

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marysia Nazarczuk

Nr albumu: 417755

Ultrakrótkie wprowadzenie do teorii grafów

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr. hab. Michał Pilipczuk prof. UW
Wydział MIM

Warszawa, Luty 2024

Spis treści

Wprowadzenie	5
1. Podstawy	7
1.1. Podstawowe definicje	7
2. Skojarzenia	9
2.1. Grafy dwudzielne	9
2.2. Twierdzenie Halla	10
2.3. Wzór Ore'a i twierdzenie Kőniga	12
2.3.1. Twierdzenie Kőniga	12
2.3.2. Wzór Ore'a	12
2.4. Twierdzenie Tutte	13
3. Cykl Eulera i Hamiltona	17
3.1. Cykl Eulera	17
3.2. Cykl Hamiltona	18
4. Drzewa	19
4.1. Twierdzenie Cayleya	19
4.2. Twierdzenie Kirchoffa	20
5. Planarność	23
5.1. Wzór Eulera	23
5.2. Charakterystyka grafów planarnych	24
6. Kolorowanie	25
6.1. Wprowadzenie	25
6.1.1. Twierdzenie Brooksa	25
6.1.2. Kolorowanie krawędziowe	27
6.2. Kolorowanie grafów planarnych	27
6.3. Grafy na różnych powierzchniach topologicznych	28
7. Homomorfizmy	31
7.1. Homomorfizm	31
7.2. Funkcja $\eta(k, l)$	31
7.2.1. Grafy Mycielskiego	32
7.2.2. Ograniczenia funkcji $\eta(k, l)$	33
7.3. Hipoteza Chena-Raspauda	36
7.3.1. Grafy Knesera - własności grafu Petersena	36
7.3.2. Mad i hipoteza Chen-Raspauda	37
8. Minory	39
8.1. Nowe spojrzenie na twierdzenie Kuratowskiego i twierdzenie Wagnera	39
8.2. Twierdzenie Robertsona-Seymoura	40

9. Podsumowanie	43
Bibliografia	46

Wprowadzenie

Studiując matematykę, napotkałam się z ciekawą gałęzią matematyki jaką są grafy. Brakuje przedmiotów oraz materiałów dydaktycznych dla młodych studentów. Praca ta jest więc skierowana do wszystkich tych, którzy chcą się zgłębić w tematykę grafów.

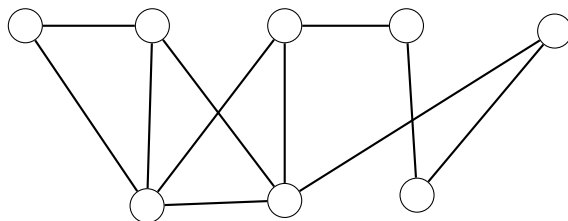
Grafy to bardzo ważne narzędzie używane w wielu dziedzinach życia. Służą do abstrakcyjnej reprezentacji (połączeń/relacji) między obiektami. Są używane w planowaniu tras komunikacyjnych, w analizie sieci społecznościowych, w układaniu planów lekcji i wielu innych zastosowaniach.

W pracy skupimy się na omówieniu podstawowych rzeczy związanych z grafami. Wprowadzimy podstawowe definicje oraz twierdzenia, które przydatne są w algorytmicznym zastosowaniu teorii grafów. Analizując dowody, poznamy wiele przydatnych technik dowodzenia oraz dogłębniej zrozumiemy strukturę grafów.

W pierwszym rozdziale wprowadzimy podstawowe pojęcia dotyczące grafów. W kolejnym rozdziale omówimy skojarzenia w grafach, czym są grafy dwudzielne oraz czym się charakteryzują. Poznamy twierdzenie Halla, Kóniga, Ore'a oraz Tutte-Berga. W rozdziale trzecim opowiemy o cyklach Eulera i Hamiltona oraz ich charakterystyce. Rozdział czwarty skupi się na drzewach, a właściwie na drzewach rozpinających w grafach. Następnie przejdziemy do planarności grafów, gdzie skupimy się na ich charakterystyce oraz poznamy wzór Eulera. W rozdziale szóstym przyjrzymy się kolorowaniu grafów. Omówimy twierdzenie Brooksa, kolorowanie krawędziowe oraz kolorowanie grafów planarnych. Rozdział siódmy będzie zawierał moje własne przykłady i przemyślenia dotyczące homomorfizmów w grafach. Przyjrzymy się funkcji $\eta(k, l)$ przydatnej w kolorowaniu grafów oraz poznamy hipotezę Chena-Raspauda. Ostatnim działem będą minory, w których wprowadzimy równoważne sformułowanie twierdzenia Kuratowskiego oraz twierdzenia Wagnera. Omówimy również twierdzenie Robertsona-Seymoura, które pozwoli uogólnić twierdzenia dla grafów planarnych na inne klasy grafów.

W pracy skupiamy się na poznaniu podstawowych własności dla grafów, jednak w końcowych rozdziałach przyjrzymy się trudniejszym zagadnieniom z teorii grafów, które zawierają wiele ciekawych problemów do rozwiązania.

Mam nadzieję, że po przestudiowaniu tej pracy, czytelnik zaciekawia się grafami na tyle, że sam spróbuje dalej zagłębiać się w tę pasjonującą dziedzinę.



Adnotacja

Dowody obarczone zakończeniem \square^1 lub \square^2 nie pochodzą z żadnej literatury. Są one udowodnione przez autora pracy (\square^1) lub zostały poznane przez niego na drodze nauki różnych przedmiotów matematycznych i informatycznych (\square^2).

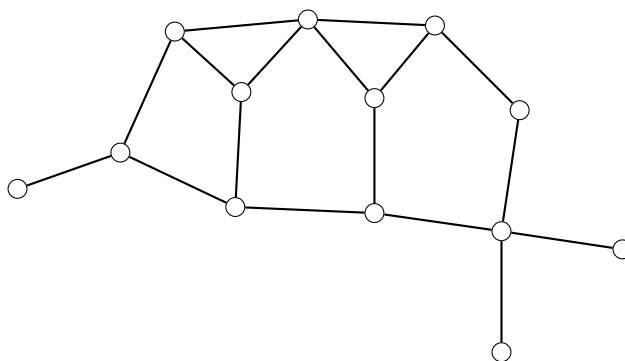
Rozdział 1

Podstawy

1.1. Podstawowe definicje

Definicja 1.1.1. **Graf (niesierowany)** to para $\langle V, E \rangle$ gdzie V to zbiór wierzchołków, zaś E to zbiór krawędzi (czyli nieuporządkowanych par wierzchołków).

Grafi możemy graficznie reprezentować za pomocą punktów oznaczających wierzchołki oraz krzywych, które będą oznaczać krawędzie. Na potrzeby pracy założymy, że grafy nie mają wielokrotnych krawędzi oraz nie istnieją krawędzie postaci $\{v, v\}$, czyli pętle. Mówimy, że krawędź jest **incydentna** z wierzchołkami v i w , jeśli łączy dwa wierzchołki. **Stożenie** każdego wierzchołka to liczba krawędzi z nim incydentnych. Oznaczamy go przez $\deg(v)$.



Przykładowy graf o 13 wierzchołkach i 17 krawędziach

Przejdźmy teraz do podstawowych definicji związanych z grafami.

Fakt 1.1.1. (Lemat o uściskach dłoni) Dla każdego grafu suma stopni wszystkich wierzchołków jest dwa razy większa od liczby krawędzi w grafie.

Wniosek 1.1.1. W każdym grafie liczba wierzchołków nieparzystego stopnia jest parzysta.

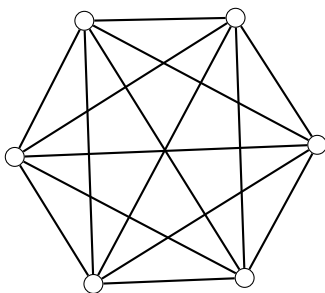
Przejdźmy teraz do kilku ważnych definicji związanych z grafami.

Definicja 1.1.2. H jest **podgrafem** G jeśli $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$.

Definicja 1.1.3. **Marszruta** w grafie G to ciąg wierzchołków $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ taki, że $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ dla $0 \leq i < k$. **Długość** marszruty to liczba krawędzi k . **Droga** to marszruta bez powtórzeń krawędzi. **Ścieżka** to marszruta bez powtórzeń wierzchołków. **Cykl** to droga zamknięta ($v_0 = v_k$). **Cykl prosty** to cykl bez powtórzeń wierzchołków.

Definicja 1.1.4. Graf G jest **spójny** jeśli dla każdych $u, v \in V(G)$ istnieje ścieżka od u do v . Maksymalny podgraf spójny to **spójna składowa**. Graf jest **dwuspójny** jeśli usunięcie pojedynczego wierzchołka (oraz incyduentnych z nim krawędzi) go nie rozspójnia. Ogólniej, grafu k -spójnego nie rozspójnia usunięcie $k - 1$ wierzchołków. Wierzchołek, którego usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych, nazywamy wierzchołkiem **rozcinającym** lub **punktem artykulacji**. Dwuspójna składowa to maksymalny podgraf dwuspójny.

Definicja 1.1.5. Graf jest k -**regularny**, jeśli każdy jego wierzchołek ma stopień k . **Klika** K_n to graf o n wierzchołkach, który jest $(n - 1)$ -regularny.



Klika K_6

Definicja 1.1.6. **Dopełnienie** \overline{G} grafu G to taki graf, że $V(\overline{G}) = V(G)$ oraz $E(\overline{G})$ wszystkie krawędzie z kliki na wierzchołkach $V(\overline{G})$ bez tych krawędzi, które należą do $E(G)$.

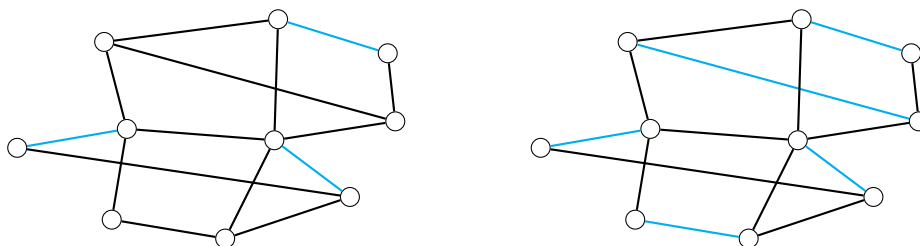
Przykład 1.1.1. Pokażemy, że przynajmniej jeden z grafów G, \overline{G} jest spójny. Rozważmy spójne składowe grafu G . Weźmy teraz dwa wierzchołki z różnych spójnych składowych v, w . Są one połączone w dopełnieniu \overline{G} , ponieważ nie były połączone w grafie G . Z kolei każde dwa wierzchołki v, u leżące w jednej spójnej składowej są połączone ścieżką długości dwa przechodzącą przez wierzchołek w , który leży w innej spójnej składowej. Zatem dopełnienie jest spójne.

Rozdział 2

Skojarzenia

W tym rozdziale omówimy pojęcie skojarzenia w grafach. Jest to zbiór krawędzi w grafie, które łączą wierzchołki w taki sposób, że każdy wierzchołek jest incydenty z maksymalnie jedną krawędzią ze skojarzenia.

Definicja 2.0.1. Podzbiór M zbioru krawędzi grafu G jest **skojarzeniem** jeśli dla każdych $e_1, e_2 \in M$, $e_1 \cap e_2 = \emptyset$, czyli krawędzie nie mają wspólnego wierzchołka. Skojarzenie M jest **doskonałe** jeśli dla każdego $v \in V(G)$ istnieje $e \in M$, że $v \in e$.

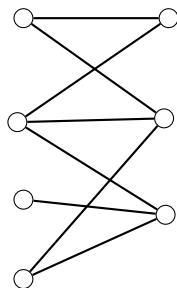


Pewne skojarzenie oraz skojarzenie doskonałe w grafie

2.1. Grafy dwudzielne

Grafy dwudzielne to takie grafy, w których zbiór wierzchołków można podzielić na dwie rozłączne części tak, że wszystkie krawędzie łączą wierzchołki z różnych części.

Definicja 2.1.1. Graf G jest **dwudzielny** jeśli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i każda krawędź ma jeden koniec w V_1 , zaś druga w V_2 .



Sformułujmy teraz twierdzenie, które charakteryzuje grafy dwudzielne.

Twierdzenie 2.1.1. (Charakteryzacja grafów dwudzielnych) Graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli nieparzystej długości.

Dowód.

\Rightarrow Marszruta zaczynająca się w zbiorze V_1 i mająca długość k kończy się w zbiorze $V_{1+k \bmod 2}$, zatem jeśli zaczynamy cykl w zbiorze V_1 i kończymy cykl w zbiorze V_1 , to ścieżka ta ma długość k , gdzie $k \equiv 0 \pmod{2}$. Zatem każdy cykl ma parzystą długość.

\Leftarrow Załóżmy, że graf G nie zawiera cykli nieparzystej długości i że jest spójny (bo wówczas każdą spójną składową możemy rozpatrywać oddzielnie). Ustalmy $v_0 \in V(G)$ oraz zdefiniujmy V_1 jako takie wierzchołki v , że długość najkrótszej ścieżki od v_0 do v jest parzysta, oraz $V_2 = V(G) - V_1$. Gdyby istniała krawędź łącząca u i v , które należą do tego samego zbioru V_i , to wówczas wraz z najkrótszymi ścieżkami $v_0 \rightarrow v$ oraz $v_0 \rightarrow u$ otrzymujemy drogę zamkniętą nieparzystej długości, w której zawiera się cykl nieparzystej długości. \square^1

2.2. Twierdzenie Halla

Twierdzenie Halla, nazwane na cześć Philipa Halla, jest fundamentalnym wynikiem teorii grafów. Jego celem jest badanie warunków koniecznych i wystarczających do istnienia skojarzeń w grafach dwudzielnych.

Wprowadźmy kilka ważnych definicji, by móc sformułować twierdzenie Halla.

Definicja 2.2.1. Dla danego wierzchołka $v \in V$ przez $N(v)$ oznaczamy **sąsiedztwo otwarte** v , czyli $\{u \in V : uv \in E\}$. Przez $N[v]$ oznaczamy **sąsiedztwo domknięte**, czyli $N(v) \cup \{v\}$. Dla $S \subseteq V$ przez jego domknięte sąsiedztwo $N[S]$ rozumiemy $\bigcup_{v \in S} N[v]$. Przez jego otwarte sąsiedztwo $N(S)$ rozumiemy $N[S] - S$.

