A oraz żadne otoczenie punktu x nie jest w całości zawarte w A, czyli, że każde otoczenie punktu x przecina $X \setminus A$.

Niech $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$ oraz niech U oznacza dowolne otoczenie x. Skoro $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$, to $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ oraz $U \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$. Skoro $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, to $U \cap A \neq \emptyset$ lub $U \cap B \neq \emptyset$. Skoro $U \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$ oraz $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, to $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ oraz $U \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$. Zatem $U \cap A \neq \emptyset$ oraz $U \cap (X \setminus A)$ i wówczas $x \in \mathrm{bd}A$ lub $U \cap B \neq \emptyset$ oraz $U \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ i wówczas $x \in \mathrm{bd}B$. Stąd $x \in \mathrm{bd}A$ lub $x \in \mathrm{bd}B$, czyli $x \in \mathrm{bd}A \cup \mathrm{bd}B$, skąd $\mathrm{bd}(A \cup B) \subseteq \mathrm{bd}A \cup \mathrm{bd}B$.

f) $\Rightarrow$ Załóżmy, że $\mathrm{bd} \neq \emptyset$, wówczas $\overline{A} \setminus A = \emptyset$. Zatem $\overline{A} \subseteq \mathrm{Int}A$. Jako, że $A \subseteq \overline{A}$ oraz $\mathrm{Int}A \subseteq A$, to mamy

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq \mathrm{Int}A \subseteq A$$

Skąd otrzymujemy $A = \overline{A}$ czyli A jest domknięty oraz $A = \mathrm{Int}A$, czyli A jest otwarty.

$\Leftarrow$ Niech A będzie otwarto-domknięty, wówczas $A = \overline{A}$ oraz $A = \mathrm{Int}A$, czyli

$$\mathrm{bd} = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}A = A \setminus A = \emptyset$$

Zadanie 7.
Wyznacz domknięcie, wnętrze oraz brzeg następujących podzbiorów prostej (z topologią euklidesową)

a) $\emptyset$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{N}$

d) $\mathbb{Q}$

e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

g) $[3, 8)$

h) $(0, \infty)$

Rozwiązanie:

a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, ponieważ $\emptyset$ jest zbiorem domkniętym oraz $\mathrm{Int}\emptyset = \emptyset$, ponieważ $\emptyset$ jest zbiorem otwartym. Wówczas $\mathrm{bd}\emptyset = \emptyset$.

b) Mamy $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, ponieważ $\mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym oraz $\mathrm{Int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$, ponieważ $\mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym. Wówczas $\mathrm{bd}\mathbb{R} = \emptyset$.

c) Mamy $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, ponieważ dla każdego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ znajdziemy przedział (a, b) taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $n \notin (a, b)$. Mamy $\mathrm{Int}\mathbb{N} = \emptyset$, ponieważ każde otoczenie liczby naturalnej nie zawiera się w liczbach naturalnych. Stąd $\mathrm{bd}\mathbb{N} = \mathbb{N}$.

d) Mamy $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej, pewne jej otoczenie zawiera liczbę wymierną. Wynika to z gęstości liczb wymiernych. Mamy $\mathrm{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$, ponieważ dla dowolnej liczby wymiernej, pewne jej otoczenie zawiera liczbę niewymierną, czyli otoczenie to nie zawiera się w liczbach wymiernych. Stąd $\mathrm{bd}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

e) Mamy $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}} = \mathbb{R}$, ponieważ dla każdej liczby naturalnej, pewne jej otoczenie przecina zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Mamy $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, ponieważ zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ jest zbiorem otwartym. Stąd $\mathrm{bd}\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

f) Mamy $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ oraz $\mathrm{Int}\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$. Wynika to z gęstości liczb niewymiernych. Wówczas $\mathrm{bd}\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

g) Mamy $\overline{[3, 8)} = [3, 8]$ oraz $\mathrm{Int}[3, 8) = (3, 8)$, skąd $\mathrm{bd}[3, 8) = \{3, 8\}$.

h) Mamy $\overline{(0, \infty)} = [0, \infty)$ oraz $\mathrm{Int}(0, \infty) = (0, \infty)$, skąd $\mathrm{bd}(0, \infty) = \{0\}$.

Ćwiczenia 6

Podstawowe pojęcia topologiczne

Zadanie 1.

Niech $(C([0,1]), d_{\text{sup}})$ będzie przestrzenią. Wyznacz domknięcie i wnętrze każdego ze zbiorów w topologii generowanej przez metrykę supremum.

a) $A = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) > 0 \text{ dla } x \in [0,1]\}$

b) $B = \{f \in C([0,1]) \mid \exists_{x\in[0,1]}\ f(x) = 0\}$

c) $C = \{f \in C([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|dx < 1\}$

d) $D = \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ jest ściśle rosnąca }\}$

Rozwiązanie:

a) Zbiór A jest otwarty zatem $\text{Int}A = A$, natomiast $\overline{A} = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) \geq 0 \text{ dla } x \in [0,1]\}$, ponieważ dla dowolnej funkcji f takiej, że $f(x) \geq 0$ i istnieje punkt $a \in [0,1]$, że $f(a) = 0$, w pewnym jej otoczeniu istnieje funkcja przyjmująca wartości dodatnie, czyli otoczenie przecina zbiór A, skąd funkcje nieujemne należą do domknięcia. Jeśli funkcja przyjmuje wartość ujemną dla pewnego $a \in [0,1]$, to istnieje kula $B_{\text{sup}}\left(f, \frac{|f(a)|}{2}\right)$ taka, że dla $g \in B_{\text{sup}}\left(f, \frac{|f(a)|}{2}\right)$, że $|g(x) - f(x)| < \varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$, czyli $g(a) < 0$. Zatem funkcja f nie należy do domknięcia.

b) Mamy $C([0,1]) \setminus B = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) < 0\} \cup \{f \in C([0,1]) \mid f(x) > 0\}$, ponieważ w przeciwnym przypadku z własności Darboux, funkcja przecinałaby oś OX czyli miałaby miejsce zerowe. Zarówno zbiór $\{f \in C([0,1]) \mid f(x) < 0\}$ jak i zbiór $\{f \in C([0,1]) \mid f(x) > 0\}$ jest otwarty, zatem $C([0,1]) \setminus B$ jest otwarty, skąd B jest domknięty, czyli $\overline{B} = B$. Natomiast $\text{Int}B = \{f \in C([0,1]) \mid \exists_{x\in[0,1]}\ f(x) < 0 \wedge \exists_{y\in[0,1]}\ f(y) > 0\}$, co wynika z własności Darboux.

c) Pokażemy, że $\overline{C} = \{f \in C([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|dx \leq 1\}$. Jeśli $f \in \overline{C}$ oraz $f_n \rightrightarrows f$ i $f_n \in C$, to wówczas

$$\int_0^1 |f_n(x)|dx \quad \longrightarrow \quad \int_0^1 |f(x)|dx$$

Zatem oczywiście $\int_0^1 |f(x)|dx \leq 1$. Jeśli $\int_0^1 |f(x)|dx \leq 1$, to istnieje kula wokół f taka, że istnieje w tej kuli funkcja g taka że $\int_0^1 |g(x)|dx < 1$, czyli $f \in \overline{C}$. Zbiór C jest otwarty, zatem $\text{Int}C = C$.

d) Pokażemy, że $\overline{D} = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) \text{ jest niemalejąca}\}$. Jeśli f jest taka, że $f(x) > f(y)$ dla $x < y$, to $f \notin \overline{D}$, ponieważ dla kuli $B_{\text{sup}}\left(f, \frac{|f(x)-f(y)|}{4}\right)$ wszystkie funkcje w niej leżące nie będą rosnące, czyli kula nie przecina zbioru D. Na odwrót, jeśli funkcja f jest niemalejąca, to zaledwie w przeliczalnie wielu przedziałach jest stała. Rozpatrzmy kulę wokół f o promieniu ε. Niech więc funkcja g zadana będzie wzorem

$$g = \begin{cases} f & \text{dla przedziału, gdzie } f \text{ jest rosnąca} \\ \text{funkcja liniowa o skoku } \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} & \text{dla przedziału, gdzie } f \text{ jest stała} \end{cases}$$

Funkcja ta jest rosnąca oraz jest zawarta w kuli o promieniu ε, ponieważ „skoki” funkcji sumują się do $\frac{\varepsilon}{2}$. Zatem kula ta przecina zbiór D. Natomiast mamy $\operatorname{Int} D = \emptyset$, ponieważ dla dowolnej kuli o promieniu ε i środku w f, istnieje w niej funkcja niemalejąca. Wystarczy, że na początku g będzie stała na odcinku $\frac{\varepsilon}{4}$, a następnie będzie równa funkcji f.

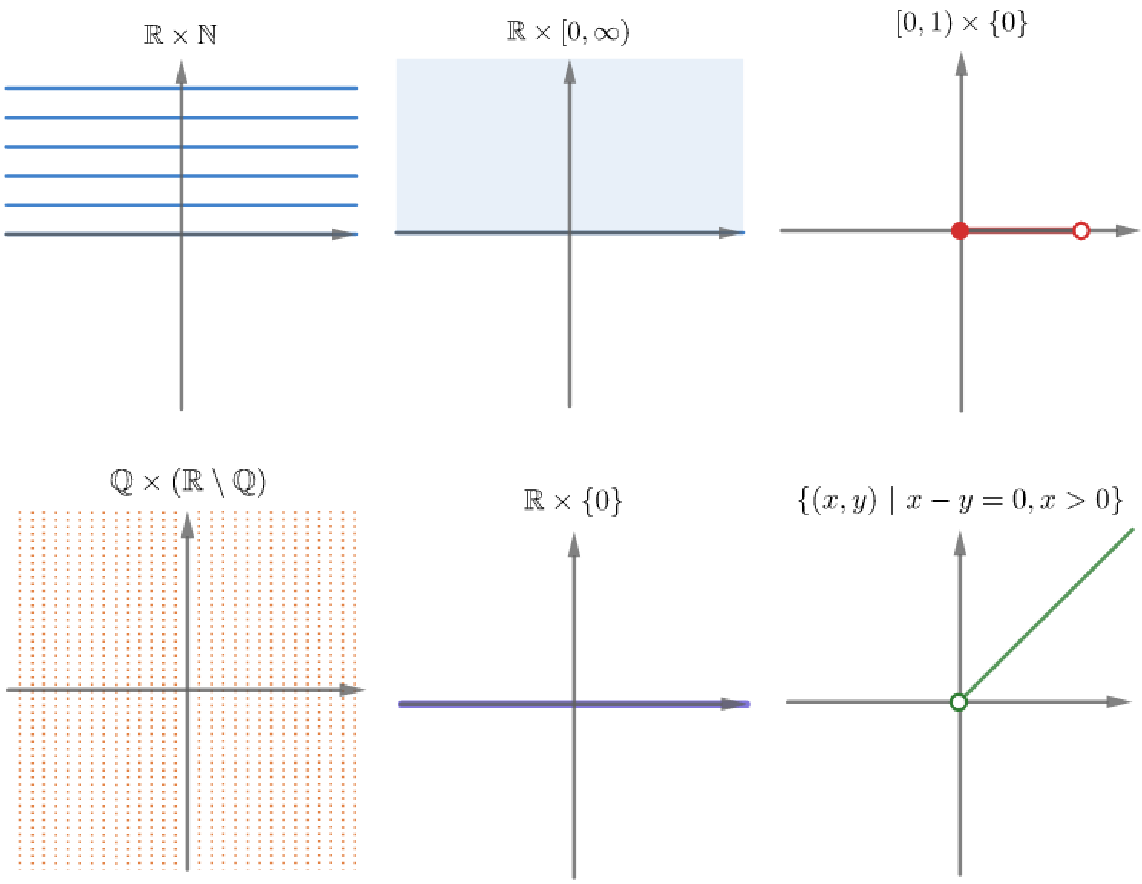
Zadanie 2.
Znajdź wnętrze, domknięcie i brzeg następujących podzbiorów: $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, $[0, 1) \times \{0\}$, $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{(x, y) \mid x - y = 0, x > 0\}$

a) płaszczyzny euklidesowej

b) płaszczyzny z metryką „rzeka”

c) płaszczyzny z metryką „kolejową”

Rozwiązanie:
Narysujmy sobie najpierw wszystkie zbiory



Oznaczmy $A = \{(x, y) \mid x - y = 0, x > 0\}$.

a)

$\operatorname{Int}(\mathbb{R} \times \mathbb{N}) = \emptyset$ $\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$	$\operatorname{Int}(\mathbb{R} \times [0, \infty)) = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ $\overline{\mathbb{R} \times [0, \infty)} = \mathbb{R} \times [0, \infty)$	$\operatorname{Int}([0, 1) \times \{0\}) = \emptyset$ $\overline{[0, 1) \times \{0\}} = [0, 1] \times \{0\}$
$\operatorname{Int}(\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \emptyset$ $\overline{\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$\operatorname{Int}(\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$ $\overline{\mathbb{R} \times \{0\}} = \mathbb{R} \times \{0\}$	$\operatorname{Int}(A) = \emptyset$ $\overline{A} = A \cup \{(0, 0)\}$

b)

$\mathrm{Int}(\mathbb{R}\times\mathbb{N})=\emptyset$ $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{N}$	$\mathrm{Int}(\mathbb{R}\times[0,\infty))=\mathbb{R}\times(0,\infty)$ $\overline{\mathbb{R}\times[0,\infty)}=\mathbb{R}\times[0,\infty)$	$\mathrm{Int}([0,1)\times\{0\})=\emptyset$ $\overline{[0,1)\times\{0\}}=[0,1]\times\{0\}$
$\mathrm{Int}(\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))=\emptyset$ $\overline{\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}=B$	$\mathrm{Int}(\mathbb{R}\times\{0\})=\emptyset$ $\overline{\mathbb{R}\times\{0\}}=\mathbb{R}\times\{0\}$	$\mathrm{Int}(A)=\emptyset$ $\overline{A}=A\cup\{(0,0)\}$

gdzie $B=(\mathbb{Q}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\{0\})$

c)