Definicja 2.2.2. Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. **Defektem** zbioru $S \subseteq V_1$ (ozn. $\text{def}(S)$) nazwiemy wielkość $|S| - |N(S)|$. Defektem grafu $\text{def}(G)$ nazywamy największy defekt podzbioru V_1 .

Twierdzenie 2.2.1. (Hall) Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. W G istnieje skojarzenie o mocy $|V_1|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{def}(G) = 0$.

Zanim jednak przejdziemy do dowodu, udowodnimy lemat pomocniczy, do którego przydadzą nam się dwie definicje.

Definicja 2.2.3. **Ścieżka alternująca** to taka ścieżka, na której krawędzie ze skojarzenia i krawędzie spoza skojarzenia występują na przemian.

Definicja 2.2.4. **Ścieżka powiększająca** to taka ścieżka alternująca, że pierwszy i ostatni wierzchołek nie są skojarzone, to znaczy że nie są incydentne z krawędzią ze skojarzenia.

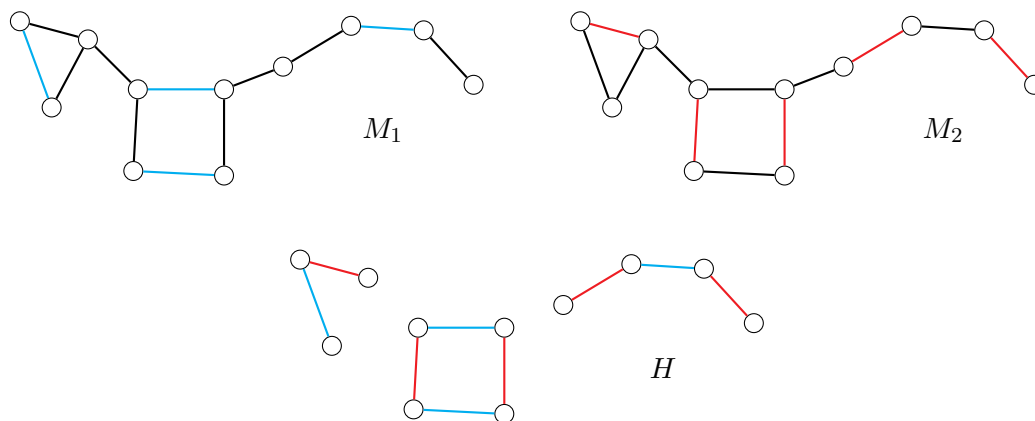
Lemat 2.2.1. (Twierdzenie Berge'a) [1] Skojarzenie M w grafie G jest maksymalne wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje w nim żadna ścieżka powiększająca.

Dowód.

\Rightarrow Gdyby w grafie istniała ścieżka powiększająca, to zamieniając w niej krawędzie skojarzone na nieskojarzone i nieskojarzone na skojarzone otrzymalibyśmy skojarzenie M' które ma więcej krawędzi niż skojarzenie M , stąd M nie było maksymalne.

\Leftarrow Niech M_1 oraz M_2 będą pewnymi skojarzeniami w tym grafie. Niech krawędź która pochodzi ze skojarzenia M_1 ma kolor niebieski, zaś niech krawędź która pochodzi ze skojarzenia M_2 ma kolor

czerwony. Niech H będzie grafem, który powstaje z różnicy symetrycznej M_2 oraz M_1 , to znaczy $V(H) = V(G)$ oraz $E(H) = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$.



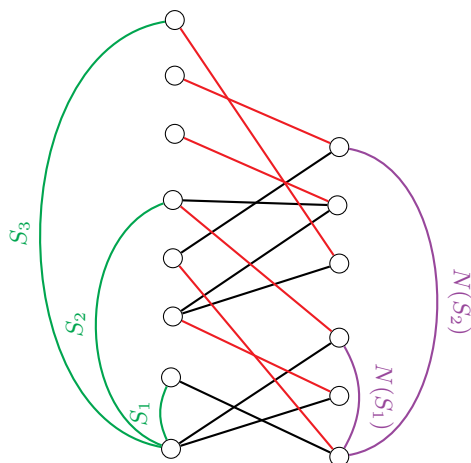
Pokażemy, że każda spójna składowa H to albo z wierzchołek, albo ścieżka alternująca albo z cykl parzystej długości. Każdy wierzchołek w H będzie miał stopień maksymalnie 2. Jeśli dana spójna składowa ma wierzchołek stopnia 0, to jest to spójna składowa składająca się z pojedynczego wierzchołka. Jeśli dana spójna składowa ma wierzchołek stopnia 1, to mamy przypadek ścieżki. Jeśli każdy wierzchołek jest stopnia 2, to mamy cykl. Pokażemy, że cykl ten ma parzystą długość. Każdy wierzchołek jest incydentny z jedną krawędzią czerwoną i jedną niebieską, więc rzeczywiście cykl ma parzystą długość. Weźmy teraz takie skojarzenie M_1 , które nie jest maksymalnym oraz niech M_2 będzie skojarzeniem od niego większym. Wówczas liczba czerwonych krawędzi w H jest większa niż liczba niebieskich krawędzi, gdyż w przeciwnym przypadku graf M_1 miałby większe skojarzenie niż M_2 . Co więcej skoro wszystkie cykle w H są parzystej długości, to pewna składowa która jest ścieżką ma więcej czerwonych krawędzi niż niebieskich, czyli znaleźliśmy ścieżkę powiększającą. \square

Możemy więc przejść do dowodu twierdzenia Halla

Dowód twierdzenia Halla. \square

\Rightarrow Załóżmy, że istnieje $S \subseteq V_1$ takie, że $\text{def}(S) > 0$, wówczas $|S| > |N(S)|$, czyli nie można znaleźć skojarzenia z S w $N(S)$, które kojarzyłoby każdy wierzchołek z S . Zatem nie istnieje skojarzenie z V_1 do V_2 .

\Leftarrow Załóżmy $\text{deg}(G) = 0$, czyli że dla każdego $S \subseteq V_1$ zachodzi $|S| \leq |N(S)|$. Weźmy dowolne skojarzenie maksymalne i pokażemy, że jest mocy $|V_1|$. Załóżmy przeciwnie, że skojarzenie maksymalne nie jest mocy $|V_1|$. Istnieje wówczas pewien niepusty zbiór $S_1 \subseteq V_1$ taki, że jego wierzchołki są nieskojarzone.



Rozważmy $N(S_1)$. Mamy $|N(S_1)| \geq |S_1|$. Każdy wierzchołek z $N(S_1)$ musi być skojarzony z jakimś wierzchołkiem z $V_1 - S_1$, bo w przeciwnym razie skojarzenie można byłoby powiększyć. Niech S_2 to S_1 oraz wierzchołki z V_1 , które są skojarzone z wierzchołkami z $N(S_1)$. Rozważmy $N(S_2)$. Mamy $|N(S_2)| \geq |S_2| = |S_1| + |N(S_1)| > |N(S_1)|$, zatem w zbiorze $N(S_2) - N(S_1)$ musi istnieć co najmniej jeden wierzchołek. Każdy wierzchołek z $N(S_2)$ musi być skojarzony z jakimś wierzchołkiem z $V_1 - S_2$, bo w przeciwnym razie znaleźlibyśmy ścieżkę powiększającą. W analogiczny sposób definiujemy zbiory S_3, S_4, \dots , powtarzając te operacje w nieskończoność. Każdy z tych zbiorów jest niepusty. Ale jako, że $|V_1| < \infty$, to operacja ta kiedyś musi się zakończyć \square^2

2.3. Wzór Ore'a i twierdzenie Kőniga

Twierdzenie Kőniga nazwane jest na cześć węgierskiego matematyka Dénesa Kőniga, który zapoczątkował badania nad tym zagadnieniem. Twierdzenie Kőniga stanowi kluczowy punkt odniesienia w analizie struktury grafów dwudzielnych oraz w rozwiązywaniu problemów związanych ze skojarzeniami w takich grafach. Zarówno twierdzenie Kőniga jak i wzór Ore'a przydatne są do wyznaczania mocy największego skojarzenia w grafach dwudzielnych.

2.3.1. Twierdzenie Kőniga

Definicja 2.3.1. Podzbiór I zbioru wierzchołków grafu G jest **niezależny** jeśli dla każdych $u, v \in I$, $\{u, v\} \notin E(G)$. B jest **pokryciem wierzchołkowym** w G wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) - B$ jest zbiorem niezależnym (czyli każda krawędź ma któryś koniec w B).

Twierdzenie 2.3.1. (Kőniga) W grafie dwudzielnym liczność najmniejszego pokrycia wierzchołkowego jest równa liczności największego skojarzenia.

Dowód. Niech P będzie najmniejszym pokryciem wierzchołkowym oraz niech M będzie maksymalnym skojarzeniem. Pokażemy, że $|P| = |M|$.

- \geq Aby pokryć krawędzie z największego skojarzenia, musimy dla każdej krawędzi ze skojarzenia wybrać jeden wierzchołek z nią połączony. Zatem $|P| \geq |M|$.
- \leq Oznaczmy przez S_1 zbiór nieskojarzonych wierzchołków w V_1 , zaś przez S_2 zbiór nieskojarzonych wierzchołków w V_2 . Niech X będzie zbiorem tych wierzchołków, które występują na ścieżkach alternujących o początkach w wierzchołkach z S_1 oraz niech Y będzie zbiorem tych wierzchołków, które występują na ścieżkach alternujących o początkach w wierzchołkach z S_2 . Musi zachodzić $X \cap Y = \emptyset$, bo inaczej M nie byłoby maksymalny. Przez U oznaczmy zbiór pozostałych wierzchołków. Niech $X_1 = X \cap V_1$, $X_2 = X \cap V_2$, $Y_1 = Y \cap V_1$, $Y_2 = Y \cap V_2$, $U_1 = U \cap V_1$ oraz niech $U_2 = U \cap V_2$. Pokażemy, że $X_2 \cup Y_1 \cup U_1$ też jest pokryciem wierzchołkowym. Zauważmy, że z definicji X i Y wszystkie krawędzie z X_1 wchodzi do X_2 , zaś wszystkie krawędzie z Y_2 wchodzi do Y_1 . Pozostaje zauważyć, że krawędzie z U_2 nie mogą wchodzić do X_1 , czyli wchodzi do $U_1 \cup Y_1$. Zatem $X_2 \cup Y_1 \cup U_1$ jest pokryciem wierzchołkowym. Dodatkowo każdy wierzchołek w $X_2 \cup Y_1 \cup U_1$ należy do jakiejś skojarzonej krawędzi i żadna krawędź w M nie ma obu końców w $X_2 \cup Y_1 \cup U_1$, zatem $|M| \geq |X_2 \cup Y_1 \cup U_1| \geq |P|$ \square^2

2.3.2. Wzór Ore'a

Twierdzenie: (Wzór Ore'a) Moc największego skojarzenia w grafie dwudzielnym to $|V_1| - \text{def}(G)$.

Dowód.

- \leq Niech $\text{def}(G) = k$, oznacza to, że istnieje $S \subseteq V_1$, takie że $|S| = |N(S)| + k$, czyli mamy co najmniej k wierzchołków w V_1 , które nie będą skojarzone.

\geq Rozważmy graf G , taki że $\text{def}(G) = k$. Do zbioru V_2 dodajemy k wierzchołków oraz łączymy je z wszystkimi wierzchołkami z V_1 . Wówczas każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony z jakimś wierzchołkiem z V_2 . Zatem istnieje skojarzenie z V_1 do V_2 mocy $|V_1|$. Usuwając dodane wierzchołki możemy stwierdzić, że maksymalne skojarzenie z V_1 do V_2 ma moc co najmniej $|V_1| - k$. \square^2

2.4. Twierdzenie Tutte

Zanim przytoczymy i udowodnimy twierdzenie Tuttego udowodnimy wcześniej twierdzenie Tutte-Berge'a. Wprowadźmy najpierw nowe definicje.

Definicja 2.4.1. Niech $\text{odd}(S)$ oznacza liczbę składowych grafu $G[S]$ o nieparzystej mocy. **Deficytem** df zbioru S w grafie G nazywamy $\text{df}(S) = \text{odd}(V - S) - |S|$. Deficyt grafu G to maksimum deficytów po podzbiorach. Zbiór $\text{cc}(G)$ zawiera wszystkie spójne składowe grafu G .

Zanim przejdziemy do twierdzenia Tutte-Berge'a wprowadzimy kilka lematów. Ustalmy graf $G = (V, E)$.

Lemat 2.4.1. Dla każdych $S, T \subseteq V$ zachodzi $|V| \equiv_2 \text{df}(S) \equiv_2 \text{df}(T)$.

Dowód. $\text{df}(A) = \text{odd}(V - A) - |A| \equiv_2 \left(\sum_{C \in \text{cc}(G-A)} |C| \right) - |A| = |V - A| - |A| \equiv_2 |V - A| + |A| = |V|$
 \square^2

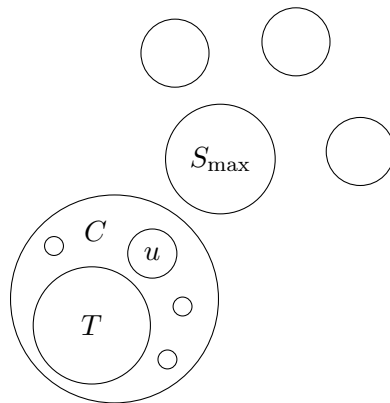
Niech S_{\max} będzie zbiorem o maksymalnym deficycie w G , który ma największą możliwą moc.

Lemat 2.4.2. Wszystkie spójne składowe grafu $G - S_{\max}$ mają nieparzystą moc.