$\mathrm{Int}(\mathbb{R}\times\mathbb{N})=\mathbb{R}\times\{0\}\setminus\{(0,0)\}$ $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{N}$	$\mathrm{Int}(\mathbb{R}\times[0,\infty))=\mathbb{R}\times[0,\infty)\setminus\{(0,0)\}$ $\overline{\mathbb{R}\times[0,\infty)}=\mathbb{R}\times[0,\infty)$
$\mathrm{Int}([0,1)\times\{0\})=(0,1)\times\{0\}$ $\overline{[0,1)\times\{0\}}=[0,1]\times\{0\}$	$\mathrm{Int}(\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))=\emptyset$ $\overline{\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}=C$
$\mathrm{Int}(\mathbb{R}\times\{0\})=(\mathbb{R}\times\{0\})\setminus\{(0,0)\}$ $\overline{\mathbb{R}\times\{0\}}=\mathbb{R}\times\{0\}$	$\mathrm{Int}(A)=A$ $\overline{A}=A\cup\{(0,0)\}$

gdzie $C=(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\bigcup_{a\in\mathbb{Q}}\{(x,y)\mid y=ax\}\cup\{(0,0)\}$

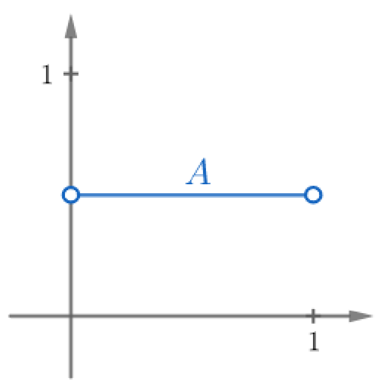
Zadanie 3.
Wyznacz domknięcie i wnętrze następujących podzbiorów kwadratu leksykograficznego. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $A=(0,1)\times\left\{\frac{1}{2}\right\}$

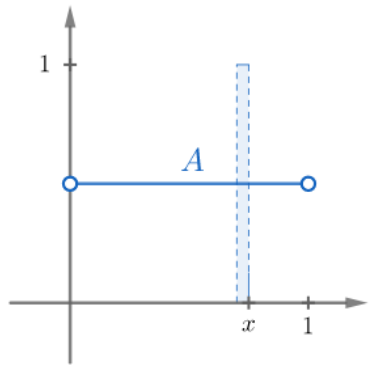
b) $B=\left\{\frac{1}{2}\right\}\times(0,1)$

Rozwiązanie:

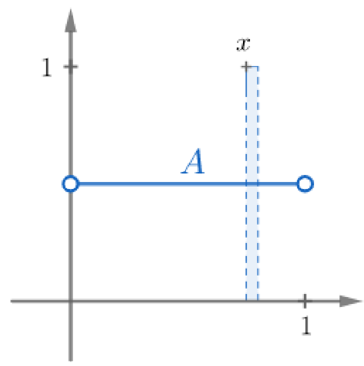
a) Narysujmy zbiór A



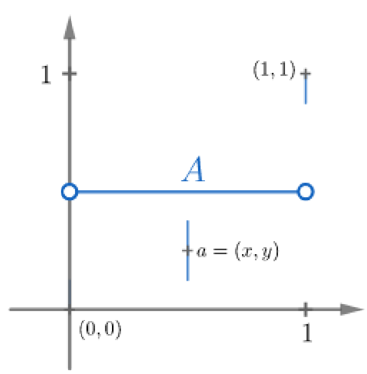
Domknięcie zbioru A to taki zbiór $\overline{A}=\{x\in X\mid$ każde otoczenie punktu x przecina zbiór $A\}$. W szczególności $A\subseteq\overline{A}$. Punkty ze zbioru $(0,1]\times\{0\}$ należą do domknięcia, ponieważ każde otoczenie punktu x zawiera pionowy pasek epsilonowej szerokości $(x-\varepsilon,x)\times[0,1]$, czyli każde otoczenie x przecina zbiór A.



Punkty ze zbioru $[0,1) \times \{1\}$ należą do domknięcia, ponieważ każde otoczenie punktu x zawiera pionowy pasek epsilonowej szerokości $(x, x+\varepsilon) \times [0,1]$, czyli każde otoczenie x przecina zbiór A.

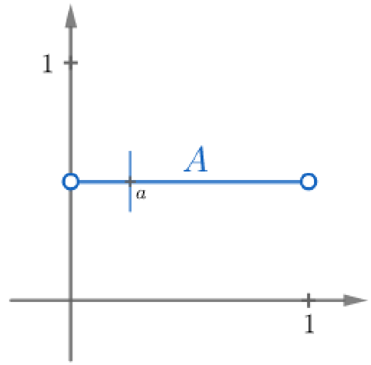


Punkt $(1,1)$ nie należy do domknięcia, ponieważ istnieje jego otoczenie otwarte $\{1\} \times (0.9, 1]$, które nie przecina zbioru A. Punkt $(0,0)$ nie należy do domknięcia, ponieważ istnieje jego otoczenie otwarte $\{0\} \times [0, 0.1)$, które nie przecina zbioru A. Dowolny punkt $a = (x,y)$ ze zbioru $([0,1] \times [0,1]) \setminus (A \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup ([0,1] \times \{0\}))$ nie należy do domknięcia, ponieważ istnieje jego otwarte otoczenie $\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, które nie przecina zbioru A.



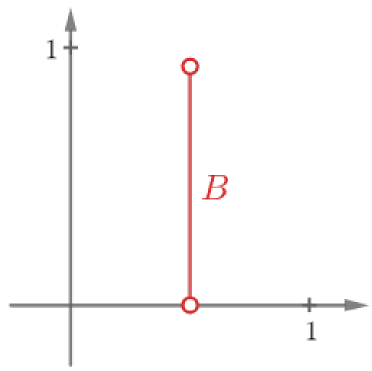
Zatem domknięciem zbioru A jest $\overline{A} = A \cup ([0,1) \times \{1\}) \cup ((0,1] \times \{0\})$.

Wnętrze zbioru A to taki zbiór $\mathrm{Int} A = \{x \in X \mid$ pewne otoczenie punktu x jest zawarte w $A\}$ Dla dowolnego punktu $a = (x,y) \in A$ dowolne otoczenie $\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ punktu a wystaje poza odcinek $(0,1) \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$.



Zatem wnętrzem zbioru A jest $\mathrm{Int}A = \emptyset$.

b) Narysujmy zbiór B.



Zbiór B należy do domknięcia z definicji domknięcia. Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ należy również do domknięcia, ponieważ dowolne otoczenie tego punktu przecina zbiór B. Punkt $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ należy także do domknięcia, ponieważ dowolne otoczenie tego punktu przecina zbiór B. Dowolny punkt spoza zbioru $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0, 1]$ nie należy do domknięcia, gdyż istnieje pewne otwarte otoczenie danego punktu nie przecinające zbioru B. Stąd domknięciem zbioru B jest zbiór $\overline{B} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0, 1]$.

Dla każdego punktu z B znajdziemy takie jego otoczenie, że zawiera się ono w całości w zbiorze B, ponieważ zbiór B jest otwarty, czyli jest równy swojemu wnętrzu. Stąd wnętrzem zbioru B jest zbiór $\mathrm{Int}B = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times (0, 1)$.

Zadanie 4.
Wyznacz domknięcie i wnętrze następujących podzbiorów kwadratu leksykograficznego

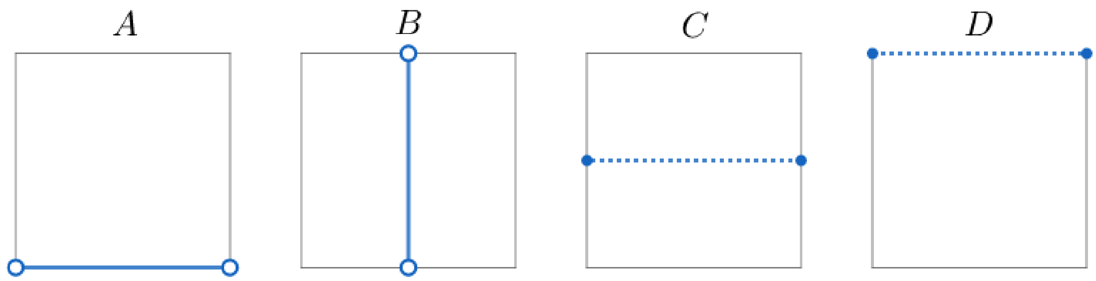
a) $A = (0, 1) \times \{0\}$

b) $B = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times (0, 1)$

c) $C = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$

d) $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times \{1\}$

Rozwiązanie:
Narysujmy zbiory A, B, C, D w kwadracie leksykograficznym



a) Mamy $\mathrm{Int}A = \emptyset$, ponieważ dowolne otoczenie punktu $x \in A$ nie zawiera się w A. Mamy $\overline{A} = A \cup ([0,1) \times \{1\}) \cup (1,0)$, ponieważ pewne otoczenie punktu z tego zbioru przecina zbiór A.

b) Mamy $\mathrm{Int}B = B$, ponieważ dowolne otoczenie punktu $x \in B$ zawiera się w B. Mamy $\overline{B} = B\left(\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ponieważ pewne otoczenie każdego punktu z tego zbioru przecina zbiór B.

c) Mamy $\mathrm{Int}C = \emptyset$, ponieważ dowolne otoczenie punktu $x \in C$ nie zawiera się w C. Mamy $\overline{C} = C \cup ((0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1) \times \{1\})$, ponieważ pewne otoczenie punktu z tego zbioru przecina zbiór C.

d) Mamy $\mathrm{Int}D = \emptyset$, ponieważ dowolne otoczenie punktu $x \in D$ nie zawiera się w D. Mamy $\overline{D} = ([0,1] \times \{1\}) \cup ((0,1] \times \{0\})$, ponieważ pewne otoczenie punktu z tego zbioru przecina zbiór D.

Zadanie 5.
Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Niech τ będzie następującą topologią na X

$$\tau = \{U \subseteq X \mid U = \emptyset \text{ lub } X \setminus U \text{ jest zbiorem skończonym}\}$$

Uzasadnij, że (X, τ) nie jest przestrzenią Hausdorffa. Udowodnij, że domknięcie dowolnego zbioru nieskończonego w (X, τ) jest całą przestrzenią.

Rozwiązanie:
Pokażmy najpierw, że (X, τ) nie jest przestrzenią Hausdorffa. Załóżmy nie wprost, że (X, τ) jest przestrzenią Hausdorffa. Weźmy punkty $x_1, x_2 \in X$ takie, że $x_1 \neq x_2$ oraz $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ dla pewnych zbiorów otwartych $U_1, U_2 \subseteq X$. Z definicji topologii wiemy, że $X \setminus U_1$ oraz $X \setminus U_2$ są skończone. Zatem jako, że $X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$, to $X \setminus (U_1 \cap U_2)$ również jest skończony. Stąd $X \setminus \emptyset = X$ jest skończony, co jest sprzeczne z tym, że X był nieskończony.

Niech $A \subseteq X$ będzie zbiorem nieskończonym. Weźmy dowolny $x \in X$. Chcemy pokazać, że $x \in \overline{A}$, czyli, że dla każdego U takiego, że $x \in U$ zachodzi $U \cap A \neq \emptyset$. Ustalmy $U \in \tau$ takie, że $x \in U$. Wówczas z definicji τ zbiór $X \setminus U$ jest skończony. Skoro A jest nieskończony, to $A \not\subseteq X \setminus U$ czyli $A \cap U \neq \emptyset$.

Zadanie 6.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy *gęstym* w X jeśli dla każdego niepustego zbioru otwartego $U \subseteq X$ mamy $U \cap A \neq \emptyset$. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy *brzegowym* w X gdy $\mathrm{Int}A = \emptyset$. Udowodnij, że

a) A jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A} = X$

b) A jest brzegowy w X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus A$ jest gęsty w X.

Rozwiązanie:

a) $\Rightarrow$ Pokażemy, że każdy punkt przestrzeni $x \in X$ należy do $\overline{A}$. Ustalmy $x \in X$ oraz otwarte otoczenie U punktu $x \in U$. Skoro A jest gęsty, to $A \cap U \neq \emptyset$, zatem $x \in \overline{A}$, czyli $\overline{A} = X$

$\Leftarrow$ Załóżmy, że $\overline{A} = X$. Ustalmy otwarty i niepusty zbiór $U \subseteq X$. Skoro $U \neq \emptyset$, to istnieje $x \in U$. Wówczas $U \cap A \neq \emptyset$, ponieważ również $x \in \overline{A}$, bo $\overline{A} = X$. Skoro $A \cap U \neq \emptyset$, to A jest gęsty w X.

b) $\Rightarrow$ Załóżmy, że $X \setminus A$ nie jest gęsty. Wtedy istnieje niepusty zbiór otwarty U taki, że $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Wówczas $U \subseteq A$, czyli $\mathrm{Int}A \neq \emptyset$, bo $U \subseteq \mathrm{Int}A$.

$\Leftarrow$ Niech $X \setminus A$ będzie gęsty. Załóżmy, że $\mathrm{Int}A \neq \emptyset$, czyli że A nie jest zbiorem brzegowym w X. Wówczas skoro $\mathrm{Int}A \subseteq A$, to $\mathrm{Int}A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Jest to sprzeczne z tym, że $X \setminus A$ jest gęsty, bo znaleźliśmy niepusty zbiór otwarty $U = \mathrm{Int}A$ w X taki, że $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

Twierdzenie: Następujące warunki są równoważne

1. A jest brzegowy,
2. A ma puste wnętrze,
3. dopełnienie zbioru A jest zbiorem gęstym

Definicja: Zbiór gęsty to taki zbiór, którego domknięcie jest równe całej przestrzeni.

Zadanie 7.
Czy prosta L w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ jest zbiorem: otwartym, domkniętym, brzegowym, gęstym? To samo pytanie dla prostej w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$, gdzie d_k oznacza metrykę kolejową.

Rozwiązanie:
Prosta w przestrzeni euklidesowej nie jest zbiorem otwartym, ponieważ dowolna kula o środku w punkcie leżącym na tej prostej, nie zawiera się w prostej.

Prosta jest zbiorem domkniętym, ponieważ jej dopełnienie jest zbiorem otwartym, ponieważ dla dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}^n \setminus L$ kula $B(x, d_e(x, L))$ zawiera się w całości w dopełnieniu.

Niech $x \in L$, wówczas każde otoczenie punktu x zawiera w sobie pewną kulę. Kula ta nie zawiera się w prostej, ponieważ prosta nie jest zbiorem otwartym. Stąd wnętrze prostej jest zbiorem pustym, czyli prosta jest zbiorem brzegowym.

Prosta w $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ jest domkniętym podzbiorem właściwym, a domknięte podzbiory właściwe nie są gęste w żadnej przestrzeni topologicznej.

Prosta w przestrzeni z metryką kolejową nie jest otwarta, ponieważ jeśli nie przechodzi przez punkt $(0,0)$ to żadna kula nie zawiera się w całości w prostej. Jeśli prosta przechodzi przez punkt $(0,0)$, to każda kula w punkcie $(0,0)$ nie zawiera się w prostej.

Prosta jest zbiorem domkniętym, ponieważ dla każdego punktu x z dopełnienia znajdziemy kulę $B(x, d_k(x, L))$ w całości zawartą w dopełnieniu.

Jeśli prosta przechodzi przez $(0,0)$, to wnętrze prostej to $L \setminus (0,0)$, ponieważ dla każdego punktu z tego zbioru znajdziemy kulę o środku w tym punkcie w całości zawartą w tym zbiorze. Dla prostej nie przechodzącej przez punkt $(0,0)$ wnętrze jest zbiorem pustym z tego samego powodu dla którego prosta nie jest zbiorem otwartym. Zatem prosta jest zbiorem brzegowym jeśli nie przechodzi przez punkt $(0,0)$.

Prosta nie jest zbiorem gęstym w przestrzeni euklidesowej z metryką kolejową, ponieważ jej domknięcie nie jest całą przestrzenią.

Ćwiczenia 7

Podstawowe pojęcia topologiczne

Zadanie 1.
Udowodnij, że suma $A \cup B$ zbioru brzegowego A i zbioru domkniętego i brzegowego B, jest zbiorem brzegowym w przestrzeni topologicznej X. Podaj przykład dwóch brzegowych (niedomkniętych) podzbiorów prostej euklidesowej $\mathbb{R}$, których suma nie jest brzegowa w $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że $A \cap B = \emptyset$ (bo można wziąć równie dobrze $A \setminus B$) oraz że $x \in \mathrm{Int}(A \cup B)$. Skoro x należy do wnętrza, to pewne jego otoczenie V jest zawarte w tym wnętrzu. Zbiór ten nie może zawierać się w całości w A, bo A jest brzegowy oraz nie może zawierać się w całości w B, bo B jest brzegowy. Ale zbiór $V \setminus B$ jest już w całości zawarty w A, ponieważ gdyby nie był, to znaczy że V zawierał się w całości w B. $V \setminus B$ jest otwarty jako bo jest różnicą zbioru otwartego i domkniętego. Stąd mamy sprzeczność z tym że wnętrze zbioru A jest puste.

Jeśli $A = \mathbb{Q}$ oraz $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to spełnione są założenia zadania, jednak ich suma to $\mathbb{R}$ a to nie jest zbiór brzegowy, stąd założenie o domkniętości zbioru B jest konieczne.

Zadanie 2.
Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ i niech $b_1, b_2, \ldots$ będzie ciągiem zbieżnym liczb rzeczywistych. Rozważmy zbiór $B = \{a_i + b_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Pokaż, że jeśli $\overline{A} = \mathbb{R}$, to również $\overline{B} = \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że $B \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$, czyli że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie że $|a_n + b_n - x| < \varepsilon$. Rozważmy przedział $U = \left(x - b - \frac{\varepsilon}{2}, x - b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Jest to kula wokół $(x - b)$ o promieniu $\frac{\varepsilon}{2}$. Skoro A jest gęsty, więc $A \cap U \neq \emptyset$. Gdyby $A \cap U = F$ był skończony, to F byłby domknięty, więc $U \setminus F$ byłby otwarty, zatem $A \cap (U \setminus F) \neq \emptyset$. Mamy więc sprzeczność z tym, że $A \cap U = F$, zatem F jest nieskończony. Mamy $b_n \to b$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $k > N$ zachodzi $|b_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Skoro $A \cap U$ jest nieskończony, to istnieje $n > N$ takie że $a_n \in A \cap U$, czyli $|a_n - (x - n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ale wówczas $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, bo $n > N$. Dalej mamy

$$|a_n + b_n - x| = |a_n - (x - b) + b_n - b| \leq |a_n - (x - b)| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Stąd $\overline{B} = \mathbb{R}$.

Zadanie 3.
Punkt a w przestrzeni topologicznej X nazywamy *punktem izolowanym* jeśli zbiór $\{a\}$ jest otwarty w X. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *dyskretna*, jeśli wszystkie jej punkty są izolowane. Zauważ, że przestrzeń X jest dyskretna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór $A \subseteq X$ jest otwarty. Niech τ_k, τ_r będą topologiami generowanymi odpowiednio przez metryki kolejową i rzeka.

a) Określ zbiór nieprzeliczalny $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że podprzestrzeń $(Y, \tau_k \restriction Y)$ jest dyskretna, ale podprzestrzeń $(Y, \tau_r \restriction Y)$ nie ma punktów izolowanych.

b) Określ zbiór nieprzeliczalny $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że obie podprzestrzenie $(Y, \tau_k \restriction Y)$ i $(Y, \tau_r \restriction Y)$ mają dokładnie jeden punkt nieizolowany.

Rozwiązanie:

a) Weźmy dowolną prostą p nie przechodzącą przez punkt $(0,0)$ na przykład $p = \{1\} \times \mathbb{R}$, wówczas dla każdego punktu $a = (1,y) \in p$ zachodzi $\{a\} = p \cap B_{d_k}\left((1,y), \frac{1}{2}\right)$. Innymi słowy, dowolna kula w metryce kolejowej wykrawa z prostej p dokładnie jeden punkt. Ten punkt jest więc izolowany w metryce kolejowej i jako, że prosta p ma nieprzeliczalnie wiele punktów, to zbiór $Y = p$ jest dyskretny. Natomiast podprzestrzeń zbioru $Y = p$ w metryce rzeka nie ma punktów izolowanych.

b) Niech $Y = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{n}\} \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})\right) \cup \{(0,0)\}$, wówczas każdy punkt z okręgu jest punktem izolowanym, ponieważ kula w dowolnej metryce wykrawa z okręgu tylko jeden punkt. Punkt $(0,0)$ jest nieizolowany, ponieważ dla kuli o dowolnym promieniu, nieskończenie wiele punktów ze zbioru Y zawiera się w niej.

Definicja: Mówimy, że przestrzeń topologiczna topologiczna X jest ośrodkowa jeśli X zawiera przeliczalny podzbiór gęsty.

Zadanie 4.
Czy następujące przestrzenie topologiczne są ośrodkowe?

a) Przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$

b) Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z topologią $\tau(d_r)$ generowaną przez metrykę „rzeka"

c) Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z topologią $\tau(d_k)$ generowaną przez metrykę „kolejową"

d) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ z topologią odziedziczoną z płaszczyzny euklidesowej

e) Okrąg S^1

f) Prosta z topologią strzałki

h) Kwadrat leksykograficzny

i) Przestrzeń $(C([0,1]), d_{\sup})$

Rozwiązanie:

a) Przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest ośrodkowa, ponieważ $\mathbb{Q}^n = \{(q_1, \ldots, q_n) \mid q_i \in \mathbb{Q}\}$ jest przeliczalnym zbiorem gęstym, ponieważ $\mathbb{Q}^n$ odwiedza każdy zbiór bazowy w topologii produktowej na $\mathbb{R}^n$.

b) Przestrzeń ta nie jest ośrodkowa, ponieważ istnieje rodzina kul parami rozłącznych mocy continuum. Mianowicie jest to zbiór kul $B_r((x,2),1)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Jeśli istnieje przeliczalny zbiór gęsty, to odwiedza on każdą z kul, czyli musi mieć on moc continuum, co jest sprzeczne.

c) Rozważmy rodzinę kul o środkach leżących na okręgu o promieniu 2 i promieniach 1. Kule te są rozłączne oraz jest ich continuum wiele, zatem przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z topologią generowaną przez metrykę „kolejową" nie jest ośrodkowa.

d) Mamy $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, więc $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^2$ ma przeliczalną bazę. Są to ślady przeliczalnej bazy z $\mathbb{R}^2$. Jeśli przestrzeń ma przeliczalną bazę to jest ośrodkowa. Zatem $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^2$ jest ośrodkowa.

e) Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to S^1$ zadaną wzorem $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Jest to suriekcja, zatem $f(\mathbb{Q})$ jest przeliczalny i gęsty w S^1.

f) Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny i gęsty, zatem jako że w każdym odcinku lewostronnie domkniętym istnieje liczba wymierna, to prosta z topologią strzałki jest ośrodkowa.

h) Kwadrat leksykograficzny nie jest ośrodkowy, bo kule $B((x, 0.5), 0.5)$ są rozłączne i jest ich continuum wiele.

i) Przestrzeń $(C([0,1]), d_{\sup})$ jest ośrodkowa, ponieważ każdą funkcję można przybliżyć za pomocą wielomianu. Wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalnie wiele. Innymi słowy, każda funkcja ciągła na $[0,1]$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów o wymiernych współczynnikach.

Uwaga: Każda podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej jest ośrodkowa, bo ma przeliczalną bazę.

Zadanie 5.
Udowodnij, że przestrzeń metryzowalna X jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy X ma bazę przeliczalną.

Rozwiązanie:
Przestrzeń metryzowala to taka przestrzeń dla której istnieje metryka d, która generuje topologię, czyli $\tau = \tau(d)$. Przestrzeń X jest ośrodkowa jeśli ma przeliczalny zbiór gęsty. X ma przeliczalną bazę oznacza, że jest baza przestrzeni X, która jest przeliczalną rodziną zbiorów.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że X jest przestrzenią metryzowalną oraz niech d generuje te topologię. Niech $D \subseteq X$ to zbiór przeliczalny i gęsty. Konstruujemy rodzinę kul

$$\mathcal{B} = \left\{ B_d\left(a, \frac{1}{n}\right) \mid a \in D,\ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

Pokażemy, że $\mathcal{B}$ jest bazą X. Ustalmy zbiór otwarty $U \subseteq X$ i $x \in U$. Szukamy $a \in D$ oraz n takie, $x \in B_d\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$. Skoro U jest otwarty i $x \in U$, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Niech n będzie takie, że $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Wówczas $B\left(x, \frac{2}{n}\right) \subseteq B(x, \varepsilon)$. Skoro D jest gęsty, to istnieje $a \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap D$. Twierdzimy, że $x \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$. Mamy $d(x, a) < \frac{1}{n}$, bo $a \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, czyli $x \in B\left(a, \frac{1}{n}\right)$. Dalej niech $z \in B\left(a, \frac{1}{n}\right)$, wówczas z nierówności trójkąta mamy $d(z, x) \leq d(z, a) + d(a, x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, bo $z \in B\left(a, \frac{1}{n}\right)$. Zatem $d(z, x) < \frac{2}{n} < \varepsilon$, czyli $z \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

$\Leftarrow$ Niech $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ to przeliczalna baza X. Wybieramy $x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2, \ldots, x_i \in B_i, \ldots$. Zbiór $\{x_1, x_2, \ldots\}$ jest przeliczalny oraz jest gęsty, bo odwiedza każdy zbiór bazowy, czyli każdy zbiór otwarty.

Zadanie 6.
Udowodnij, że prosta z topologią strzałki nie ma przeliczalnej bazy. Wywnioskuj, że ta przestrzeń nie jest metryzowalna.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest przeliczalną rodziną podzbiorów prostej. Rozważmy zbiór

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = \inf B \text{ dla pewnego } B \in \mathcal{B}\}$$

Jest to zbiór przeliczalny, bo $\mathcal{B}$ jest przeliczalny. Wobec tego istnieje $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\inf B \mid B \in \mathcal{B}\}$, czyli x_0 nie jest kresem dolnym żadnego zbioru z B. Dalej $[x_0, x_0+1)$ jest zbiorem otwartym w topologii strzałki. Nie jest on sumą zbiorów z $\mathcal{B}$, czyli nie istnieje $B \in \mathcal{B}$ taki że $x_0 \in B \subseteq [x_0, x_0+1)$, bo w przeciwnym razie jeśli takie B istnieje, to $x = \inf B$. Stąd prosta z topologią strzałki nie ma przeliczalnej bazy.

Ćwiczenia 8

Ciągłość

Zadanie 1.
Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ciągła dokładnie w jednym punkcie.

Rozwiązanie:
Niech f zadane będzie wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

wówczas f jest ciągła w zerze. Weźmy dowolne otoczenie punktu $f(0) = 0$, czyli $U = (f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Niech $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$, wówczas skoro dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|f(x)| \leq |x|$, to $f(V) = f((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) = U$. Funkcja f nie jest ciągła w żadnym innym punkcie niż 0. Jeśli $q \neq 0$ i $q \in \mathbb{Q}$, to $f(q) = 0$. Rozpatrzmy więc dowolnie małe otoczeniu U punktu $f(q) = 0$. W dowolnym otoczeniu V punktu q znajdziemy liczbę niewymierną w. Zatem skoro $f(w) = w$, to $f(V) \nsubseteq U$, ponieważ $f(w) \notin U$. Stąd funkcja f nie jest ciągła w liczbach wymiernych różnych od zera. Dla $q \notin \mathbb{Q}$, mamy analogiczną sytuację, zatem również w takich punktach funkcja nie jest ciągła.

Zadanie 2.
Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi i $X = A \cup B$, gdzie A i B są podzbiorami otwartymi (domkniętymi) w X. Załóżmy, że $f : A \to Y$ i $g : B \to Y$ są przekształceniami ciągłymi zgodnymi na $A \cap B$. Pokazać, że wtedy funkcja $F : X \to Y$ określona na A jako f, a na B jako g jest przekształceniem ciągłym.

Rozwiązanie:
Funkcja F określona jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ g(x) & \text{dla } x \in B \end{cases}$$

Funkcja ta jest dobrze określona, ponieważ przekształcenia f i g są zgodne na $A \cap B$. Mamy pokazać, że dla dowolnego otwartego $U \subseteq Y$ zachodzi $F^{-1}(U)$ jest otwarty w X. Mamy

$$F^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U)$$

Zatem jeśli $x \in F^{-1}(U)$, to $x \in f^{-1}(U)$ lub $x \in g^{-1}(U)$. Wiemy, że $f^{-1}(U)$ jest otwarty w A, bo f jest ciągłe oraz $g^{-1}(U)$ jest otwarty w B, bo g jest ciągłe. Zatem skoro $A \subseteq X$ jest otwarty i $B \subseteq X$ jest otwarty, to $f^{-1}(U)$ jest otwarty w X i $g^{-1}(U)$ jest otwarty w X. Zatem $f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U)$ jest otwarte w X, skąd $F^{-1}(U)$ jest otwarty w X.

Zadanie 3.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że jeśli $f_n \rightrightarrows f$ (to znaczy ciąg (f_n) zbiega jednostajnie do f), to funkcja f jest ciągła.