Dowód. Załóżmy przeciwnie i weźmy C o mocy parzystej oraz $u \in V(C)$. Wówczas $C - u$ ma co najmniej jedną spójną składową o mocy nieparzystej. Stąd $\text{odd}(V - (S_{\max} \cup \{u\})) > \text{odd}(V - S_{\max})$, więc $\text{df}(S_{\max} \cup \{u\}) = \text{odd}(V - (S_{\max} \cup \{u\})) - |S_{\max} \cup \{u\}| \geq \text{df}(S_{\max})$. Z drugiej strony $|S_{\max} \cup \{u\}| > |S_{\max}|$, więc mamy sprzeczność. \square^2

Lemat 2.4.3. Niech $C \in \text{cc}(G - S_{\max})$ oraz $u \in V(C)$, wówczas $\text{df}(C - u) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że istnieje $T \subseteq V(C - u)$ taki, że $(C - u) - T$ ma więcej niż $|T|$ spójnych składowych o nieparzystej mocy.



Wówczas

- $|S_{\max} \cup \{u\} \cup T| = |S_{\max}| + |T| + 1 > |S_{\max}|$,
- $\text{odd}(G - (S_{\max} \cup \{u\} \cup T)) \geq (\text{odd}(G - S_{\max}) - 1) + |T| + 1 = o(G - S_{\max}) + |T|$, zatem $\text{df}(S_{\max} \cup \{u\} \cup T) = \text{odd}(G - (S_{\max} \cup \{u\} \cup T)) - |S_{\max} \cup \{u\} \cup T| \geq o(G - S_{\max}) + |T| - (|S_{\max}| +$

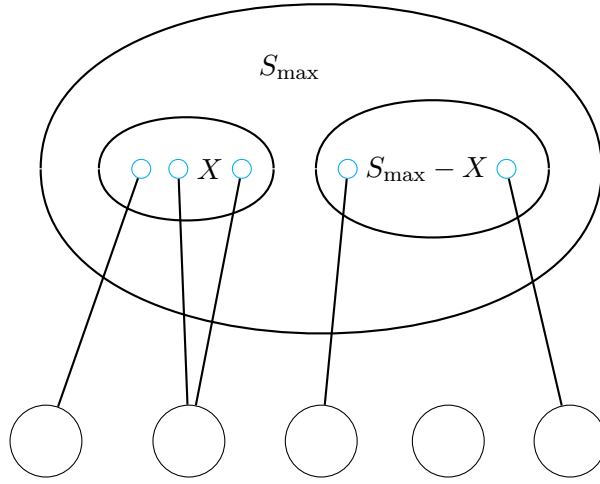
$|T|+1) = \text{odd}(G - S_{\max}) - |S_{\max}| - 1 = \text{df}(S_{\max}) - 1$. Ale jako, że $\text{df}(S_{\max} \cup \{u\} \cup T) \equiv_2 \text{df}(S_{\max})$, to stąd wynika, że $\text{df}(S_{\max} \cup \{u\} \cup T) \geq \text{df}(S_{\max})$.

Mamy więc sprzeczność. \square^2

Definicja 2.4.2. Graf G jest **krytyczny** jeśli dla każdego $v \in V$, graf $G - v$ ma skojarzenie doskonałe.

Lemat 2.4.4. Niech H będzie grafem dwudzielnym, w którym $V_1 = S_{\max}$ oraz $V_2 = \text{cc}(G - S_{\max})$, gdzie wierzchołki $u \in V_1$ oraz $C \in V_2$ są połączone wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $v \in C$ takie, że $v \in N(u)$. Wówczas H ma skojarzenie z V_1 w V_2 , kojarzące każdy wierzchołek z V_1 .

Dowód. Załóżmy, że istnieje $X \subseteq S_{\max}$, takie że $|N_H(X)| < |X|$. Zatem $|S_{\max} - X| = |S_{\max}| - |X|$ oraz $\text{odd}(G - (S_{\max} - X)) \geq \text{odd}(G - S_{\max}) - |N_H(X)|$. Wówczas $\text{df}(S_{\max} - X) = \text{odd}(G - (S_{\max} - X)) - |S_{\max} - X| \geq \text{odd}(G - S_{\max}) - |N_H(X)| - (|S_{\max}| - |X|) = \text{df}(S_{\max}) + |X| - |N_H(X)| > \text{df}(S_{\max})$. Mamy więc sprzeczność, gdyż defekt S_{\max} nie może być mniejszy niż defekt innego podzbioru. \square^2



Możemy więc przejść do twierdzenia Tutte-Berge'a.

Twierdzenie 2.4.1. (Tutte-Berge) Niech G będzie grafem, zaś niech M będzie maksymalnym skojarzeniem w nim. Wtedy $|V| - 2|M| = \text{df}(G)$.

Dowód.

- \geq Rozpatrzmy zbiór S_{\max} . Wówczas we wnętrzu każdej nieparzystej składowej $G - S_{\max}$ znajduje się wierzchołek, który albo jest nieskojarzony, albo skojarzony z czymś z S_{\max} . Ale z S_{\max} jest skojarzonych co najwyżej $|S_{\max}|$ wierzchołków, czyli pozostaje co najmniej $\text{df}(G)$ wierzchołków nieskojarzonych.
- \leq Dowód będzie przez indukcję po $|V(G)|$. Dla $|V(G)| = 1$ teza jest jasna. Niech więc $|V(G)| = n$ oraz załóżmy, że teza zachodzi dla wszystkich grafów o liczbie wierzchołków mniejszej niż n . Niech będzie $S_{\max} \subseteq V(G)$. Z Lematu 2.4.2 wszystkie spójne składowe $G - S_{\max}$ mają nieparzystą moc oraz z Lematu 2.4.3 dla $C \in \text{cc}(G - S_{\max})$ oraz dowolnego $u \in V(C)$ mamy $\text{df}(C - u) = 0$. Z założenia indukcyjnego, to że $\text{df}(C - u) = 0$ oznacza, że w tym grafie istnieje skojarzenie doskonałe M . Stąd wszystkie $C \in \text{cc}(G - S_{\max})$ są krytyczne. Z Lematu 2.4.4 wiemy, że istnieje skojarzenie z S_{\max} w $\text{cc}(G - S_{\max})$ w grafie H , kojarzące wszystkie wierzchołki z S_{\max} . Wówczas dla każdego $C \in \text{cc}(G - S_{\max})$ istnieje $u \in V(C)$ takie, że u jest połączone z wierzchołkiem z S_{\max} . Ale w $C - u$ istnieje skojarzenie doskonałe, bo C jest krytyczne. Konstruujemy teraz skojarzenie M dla grafu G . Bierzymy skojarzenie dla H i dopełniamy je skojarzeniami dla każdego grafów $C - u$. \square^2

Wnioskiem z tego twierdzenia jest twierdzenie Tutte'a które mówi o skojarzeniach doskonałych w grafach.

Twierdzenie 2.4.2. (Tutte) W grafie G istnieje skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy $df(G) = 0$.

Rozdział 3

Cykl Eulera i Hamiltona

Cykl Eulera oraz cykl Hamiltona są ważnymi pojęciami w teorii grafów. Oba dotyczą przemieszczenia się po grafie w taki sposób aby wszystkie wierzchołki zostały odwiedzone. Mimo iż założenie jest podobne, oba cykle różnią się własnościami, zastosowaniami oraz trudnością rozwiązania problemów. Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą krawędź w grafie dokładnie raz, zaś cykl Hamiltona to taka zamknięta ścieżka w grafie, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz, tworząc cykl. Znajdowanie cyklu Eulera w grafie jest prostym problemem. Da się go rozwiązać w czasie wielomianowym. Znajdowanie cyklu Hamiltona lub sprawdzenie czy on istnieje, w odróżnieniu od problemu znajdowania cyklu Eulera, jest bardzo trudnym zagadnieniem i należy do problemów NP-trudnych. Z problemem znajdowania cyklu Hamiltona, ściśle związany jest problem komiwojażera. Oba problemy mają liczne zastosowania w planowaniu tras i w problemach logicznych.

3.1. Cykl Eulera

Definicja 3.1.1. **Cykl Eulera** w grafie to cykl przechodzący przez każdą krawędź dokładnie raz. Graf zawierający cykl Eulera nazywamy eulerowskim.

Twierdzenie 3.1.1. (Charakteryzacja grafów eulerowskich) Graf spójny G ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ stopień tego wierzchołka jest parzysty.

Dowód.

\Rightarrow Niech każda krawędź będzie na początku zgaszona i po przejściu daną krawędzią ją zapalamy. Chcemy zapalić każdą krawędź dokładnie raz. Ustalmy dowolny wierzchołek $v \in V(G)$ i niech n to liczba zapalonych krawędzi przy danym wierzchołku. Początkowo $v = 0$. Rozważmy teraz dowolny cykl Eulera na grafie G . Za każdym razem gdy przechodzimy przez dany wierzchołek v , to liczba zapalonych krawędzi z nim incydentnych zwiększa się o 2. Jeśli v nie jest początkiem cyklu, to liczba zapalonych krawędzi zawsze będzie parzysta. Jeśli zaś v jest początkiem cyklu, to liczba zapalonych krawędzi dla tego wierzchołka będzie nieparzysta do momentu powrotu do tego wierzchołka. Zatem po przejściu cyklu Eulera, stopień każdego wierzchołka jest parzysty.

\Leftarrow Załóżmy, że każdy wierzchołek grafu ma parzysty stopień. Niech S to najdłuższa droga w grafie G . Pokażemy, że droga S to cykl. Załóżmy przeciwnie, że S zaczyna się w wierzchołku v i kończy w wierzchołku u takim, że $u \neq v$. Skoro każdy wierzchołek grafu ma parzysty stopień, to wchodząc do danego wierzchołka zawsze zostanie nam co najmniej jedna krawędź do której możemy wyjść i którą jeszcze nie przeszliśmy. Zatem kończąc drogę w wierzchołku innym niż w v , zawsze możemy drogę przedłużyć o jeszcze jeden wierzchołek, co przeczy temu, że u było końcem najdłuższej drogi. Stąd droga S jest cyklem. Niech v to początek cyklu. Pokażemy teraz, że S jest cyklem Eulera dla danego grafu. Załóżmy przeciwnie, że istnieje krawędź $\{a, b\}$, która nie należy do drogi S . Skoro G jest spójny, to istnieje droga M z a do v . Jeśli droga ta nie zawiera krawędzi $\{a, b\}$, to przedłużamy ją o krawędź $\{a, b\}$. Niech u to będzie ostatni wierzchołek na ścieżce M , który należy jednocześnie do cyklu S oraz drogi M . Droga powstała poprzez obejście

cyklu S zaczynając od wierzchołka u , a następnie przejście po krawędziach drogi M jest dłuższa od drogi S , co prowadzi do sprzeczności. Stąd nie istnieje krawędź nienależąca do drogi S , zatem S to jest cykl Eulera. \square^1

3.2. Cykl Hamiltona

Definicja 3.2.1. Cykl Hamiltona w grafie to cykl przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Graf zawierający cykl Hamiltona nazywamy hamiltonowskim.

Problem rozstrzygnięcia czy dany graf jest hamiltonowski jest zwykle bardzo trudny. Nie ma prostych twierdzeń, które będą w jednoznaczny sposób charakteryzowały wszystkie grafy hamiltonowskie. Poniżej podamy kilka warunków koniecznych i wystarczających aby graf był hamiltonowski.

Fakt 3.2.1. Jeśli G jest hamiltonowski, to po usunięciu dowolnych k wierzchołków rozpada się na co najwyżej k spójnych składowych.

Dowód. Niech S to cykl Hamiltona dla grafu G . Załóżmy, że $S = G$, czyli że w grafie G nie ma żadnych krawędzi poza tymi, które są w cyklu Hamiltona. Jeśli v_1, \dots, v_k to takie wierzchołki w S , że $\{v_i, v_j\} \notin E(S)$ dla $i \neq j$, to cykl rozpada się na dokładnie k części, zaś jeśli v_i sąsiaduje z v_j , to dostajemy mniej niż k części. Jeśli $S \neq G$, to mamy sytuację polegającą na tym, że do cyklu S możemy dodać dodatkowe krawędzie otrzymując graf G . Niech G' to graf powstały poprzez usunięcie k wierzchołków. Graf ten zawiera w sobie podgraf który jest powstały z usunięcia k wierzchołków z S . Zatem zawiera on co najwyżej k spójnych składowych. \square^1

Fakt 3.2.2. Jeśli graf G jest dwudzielny o składowych V_1 i V_2 i jest on hamiltonowski, to $|V_1| = |V_2|$.

Dowód. Każdy cykl w G zawiera tyle samo wierzchołków w zbiorze V_1 co w zbiorze V_2 , zatem $|V_1| = |V_2|$. \square^1

Twierdzenie 3.2.1. (Ore) Niech $n = |V(G)|$ i niech $n \geq 3$. Jeśli $\forall_{\{v,u\} \notin E(G)} \deg(v) + \deg(u) \geq n$, to graf G jest hamiltonowski.

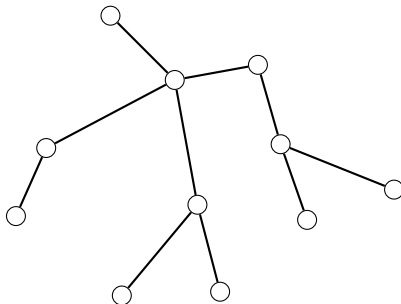
Dowód. Załóżmy nie wprost, że G nie jest hamiltonowski mimo, że $\forall_{\{v,u\} \notin E(G)} \deg(v) + \deg(u) \geq n$. Graf G możemy uzupełnić krawędziami do grafu G' hamiltonowskiego (na przykład do klik K_n). Niech G' to najmniejszy taki graf hamiltonowski, czyli że usunięcie dowolnej krawędzi z $E(G') - E(G)$ spowoduje, że graf przestaje być hamiltonowski. Niech wierzchołki v_1, v_2, \dots, v_n w tej kolejności tworzą cykl Hamiltona w grafie G' , przy czym ponumerujemy je w ten sposób, że $\{v_1, v_n\} \notin E(G)$. Niech graf G'' to graf powstały z G' przez usunięcie krawędzi $\{v_1, v_n\}$. Jest to graf niehamiltonowski. Skoro graf G spełniał warunek $\forall_{\{v,u\} \notin E(G)} \deg(v) + \deg(u) \geq n$, to po dodaniu krawędzi stopień każdego wierzchołka mógł jedynie wzrosnąć, więc również graf G' oraz graf G'' spełniają ten warunek. Zatem dla grafu G'' mamy spełniony warunek $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$. Jeśli istnieje $i \notin \{1, n-1, n\}$ takie że $\{v_1, v_{i+1}\} \in E(G'')$ i $\{v_n, v_i\} \in E(G'')$, to ciąg $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+2}, v_{i+1}, v_1$ tworzy cykl Hamiltona. Mamy więc sprzeczność z tym, że G'' był niehamiltonowski. Stąd nie istnieje $i \notin \{1, n-1, n\}$ takie że $\{v_1, v_{i+1}\} \in E(G'')$ i $\{v_n, v_i\} \in E(G'')$. Zatem jeśli $\{x_1, x_{i+1}\} \in E(G)$, to $\{x_n, x_i\} \notin E(G)$, bo inaczej G miałby cykl Hamiltona. Ale wówczas $\deg(v_n) \leq (n-1) - \deg(v_1)$, czyli $\deg(v_n) + \deg(v_1) \leq n-1$, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd jeśli G nie jest hamiltonowski to nie spełnia warunku $\forall_{\{v,u\} \notin E(G)} \deg(v) + \deg(u) \geq n$. \square^1

Rozdział 4

Drzewa

W tym rozdziale omówimy strukturę jaką są drzewa. Są to spójne grafy bez cykli. Ich prostota jest często wykorzystywana w analizie bardziej złożonych grafów.