Rozwiązanie:
Skoro $f_n \rightrightarrows f$, to
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>N}\ \forall_{x\in X}\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$
Udowodnimy, że f jest ciągła w każdym punkcie $a \in X$. Ustalmy $a \in X$. Mamy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ będącego promieniem kuli na $\mathbb{R}$ wokół $f(a)$, istnieje zbiór otwarty $V \subseteq X$ będący otoczeniem punktu a taki, że $f(V) \subseteq (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, czyli innymi słowy musimy pokazać, że
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{V\ni a}\ \forall_{x\in A}\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$
Za zbieżności jednostajnej f_n wiemy, że dla $\frac{\varepsilon}{3}$
$$\exists_N\ \forall_{n>N}\ \forall_x\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$
czyli w szczególności dla $n > N$ zachodzi
$$|f_n(a)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{3}$$
Niech $n > N$, wówczas f_n jest ciągłe, czyli jest ciągła w a, czyli
$$\exists_{V\ni a}\ \forall_{x\in V}\ |f_n(x)-f_n(a)|<\frac{\varepsilon}{3}$$
Niech $x \in V$, wówczas z nierówności trójkąta mamy
$$|f(x)-f(a)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)+f_n(a)-f_n(a)-f(a)| \leq$$
$$\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$
Zatem zbiór V spełnia warunki zadania, czyli f jest ciągła.

Zadanie 4.
Oznaczmy przez τ_k i τ_r topologie na $\mathbb{R}^2$ generowane przez, odpowiednio, metrykę kolejową i metrykę rzeka. Określmy funkcje z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ wzorami

a) $f_0(x,y) = (x,y)$

b) $f_1(x,y) = (2x,y)$

c) $f_2(x,y) = (x+1,y)$

Znajdź zbiory punktów ciągłości tych funkcji rozpatrywanych jako przekształcenia z przestrzeni topologicznej $(\mathbb{R}^2, \tau_i)$ w przestrzeń topologiczną $(\mathbb{R}^2, \tau_j)$, gdzie $i, j \in \{r, k\}$ (to znaczy dla każdej funkcji f_i są cztery możliwości do rozpatrzenia).

Rozwiązanie:

a) Dla $\tau_k \to \tau_r$ punktami ciągłości są osie OX i OY. Dla $\tau_r \to \tau_k$ punktami ciągłości jest oś OY. Dla $\tau_k \to \tau_k$ punkty ciągłości to $\mathbb{R}^2$. Dla $\tau_r \to \tau_r$ punkty ciągłości to $\mathbb{R}^2$.

b) Dla $\tau_k \to \tau_r$ punktami ciągłości są osie OX i OY. Dla $\tau_r \to \tau_k$ punktami ciągłości jest oś OY. Dla $\tau_k \to \tau_k$ punkty ciągłości to $\mathbb{R}^2$. Dla $\tau_r \to \tau_r$ punkty ciągłości to $\mathbb{R}^2$.

c) Dla $\tau_k \to \tau_r$ punktami ciągłości są osie OX i OY. Dla $\tau_r \to \tau_k$ punktami ciągłości jest prosta $\{-1\} \times \mathbb{R}$. Dla $\tau_k \to \tau_k$ punkty ciągłości to oś OX bez $(0,0)$. Dla $\tau_r \to \tau_r$ punkty ciągłości to $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 5.
Udowodnij, że dla dowolnej pary f, g funkcji ciągłych na przestrzeni X w przestrzeń Hausdorffa Y, zbiór $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ jest domknięty w X. Wywnioskuj, że każde przekształcenie ciągłe $f : A \to Y$ określone na podprzestrzeni A przestrzeni topologicznej X takiej, że A jest gęstym podzbiorem X, w przestrzeń Hausdorffa Y może mieć co najwyżej jedno przedłużenie ciągłe f' na X.

Rozwiązanie:
Niech $B = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Rozpatrzmy $x \in X \setminus B$, wówczas $f(x) \neq g(x)$. Skoro Y jest przestrzenią Hausdorffa, to istnieją otwarte zbiory U, V w Y takie, że $f(x) \in U$ oraz $g(x) \in (V)$ i $U \cap V = \emptyset$. Wówczas mamy $x \in f^{-1}(U)$ oraz $f^{-1}(U)$ jest otwarte, bo f jest ciągła. Analogicznie $x \in g^{-1}(V)$ oraz $g^{-1}(V)$ jest otwarte. Stąd mamy $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ oraz $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ jest otwarty, ponieważ jest iloczynem zbiorów otwartych. Pokażemy teraz, że $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ jest rozłączny z B. Ustalmy dowolne $z \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$, wówczas $f(z) \in U$ oraz $g(z) \in V$. Jako, że $U \cap V = \emptyset$, to $f(z) \neq g(z)$, czyli $z \notin B$. Zatem zbiór B jest domknięty, bo dla każdego $x \in X \setminus B$ istnieje otwarte otoczenie W punktu $x \in W$ takie, że $W \cap B = \emptyset$, czyli $X \setminus B$ jest otwarty.

Chcemy pokazać, że dla $f : A \to Y$ jeśli F_1 i F_2 są przedłużeniami funkcji f, czyli że $F_1 \restriction A = f = F_2 \restriction A$, to $F_1 = F_2$. Wiemy, że A jest gęsty, zatem $\overline{A} = X$. Mamy jednak $A \subseteq B$, ponieważ $F_1 \restriction A = F_2 \restriction A = f$, zatem $B \subseteq X$, czyli $\overline{B} \subseteq X$ oraz $X = \overline{A} \subseteq \overline{B}$. Stąd mamy równość $B = X$. Zatem istnieje co najwyżej jedno przedłużenie funkcji f na X.

Ćwiczenia 9

Ciągłość

Zadanie 1.

Oznaczmy przez S przestrzeń topologiczną $\{0,1\}$ z topologią $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$. Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $\chi_A : X \to \{0,1\}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru A, to znaczy

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in A \\ 0 & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$$

Udowodnij, że A jest otwarty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi_A : X \to S$ jest ciągła.

Rozwiązanie:

Przeciwobrazem zbioru pustego będzie zbiór pusty, natomiast przeciwobrazem zbioru $\{0,1\}$ będzie $A \cup (X \setminus A) = X$. Wiemy, że funkcja jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz zbioru otwartego jest otwarty. Stąd trzeba pokazać, że $\chi^{-1}(\{1\})$ jest otwarty w X. Mamy $\chi^{-1}(\{1\}) = A$, zatem jeśli A jest otwarty to χ jest ciągła i na odwrót.

Zadanie 2.

Niech X będzie sumą liczb całkowitych ujemnych oraz przedziałów otwartych $(n, n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, na prostej euklidesowej, a $Y = X \cup [0,1)$. Sprawdź, że istnieją przekształcenia wzajemnie jednoznaczne i ciągłe z X na Y i z Y na X.

Rozwiązanie:

Narysujmy zbiory X i Y.

Konstruujemy ciągłe przekształcenie $f : X \to Y$. Zadamy je wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x > 1 \\ x + 1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

Konstruujemy ciągłe przekształcenie $g : Y \to X$. Zadamy je wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{dla } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{dla } x \in (0,1) \\ x & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Mamy więc bijekcję $X \to Y$ oraz bijekcję $Y \to X$, jednak zbiory X i Y nie są homeomorficzne.

Zadanie 3.
Niech $Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | \ n = 1, 2, \dots\}$, $Z_2 = Z_1 \cup \mathbb{N}$, $Z_3 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \mid n, k = 2, 3, \dots, \ \frac{1}{k} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\}$. Pokaż, że zbiory Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 są parami niehomeomorficzne.

Rozwiązanie:
Z_0 składa się z samych punktów izolowanych, natomiast pozostałe przestrzenie mają punkty nieizolowane na przykład zero, zatem Z_0 nie jest homeomorficzna z pozostałymi. Dalej, załóżmy, że istnieje homeomorfizm $h : Z_1 \to Z_2$, wówczas $h(0) = 0$, bo 0 jest jedynym punktem nieizolowanym w obu przestrzeniach. Jeśli U jest otwartym otoczeniem zera w Z_1, to $h(U)$ jest otwartym otoczeniem zera w Z_2. Niech $V = (-1, 1) \cap Z_2$, wówczas $h^{-1}(V)$ to zbiór otwarty w Z_1 i $0 \in h^{-1}(V)$, bo $h(0) = 0$. Funkcja h jest bijekcją więc $h(Z_2 \setminus V) = Z_1 \setminus h^{-1}(V)$ i skoro $h^{-1}(V)$ jest otoczeniem zera w Z_1, to $Z_1 \setminus h^{-1}(V)$ jest skończony. Zbiór $Z_2 \setminus V$ jest jednak nieskończony. Mamy więc sprzeczność, bo zbiór nieskończony musiałby przejść na zbiór skończony przy zastosowaniu funkcji h. Analogicznie pokazujemy, że Z_1 nie jest homeomorficzne z Z_3. Dalej załóżmy, że istnieje homeomorfizm $h : Z_2 \to Z_3$, wówczas $h(0) = 0$, bo zero jest jedynym punktem nieizolowanym w obu przestrzeniach. Niech $U = (-1, 1) \cap Z_2$, wówczas $h(U)$ jest otwartym otoczeniem zera w Z_3. Skoro tak, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \cap Z_3 \subseteq h(U)$. Niech $V = \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \cap Z_3$. Wówczas $\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{k} \mid \text{ dla } k \text{ spełniającego warunki zadania } \right\} \subseteq h(U) \setminus V$, zatem zbiór $h(U) \setminus V$ jest nieskończony. Dalej $h^{-1}(V)$ to otwarte otoczenie zera w Z_2, czyli $h^{-1}(V) \subseteq U$, bo $V \subseteq h(U)$. Wówczas $U \setminus h^{-1}(V)$ jest skończony. Zatem $h^{-1}(h(U) \setminus V) = U \setminus h^{-1}(V)$, czyli h przeprowadza zbiór skończony na zbiór nieskończony. Mamy więc sprzeczność, czyli Z_2 i Z_3 nie są homeomorficzne.

Ćwiczenia 10

Iloczyny kartezjańskie

Definicja: Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $A \subseteq X$. Punkt $a \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru A, jeśli każde otwarte otoczenie punktu a zawiera element zbioru A różny od a. Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A oznaczamy przez A^d.

Zadanie 1.
Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą pomiędzy przestrzeniami topologicznymi X i Y. Niech $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ to wykres funkcji f (rozważany jako podprzestrzeń iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$). Udowodnij, że

a) Przestrzenie X i $G(f)$ są homeomorficzne

b) Jeśli Y jest przestrzenią Hausdorffa, to $G(f)$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $X \times Y$

Rozwiązanie:

a) Niech $\varphi : X \to G(f)$ zadane będzie wzorem $\varphi(x) = (x, f(x))$. Jest to funkcja różnowartościowa, bo dla $x_1 \neq x_2$ mamy $\varphi(x_1) = (x_1, f(x_1)) \neq (x_2, f(x_2)) = \varphi(x_2)$. Jest to suriekcja, bo dowolny punkt $(x, f(x))$ jest wartością funkcji $\varphi(x)$. Pokażemy, że φ jest ciągła. Skoro $G(f) \subseteq X \times Y$, to $\varphi : X \to X \times Y$. Dalej $\pi_X \circ \varphi = id$ jest ciągłe oraz $\pi_Y \circ \varphi = f(x)$ jest ciągłe, skąd φ jest ciągłe.

Inny sposób na uzasadnienie ciągłości φ: Ustalmy $x \in X$ i sprawdzamy ciągłość φ w punkcie x. Ustalamy bazowe otoczenie wokół $\varphi(x) = (x, f(x)) \in U \times V$. Szukamy otwartego $W \ni x$ takiego, że $\varphi(W) \subseteq U \times V$. Niech $W = U \cap f^{-1}(V)$. Zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty jako przeciwobraz zbioru otwartego względem funkcji ciągłej oraz $x \in f^{-1}(V)$, bo $f(x) \in V$. Stąd W jest otwartym otoczeniem punktu x. Dalej $\varphi(W) \subseteq U \times V$, bo dla $z \in W$ mamy $\varphi(z) = (z, f(z))$ Stąd φ jest ciągła w x.

Dalej $\varphi^{-1} : G(f) \to X$ jest ciągłe, ponieważ jest to obcięcie rzutu $\pi_X : X \times Y \to X$ do podprzestrzeni $G(f)$, a wiemy że obcięcie funkcji ciągłej do podprzestrzeni też jest ciągłe. Stąd g jest homeomorfizmem, czyli X i $G(f)$ są homeomorficzne.

b) Pokażemy, że $W = (X \times Y) \setminus G(f)$ jest otwarty. Rozpatrzmy punkt $(x_0, y_0) \in W$. Skoro $(x_0, y_0) \notin G(f)$, to $y_0 \neq f(x_0)$. Z własności Hausdorffa istnieją V_1, V_2 otwarte takie, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oraz $f(x_0) \in V_1$ i $y_0 \in V_2$. Dalej $x_0 \in f^{-1}(V_1)$ oraz $f^{-1}(V_1)$ jest otwarty w X. Mamy $(x_0, y_0) \in f^{-1}(V_1) \times V_2$. Niech $(x, y) \in f^{-1}(V_1) \times V_2$, wówczas $x \in f^{-1}(V_1)$, czyli $f(x) \in V_1$ oraz $y \in V_2$, skąd jako że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ mamy $y \neq f(x)$, czyli $(x, y) \in W$.

Fakt: Funkcja $g : X \to X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego i rzutowanie $p_i \circ g : X \to X_i$ jest ciągłe.

Zadanie 2.
Niech $X_1 \times \ldots \times X_n$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych X_i i niech $p_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ będzie rzutowaniem.

a) Udowodnij, że dla każdego zbioru otwartego U w iloczynie kartezjańskim, zbiór $p_i(U)$ jest otwarty w X_i

b) Podaj przykład zbioru domkniętego na płaszczyźnie euklidesowej, którego rzut na oś x-ów nie jest domknięty

Rozwiązanie:

a) Niech $U \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$ będzie zbiorem otwartym. Wówczas U jest sumą zbiorów postaci $V_t = U_{1t} \times \ldots \times U_{nt}$, gdzie $U_{1t}, \ldots, U_{nt}$ są zbiorami otwartymi.

$$U = \bigcup_{t \in T} V_t$$

Mamy więc

$$p_i(U) = p_i\left(\bigcup_{t \in T} V_t\right) = \bigcup_{t \in T} p_i(V_t) = \bigcup_{t \in T} U_{it}$$

Stąd jako że U_{it} jest otwarty, to $p_i(U)$ jest sumą zbiorów otwartych, czyli jest zbiorem otwartym.

b) Niech dany zbiór to graf funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$. Jest to zbiór domknięty, natomiast rzut na oś x-ów to zbiór $(0, \infty)$ czyli zbiór który nie jest domknięty.