Definicja 4.0.1. **Drzewo** to graf spójny bez cykli. **Las** to graf bez cykli, czyli każda spójna składowa lasu to drzewo. Drzewo rozpinające grafu spójnego G to drzewo stanowiące podgraf G o zbiorze wierzchołków $V(G)$.



Drzewo o 11 wierzchołkach, gdzie 6 wierzchołków to liście

Przytoczymy teraz proste twierdzenie, które charakteryzuje drzewa w różny sposób.

Twierdzenie 4.0.1. Następujące warunki są równoważne dla grafu $G = \langle V, E \rangle$:

1. G jest drzewem
2. każde dwa wierzchołki w G są połączone dokładnie jedną drogą
3. G jest minimalny spójny, czyli usunięcie dowolnej krawędzi go rozspójnia
4. G jest maksymalny acykliczny
5. G jest spójny i $|V| = |E| + 1$

4.1. Twierdzenie Cayleya

Przejdziemy teraz do twierdzenia Caylea o zliczaniu drzew etykietowanych w klikach. Twierdzenie Cayley'ego nazwę na cześć brytyjskiego matematyka Arthura Cayley'ego.

Twierdzenie 4.1.1. (Cayley) Klika K_n ma n^{n-2} drzew rozpinających.

Dowód. Pokażemy, jak można zestawić odpowiednio drzewa i $(n - 2)$ -elementowe ciągi składające się z liczb od 1 do n . Do tego celu użyjemy kodu Prüfera [2]. Kod Prüfera jest sposobem zapisu drzewa w formie ciągu o długości $n - 2$, gdzie n to liczba wierzchołków w grafie.

⇒ (Wyznaczanie kodu Prüfera z drzewa) Weźmy dane drzewo z wierzchołkami o numerach $\{1, 2, \dots, n\}$. Chcemy stworzyć kod Prüfera, który jest ciągiem liczb o długości $n - 2$ ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Jeśli w drzewie istnieje więcej niż jedna krawędź, to szukamy w drzewie wierzchołka o stopniu jeden o najniższym numerze ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ i oznaczamy go jako v . Następnie znajdujemy jedyne sąsiada wierzchołka v i nazywamy go w .
2. Dodajemy liczbę w na koniec kodu Prüfera i usuwamy krawędź $\{v, w\}$ z drzewa.
3. Jeśli w drzewie pozostały jeszcze jakieś krawędzie, wracamy do kroku pierwszego. W przeciwnym razie kod Prüfera jest gotowy.

⇐ (Wyznaczanie drzewa z kodu Prüfera) Weźmy kod Prüfera składający się z $n - 2$ liczb $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Chcemy stworzyć opis drzewa z wierzchołkami $\{1, 2, \dots, n\}$ przy użyciu tego kodu Prüfera.

1. Niech $c = 1$
2. Tworzymy dwie listy: $L_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ oraz $L_2 = \{1, 2, \dots, n\}$. Rozpoczynamy tworzenie drzewa jako grafu z wierzchołkami $\{1, 2, \dots, n\}$, bez żadnych krawędzi.
3. Wybieramy najmniejszą wartość i z listy L_2 , która nie występuje w liście L_1 i oznaczamy ją jako i .
4. Dodajemy krawędź $\{i, a_c\}$ do drzewa. Następnie usuwamy a_c z listy L_1 i i z listy L_2 .
5. Jeśli lista L_1 nie jest pusta, to zwiększamy wartość c o 1 i wracamy do kroku trzeciego. W przeciwnym razie lista L_2 zawiera jeszcze dwie liczby, nazwijmy je v_1 i v_2 . Dodajemy krawędź $\{v_1, v_2\}$ do zbioru krawędzi drzewa.

Dowód poprawności algorytmu zostawiam dla czytelnika. □

4.2. Twierdzenie Kirchoffa

Uogólnieniem twierdzenia Cayley'a jest poniższe twierdzenie Kirchoffa. Poniższy dowód pochodzi z książki „The Nature of Computation”[3], jednak został poniżej uogólniony dla multigrafów.

Twierdzenie 4.2.1. (Kirchoffa) [3] Niech G będzie spójnym multigrafem (czyli takim, w którym między dwoma wierzchołkami może występować wiele krawędzi) nieskierowanym o n wierzchołkach v_1, v_2, \dots, v_n . Niech $L(G)$ będzie macierzą $n \times n$, taką że

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ oraz } v_i \text{ nie sąsiaduje z } v_j \\ -d_{ij} & i \neq j \text{ oraz } v_i \text{ sąsiaduje z } v_j \\ \deg(v_i) & i = j \end{cases}$$

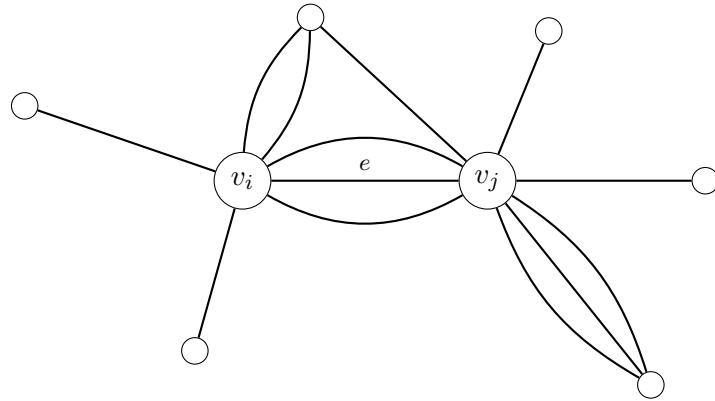
gdzie d_{ij} to liczba krawędzi między wierzchołkami i oraz j dla $j \neq i$. Wówczas liczba drzew rozpinających tego grafu wynosi $T(G) = |\det L_{ii}|$ dla dowolnego i , gdzie L_{ij} to $(n - 1)$ -wymiarowy minor macierzy $L(G)$, powstały z usunięcia i -tego wiersza i j -tej kolumny. Macierz $L(G)$ nazywamy laplasjanem grafu G .

Dowód. Udowodnimy to przez indukcję po liczbie wierzchołków, zaś dla ustalonej liczby wierzchołków zrobimy indukcję po liczbie krawędzi. Jeśli liczba wierzchołków jest równa 2, zaś liczba krawędzi łączących dane dwa wierzchołki jest równa d , to oczywiście liczba drzew rozpinających tego grafu jest równa d , zaś laplasjan wynosi $\begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}$, którego wyznacznik minora 1-wymiarowego jest równy d . Załóżmy więc że teza zachodzi dla wszystkich grafów które mają mniej niż n wierzchołków i rozważmy graf G o n wierzchołkach. Załóżmy też, że teza zachodzi dla grafów o n wierzchołkach, które mają mniej niż $V(G)$ wierzchołków. Weźmy dowolny wierzchołek v_i . Jeśli $\deg(v_i) = 0$, to pokażemy, że $\det(L_{ii}) = 0$. Zauważmy, że $L_{ii} = L(G - v_i)$, gdyż skoro v_i ma stopień 0, to zarówno i -ty wiersz, jak i i -ta kolumna są

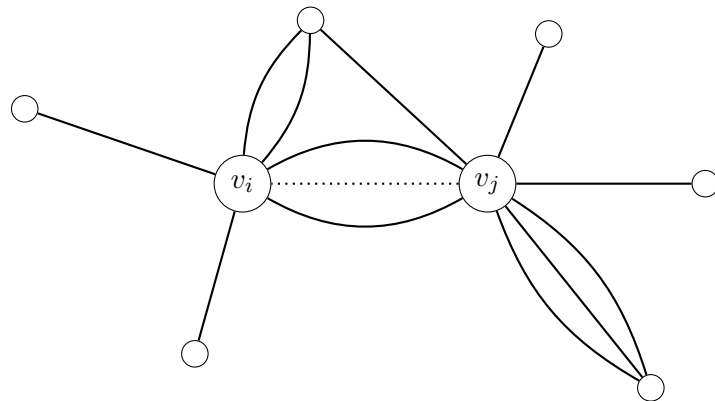
wyzerowane, więc wyrazy na przekątnej się nie zmieniają oraz jako że v_i nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem, to wyrazy poza przekątną też się nie zmieniają. Pokażemy, że $\det(L(G)) = 0$ dla dowolnego grafu G . Istotnie mamy

$$(1, \dots, 1) \cdot L = (\deg(v_1) - \underbrace{(d_{21} + \dots + d_{n1})}_{\text{suma wynosi } \deg(v_1)}, \dots, \deg(v_n) - \underbrace{(d_{1n} + \dots + d_{n-1 n})}_{\text{suma wynosi } \deg(v_n)}) = (0, \dots, 0)$$

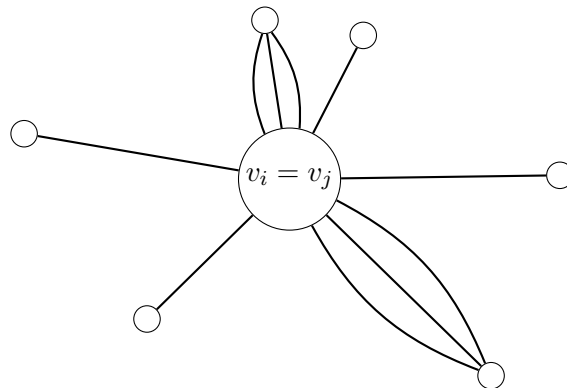
więc $L(G)$ nie ma pełnego rzędu. Stąd $\det(L_{ii}) = 0$. Niech więc $\deg(v_i) \neq 0$. Pokażemy, że $T(G) = T(G - e) + T(G \cdot e)$, gdzie $G \cdot e$ to graf powstały z G przez ściągnięcie wierzchołków, które znajdują się na końcu e , do jednego wierzchołka.



Graf G



Graf $G - e$



Graf $G \cdot e$

Liczba $T(G)$ oznacza liczbę wszystkich drzew rozpinających grafu. Liczba $T(G - e)$ oznacza liczbę drzew rozpinających grafu, które nie przechodzą przez krawędź e . Liczba $T(G \cdot e)$ oznacza liczbę drzew

rozpinających grafu, które przechodzą przez krawędź e . Zatem oczywiście $T(G) = T(G - e) + T(G \cdot e)$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że teza zachodzi dla $G - e$ oraz dla $G \cdot e$. Przenumerujmy wierzchołki tak aby v_i był pierwszym oraz v_j był drugim. Wówczas

$$L(G) = \left[\begin{array}{c|c|c} \deg(v_i) & -d_{ij} & r_i^T \\ \hline -d_{ji} & \deg(v_j) & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right] \quad L(G - e) = \left[\begin{array}{c|c|c} \deg(v_i) - 1 & -(d_{ij} - 1) & r_i^T \\ \hline -(d_{ji} - 1) & \deg(v_j) - 1 & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right]$$

$$L(G \cdot e) = \left[\begin{array}{c|c} \deg(v_i) + \deg(v_j) - 2 & r_i^T + r_j^T \\ \hline r_i + r_j & L' \end{array} \right]$$

Musimy pokazać, że $\det(L_{ii}(G)) = \det(L_{ii}(G - e)) + \det(L_{ii}(G \cdot e))$ lub równoważnie, że

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \deg(v_j) & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right] = \det \left[\begin{array}{c|c} \deg(v_j) - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right] + \det(L')$$

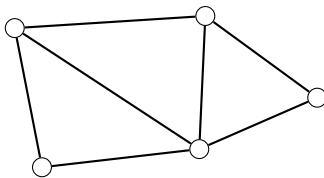
Ale ponieważ obie macierze ($L_{ii}(G)$) oraz $L_{ii}(G - e)$) mają wszystkie wyrazy poza a_{11} takie same, to równoważnie możemy wykazać, że $\deg(v_j) \cdot \det(L') = (\deg(v_j) - 1) \cdot \det(L') + \det(L')$, co oczywiście zachodzi. \square

Rozdział 5

Planarność

5.1. Wzór Eulera

Definicja 5.1.1. Graf G nazywamy **planarnym**, jeśli możemy go narysować na płaszczyźnie w taki sposób, że krzywe reprezentujące krawędzie się nie przecinają. **Ściana** to każdy maksymalny spójny obszar płaszczyzny rozłączny z grafem.



Jedna ze ścian jest nieograniczona, jednak odpowiednio przekształcając rysunek, każdą ze ścian możemy uczynić zewnętrzną. Liczba ścian wynika ze wzoru Eulera, który łączy ze sobą liczbę wierzchołków n liczbę ścian f oraz liczbę krawędzi grafu m .

Twierdzenie 5.1.1. (Wzór Eulera) Dla spójnego grafu planarnego zachodzi wzór $n + f - m = 2$.