Ćwiczenia 11

Iloczyny kartezjańskie

Zadanie 1.
Niech $X \times Y$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych X i Y. Niech $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$.

a) Udowodnij, że $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$

b) Udowodnij, że $(A \times B)^d = (A^d \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B^d)$

Rozwiązanie:

a) $\subseteq$ Niech $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$, wówczas $x \in \overline{A}$ i $y \in \overline{B}$. Dla każdego $U \in \tau_X$ takiego że $x \in U$ mamy $U \cap A \neq \emptyset$ oraz dla każdego $V \in \tau_Y$ takiego że $y \in V$ mamy $V \cap B \neq \emptyset$. Wówczas niech $a \in U \cap A$ i $b \in V \cap B$ i stąd $(a, b) \in (U \times V) \cap (A \times B)$. Zatem $(x, y) \in \overline{A \times B}$.

$\supseteq$ Niech $(x, y) \in \overline{A \times B}$, czyli dla dowolnych otwartych $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ jeśli $(x, y) \in U \times V$ to $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$. Ustalmy otwarte otoczenie U punktu x. Zbiór $U \times Y$ jest otwarty w $X \times Y$ oraz $(x, y) \in U \times Y$. Zatem $(U \times Y) \cap (A \times B) \neq \emptyset$, czyli $U \cap A \neq \emptyset$. Stąd $x \in \overline{A}$. Analogicznie $y \in \overline{B}$. Zatem $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$.

b) Mamy

$$(x, y) \in (A \times B)^d \Leftrightarrow (x, y) \in \overline{(A \times B) \setminus \{(x, y)\}} = \overline{(A \setminus \{x\} \times B) \cup (A \times B \setminus \{y\})} =$$

$$\overset{\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}}{=} \overline{(A \setminus \{x\} \times B)} \cup \overline{(A \times B \setminus \{y\})} \overset{\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}}{=} (\overline{A \setminus \{x\}} \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \overline{B \setminus \{y\}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A^d \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B^d)$$

Zadanie 2.
Udowodnij, że iloczyn kartezjański dwóch przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

Rozwiązanie:
Pokażemy, że iloczyn kartezjański $(X \times Y, \tau)$ przestrzeni Hausdorffa (X, τ) i (Y, τ) jest przestrzenią Hausdorffa. Niech $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$ będą różnymi punktami z $X \times Y$. Jeśli $a_1 \neq b_1$, to weźmy $U, V \in \tau_X$ takie, że $a_1 \in U$, $b_1 \in V$ takie że $U \cap V = \emptyset$. Wówczas $U \times Y$ oraz $V \times Y$ są rozłącznymi zbiorami otwartymi w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Mamy $a \in U \times Y$ oraz $b \in V \times Y$. Analogicznie wybieramy zbiory jeśli $a_1 = b_1$ oraz $a_2 \neq b_2$.

Zadanie 3.
Pokaż, że topologia produktowa na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nie jest zadana przez żadną normę.

Rozwiązanie:
Zbiory bazowe w $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ to takie zbiory będące produktami zbiorów otwartych z $\mathbb{R}$, przy czym prawie wszystkie są równe całemu $\mathbb{R}$ (czyli do pewnego miejsca mamy dowolne zbiory otwarte, a od pewnego miejsca tylko $\mathbb{R}$). Stąd zero czyli element $(0, 0, \ldots)$ należy do pewnego zbioru bazowego, którego niemalże wszystkie składowe są równe $\mathbb{R}$. Niech i-ta pozycja to będzie ta pozycja że na

wszystkich za nią mamy już $\mathbb{R}$. Wobec tego punkt $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, gdzie 1 znajduje się na i-tej pozycji należy do otoczenia zera. Również $t \cdot (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ należy do takiego zbioru. Gdyby $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ było zadane przez normę to w dowolnie małym otoczeniu zera znajdziemy punkt odległy dowolnie daleko od zera, bo odległość ta wynosi

$$||t \cdot (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)|| = |t| \cdot ||(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)||$$

Ćwiczenia 12

Przestrzenie zwarte

Zadanie 1.
Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa.

a) Udowodnij, że suma skończenie wielu zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym.

b) Niech $K_0, K_1, \ldots$ będą zbiorami zwartymi w X. Załóżmy, że każdy zbiór otwarty zawierający K_0 zawiera prawie wszystkie zbiory K_n. Udowodnij, że wówczas suma $\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ jest zbiorem zwartym.

Rozwiązanie:

a) Zadanie można sprowadzić do pokazania, że suma dwóch zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym. Niech A i B to będą rozpatrywane zbiory. Ustalmy dowolne pokrycie $\mathcal{U}$ zbioru $A \cup B$

$$A \cup B \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

chcemy pokazać, że z tego pokrycia można wybrać skończoną podrodzinę $U_1, \ldots, U_n$ taką że

$$A \cup B \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

Wiemy, że A jest zwarty oraz że $\mathcal{U}$ jest pokryciem zbioru A, bo

$$A \subseteq A \cup B \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

Stąd istnieją zbiory $U_{a1}, \ldots, U_{ak} \in \mathcal{U}$ takie, że

$$A \subseteq U_{a1} \cup \ldots \cup U_{ak}$$

Analogicznie mamy dla zbioru B

$$B \subseteq U_{b1} \cup \ldots \cup U_{bm}$$

Wówczas mamy

$$A \cup B \subseteq U_{a1} \cup \ldots \cup U_{ak} \cup U_{b1} \cup \ldots \cup U_{bm}$$

Stąd $A \cup B$ jest zwarty.

b) Ustalmy dowolne pokrycie $\mathcal{U}$ zbioru $K_0 \cup K_1 \cup \ldots$

$$K_0 \cup K_1 \cup \ldots \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

Jest to również pokrycie zbioru K_0, zatem istnieją $U_1, \ldots, U_n$ takie że

$$K_0 \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

Zbiór $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ jest otwarty, zatem zawierają się w nim prawie wszystkie zbiory K_n. Pozostaje jeszcze do pokrycia skończenie wiele zbiorów. Dla ustalenia uwagi niech będą to zbiory $K_1, \ldots, K_m$. Rodzina $\mathcal{U}$ jest również pokryciem każdego z tych zbiorów i jako że każdy z nich jest zwarty, to możemy wybrać z $\mathcal{U}$ skończone podpokrycie każdego z nich. Niech podpokrycie dla zbioru K_i to $U_{i1}, \ldots, U_{ij_i}$. Wówczas rodzina

$$\{U_1, \ldots, U_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{U_{i1}, \ldots, U_{ij_i}\}$$

jest skończonym podpokryciem zbioru $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} K_i$, zatem zbiór ten jest zwarty.

Zadanie 2.
Podaj przykład domkniętych i ograniczonych podzbiorów płaszczyzny z metryką „rzeka" i „kolejową", które nie są zwarte. (Uwaga: podzbiór przestrzeni metrycznej jest ograniczony jeśli jest zawarty w pewnej kuli)

Rozwiązanie:
W metryce rzeka będzie to poziomy odcinek $[0,1] \times \{1\}$ jest to zbiór domknięty, ponieważ jego dopełnienie jest otwarte. Jest to zbiór ograniczony bo jest zawarty w kuli $B((0,0),2)$. Jednak nie jest to zbiór zwarty, ponieważ topologia odziedziczona z topologii rzecznej to będą zbiory jednoelementowe (przecięcie pionowych odcinków z naszym poziomym zbiorem). Stąd zbiór nasz pokryć możemy tylko zbiorami jednoelementowymi i z takiego pokrycia nie wybierzemy skończonego podpokrycia.

W metryce kolejowej weźmy okrąg $B((0,0),1)$ (oczywiście jest to podzbiór domknięty i ograniczony), wówczas mamy podobną sytuację jak w metryce rzeka, ponieważ topologia odziedziczona z metryki kolejowej to również zbiory jednoelementowe (przecięcie okręgu z pochylonymi odcinkami). Stąd pokrycie tego zbioru będzie przy pomocy zbiorów jednoelementowych. Z takiego pokrycia nie wybierzemy skończonego podpokrycia.

Uwaga: Domknięty i ograniczony podzbiór przestrzeni Euklidesowej jest zwarty.

Zadanie 3.
Zapoznaj się z dowodem zwartości kwadratu leksykograficznego.

Rozwiązanie:

(B) Pokażemy, że kwadrat leksykograficzny $(I^2, \mathcal{T}(<))$ jest przestrzenią zwartą. Ponieważ topologie wyznaczone przez porządki liniowe (zob. 1.2.8) są Hausdorffa, wystarczy sprawdzić, że jeśli $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem kwadratu leksykograficznego, to I^2 można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$.

Dla każdego $t \in I$ wybierzmy $V_t, W_t \in \mathcal{U}$ takie, że $(t,0) \in V_t$ i $(t,1) \in W_t$. Ustalmy $0 < t < 1$. Z określenia topologii $\mathcal{T}(<)$, zob. 1.2.8, wynika istnienie $\varepsilon > 0$ takiego, że każdy punkt z I^2 leżący między $(t-\varepsilon, 0)$ i $(t,0)$, ze względu na porządek leksykograficzny, należy do V_t, a każdy punkt leżący między $(t,1)$ i $(t+\varepsilon, 1)$ należy do W_t. Dla przedziału euklidesowego $J_t = (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap I$ mamy więc $(J_t \times I) \setminus (\{t\} \times I) \subset V_t \cup W_t$. Podobnie można dobrać przedziały J_t dla $t = 0$ i $t = 1$. Ze zwartości przedziału euklidesowego I, można wybrać pokrycie skończone $I = J_{t_1} \cup \ldots \cup J_{t_k}$. Wówczas $I^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (V_{t_i} \cup W_{t_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{t_i\} \times I$. Na każdym zbiorze $\{t\} \times I$, topologia podprzestrzeni przestrzeni $(I^2, \mathcal{T}(<))$ jest identyczna z topologią euklidesową, zob. 1.2.8, a więc zbiory $\{t\} \times I$ są zwarte w przestrzeni $(I^2, \mathcal{T}(<))$. Wynika stąd, że sumę $\bigcup_{i=1}^{k} \{t_i\} \times I$ możemy pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$ i w rezultacie możemy wybrać z $\mathcal{U}$ skończone pokrycie I^2.

Zadanie 4.
Która z następujących podprzestrzeni kwadratu leksykograficznego jest zwarta? Dlaczego lub dlaczego nie?

a) $A = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right] \times \{0\}$

b) $B = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $C = \left(\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right] \times \{0\}\right) \cup \left(\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right) \times \{1\}\right)$

d) $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0, 1]$

Rozwiązanie:

a) Dowolnym otoczeniem punktu ze zbioru A jest pasek epsilonowej szerokości. Również dowolnym otoczeniem punktu $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ jest epsilonowy pasek. Przecina on zbiór A, czyli zbiór A nie jest domknięty. Wiemy, że w przestrzeni Hausdorffa zbiór zwarty jest domknięty, a kwadrat leksykograficzny jest Hausdorffa. Stąd A nie jest zwarty.

b) Dowolnym otoczeniem punktu $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ jest epsilonowy pasek. Przecina on zbiór B, czyli zbiór B nie jest domknięty, a stąd nie jest też zwarty.

c) Zbiór C jest domknięty, bo dopełnienie jest otwarte. Dla punktów spoza zbioru C dowolne otoczenie nie przecina zbioru C. Kwadrat leksykograficzny jest zwarty, zatem dowolny podzbiór domknięty w tej przestrzeni jest zwarty, skąd C jest zwarty.

d) Zbiór D jest domknięty, zatem jest zwarty.

Uwaga: Topologia dyskretna na nieskończonym zbiorze nie jest zwarta (a na skończonym zbiorze jest).

Ćwiczenia 13

Przestrzenie zwarte

Zadanie 1.
Niech K będzie przestrzenią zwartą zaś X przestrzenią topologiczną. Niech $p : X \times K \to X$ będzie rzutowaniem. Udowodnij, że jeśli $F \subseteq X \times K$ jest domknięty w $X \times K$, to jego obraz $p(F)$ jest domknięty w X.

Rozwiązanie:
Niech $F \subseteq X \times K$ będzie domknięty oraz $x_0 \notin p(F)$. Mamy

$$\{x_0\} \times K \simeq K$$

czyli $\{x_0\} \times K$ jest zbiorem zwartym w $X \times K$. Załóżmy, że $a \in (\{x_0\} \times K) \cap F = \emptyset$. Element a ma postać $a = (x_0, k)$ dla pewnego $k \in K$. Wówczas $a \in F$ i

$$p(a) = p(x_0, k) = x_0$$

wbrew założeniu, że $x_0 \notin p(F)$. Stąd $\{x_0\} \times K$ jest zwarty i nie przecina F. Chcemy pokazać, że dla każdego $x_0 \notin p(F)$ istnieje zbiór otwarty $V \subseteq X$ taki, że $x_0 \in V$ oraz $V \cap p(F) = \emptyset$. Weźmy takie pokrycie zbioru $\{x_0\} \times K$, że nie przecina ona zbioru F. Takie pokrycie istnieje, bo każdy punkt z $\{x_0\} \times K$, czyli punktu (x_0, x) możemy przykryć pewnym jego otoczeniem takim, że otoczenie to nie przecina F (bo F jest domknięty). Elementy tego pokrycia będą miały postać $V_x \times U_k$. Teraz skoro $\{x_0\} \times K$ jest zwarty, to z tego pokrycia możemy wybrać pokrycie skończone. Niech będzie to $V_1 \times U_1, \ldots, V_n \times U_n$. Niech $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n$ (jest to zbiór otwarty jako przecięcie skończonej liczby zbiorów otwartych), wówczas $V \times U_i \subseteq V_i \times U_i$, czyli zbiory $V \times U_1, \ldots, V \times U_n$ są również pokryciem zbioru $\{x_0\} \times K$. Dalej mamy $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq K$, czyli skoro $V \times U$ jest zbiorem rozłącznym z F zawierającym w sobie $V \times K$, to również $V \times K$ jest rozłączny z F. W V leży punkt x_0 oraz $V \subseteq X$ i $V \cap p(F) = \emptyset$, skąd V to szukany zbiór, zatem $p(F)$ jest domknięty.

Zadanie 2.
Która z przestrzeni $Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | \ n = 1, 2, \ldots\}$, $Z_2 = Z_1 \cup \mathbb{N}$, $Z_3 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \mid n, k = 2, 3, \ldots, \ \frac{1}{k} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\}$ jest zwarta? Dlaczego lub dlaczego nie?

Rozwiązanie:
Mamy tu podzbiory prostej Euklidesowej. Zbiór Z_0 nie jest zwarty, bo jest nieograniczony. Zbiór Z_1 jest ograniczony i jedyny jego punkt skupienia (punkt 0) należy do tego zbioru, zatem zbiór Z_1 jest domknięty, czyli jest zwarty. Z_2 również nie jest ograniczony, więc nie jest zwarty. Zbiór Z_3 jest ograniczony, jednak nie jest domknięty, zatem nie może być zwarty.

Zadanie 3.
Niech $I(a, b)$ będzie odcinkiem domkniętym w płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ łączącym punkty a i b. Które z poniższych podzbiorów płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ są zwarte?

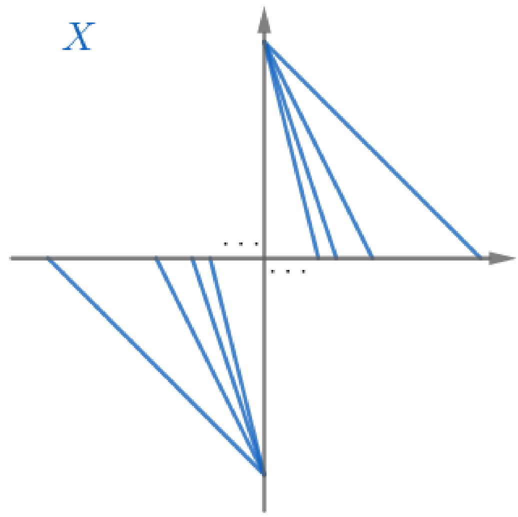
a) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a_0, a_n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I(b_0, b_n)$, gdzie $a_0 = (0, 1)$, $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $b_0 = (0, -1)$, $b_n = \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$.

b) $Y = X \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$

c) $Z = X \cup (\{0\} \times [-1,1])$

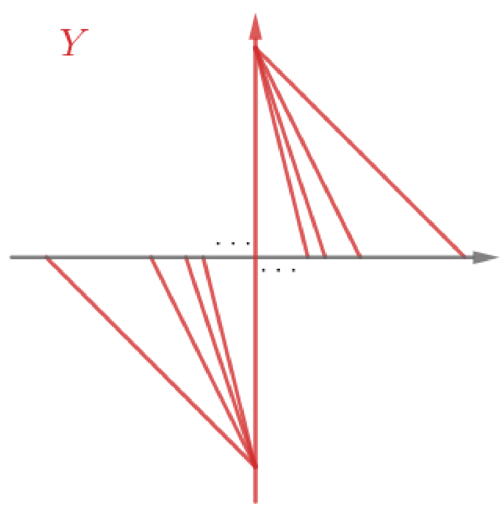
Rozwiązanie:

a) Narysujmy zbiór



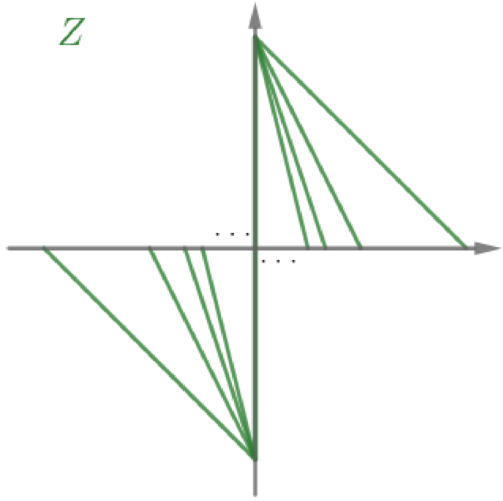
Zbiór ten nie jest zwarty, ponieważ ciąg $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ należy do tego zbioru, natomiast $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,0)$ już nie należy do tego zbioru. Zbiór ten jest więc ograniczony ale nie domknięty.

b) Narysujmy zbiór



Zbiór ten nie jest ograniczony, ponieważ jego podzbiór, czyli $\{0\} \times \mathbb{R}$ nie jest ograniczony. Stąd Y nie może być zwarty.

c) Narysujmy zbiór



Domknięciem zbioru X jest odcinek $\{0\} \times [-1, 1]$. Zbiór Z jest więc domknięty i ograniczony. Jest zatem zwarty.

Twierdzenie: Jeśli X jest Hausdorffa i $A \subseteq X$ jest zwarty, to A jest domknięty w X

Wniosek: Jeśli X jest Hausdorffa i $A \subseteq X$ nie jest domknięty, to A nie może być zwarty.

Twierdzenie: Jeśli X jest zwarta i $A \subseteq X$ jest domknięty, to A jest zwarty.

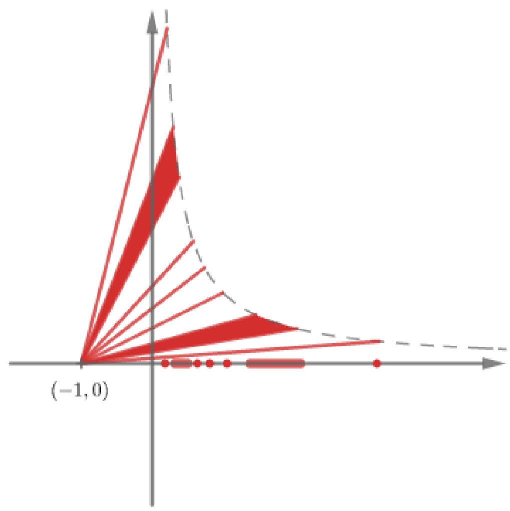
Wniosek: W przestrzeni zwartej zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy A jest zwarty.

Ćwiczenia 14

Przestrzenie zwarte

Zadanie 1.
Dla $A \subseteq (0, +\infty)$, niech $X(A)$ będzie sumą odcinków domkniętych na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ łączących punkt $(-1, 0)$ z punktami $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ dla $a \in A$. Udowodnij, że domkniętość zbioru $X(A)$ na płaszczyźnie jest równoważna zwartości zbioru A i jest równoważna zwartości zbioru $X(A)$.

Rozwiązanie:
Poglądowy rysunek



Jeśli $X(A)$ jest zwarte, to oczywiście jest domknięte, bo zbiory zwarte w przestrzeni Hausdorffa są domknięte. Załóżmy więc teraz, że $X(A)$ jest domknięty. Wystarczy pokazać, że jest ograniczony. Załóżmy nie wprost, że $X(A)$ jest nieograniczony. Wtedy zbiór $\{\left(a, \frac{1}{a}\right) \mid a \in A\}$ musi być nieograniczony. Istnieje więc ciąg $a_n \in A$ taki, że albo $a_n \to \infty$, albo $a_n \to 0$. Załóżmy, że $a_n \to \infty$, wówczas ciąg y_n, będący punktami na osi OY powstałymi w przecięcia tej osi z odcinkami ze zbioru $X(A)$, jest zbieżny do zera. Punkt $(0, 0)$ nie należy do $X(A)$, zatem znaleźliśmy podciąg, którego granica nie leży w zbiorze, skąd $X(A)$ nie jest zwarty. Jeśli $a_n \to 0$, to ciąg x_n, będący punktami z prostej $y = 1$, jest zbieżny do punktu $(-1, 1)$ (bo odcinki dążą do bycia pod kątem $90°$). Punkt $(-1, 1)$ nie należy do zbioru $X(A)$, zatem analogicznie jak poprzednio $X(A)$ nie jest zwarty. Stąd $X(A)$ musi być ograniczony.

Zbiór $B = \{\left(a, \frac{1}{a}\right) \mid a \in A\}$ jest homeomorficzny ze zbiorem A, ponieważ jest to graf funkcji ciągłej, więc jest homeomorficzny z dziedziną. Załóżmy, że $X(A)$ jest zwarty. Wówczas B jest domknięty w $X(A)$. Jest więc domkniętym podzbiorem przestrzeni zwartej, więc jest zwarty. Stąd $A \simeq B$ również jest zwarty. Załóżmy teraz, że A jest zwarty. Rozważmy $A \times [0, 1] = C$. Zbiór C jest zwarty z twierdzenia Tichonowa. Rozważmy odwzorowanie ciągłe $f : C \to \mathbb{R}^2$ takie, że odwzorowanie to „skleja" punkty $(x, 1)$ w jeden punkt dla $x \in A$. Wówczas $f(C)$ jest zwarte jako obraz zbioru zwartego przez funkcję ciągłą. Zbiór $f(C)$ będzie homeomorficzne z $X(A)$, więc $X(A)$ będzie zwarte.

Przestrzeń $\{0, 1\}$ to dwupunktowa przestrzeń dyskretna. Bazowy zbiór otwarty w $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ to zbiór postaci $U_1 \times \ldots \times U_n \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \ldots$, gdzie U_i to dowolny zbiór otwarty w $\{0, 1\}$ (czyli $\{0\}$ lub $\{1\}$ lub $\{0, 1\}$). Ciąg $(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ to ciąg zero-jedynkowy. Otoczenie bazowe tego punktu to zbiór $\{(y_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall_{i\leq n}\ y_i = x_i\}$. Zbiór Cantora C jest homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, czyli zbiór Cantora C ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych. Przestrzeń o tej własności nazywamy zero-wymiarową.

Zadanie 9.
Zdefiniuj homeomorfizm pomiędzy przestrzeniami $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Rozwiązanie:
Homomorfizm h będzie zadany wzorem

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \longmapsto \langle (x_1, x_3, x_5, \ldots), (x_2, x_4, x_6, \ldots)\rangle$$

Jest to homeomorfizm, ponieważ jest to ciągła bijekcja. Jest to funkcja ciągła, bo dla ustalonego punktu $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, gdy ustalimy otwarte bazowe otoczenie $U \times V$ punktu $\langle (x_1, x_3, x_5, \ldots), (x_2, x_4, x_6, \ldots)\rangle$, czyli $U = \{(y_n) \mid y_i = x_i \text{ dla } i \leq n_0\}$ oraz $V = \{(y_n) \mid y_i = x_i \text{ dla } u \leq n_1\}$, to dla $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ mamy $W = \{(y_n) \mid y_i = x_i \text{ dla } i \leq n_2\}$ i wówczas $h(W) \subseteq U \times V$.

Zadanie 10.
Sprawdź, że funkcja $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ zadana wzorem $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, gdzie $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest ciągła i "na".

Rozwiązanie:
Ustalmy $x = (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$, czyli zbiór $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Chcemy znaleźć zbiór otwarty $U \ni x$ taki że $f(U) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Mamy $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$. Istnieje n_0 takie, że $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Niech więc $U = \{(y_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid y_i = x_i \text{ dla } i \leq n_0\}$. Niech $(y_i) \in U$, wówczas

$$||f(y_i)) - f((x_i))| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} - \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \right|$$

bo na pierwszych n_0 miejscach ciągi się zgadzają, czyli $y_i = x_i$ dla $i \leq n_0$. Dalej mamy

$$|f(y_i)) - f((x_i))| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{y_i - x_i}{2^i} \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon$$

czyli f jest ciągła.

Uwaga: Przestrzenie $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i $[0,1]$ nie są homeomorficzne.

Zadanie 11.
Oznaczmy przez C zbiór Cantora. Czy istnieją ciągłe surjekcje z:

a) C na $\mathbb{Q}$

b) C na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

c) C na $\mathbb{R}^2$

d) C na okrąg S^1

e) C na sferę S^2

f) C na $C \times [0,1]$

g) C na $[0,1] \times [0,1]$

h) C na $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

i) X na C

j) C na $X \times [0,1]$

k) $[0,1]$ na $[0,1)$

l) $[0,1)$ na $[0,1]$

Podaj przekształcenia (wykorzystując m.in. funkcję z C na $[0,1]$) lub przyczynę ich braku (np. zwartość)

Rozwiązanie:

a) Nie ma bo C jest zwarty, natomiast $\mathbb{Q}$ nie jest zwarty, zaś funkcje ciągłe przeprowadzają zbiory zwarte na zbiory zwarte

b) Nie ma bo C jest zwarty, natomiast $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zwarty

c) Nie ma bo C jest zwarty, natomiast $\mathbb{R}^2$ nie jest zwarty

d) Zbiór C można przeprowadzić funkcją ciągłą na $[0,1]$, natomiast zbiór $[0,1]$ można przekształcić funkcją $t \overset{f}{\mapsto} (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ na okrąg S^1

e) C przekształcamy na $[0,1]$. Zbiór $[0,1]$ przekształcamy na $[0,1]^2$ (krzywa Peano). Kwadrat $[0,1]^2$ przekształcamy na sferę „zawijając kwadrat w sferę".

f) C przekształcamy na C^2 i drugą ze składowych przekształcamy na $[0,1]$

g) C przekształcamy na C^2 a następnie każdą ze składowych przekształcamy na $[0,1]$

h) Tak (przerzucamy zbiór trójkowy Cantora po kolei, kolejne odcinki na kolejne wyrazy ciągu $\frac{1}{n}$)

i) Nie, bo $|X| = \aleph_0$

j) Oczywiście

k) Nie ma bo C jest zwarty, natomiast $[0,1)$ nie jest zwarty

l) Tak, $[0, \frac{1}{2}) \mapsto [0,1]$, natomiast $[\frac{1}{2}, 1) \mapsto 1$.

Ćwiczenia 15

Przestrzenie zupełne

Definicja: Ciąg punktów (x_n) w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n,m\geq n_0}\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Definicja: Przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny (granica to pewien element zbioru X).

Zadanie 1.

Uzasadnij zupełność następujących przestrzeni:

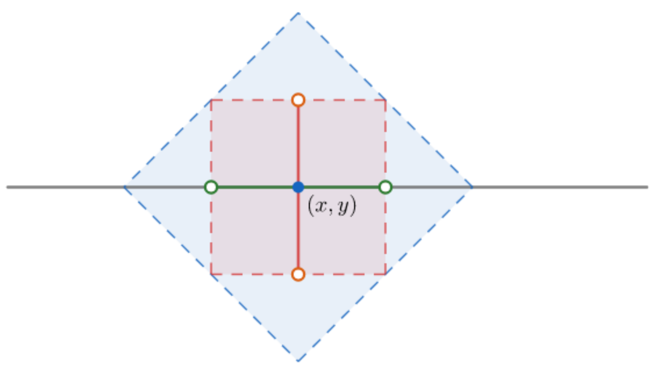
a) Płaszczyzny w metrykach „rzeka" i „kolejowej"

b) Przestrzeni z metryką dyskretną

Rozwiązanie:

a) Ustalmy ciąg Cauchy'ego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$, czyli $a_n = (x_n, y_n)$. Dla dowolnych dwóch punktów (x_n, y_n) i (x_k, y_k) mamy $|x_n - x_k| \leq d_r(a_n, a_k)$ i $|y_n - y_k| \leq d_r(a_n, a_k)$. Stąd ciąg (x_n) jest Cauchy'ego na prostej oraz (y_n) też jest Cauchy'ego na prostej. Czyli $x_n \xrightarrow{d_e} x$ oraz $y_n \xrightarrow{d_e} y$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że $a_n \xrightarrow{d_r} (x, y)$.