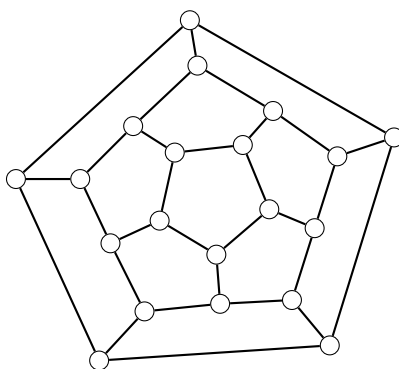
Dowód. Usuujemy zewnętrzne krawędzie, czyli te, które oddzielają zewnętrzną ścianę od innych ścian, w taki sposób aby usuwana krawędź nie rozspójniała grafu. W każdym kroku liczba ścian zmniejsza się o 1, zatem różnica $f - m$ się nie zmienia. Na końcu pozostaje nam graf, który jest drzewem. Ma on jedną ścianę, $n - 1$ krawędzi oraz n wierzchołków, zatem $n + f - m = n + 1 - (n - 1) = 2$. Jako, że podczas usuwania krawędzi różnica $f - m$ nie ulegała zmianie, toteż początkowy graf również spełniał wzór Eulera. \square^1

Jako, że każda ze ścian jest ograniczona zamkniętą drogą długości co najmniej 3 oraz że każda krawędź należy do maksymalnie 2 ścian, toteż dostajemy nierówność $3f \leq 2m$, skąd $m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Leftrightarrow m \leq 3n - 6$. Stąd na przykład wynika, że graf K_5 jest nieplanarny (zawiera on 5 wierzchołków i 10 krawędzi). Dla grafów nie zawierających trójkąta prawdziwa jest nierówność $4f \leq 2m$, skąd $m \leq 2n - 4$. Możemy więc stąd wywnioskować, że graf $K_{3,3}$ nie jest planarny. Ogólnie dla grafów nie zawierających k -cyklu, każda ze ścian jest ograniczona cyklem o długości co najmniej $k + 1$, czyli prawdziwa jest nierówność $(k+1)f \leq 2m$, skąd górne oszacowanie liczby krawędzi dane jest wzorem $m \leq \frac{k+1}{k-1} \cdot n - 2 \cdot \frac{k+1}{k-1}$.

Twierdzenie 5.1.2. Każdy graf planarny zawiera wierzchołek stopnia nie większego niż 5.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 6. Każda krawędź łączy dwa wierzchołki, więc zliczając krawędzie wokół wierzchołka otrzymujemy nierówność $2m \geq 6n$. Jednak wiemy, że $m \leq 3n - 6$, więc $2m \geq 6n > 6n - 12 \geq 2m$, co jest sprzecznością. \square^1

Oszacowania tego nie można wzmocnić, czego przykładem jest graf poniżej.



Dwunastościan foremny

5.2. Charakterystyka grafów planarnych

Wprowadzimy teraz pojęcia homeomorficzności grafów oraz ściągłości grafów, które posłużą nam do charakteryzacji grafów nieplanarnych.

Definicja 5.2.1. Graf G i graf H są **homeomorficzne** jeśli można otrzymać je z pewnego grafu M poprzez zastąpienie pewnych krawędzi grafu ścieżką w której każdy wierzchołek ma stopień dwa.

Definicja 5.2.2. Graf G jest **ściągalny** do grafu H , jeśli H możemy otrzymać z grafu G poprzez skończoną liczbę operacji polegającą na usunięciu z grafu G krawędzi $e = \{u, v\}$, a następnie utożsamieniu wierzchołków u i v (jeśli w wyniku tej operacji powstaje krawędź wielokrotna to zamieniamy ją na krawędź pojedynczą).

Wprowadzone definicje posłużą nam do sformułowania dwóch ważnych twierdzeń charakteryzujących grafy planarne. Jednym z nich jest twierdzenie Kuratowskiego, które pozwala nam identyfikować, czy dany graf jest planarny.

Twierdzenie 5.2.1. Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 lub $K_{3,3}$.

W praktyce oznacza to, że aby dowiedzieć się, czy dany graf jest planarny, możemy badać jego strukturę pod kątem tych konkretnych podgrafów. Twierdzenie Wagnera rozszerza naszą zdolność do pracy z grafami planarnymi.

Twierdzenie 5.2.2. Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera pewnych podgrafów ściąganych do K_5 lub $K_{3,3}$.

Oznacza to, że nawet jeśli nie jesteśmy pewni, czy dany graf zawiera K_5 lub $K_{3,3}$, możemy stosować operacje ściągania krawędzi, aby dowiedzieć się, czy jest on planarny. Twierdzenie Wagnera jest niezwykle potężnym narzędziem w analizie grafów planarnych, umożliwiając nam dowodzenie ich planarności w bardziej ogólny sposób.

Rozdział 6

Kolorowanie

6.1. Wprowadzenie

Kolorowanie grafów polega na przypisaniu kolorów wierzchołkom grafu w taki sposób, aby żadne dwa wierzchołki połączone wspólną krawędzią nie miały tego samego koloru. To zadanie, choć pozornie proste, jest do dziś sporym wyzwaniem.

Definicja 6.1.1. Kolorowanie grafu G za pomocą k kolorów to taka funkcja $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, że $f(u) \neq f(v)$ dla $\{u, v\} \in E(G)$. Liczba chromatyczna $\chi(G)$ to najmniejsze k , dla którego istnieje k -kolorowanie grafu G .

Przykład 6.1.1. Podamy kilka przykładów na znajdowanie liczb chromatycznych w pewnych klasach grafów:

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(G) \leq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest dwudzielny
- $\chi(G) \leq n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dwuspójnej składowej B grafu G zachodzi $\chi(B) \leq n$

W szukaniu liczby chromatycznej grafu dążymy do tego, aby móc ją jak najbardziej oszacować z góry.

6.1.1. Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie Brooksa daje ograniczenie na liczbę chromatyczną w pewnych klasach grafów.

Twierdzenie 6.1.1. (Brooks) Jeśli graf G jest spójny i nie jest cyklem nieparzystej długości ani kliką, to $\chi(G)$ jest co najwyżej równe maksymalnemu stopniowi wierzchołka w grafie G .

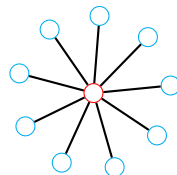
Dowód. Niech maksymalny stopień wierzchołka w grafie G to k oraz oznaczmy $|V(G)| = n$. Dowód przeprowadzimy indukcją po liczbie wierzchołków. Jeśli $k \leq 2$, to graf G jest dwudzielny, więc $\chi(G) \leq 2$. Możemy założyć więc, że $k \geq 3$. Rozważmy przypadek gdy G nie jest dwuspójny. Niech v będzie wierzchołkiem rozspójniającym graf. Po usunięciu wierzchołka v z grafu G otrzymalibyśmy dwa rozłączne krawędziowo grafy A i B . Wierzchołek v sąsiaduje z maksymalnie $k - 1$ wierzchołkami zarówno z grafu A jak i B . Możemy więc tak pokolorować wierzchołki w A i B aby te sąsiadujące z wierzchołkiem v używały maksymalnie $k - 1$ kolorów. Stąd wierzchołek v możemy pokolorować k -tym kolorem. Załóżmy więc, że G jest dwuspójny i rozważmy następujące przypadki

- Graf G nie jest k -regularny. Istnieje wówczas wierzchołek v o stopniu mniejszym niż k . Załóżmy, że graf o $n - 1$ wierzchołkach da się pokolorować k kolorami. Usuwając wierzchołek v z tego grafu możemy dany graf $(n - 1)$ -wierzchołkowy pokolorować k kolorami. Ale $\deg(v) < k$, więc istnieje kolor taki, że v nie sąsiaduje z wierzchołkiem tego koloru, więc możemy rozszerzyć kolorowanie na wierzchołek v .

- Jeśli graf G jest k -regularny, to oznacza, że każdy wierzchołek ma dokładnie tyle samo sąsiadów, czyli stopień k . Teraz wybieramy trzy wierzchołki: v_1 , v_2 i v_n , w taki sposób, że v_1 i v_2 nie są ze sobą połączone, ale oba są połączone z v_n . Dodatkowo, graf G bez v_1 i v_2 jest wciąż spójny. Później pokażemy, czemu możemy takie wierzchołki wybrać. Ustawiamy wierzchołki w kolejności v_1, \dots, v_n tak, żeby dla każdego $i < n$ wierzchołek v_i miał sąsiada v_j , gdzie $j > i$. Tak się da zrobić, ponieważ wierzchołki v_1 oraz v_2 nie sąsiadują ze sobą, zaś dla pozostałych wierzchołków robimy drzewo rozpinające ukorzenione w v_n i ustawiamy wierzchołki w kolejności od liści do korzenia. Kolorujemy je, zaczynając od v_1 . Nadajemy mu pierwszy dostępny kolor. Idziemy dalej i kolorujemy kolejne wierzchołki w takiej samej kolejności, nadając każdemu z nich pierwszy wolny kolor, który jeszcze nie został użyty. Zauważmy, że skoro v_1 nie sąsiaduje z v_2 , to kolor v_1 jest taki sam jak kolor v_2 . Mamy więc wolny kolor, który możemy przypisać v_n . Pozostaje pokazać, że takie wierzchołki v_1, v_2, v_n istnieją.

- Jeśli G nie jest 3-spójny, to wybieramy wierzchołek v_n w taki sposób, że po usunięciu v_n graf $G - \{v_n\}$ nie jest 2-spójny. Niech M , N będą dwoma różnymi 2-spójnymi składowymi grafu $G - \{v_n\}$ mającymi dokładnie po jednym punkcie artykulacji w $G - \{v_n\}$, odpowiednio w_M i w_N . Wówczas v_n ma sąsiada v_1 w $M - \{w_M\}$, ponieważ gdyby go nie miał, to usunięcie w_M z G sprawiłoby, że nie istniałaby ścieżka łącząca v_n i $M - \{w_M\}$, więc w_M byłby punktem artykulacji w G , co dałoby sprzeczność. Analogicznie v_n ma sąsiada v_2 w $N - \{w_N\}$. Oczywiście v_1 i v_2 nie są połączone krawędzią, ponadto $G - \{v_1, v_2\}$ jest spójny, ponieważ v_n ma stopień $k \geq 3$, więc jest połączony z $G - \{v_1, v_2\}$, a spójność $G - \{v_1, v_2, v_n\}$ wynika z tego, że v_1 i v_2 są wierzchołkami w różnych dwuspójnych składowych niebędącymi punktami artykulacji.
- Jeśli G jest 3-spójny. Oznaczmy $S_X = N(X)$. Niech $X_1 = \{u, v\} \subseteq V$, gdzie u, v to dowolne dwa wierzchołki z V . Wówczas jeśli istnieje $q \in S_{X_1}$ takie, że q jest połączone ze wszystkimi wierzchołkami z X_1 , to niech $X_2 = X_1 \cup \{q\}$. Algorytm powtarzamy dla kolejnych zbiorów X_2, X_3, \dots . Innymi słowy jeśli istnieje $q \in S_{X_i}$ takie, że q jest połączone ze wszystkimi wierzchołkami z X_i , to niech $X_{i+1} = X_i \cup \{q\}$. Zauważmy, że wszystkie X_i muszą być klikami, zatem skoro G nie jest kliką to wykonywanie powyższego algorytmu musi się kiedyś zakończyć. Zatem istnieje i takie, że istnieje $v_1 \in S_{X_i}$, że v_1 nie jest połączony ze wszystkimi elementami z X_i , czyli istnieje $v_2 \in X_i$ takie, że v_1 i v_2 ze sobą nie sąsiadują. Co więcej w X_i istnieje taki wierzchołek v_n , że v_1 sąsiadują z v_n oraz v_2 sąsiaduje z v_n . Ponadto $G - \{v_1, v_2\}$ pozostaje spójny dzięki 3-spójności, co kończy dowód. \square^2

Oszacowanie to nie jest dokładne. Przykładowo graf G , którego każdy wierzchołek ma stopień 1 oprócz jednego, który ma stopień $|V(G)| - 1$, ma liczbę chromatyczną równą 2, ale liczba maksymalny stopień jest równy $|V(G)| - 1$, co przy dużej liczbie wierzchołków w grafie jest liczbą bardzo dużą.



Przytoczmy jeszcze (bez dowodów) ważne twierdzenie przydatne przy szacowaniu liczby chromatycznej.

Twierdzenie 6.1.2. (Hajnal-Szemerédi) [4] Można pomalować G na o jeden więcej niż maksymalny stopień wierzchołka w grafie kolorów tak, aby liczby wierzchołków pomalowane na różne kolory różniły się o co najwyżej jeden.

Możemy więc wysnuć wniosek, że prawie zawsze $\chi(G)$ jest mniejsze niż maksymalny stopień wierzchołka w grafie.

6.1.2. Kolorowanie krawędziowe

Warto jeszcze wspomnieć o innym rodzaju kolorowania. Przypomnijmy najpierw czym są krawędzie incydentne, a następnie przejdźmy do określenia czym jest kolorowanie krawędziowe.

Mówimy, że krawędź jest z wierzchołkami v i w , jeśli łączy dwa wierzchołki. Krawędzie e i f są incydentne jeśli mają wspólny wierzchołek

Definicja 6.1.2. Kolorowaniem krawędziowym nazywamy funkcję $f : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ taką, że incydentne krawędzie mają różne kolory. **Indeks chromatyczny** $\chi_e(G)$ to najmniejsze k , dla którego istnieje k -kolorowanie krawędziowe.

Tu również bez dowodu pozostawimy dwa twierdzenia

Twierdzenie 6.1.3. (Kőnig) [5] Jeśli G jest dwudzielny, to $\chi_e(G)$ równe jest maksymalnemu stopnia wierzchołka w grafie.

Twierdzenie 6.1.4. (Vizing) [6] Jeśli k to maksymalny stopień wierzchołka w grafie, to zachodzą nierówności

$$k \leq \chi_e(G) \leq k + 1$$

6.2. Kolorowanie grafów planarnych

Szukanie oraz szacowanie liczby chromatycznej jest ogólnie trudnym problemem. W celu jak najlepszego oszacowania warto zawęzić się do pewnych klas grafów (co będziemy kontynuować w kolejnych rozdziałach pracy). Teraz przyjrzymy się kolorowaniu grafów planarnych. Łatwo pokazać, przez indukcję, że

Twierdzenie 6.2.1. (O 6 kolorach) Każdy graf planarny ma liczbę chromatyczną nie większą niż 6.

Dowód. Niech n to liczba wierzchołków w grafie. Dla $n = 3$ możemy graf ten oczywiście pokolorować maksymalnie 6 kolorami. Załóżmy więc, że każdy graf planarny o n wierzchołkach da się pokolorować 6 kolorami. Rozważmy teraz graf o $n+1$ wierzchołkach. Wiemy, że w grafie planarnym istnieje wierzchołek v o stopniu co najwyżej 5. Usuńmy go z grafu i pokolorujmy powstały graf maksymalnie sześcioma kolorami korzystając z założenia indukcyjnego. Ponieważ wierzchołek v ma co najwyżej 5 sąsiadów, to po ponownym dołożeniu go do grafu możemy go pomalować na kolor inny niż kolory jego sąsiadów. \square^1

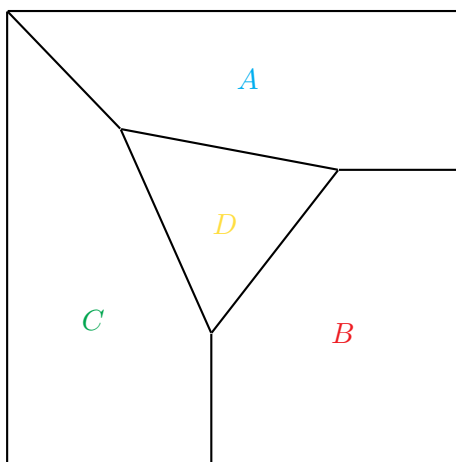
Twierdzenie 6.2.2. (O 5 kolorach) Każdy graf planarny ma liczbę chromatyczną nie większą niż 5.

Dowód. Niech n to liczba wierzchołków w grafie G . Możemy założyć, że $n > 5$. Załóżmy, że każdy graf planarny o n wierzchołkach da się pokolorować 5 kolorami. Rozważmy teraz graf o $n+1$ wierzchołkach. Wiemy, że w grafie planarnym istnieje wierzchołek v o stopniu co najwyżej 5. Usuńmy go z grafu i pokolorujmy powstały graf maksymalnie pięcioma kolorami korzystając z założenia indukcyjnego. Jeśli $\deg(v) \leq 4$, to możemy go pokolorować na piąty kolor, różny od kolorów jego sąsiadów. Załóżmy więc, że $\deg(v) = 5$. Po dołożeniu go do grafu, możemy też założyć, że wszystkie wierzchołki z nim sąsiadujące mają różne kolory. Oznaczmy sąsiadów v jako v_1, v_2, \dots, v_5 oraz nadajmy im kolory $1, 2, \dots, 5$. Wierzchołki v_1, v_2, \dots, v_5 nie tworzą kliki zawartej w G , gdyż K_5 nie jest grafem planarnym. Pewne dwa wierzchołki nie są więc ze sobą połączone. Po ewentualnym przenumеровaniu możemy założyć że są to wierzchołki v_1 oraz v_2 . Niech H to graf powstały z G po ściągnięciu wierzchołków v_1 i v_2 do v . Graf H ma $n - 1$ wierzchołków, jest planarny, więc jest 5-kolorowalny. Niech $f : V(H) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ to funkcja kolorująca graf H . Niech $f(v)$ to kolor wierzchołka v w grafie H . Skonstruujemy funkcję $g : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kolorującą graf G . Dla $w \in V(G) - \{v, v_1, v_2\}$ niech $g(w) = f(w')$, gdzie $w' \in V(H)$ odpowiada wierzchołkowi w . Niech $g(v_1) = g(v_2) = f(v)$. Oczywiście do tej pory kolorowanie jest poprawne, bo krawędzie, które idą w grafie G do v_1 lub v_2 szły w grafie H do v . Teraz zauważmy że w grafie G wierzchołek v sąsiaduje z pięcioma wierzchołkami oraz że wierzchołki v_1 i v_2

mają ten sam kolor, czyli że sąsiadów wierzchołka v pokolorowaliśmy za pomocą 4 kolorów. Zatem wierzchołek v możemy pokolorować piątym kolorem różnym od jego sąsiadów. \square^1

Twierdzenie to pozostaje prawdziwe gdy ograniczymy liczbę chromatyczną grafów planarnych przez 4, otrzymując

Twierdzenie 6.2.3. (O 4 kolorach) [7] Każdy graf planarny ma liczbę chromatyczną nie większą niż 4.



4-kolorowalna mapa na płaszczyźnie

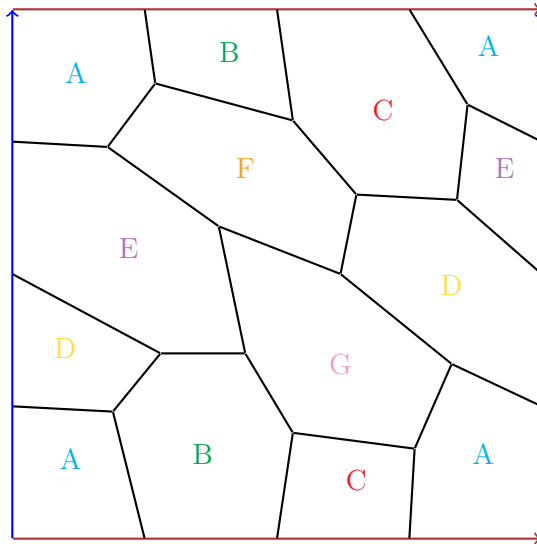
Dowód tego twierdzenia jest jednak bardzo trudny i został pokazany w roku 1976 z użyciem wspomaganie komputerowego. Wyniku tego nie da się już poprawić, choćby dlatego, że K_4 jest 4-kolorowalne.

6.3. Grafy na różnych powierzchniach topologicznych

O ile planarność dotyczy grafów znajdujących się na płaszczyźnie, to grafy możemy rysować na różnych obiektach topologicznych. Ciekawym zagadnieniem może być rozważanie różnych obiektów topologicznych i rozważanie na nich grafów takich, że można narysować je na danym obiekcie w taki sposób, aby każde dwie krawędzie nie przecinały się. Poniżej przedstawione są dwa najbardziej znane przykłady (z pominięciem grafów planarnych).

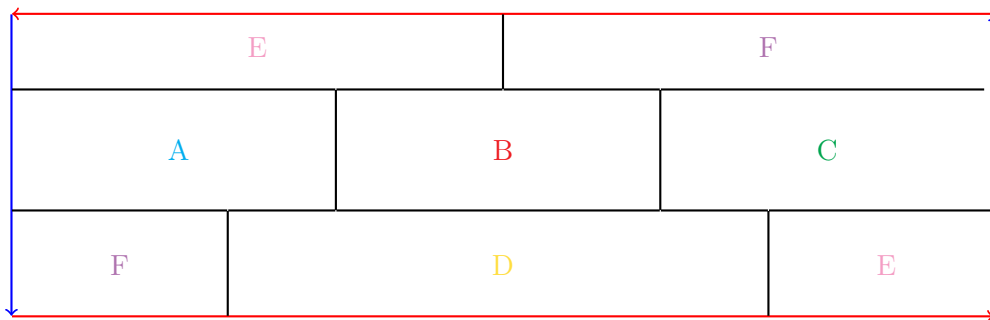
Definicja 6.3.1. Graf G nazywamy **toroidalnym** jeśli da się go narysować na torusie w taki sposób, aby krawędzie nie przecinały się.

Stwierdzenie 6.3.1. Grafy toroidalne mają liczbę chromatyczną równą 7 [8].



7-kolorowalna mapa na torusie

Stwierdzenie 6.3.2. Grafy rysowane na płaszczyźnie rzutowej są 6-kolorowalne [9]



6-kolorowalna mapa na płaszczyźnie rzutowej

Rozdział 7

Homomorfizmy

7.1. Homomorfizm

Kolorowanie grafów to problem przypisania kolorów wierzchołkom grafu w ten sposób, że żadne dwa wierzchołki nie są tego samego koloru o ile są połączone krawędzią. W celu znajdowania liczby chromatycznej grafu warto przyjrzeć się mniejszym grafom, które mają podobne własności co wyjściowe grafy. Do tego przydatna jest definicja homomorfizmów grafów.

Definicja 7.1.1. Homomorfizm z grafu G w graf H to przekształcenie $\psi : V(G) \rightarrow V(H)$, takie że jeśli wierzchołki x i y są połączone krawędzią w G , to $\psi(x)$ i $\psi(y)$ są połączone krawędzią w grafie H .

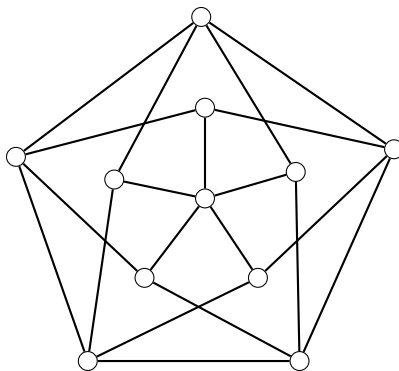
Jeśli istnieje homomorfizm z G do H , to piszemy $G \rightarrow H$. Możemy mówić wówczas, że G jest H -kolorowalne, gdyż dla każdego wierzchołka $x \in V(G)$ możemy mu dać kolor $\psi(x) \in V(H)$ w taki sposób, że ψ mapuje sąsiadów w G na sąsiadów w H .

Zauważmy, że homomorfizm jest przechodni. Jeśli istnieje homomorfizm z G w H oraz z H w F , to istnieje również homomorfizm G w F , który jest złożeniem powyższych dwóch homomorfizmów.

Na dwóch przykładach pokażemy, że homomorfizmy w grafach to istotne przekształcenia.

7.2. Funkcja $\eta(k, l)$

Rozważmy problem polegający na znalezieniu grafów, które nie mają trójkątów i jednocześnie nie są 3-kolorowalne, czyli nie dopuszczają homomorfizmu w K_3 . Pierwszy taki graf został skonstruowany przez Grötzscha. Ma on 11 wierzchołków i 20 krawędzi. Harary [10] pokazał, że potrzeba co najmniej 11 wierzchołków do zbudowania grafu, który nie ma trójkątów i nie jest 3-kolorowalny. Chvatal [11] pokazał, że graf Grötzscha to jedyny taki graf.



Graf Grötzscha

Definicja 7.2.1. Przez nieparzysty obwód oznaczać będziemy długość najkrótszego nieparzystego cyklu, który jest podgrafem pewnego grafu.

Traktując K_3 jako nieparzysty obwód długości 3 możemy zadać sobie ciekawe pytanie

Problem 7.2.1. [12] Dla dowolnych dodatnich k, l jaki jest najmniejsza liczba wierzchołków $\eta(k, l)$ grafu o nieparzystym obwodzie $2k + 1$, który nie ma homomorfizmu w graf C_{2l+1} ?

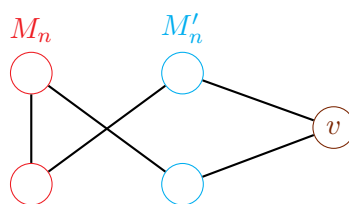
Powyższe pytanie jest przydatne przy wyliczaniu liczby chromatycznej grafów. Jeśli mamy graf G i wiemy, że jego nieparzysty obwód jest równy $2k + 1$ dla pewnego k i jego liczba wierzchołków jest mniejsza niż $\eta(k, l)$ dla pewnego l , to wiemy, że graf ten ma homomorfizm w graf C_{2l+1} , a więc jest $2l + 1$ kolorowalny (czyli jego liczba chromatyczna jest mniejsza lub równa $2l + 1$). Poniżej podamy kilka twierdzeń, które są przydatne w szacowaniu tej liczby.

Zauważmy, że jeśli $k < l$, to $\eta(k, l) = 2k + 1$, ponieważ samo C_{2k+1} jest szukany grafem. Dalej mamy oczywiście $\eta(1, 1) = 4$, ponieważ K_4 jest najmniejszym (pod względem liczby wierzchołków) grafem, który nie jest 3-kolorowalny. Wynik Harary'ego możemy napisać jako $\eta(2, 1) = 11$. Ogólniej, dla $l = 1$ i dowolnego k , zadanie to sprowadza się do znalezienia najmniejszej liczby wierzchołków w grafie o nieparzystym obwodzie co najmniej $2k + 1$, który nie jest możliwy do pokolorowania trzema kolorami.

7.2.1. Grafy Mycielskiego

Przyjrzyjmy się konstrukcji ciekawej grupie grafów, które mają bezwzględnie dużą liczbę chromatyczną przy jednocześnie małej liczbie wierzchołków w największej klicze zawartej w danym grafie.

Definicja 7.2.2. Graf Mycielskiego M_n , jest konstruowany w następujący sposób $M_2 = K_2$ oraz M_{n+1} jest konstruowany na bazie grafu M_n , który zawiera n wierzchołków oznaczonych jako v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . W grafie M_{n+1} dodawane są $n + 1$ dodatkowe wierzchołki: u_i , które odpowiadają wierzchołkom v_i z grafu M_n , oraz dodatkowy wierzchołek w . Każdy wierzchołek u_i jest połączony krawędzią z wierzchołkiem w , tworząc razem podgraf przypominający gwiazdę o $n + 1$ wierzchołkach. Ponadto, dla każdej krawędzi $v_i v_j$ w grafie M_n , dodawane są krawędzie $u_i v_j$ oraz $v_i u_j$ do grafu Mycielskiego M_{n+1} . Innymi słowy, graf M_{n+1} powstaje z grafu M_n przez stworzenie kopii wierzchołków M'_n , a następnie połączenie wierzchołków z kopii z sąsiadami wierzchołków z oryginału. Na koniec dokładamy dodatkowy wierzchołek v , który będzie sąsiedował z wierzchołkami z kopii.



Graf M_3

Fakt 7.2.1. Graf Mycielskiego nie zawiera trójkątów.