1. Jeśli (x, y) leży na „rzece", czyli $y = 0$, to w dowolnej kuli wokół punktu (x, y), prawie wszystkie wyrazy ciągu są a_n są w niej zawarte, bo prawie wszystkie wyrazy ciągu x_n są zwarte w zielonym odcinku i prawie wszystkie wyrazy ciągu y_n są zwarte w pomarańczowym odcinku, czyli wyrazy ciągu a_n są zawarte w czerwonym kwadracie.



2. Jeśli (x, y) nie leży na „rzece", to dla dostatecznie dużych n, mamy $x_n = x$, bo inaczej $d_r(a_n, a_k) \geq \frac{|y|}{2} + \frac{|y|}{2} = |y| > 0$. Zatem na dostatecznie dużych n mamy zbieganie wzdłuż prostej, zatem $a_n \xrightarrow{d_r} (x, y)$.

Stąd przestrzeń z metryką „rzeka" jest zupełna.

Ustalmy ciąg Cauchy'ego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ w $(\mathbb{R}^2, d_k)$, czyli $a_n = (x_n, y_n)$. Albo $a_n \xrightarrow{d_k} (0, 0)$, albo dla dostatecznie dużych n punkty ciągu a_n leżą na jednej prostej. Mamy dwa przypadki

1. Punkt $(0,0)$ jest punktem skupienia i wtedy $a_n \xrightarrow{d_k} (0,0)$
2. Punkt $(0,0)$ nie jest punktem skupienia, wtedy istnieje $r > 0$ takie że dla $n > m$ dla pewnego m mamy $a_n \notin B_{d_k}((0,0), r)$. Wówczas jeśli punkty ciągu a_n nie układają się na jednej prostej, to $d_k(a_m, a_n) > 2r$ czyli leżą daleko od siebie. Zatem od pewnego miejsca, wszystkie punkty leżą na jednej prostej.

Stąd przestrzeń z metryką „kolejową" jest zupełna.

b) W metryce dyskretnej odległość dowolnych dwóch różnych punktów jest równa 1, zatem każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest od pewnego miejsca stały. A taki ciąg jest zbieżny, bo granica równa jest wyrazowi stałemu.

Fakt: Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $Y \subseteq (X,d)$. Wówczas jeśli Y jest zupełna z metryką $d \restriction Y$, to Y jest domkniętym podzbiorem X.

Zadanie 2.
Czy homeomorfizm pomiędzy przestrzeniami metrycznymi zupełnymi musi przeprowadzać ciągi Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego?

a) Niech $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\right\}$ z metryką euklidesową. Rozważ funkcję $f : X \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$, gdzie $\mathbb{N}$ też rozważamy z metryką euklidesową. Czy f jest homeomorfizmem? Czy f przeprowadza ciągi Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego? Czy przestrzenie X i $\mathbb{N}$ są zupełne?

b) Udowodnij, że jeśli $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ jest przekształceniem Lipschitza pomiędzy przestrzeniami metrycznymi (X,d) i (Y,ρ) i (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego w X, to $(f(x_n))$ jest ciągiem Cauchy'ego w Y

Rozwiązanie:
W przestrzeni zupełnej ciąg spełniający warunek Cauchy'ego i ciąg zbieżny to tożsama definicja. Homeomorfizm przeprowadza ciągi zbieżne na ciągi zbieżne (w szczególności granice na granice), zatem homeomorfizm pomiędzy przestrzeniami metrycznymi zupełnymi musi przeprowadzać ciągi Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego.

a) Przestrzeń $\mathbb{N}$ jest zupełna, natomiast przestrzeń X zupełna nie jest, ponieważ granicą ciągu $\frac{1}{n}$ jest zero, a on nie należy do zbioru. Odwzorowanie $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ jest ciągłą bijekcją, zatem jest homeomorfizmem. Ciąg $\frac{1}{n}$ jest Cauchy'ego, natomiast ciąg liczb naturalnych Cauchy'ego nie jest, zatem f nie przeprowadza ciągów Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego.

b) Skoro f jest przekształceniem Lipschitza, to istnieje $L > 0$ takie, że $\rho(f(x_n), f(x_m)) < L \cdot d(x_n, x_m)$, zatem jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n,m \geq n_0}\, d(x_n, x_m) < \varepsilon$, to dla tak ustalonych δ i ε mamy

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) < L \cdot \varepsilon$$

Wiec zachodzi teza.

Zadanie 3.
Pokaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $f(x) = \ln(1+e^x)$ spełnia $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ dla $x \neq y$, ale nie ma punktu stałego.

Rozwiązanie:
Zadanie czysto z analizy

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad 1 > f'(x) > 0$$

czyli f rosnąca. Z twierdzenia Lagrange'a dla przedziału (x, y) mamy

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < f'(z) < 1$$

dla pewnego $z \in (x, y)$, skąd wynika teza (bo licznik i mianownik mają taki sam znak).

Jeśli f miałaby punkt stały, to $f(x) = x \Leftrightarrow x = \ln(1+e^x)$ dla pewnego x, czyli $\ln e^x = \ln(1+e^x)$, co jest niemożliwe.

Twierdzenie: (Twierdzenie Banacha o punkcie stałym) Przekształcenie $f : X \to X$ przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie jest zwężające, jeśli dla pewnej stałej $c \in [0, 1)$ dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

wówczas f ma punkt stały z, czyli taki punkt, że $f(z) = z$ i ten punkt jest dokładnie jeden.

Zadanie 4.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem rozszerzającym, to znaczy dla pewnego $e > 1$ mamy $d(f(x), f(y)) \geq e \cdot d(x, y)$. Udowodnij, że jeśli $f(X) = X$, to f ma dokładnie jeden punkt stały.

Rozwiązanie:
f jest różnowartościowe, bo jeśli $f(x) = f(y)$ dla $x \neq y$, to z warunku na rozszerzanie mamy

$$0 = d(f(x), f(y)) \geq e \cdot d(x, y) > 0$$

czyli mamy sprzeczność. Skoro $f(X) = X$, to f jest suriekcją, czyli stąd jest bijekcją. f^{-1} jest funkcją malejącą, spełnia więc założenia twierdzenia Banacha. f^{-1} ma więc dokładnie jeden punkt stały, skąd f również ma dokładnie jeden punkt stały.

Definicja: Zbiór A w przestrzeni topologicznej (X, τ) jest brzegowy, jeśli ma puste wnętrze.

Uwaga: Zbiór A w przestrzeni topologicznej (X, τ) jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus A$ jest gęsty.

Twierdzenie: (Baire'a) W przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d), przeliczalna suma domkniętych zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym.

Zadanie 5.
Udowodnij, że każda przeliczalna, zupełna przestrzeń metryczna ma punkt izolowany.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że X nie ma punktu izolowanego. Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dla każdego i punkt x_i jest nie izolowany. Wówczas $\{x_i\}$ jest domknięty bo singletony w przestrzeni metrycznej są domknięte. Mamy $\mathrm{int}\{x_i\} = \emptyset$, ponieważ x_i nie jest izolowany (bo gdyby $\mathrm{int}\{x_i\} = \{x_i\}$, to $\{x_i\}$ byłby otwarty i x_i byłby jedynym punktem do niego należącym, czyli byłby punktem izolowanym). Mamy więc przeliczalnie wiele domkniętych zbiorów brzegowych, czyli $X = \bigcup\{x_i\}$ jest zbiorem brzegowym na mocy twierdzenia Baire'a. X ma więc puste wnętrze, więc nie może być całą przestrzenią.

Ćwiczenia 16

Przestrzenie zupełne

Zadanie 1.
Udowodnij, że zbiór liczb niewymiernych nie jest przeliczalną sumą zbiorów, które są domknięte na prostej euklidesowej.

Rozwiązanie:
Załóżmy nie wprost, że $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, gdzie $F_n \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym. Dalej, wiemy że $F_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, czyli $\mathrm{Int} F_n = \emptyset$, bo w przeciwnym razie we wnętrzu znaleźlibyśmy przedział, a w każdym przedziale na $\mathbb{R}$ znajduje się liczba wymierna. Liczby wymierne to $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$, gdzie $\{q\}$ jest domkniętym zbiorem o $\mathrm{Int}\{q\} = \emptyset$. Stąd

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \ \cup \ \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

Z twierdzenia Baire'a $\mathbb{R}$ jest więc domkniętym zbiorem brzegowym. Ale wiemy, że $\mathbb{R}$ jest zupełny, skąd mamy sprzeczność.

Zadanie 2.
Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem przeliczalnym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Niech $F_k \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym brzegowym na prostej $\mathbb{R}$, dla każdego $k = 1, 2, \ldots$. Pokaż, że istnieje punkt $c \in \mathbb{R}^n$ taki, że $d_e(c, a) \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, dla każdego $a \in A$ (gdzie d_e oznacza metrykę euklidesową w przestrzeni R^n).

Rozwiązanie:
Pokarzemy że punkty, które nie mają wymaganej własności, nie wypełniają całej przestrzeni. Punkty, które nie mają wymaganej własności to takie punkty $x \in \mathbb{R}^n$, że istnieje $a \in A$ i $k \in \mathbb{N}$, że $d_e(x, a) \in F_k$. Ustalmy $a \in A$ oraz k. Zdefiniujmy zbiór

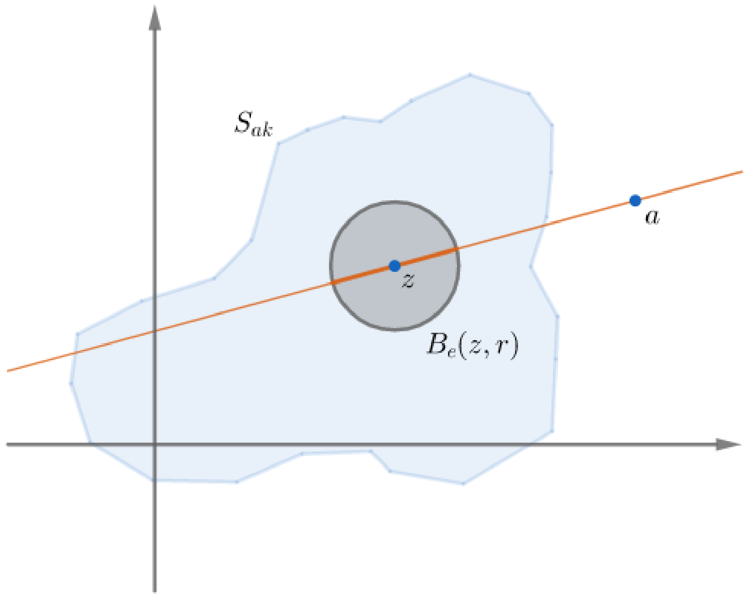
$$S_{ak} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_e(a, x) \in F_k\}$$

Zbiór punktów x, które nie spełniają wymaganej własności to

$$X = \bigcup_{a \in A,\ k \in \mathbb{N}} S_{ak}$$

Niech $x \in \mathbb{R}^n \setminus S_{ak}$. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie zadane wzorem $f(x) = d_e(x, a)$. Jest to funkcja ciągła, zatem przeciwobraz zbioru domkniętego jest zbiorem domkniętym. Zbiór $S_{ak} = f^{-1}(F_k)$ jest więc domknięty.

Załóżmy, że $\mathrm{int} S_{ak} \neq \emptyset$, wtedy istnieje kula $B_e(z, r) \subseteq S_{ak}$ dla pewnego $z \in S_{ak}$. Odległość każdego punktu z kuli od punktu a należy do zbioru F_k. Rozważmy prostą przechodzącą przez z i a. Kula $B_e(z, r)$ wykrawa z tej prostej przedział, czyli $(d_e(z, a) - r, d_e(z, a) + r) \in F_k$, co przeczy brzegowości zbioru F_k. Stąd $\mathrm{int} S_{ak} = \emptyset$.



Zbiór S_{ak} jest więc domkniętym zbiorem brzegowym. Ponadto zbiór X zawiera przeliczalnie wiele składników (bo A jest przeliczalne i $\mathbb{N}$ jest przeliczalne), skąd z twierdzenia Baire'a X jest zbiorem brzegowym. Nie wypełnia więc całej przestrzeni, czyli istnieje $c \in \mathbb{R}^n$ taki że $c \notin X$

Uwaga: Przeciwobraz zbioru brzegowego względem funkcji ciągłej nie musi być brzegowy.

Zadanie 3.
Niech $F \subseteq \mathbb{R}$ będzie domkniętym brzegowym podzbiorem prostej euklidesowej $\mathbb{R}$. Udowodnij, że istnieje punkt (a, b) na okręgu jednostkowym $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ taki, że dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ i dla każdego $c \in F$ zachodzi $b \neq qa + c$.

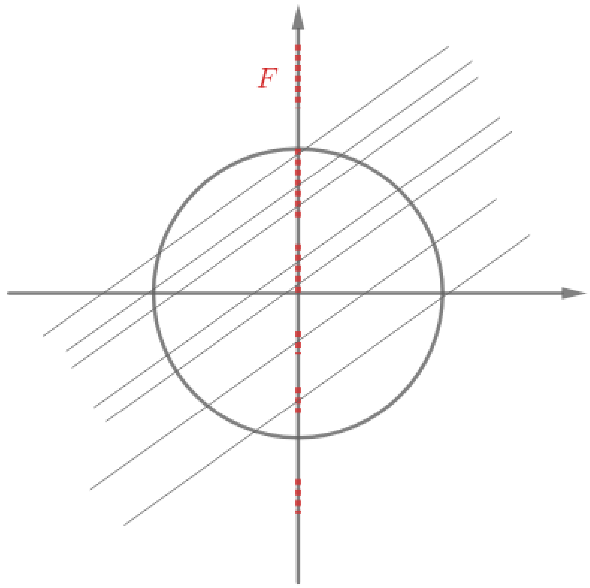
Rozwiązanie:
Punkty, które nie spełniają wymaganej własności to takie punty (a, b) na okręgu jednostkowym, że istnieje $q \in \mathbb{Q}$ i $c \in F$ że $b = qa + c$. Czyli zbiór punktów, które nie spełniają wymaganej własności to

$$X = \{(x, y) \in S^1 \mid \exists_{q \in \mathbb{Q}} \exists_{c \in F}\ y = qx + c\}$$

Wyraz wolny w wyrażeniu $y = qx + c$ to punkt na osi OY w którym prosta przecina oś OY. Wygodnie więc będzie jeśli F będzie podzbiorem prostej $x = 0$.

$$X = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{(x, y) \in S^1 \mid \exists_{c \in F}\ y = qx + c\} := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} X_q$$

Zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = qx + c\}$ to prosta o nachyleniu q przechodząca przez punkt $(0, a)$.