Dowód. Udowodnimy przez indukcję, że w grafie M_k nie ma trójkątów. W grafie M_2 nie ma oczywiście żadnego cyklu, zatem nie ma też cyklu o długości 3, czyli nie ma trójkątów. Załóżmy więc, że trójkątów nie ma w grafie M_k . Zauważmy, że w M'_k żadne dwa wierzchołki nie są połączone. Wierzchołek v nie jest też połączony z wierzchołkami z M_k . Wierzchołek v nie może być więc częścią trójkąta. Jeśli wierzchołek x' z M'_k będący kopią wierzchołka x z M_k jest połączony z wierzchołkami v, w z M_k , to wynika z tego, że skoro $x'v$ jest krawędzią to xv jest krawędzią i skoro $x'w$ jest krawędzią, to xw jest krawędzią. Zatem gdyby istniał trójkąt o wierzchołkach x', v i w , to musiałby też istnieć trójkąt o wierzchołkach x, v i w , co jest sprzeczne z założeniem indukcyjnym. Ale w takiej sytuacji jedyną możliwością, aby

powstał trójkąt jest to, że wszystkie wierzchołki trójkąta leżą w M_k , co jest nie możliwe z założenia indukcyjnego. \square^1

Fakt 7.2.2. $\chi(M_k) = k$

Dowód. Również przez indukcję pokażemy, że $\chi(M_k) = k$. W grafie $M_2 = k$, oczywiście mamy 2-kolorowanie. Załóżmy więc, że graf M_k można pokolorować k kolorami. Pokażemy, że M'_k można pokolorować tak samo jak graf M_k . Dla wierzchołka x' z M'_k będącego kopią wierzchołka x z M_k , wszyscy jego sąsiedzi to również wszystkimi sąsiadami wierzchołka x , zatem wierzchołki x oraz x' mogą mieć takie same kolory. Wierzchołek v sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z M'_k , zatem musi zostać pokolorowany na $k + 1$ kolor. Zatem do pokolorowania grafu wystarczy $k + 1$ kolorów. Aby pokazać, że do pokolorowania M_{k+1} potrzeba $k + 1$ kolorów, pokażemy, że do pokolorowania M'_k potrzeba k kolorów. Załóżmy, że da się pokolorować $M'_k \cup M_k$ na k kolorów tak, by wśród M'_k występowało mniej niż k kolorów. Weźmy dowolny kolor A , który występował w M_k , ale nie występował w M'_k . Taki kolor istnieje, ponieważ z założenia indukcyjnego do pokolorowania M_k użyliśmy k kolorów. Weźmy dowolny wierzchołek x w M_k , który ma kolor A . Niech wierzchołek x' w M'_k będzie kopią wierzchołka x . Skoro x' jest połączony ze wszystkimi wierzchołkami z którymi połączony jest x , to oznacza, że wierzchołek x wcale nie musi być koloru A , lecz może być koloru takiego jak x' . Postępując tak ze wszystkimi wierzchołkami koloru A , dostajemy kolorowanie M_k na mniej niż k kolorów. Mamy sprzeczność, więc teza jest prawdziwa. \square^1

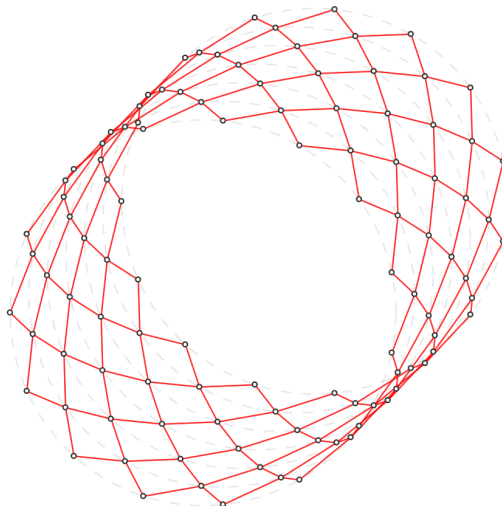
Zauważmy, że graf Grötscha to M_4 .

7.2.2. Ograniczenia funkcji $\eta(k, l)$

Wykorzystując uogólnienie grafów Mycielskiego [13], możemy uzyskać górne ograniczenie na liczbę $\eta(k, 1)$.

Główna część konstrukcji, z którą będziemy pracować, to prawie kwadrangulacja cylindra, którą tu definiujemy. Tutaj, oraz w reszcie tego opracowania, dodawanie do indeksów jest brane modulo maksymalnej wartości tego indeksu, czyli $(\text{mod } 2k + 1)$ w tym przypadku.

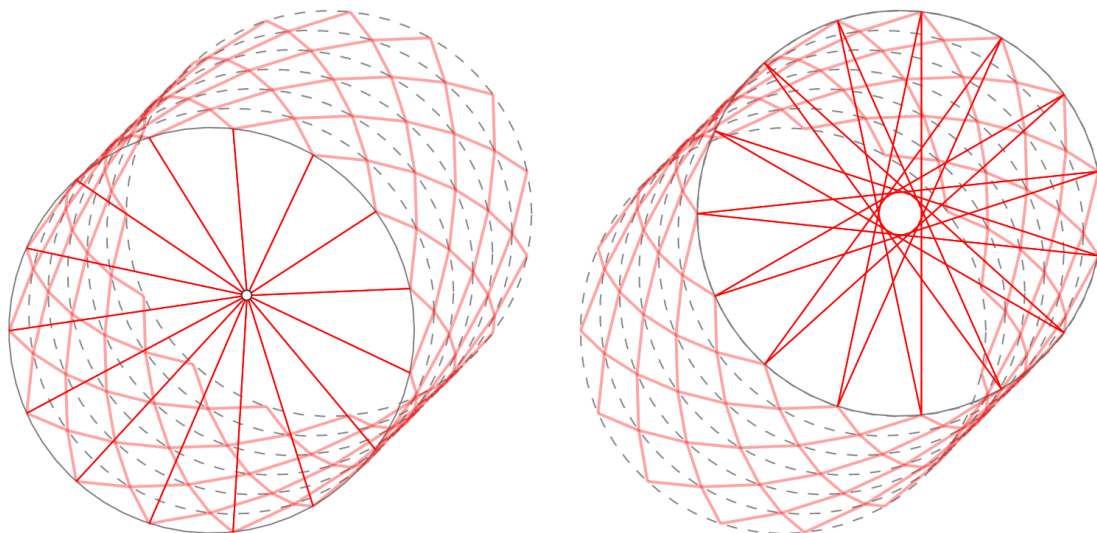
Definicja 7.2.3. [13] Dla danych liczb całkowitych l i k , $C_{l \times (2k+1)}$ jest grafem, którego zbiór wierzchołków to $V = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq 2k + 1\}$, a zbiór krawędzi to $E = \{v_{i,j}v_{i+1,j-1}, v_{i,j}v_{i+1,j+1} \mid 1 \leq i \leq l - 1, 1 \leq j \leq 2k + 1\}$. Dodawanie do indeksów jest brane modulo maksymalnej wartości tego indeksu, czyli $(\text{mod } 2k + 1)$.



$C_{l \times (2k+1)}$ z wyróżnionymi warstwami (obrazek pochodzi z pracy [13])

Definicja 7.2.4. [13] Dane są liczba całkowita dodatnia l oraz liczba całkowita dodatnia k . Uogólniony graf Mycielskiego cyklu o nieparzystej długości C_{2k+1} , oznaczany jako $M_l(C_{2k+1})$, jest tworzony z grafu $C_{l \times (2k+1)}$ w następujący sposób:

- Łączymy wierzchołki $v_{1,j}$ i $v_{1,j+k}$ (obrazek po prawej)
- Dodajemy nowy wierzchołek u i łączymy go z wszystkimi wierzchołkami $v_{l,j}$, $j = 1, \dots, 2k+1$ (obrazek po lewej)



Konstrukcje na dolnych i górnych warstwach (obrazki pochodzą z pracy [13])

Poniższe dwa twierdzenia pochodzą z pracy [13]. Twierdzenie 7.2.1 oznaczone jest w pracy jako Proposition 1. zaś twierdzenie 7.2.2 oznaczone jest w pracy jako Theorem 10.

Twierdzenie 7.2.1. [13] Najmniejszy nieparzysty cykl grafu $M_l(C_{2k+1})$ ma długość równą $\min\{2k+1, 2l+1\}$.

Twierdzenie 7.2.2. [13] Dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ zachodzi $\chi(M_l(C_{2k+1})) = 4$.

Stąd wynika, że $M_k(C_{2k+1})$ jest najmniejszym grafem Mycielskiego, którego liczba chromatyczna wynosi 4 oraz ma najmniejszy nieparzysty cykl równy $2k+1$. Liczba wierzchołków tego grafu jest równa $k \cdot (2k+1) + 1 = 2k^2 + k + 1$, skąd dostajemy oszacowanie $\eta(k, 1) \leq 2k^2 + k + 1$.

Wprowadzimy teraz kilka nowych pojęć [14], które posłużą nam do sformułowania twierdzenia Gerarda [15], z którego będziemy mogli wywnioskować nowe ograniczenia na $\eta(k, l)$.

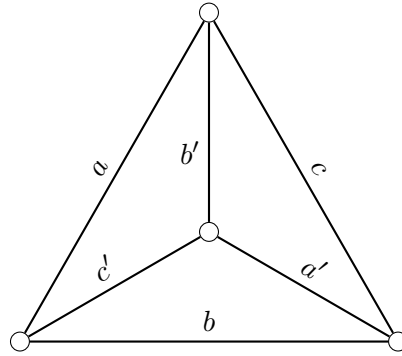
Definicja 7.2.5. Grafem np- K_4 będziemy oznaczać graf (jest ich wiele i tworzą klasę grafów) powstały przez dodanie na krawędzie grafu K_4 takiej dodatniej liczby wierzchołków, że każdy cykl zawarty w jednym z czterech trójkątów grafu K_4 jest nieparzystej długości. Grafem $(2k+1)$ -np- K_4 będziemy nazywać taki graf np- K_4 , którego każdy cykl ma długość $2k+1$.

Zauważmy, że wszystkie cykle nieparzystej długości w grafie np- K_4 zawarte są w trójkątach grafu K_4 . Zatem nieparzysty obwód grafu $(2k+1)$ -np- K_4 jest równe $2k+1$.

Poniższe wyprowadzenie na dolne oszacowanie liczby $\eta(k, l)$ pochodzi z pracy [12].

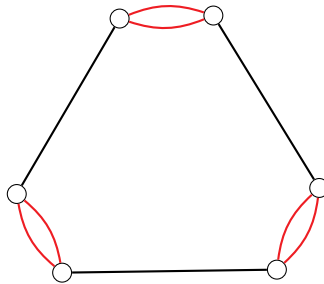
Stwierdzenie 7.2.1. [12] Niech K będzie np- K_4 o nieparzystym obwodzie co najmniej $2k + 1$. Wtedy K ma co najmniej $4k$ wierzchołków, przy czym dokładnie $4k$ wierzchołków wtedy i tylko wtedy, gdy K jest $(2k + 1)$ -np- K_4 .

Dowód. Jeśli K ma nieparzysty obwód co najmniej $2k + 1$, wówczas każdy z czterech cykli K ma długość co najmniej $2k + 1$, skąd $2 \cdot |E(K)| \geq 4(2k + 1)$. Z drugiej strony, cztery wierzchołki grafu K (oryginalne wierzchołki z K_4) mają stopień 3 a pozostałe mają stopień 2, skąd $|V(K)| = |E(K)| - 2$, co implikuje, że $|V(K)| \geq 4k$. Jeśli w powyższej nierówności zachodzi równość, to każda ściana ma dokładnie $2k + 1$ wierzchołków, czyli K jest $(2k + 1)$ -np- K_4 . Załóżmy więc, że K jest $(2k + 1)$ -np- K_4 i że ścieżki K_4 mają długości a, a', b, b' oraz c, c' , gdzie każda para i, i' dla $i \in \{a, b, c\}$ odpowiada rozłącznym krawędziom K_4 .



Mamy więc $a + b' + c = a + b + c = 2k + 1$. Zatem $b' + c = b + c$. Analogicznie $a' + b' = a + b$ oraz $a' + c' = a + c$, skąd $a = a'$, $b = b'$ oraz $c = c'$. Co kończy dowód. \square

Graf np- K_3^2 to graf powstały z trzech rozłącznych cykli nieparzystej długości i trzech rozłącznych ścieżek (być może o długości 0) które łączą te cykle (czyli na poniższym rysunku mamy czerwone cykle o nieparzystej długości, a czarne ścieżki możemy ściągnąć do jednego wierzchołka). Tak więc w takim grafie każde dwa z trzech cykli mają co najwyżej jeden wspólny wierzchołek (jeśli łącząca je ścieżka ma długość 0). Stąd np- K_3^2 o nieparzystym obwodzie co najmniej $2k + 1$ ma co najmniej $6k$ wierzchołków (bo wierzchołków będzie co najmniej $3 \cdot (2k + 1) - 3 \geq 6k$).



Przytoczmy teraz twierdzenie Gerarda, które posłuży nam do oszacowania liczby $\eta(k, l)$.

Twierdzenie 7.2.3. (Gerarda) [15] Jeśli G nie ma ani np- K_4 ani np- K_2^3 jako podgrafu, to dopuszcza homomorfizm do swojego najkrótszego nieparzystego obwodu .

Wniosek 7.2.1. [12] Dla dowolnego dodatniego całkowitego k mamy $\eta(k, k) = 4k$.

Dowód. Rozważmy graf G o nieparzystym obwodzie co najmniej $2k + 1$, który nie ma homomorfizmu w C_{2k+1} . Z twierdzenia Gerarda wynika, że graf G zawiera albo np- K_4 albo np- K_2^3 jako podgraf. Jeśli zawiera np- K_2^3 , to ma co najmniej $6k$ wierzchołków. W przeciwnym razie G musi zawierać np- K_4 o nieparzystym obwodzie co najmniej $2k + 1$. To w połączeniu z powyższym stwierdzeniem, daje nam, że G ma co najmniej $4k$ wierzchołków, czyli $\eta(k, k) \geq 4k$.

Co więcej, z powyższego stwierdzenia 7.2.1 mamy, że $(2k + 1)$ -np- K_4 ma $4k$ wierzchołków, ale nie dopuszcza on homomorfizmu w C_{2k+1} , skąd $\eta(k, k) \leq 4k$. \square

Obserwacja 7.2.1. [12] Dla dodatnich liczb całkowitych k, l mamy $\eta(k, l) \geq \eta(k, l + 1)$.