Załóżmy, że X_q nie jest brzegowy, czyli że $\text{int}X_q \neq \emptyset$. Wtedy X_q zawiera pewien łuk. Ale wówczas obraz tego łuku w F to pionowy odcinek, co przeczy brzegowości zbioru F. Zatem X_q musi być brzegowy.

Niech $q : S^1 \to \mathbb{R}$ to rzut wzdłuż prostej $y = qx$ (czyli dany punkt z okręgu rzutujemy na oś OY). Jest to funkcja ciągła. Dalej mamy $X_q = q^{-1}(F)$, czyli skoro F był domknięty to X_q też jest domknięty.

Z twierdzenia Baire'a, zbiór $X = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} X_q$ jest zbiorem brzegowym. Nie wypełnia więc całej przestrzeni. Istnieje więc punkt z okręgu o szukanej własności.

Ćwiczenia 17

Przestrzeń zupełna to przestrzeń metryczna (topologia wyposażona jest w metrykę). Przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny to taka przestrzeń topologiczna, że istnieje metryka d która generuje tę topologię (topologia nie musi mieć metryki) oraz przestrzeń ta jest zupełna.

Zadanie 1.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *metryzowalna w sposób zupełny*, jeśli istnieje metryka d na X generująca topologię przestrzeni X i taka, że przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna. Udowodnij, że

a) X jest metryzowalna w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna z przestrzenią zupełną

b) Przestrzeń $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych z topologią podprzestrzeni odziedziczoną z prostej euklidesowej, nie jest metryzowalna w sposób zupełny

c) Jeśli X jest metryzowalna w sposób zupełny i F jest domkniętym podzbiorem X, to $F \subseteq X$ z topologią podprzestrzeni jest metryzowalna w sposób zupełny

d) Niech $U \subseteq X$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). Udowodnij, że U z topologią podprzestrzeni jest metryzowalna w sposób zupełny

e) Które z poniższych podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ są metryzowalne w sposób zupełny

- $X_1 = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$
- $X_2 = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
- $X_3 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}]\right)$
- $X_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$
- $X_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
- $X_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{Q}\}$

Rozwiązanie:

e) Zbadajmy każdą podprzestrzeń

- X_1 : Niech $A_1 = \mathbb{Q} \times \{0\} \subseteq X_1$. Zbiór A_1 to domknięty podzbiór w X_1. Jest on homeomorficzny z $\mathbb{Q}$. Gdyby X_1 była metryzowalna w sposób zupełny, to A_1 byłaby metryzowalna w sposób zupełny. Tak jednak nie jest, bo $A_1 \simeq \mathbb{Q}$, a $\mathbb{Q}$ nie jest metryzowalna w sposób zupełny.
- X_2 : Mamy analogiczną sytuację, bo $A_2 = \mathbb{Q} \times \{\sqrt{2}\} \subseteq X_2$ jest homeomorficzny z $\mathbb{Q}$.
- X_3 : Mamy $X_3 \simeq \mathbb{N} \times [0, 1]$, bo $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\} \times \mathbb{N}$ oraz $[0, \frac{1}{n}] \simeq [0, 1]$. Przestrzeń $\mathbb{N} \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny, zatem jest również metryzowalna w sposób zupełny.
- X_4 : Zbiór X_4 jest otwarty w $\mathbb{R}^2$, więc jest metryzowalny w sposób zupełny.

- X_5 : Zbiór X_5 jest otwarty w $\mathbb{R}^2$, więc jest metryzowalny w sposób zupełny.
- X_6 : Niech $A_6 = X_6 \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \simeq \mathbb{Q}$. Jest to zbiór domknięty, zatem nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

Zadanie 10.
Udowodnij, że całkowicie ograniczona przestrzeń metryczna (X, d) musi być ośrodkowa.

Rozwiązanie:
Dla każdego n niech $\mathcal{B}_n$ to skończona rodzina zbiorów o średnicy mniejszej niż $\frac{1}{n}$. Wówczas $\bigcup \mathcal{B}_n = X$. Dla każdego $B \in \mathcal{B}_n$ niech $x_B^n \in B$. Wtedy zbiór $\bigcup \{x_B^n \mid B \in \mathcal{B}_n\} := D$ jest gęsty, bo jeśli ...

Definicja: Przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie da się jej przedstawić w postaci sumy dwóch domkniętych i niepustych podzbiorów.

Ćwiczenia 18

Zadanie 1.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. X jest spójna
2. Jedynymi podzbiorami przestrzeni X, które są jednocześnie otwarte i domknięte są $\emptyset$ i X
3. Nie istnieje ciągła surjekcja z X na dwupunktową przestrzeń dyskretną $\{0, 1\}$

Rozwiązanie:
1. $\Rightarrow$ 2. Załóżmy nie wprost, że istnieje $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ i $A \neq X$ taki, że A jest otwarto-domknięty. Wówczas $X \setminus A$ jest otwarto-domknięty. Wtedy $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ oraz $X = A \cup (X \setminus A)$. Oba zbiory A i $X \setminus A$ są niepuste, zatem X nie jest spójne.

2. $\Rightarrow$ 1. Załóżmy nie wprost, że $X = U \cup V$, gdzie U, V to dwa rozłącznie niepuste i otwarte zbiory. Wtedy $V = X \setminus U$, ale wtedy V jest otwarto-domknięty, więc mamy sprzeczność.
2. $\Rightarrow$ 3. W $\{0, 1\}$ zbiory $\{0\}$ i $\{1\}$ są otwarto-domknięte. Załóżmy, że istnieje ciągła suriekcja $f : X \to \{0, 1\}$. Wówczas $f^{-1}(\{0\})$ jest otwarto-domknięty w X. Skoro f jest „na”, to istnieje $a \in X$ taki, że $a \in f^{-1}(\{0\})$ i istnieje $b \in X$ taki, że $b \in f^{-1}(\{1\})$. Stąd $f^{-1}(\{0\})$ nie może być całością ani zbiorem pustym, nie może więc być zbiorem otwarto-domkniętym.

3. $\Rightarrow$ 2. Załóżmy, że istnieje $A \subseteq X$ taki że $A \neq \emptyset$ i $A \neq X$ oraz A jest otwarto-domknięty. Niech $f : X \to \{0, 1\}$ zadana będzie wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

f jest ciągła, bo A jest otwarto-domknięty. Znów mamy sprzeczność.

Lemat: (Urysohn) Niech (X, τ) będzie przestrzenią metryzowalną. Niech $A, B \subseteq X$ będą domknięte i rozłączne, czyli $A \cap B = \emptyset$. Wówczas istnieje funkcja ciągła $h : X \to [0, 1]$ taka, że

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in A \\ 1 & \text{dla } x \in B \end{cases}$$

Zadanie 2.
Udowodnij, że jeśli metryczna przestrzeń spójna X ma przynajmniej dwa punkty, to musi być mocy co najmniej continuum.

Rozwiązanie:
Niech a i b to te dwa punkty z X. Wówczas $\{a\}$ oraz $\{b\}$ to zbiory domknięte i rozłączne. Zatem z lematu Uryhsona istnieje funkcja ciągła $f : X \to [0, 1]$ taka że

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = a \\ 1 & \text{dla } x = b \end{cases}$$

Skoro X jest spójny, to $f(X)$ jest spójny, czyli

$$f(X) \subseteq [0,1]$$

Wiemy, że $f(X)$ jest przedziałem, zatem skoro $f(a) = 0$ oraz $f(b) = 1$, to z własności Darboux $f(X) = [0,1]$. Stąd $|X| \geq |f(X)| = \mathfrak{c}$.

Zadanie 3.
Niech C oznacza zbiór Cantora. Wiemy, że $[0,1]$ jest ciągłym obrazem C. A czy C jest ciągłym obrazem $[0,1]$?

Rozwiązanie:
Obraz zbioru $[0,1]$ względem funkcji ciągłej jest spójny. Zbiór C nie jest spójny, zatem C nie może być ciągłym obrazem $[0,1]$.

Zadanie 4.
Niech dane będzie pokrycie przestrzeni spójnej X zbiorami otwartymi $U_t \subseteq X$, $t \in T$. Udowodnij, że każda para punktów $a, b \in X$ daje się połączyć skończonym łańcuchem złożonym ze zbiorów U_t, to znaczy istnieją wskaźniki $t_1, \ldots, t_n$ takie, że $a \in U_{t_1}$, $U_{t_1} \cap U_{t_2} \neq \emptyset, \ldots, U_{t_{n-1}} \cap U_{t_n} \neq \emptyset$, $b \in U_{t_n}$.

Rozwiązanie:

Zadanie 5.
Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami spełniającymi równość $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Niech

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Udowodnij, że jeśli f jest funkcją ciągłą, to S jest zbiorem spójnym na płaszczyźnie.

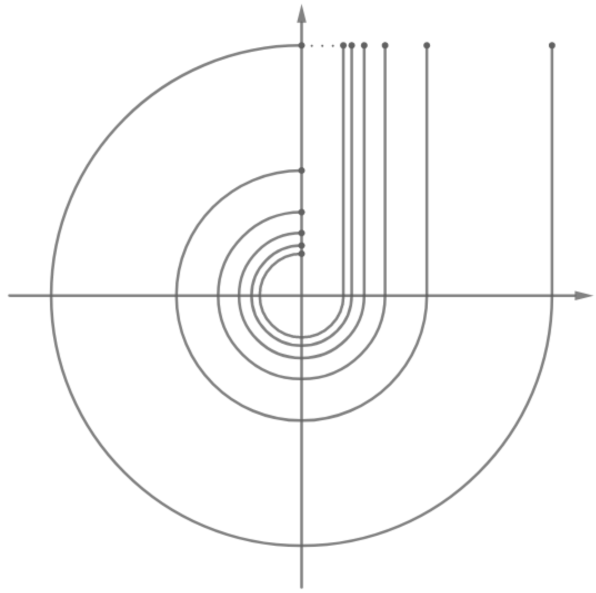
Rozwiązanie:
Zbiór S jest łukowo spójny, ponieważ wykres funkcji f jest łukowo spójny oraz każdy odcinek doczepiony do grafu również jest łukowo spójny spójny. Zatem z twierdzenia o sumie zbiór S jest łukowo spójny.

Zadanie 6.
Niech

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2, x \leq 0 \text{ lub } y \leq 0\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\right\}$$

Udowodnij, że zbiór $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej.

Rozwiązanie:
Narysujmy zbiór $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$



Niech $f : X \to \{0,1\}$ będzie ciągła. Pokażemy, że f jest stała na X, bo wtedy X będzie spójna. Zbiór A_n jest spójny dla każdego n, ponieważ jest homeomorficzny z $[0,1]$. Dla dowolnego n funkcja f jest stała, czyli dla każdego n mamy $f[A_n] = \{0\}$ lub $f[A_n] = \{1\}$. Niech $N_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid f[A_n] = \{0\}\}$ oraz niech $N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid f[A_n] = \{1\}\}$. Jeden z tych zbiorów jest nieskończony. Bez straty ogólności załóżmy, że N_1 jest nieskończony. Bez straty ogólności niech N_1 będzie nieskończony. Niech $n_1 < n_2 < \ldots$ to ciąg rosnący taki że dla każdego i mamy $n_i \in N_1$. Pokażemy, że $N_0 = \emptyset$. Załóżmy, że $N_0 \neq \emptyset$ i niech $m \in N_0$, czyli $f[A_m] = \{0\}$. Mamy $(0, \frac{1}{m}) \in A_m$ oraz $f((0, \frac{1}{m})) = 0$. Mamy $(\frac{1}{n_i}, \frac{1}{m}) \to (0, \frac{1}{m})$, ale $f((\frac{1}{n_i}, \frac{1}{m})) = 1$. Z ciągłości funkcji f mamy

$$0 = f\left(\left(0, \frac{1}{m}\right)\right) = \lim_{i\to\infty} f\left(\left(\frac{1}{n_i}, \frac{1}{m}\right)\right) = 1$$

Mamy więc sprzeczność, więc $N_0 = \emptyset$, więc $f[A_n] = \{1\}$ dla każdego n, zatem $f(\bigcup A_n) = \{1\}$, więc X jest spójne.

Zadanie 7.
Pokaż, że zbiór

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]\right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left([-1,0] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{-\frac{1}{n}\right\} \times [-1,0]\right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left([0,1] \times \left\{-\frac{1}{n}\right\}\right)$$

jest spójny ale nie jest łukowo spójny na płaszczyźnie euklidesowej.

Rozwiązanie:
Narysujmy ten zbiór

Ćwiczenia 19

Spójność

Zadanie 1.
Udowodnij, że przestrzeń otrzymana z płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ poprzez usunięcie z niej przeliczalnie wielu punktów, jest łukowo spójna.

Rozwiązanie:
Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Niech $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Przez punkt a możemy poprowadzić continuum wiele prostych. Niech $\mathcal{P}$ to rodzina prostych przechodzących przez a. Istnieje jakaś prosta nie przechodzą przez dowolny punkt z A. Analogicznie istnieje prosta przechodząca przez b rozłączna ze zbiorem A oraz nierównoległa do poprzedniej prostej. Proste te się przecinają, więc punkty a i b są połączone łamaną, więc $\mathbb{R}^2 \setminus A$ jest łukowo spójne.

Zadanie 2.
Które z poniższych podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ są homeomorficzne?

a) $X_1 = \{(x, y) \mid y = \sin \frac{1}{x} \mid x \neq 0\}$

b) $X_2 = X_1 \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$

c) $X_3 = \{(x, y) \mid y = \sin \frac{1}{x} \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$

Zadanie 3.
Uzasadnij, że następujące litery (traktowane jako podzbiory płaszczyzny euklidesowej) są parami niehomoeomorficzne: S, P, T, X.

Zadanie 4.
Niech $a = \{(0, 0)\}$, $b = \{(1, 0)\}$ i niech $X = \{a, b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0, 1] \times \{\frac{1}{n}\})$

a) Wyznacz składowe spójności zbioru X

b) Wykaż, że X nie jest homeomorficzna z $Y = X \setminus \{a\}$

c) Czy $Y \cup \{(\frac{1}{2}, 0)\}$ jest homeomorficzna z X?