Dowód. Ponieważ C_{2l+3} ma homomorfizm w C_{2l+1} i mamy przechodność homomorfizmów, to jeśli graf G nie ma homomorfizmu w graf C_{2l+1} , to również nie ma homomorfizmu w C_{2l+3} , skąd wynika teza. \square

Oszacowania te są przydatne do wyznaczania liczb $\eta(k, l)$. Dzięki nierówności $\eta(k, 1) \leq 2k^2 + k + 1$ oraz nierówności $\eta(k, l) \geq \eta(k, l + 1)$ otrzymujemy górne oszacowanie na liczbę wierzchołków. Zaś dzięki równości $\eta(k, k) = 4k$ oraz nierówności $\eta(k, l) \geq \eta(k, l + 1)$, otrzymujemy dolne oszacowanie. Stąd dla ustalonego $k \geq 1$ oraz $l \leq k$ mamy

$$4k \leq \eta(k, l) \leq 2k^2 + k + 1$$

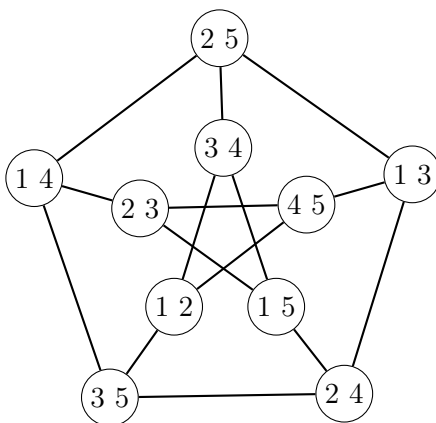
7.3. Hipoteza Chena-Raspauda

7.3.1. Grafy Knesera - własności grafu Petersena

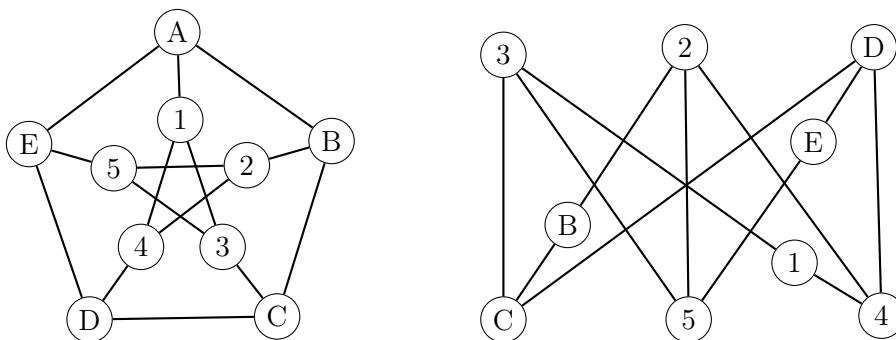
Przyjrzyjmy się ciekawej klasie grafów jaką są grafy Knesera.

Definicja 7.3.1. Graf Knesera $K(r, n)$ to taki graf $G = (V, E)$, że V to podzbiory $\{1, \dots, n\}$ wielkości r , natomiast $\{A, B\} \in E$ jest krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy część wspólna A i B jest pusta.

Przykład 7.3.1. Najbardziej znanym przykładem grafów Knesera jest graf Petersena $K(2, 5)$



Usuając wierzchołek F oraz incydentne z nim krawędzie otrzymujemy graf homeomorficzny z grafem $K_{3,3}$. Zatem graf Petersena nie jest grafem planarnym.



Grafu Petersena nie da się pokolorować dwoma kolorami, ponieważ zawiera cykl długości 5. Jednak jeśli $f(A) = f(2) = f(3) = \alpha$, $f(C) = f(4) = f(E) = \beta$ oraz $f(1) = f(5) = f(B) = f(D) = \gamma$, to f jest kolorowaniem grafu Petersena, więc graf Petersena jest 3-kolorowalny.

Definicja 7.3.2. Dla liczb naturalnych $k, n \geq 2k$ (n, k) -kolorowaniem nazywamy funkcję $f_c : V(G) \rightarrow \binom{\{1, 2, \dots, n\}}{k}$, dla której dla dowolnych sąsiadujących wierzchołków v, w zbiory $f_c(v), f_c(w)$ są rozłączne.

Pojęcie (n, k) -kolorowania jest uogólnieniem problemu kolorowania wierzchołków. Na przykład $(n, 1)$ -kolorowanie to n -kolorowanie.

7.3.2. Mad i hipoteza Chen-Raspauda

Wprowadzimy teraz pojęcie, które posłuży nam do sformułowania hipotezy Raspauda.

Definicja 7.3.3. Maksymalnym średnim stopniem grafu G nazywamy wartość

$$\text{Mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \mid H \text{ jest podgrafem } G \right\}$$

Łatwo pokazać, że jeśli $\text{Mad}(G) < k$, to graf G może zostać pokolorowany k kolorami (bo skoro $\text{Mad}(G) < k$, to w G istnieje wierzchołek stopnia mniejszego niż k i dalej dowód przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia o 6 kolorach).

Chen i Raspaud [16] badali odpowiednik tego wyniku w kontekście $(2k + 1, k)$ -kolorowania. Można zauważyć, że narzucenie ograniczenia na maksymalny średni stopień nie jest wystarczające. Faktycznie, jest znane, że jeśli graf G dopuszcza homomorfizm do grafu H , to $\text{odd-cycle}(G) \geq \text{odd-cycle}(H)$ [17] (ponieważ w przeciwnym przypadku istniałby homomorfizm z mniejszego cyklu w większy, co jest niemożliwe). Ponieważ wiadomo, że $\text{odd-cycle}(K(2k + 1, k)) = 2k + 1$ [18], każdy graf G z homomorfizmem do $K(2k + 1, k)$ musi niezbędnie spełniać warunek $\text{odd-cycle}(G) \geq 2k + 1$. Chen i Raspaud wysnuli hipotezę, że dodanie tego założenia jest wystarczające do uzyskania homomorfizmu do $K(2k + 1, k)$.

Hipoteza 7.3.1. (Hipoteza Chena-Raspauda) Ustalmy $k \geq 2$ i niech G będzie grafem o $\text{odd-cycle}(G) \geq 2k + 1$ oraz $\text{Mad}(G) < \frac{2k+1}{k}$. Wówczas G dopuszcza homomorfizm w graf $K(2k + 1, k)$.

Hipotezy tej nie można poprawić, ponieważ dla każdego $k \geq 2$ istnieją grafy G o $\text{odd-cycle}(G) \geq 2k + 1$ oraz $\text{Mad}(G) = \frac{2k+1}{k}$, które nie mają homomorfizmu w graf $K(2k + 1, k)$ [19]. Chen oraz Raspaud udowodnili tę hipotezę dla $k = 2$ w 2010 roku [20], zaś w 2022 roku została udowodniona dla $k = 3$ [21].

Hipoteza dla $k > 3$ pozostaje nadal problemem otwartym.

Rozdział 8

Minory

Minory to bardzo ważne pojęcie w dziedzinie grafów. W tym rozdziale skupimy się głównie na zrozumieniu definicji minorów oraz na tym, jak znane problemy można wyrazić z ich pomocą.

8.1. Nowe spojrzenie na twierdzenie Kuratowskiego i twierdzenie Wagnera

Definicja 8.1.1. Graf H jest **minorem** G , jeśli istnieje rodzina $(U_h)_{h \in V(H)}$ niepustych podzbiorów $V(G)$ taka, że:

1. U_h są parami rozłączne;
2. $G[U_h]$ jest spójny dla każdego $h \in V(H)$;
3. jeśli $uv' \in E(H)$, to istnieje wierzchołek $\tilde{u} \in U_u$ oraz istnieje wierzchołek $\tilde{v} \in U_v$ takie, że $\tilde{u}\tilde{v} \in E(G)$.

Innymi słowy, H jest minorem G , jeśli H można go otrzymać z G poprzez ciąg operacji, z których każda operacja jest:

1. usunięciem krawędzi;
2. usunięciem wierzchołka i wszystkich incydentnych z nim krawędzi;
3. ściągnięciem krawędzi uv , tj. usunięciem krawędzi między u i v oraz utożsamieniem u i v (czyli powstały wierzchołek uv ma wszystkich sąsiadów u oraz wszystkich sąsiadów v).

Poniżej przedstawimy dowód równoważności powyższych definicji

\Rightarrow Niech H będzie minorem zgodnie z definicją pierwszą. Istnieje więc rodzina $(U_h)_{h \in V(H)}$ spełniająca warunki 1-3. Skoro $G[U_h]$ jest spójny, to możemy ściągnąć wierzchołki $G[U_h]$ do jednego wierzchołka. Wierzchołki które nie należą do żadnego ze zbiorów U_h usuwamy. Jeśli $v_i v_j \notin E(H)$, to usuwamy krawędź między wierzchołkami z U_{v_i} oraz U_{v_j} (jest to jeden wierzchołek).

\Leftarrow Dowód będzie indukcją po liczbie przekształceń. Jeśli mamy 0 przekształceń to teza jest jasna. Załóżmy, że H_{n-1} jest minorem G po $n-1$ przekształceniach. Udowodnimy, że po jednym z trzech przekształceń, opisanych w definicji drugiej, otrzymamy H_n będący minorem G w pierwszej. Usuwając wierzchołek $v \in H_{n-1}$ musieliśmy mieć w H_{n-1} rodzinę U_h indukowaną wierzchołkami H_{n-1} . Dla H_n bierzemy tę samą rodzinę bez U_v . Usunięcie jednego ze zbiorów z rodziny nie wpływa na spełnienie warunków 1-3. w definicji pierwszej. Jeśli operacją jaką wykonamy będzie usunięcie krawędzi $e \in H_{n-1}$, to wówczas dla H_n bierzemy tę samą rodzinę co dla H_{n-1} . Wówczas U_h są nadal parami rozłączne i $G[U_h]$ jest spójny dla każdego $h \in V(H)$. Usuwana krawędź jest między wierzchołkami z dwóch różnych zbiorów U_h , zatem również warunek 3. pozostaje spełniony. Ściągając krawędź uv z H_{n-1} bierzemy dla H_n tę samą rodzinę, przy czym usuwamy

zbiory U_u oraz U_v i zamiast tego dodajemy zbiór $U_{uv} = U_u \cup U_v$. Wówczas warunki 1-3. są w jasny sposób spełnione. \square^1

Definicja 8.1.2. Graf H jest **podpodziałem** G , jeśli H powstaje z G przez wstawienie ścieżek zamiast niektórych krawędzi. Graf H jest **topologicznym minorem** G , jeśli G zawiera podgraf będący podpodziałem H .

Zauważmy, że jeśli H jest topologicznym minorem G , to jest również jego minorem. Używając terminu topologiczny minor oraz minor twierdzenie Kuratowskiego oraz twierdzenie Wagnera możemy sformułować w nieco inny sposób.

Twierdzenie 8.1.1. (Kuratowskiego) Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera $K_{3,3}$ oraz K_5 jako topologicznego minora.

Twierdzenie 8.1.2. (Wagnera) Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera $K_{3,3}$ oraz K_5 jako minora.

Z twierdzenia Kuratowskiego od razu wynika twierdzenie Wagnera. Skoro graf G jest nieplanarny to zawiera $K_{3,3}$ lub K_5 jako topologiczny minor. Ale że topologiczne minory to również minory, to G zawiera $K_{3,3}$ lub K_5 jako minor.

8.2. Twierdzenie Robertsona–Seymoura

Przejdziemy teraz do twierdzenia Robertsona-Seymoura, które mówi, że jeśli chcemy określić, jakie grafy można znaleźć w danej klasie grafów, to wystarczy zidentyfikować pewną stałą liczbę grafów, których nie można znaleźć jako minory w danej klasie. Zanim przejdziemy do sformułowania tego twierdzenia, wprowadźmy definicję quasi-porządku.

Definicja 8.2.1. Częściowy quasi-porządek (relacja zwrotna i przechodnia) jest WQO (well-quasi-ordering) jeśli dla każdego nieskończonego ciągu x_1, x_2, \dots elementów X , istnieją indeksy $i < j$, że $x_i \leq x_j$.

Równoważnie, częściowy porządek jest WQO gdy

- nie zawiera nieskończonego ciągu ściśle malejącego, oraz
- nie zawiera nieskończonego antyłańcucha (czyli nieskończonych ciągów elementów wzajemnie nieporównywalnych)

Możemy więc przejść do sformułowania twierdzenia Robertsona-Seymoura

Twierdzenie 8.2.1. (Robertson-Seymour) [22] [23] [24] Skończone grafy z relacją bycia minorem. są WQO

Nie będziemy dowodzić tego twierdzenia, gdyż dowód ten zajmuje kilkaset stron. Poniżej przytoczymy hipotezę Wagnera, która wynika wprost z twierdzenia 8.2.1

Definicja 8.2.2. Mówimy, że klasa grafów G jest **zamknięta na minory** jeśli zachodzi warunek: jeśli graf należy do klasy, to również jego minory należą do tej klasy.

Wagner nie udowodnił swojej hipotezy, natomiast Robertson i Seymour sformułowali i udowodnili swoje twierdzenie, aby wywnioskować z niego dowód hipotezy Wagnera. Poniższy dowód tego wniosku jest mojego autorstwa.

Twierdzenie 8.2.2. (Hipoteza Wagnera) Każda klasa grafów zamknięta na minory może być scharakteryzowana przez skończoną liczbę grafów, które są zakazanymi minorami w tej klasie. Innymi słowy mamy $\mathcal{C} = \{G \mid \forall H \in \text{Forbidden}(\mathcal{C}) \ H \not\preceq G\}$, gdzie \preceq to operacja bycia minorem.

Dowód. Niech \mathcal{C} będzie klasą grafów zamkniętą na minory. Weźmy zbiór elementów minimalnych \mathcal{C}' , gdzie $\overline{\mathcal{C}}$ jest dopełnieniem zbioru klasy \mathcal{C} . Zbiór elementów minimalnych jest antyłańcuchem, bo w częściowym porządku elementy minimalne nie są porównywalne. Z twierdzenia 8.2.1 wiemy, że ten antyłańcuch jest skończony. \square^1

W ten sposób pokazaliśmy, że jak dla grafów planarnych istnieje skończona rodzina grafów zabronionych ($K_{3,3}$ oraz K_5), tak dla dowolnej powierzchni topologicznej również istnieje jakaś skończona klasa grafów \mathcal{C} takich, że jeśli wiemy weźmiemy graf G i zawiera on pewien graf z \mathcal{C} jako minor, to wówczas grafu G nie da narysować się na tej powierzchni. Przykładowo dla grafów toroidalnych, klasa grafów które wykluczamy zawiera ponad 17535 elementów [25].

Rozdział 9

Podsumowanie

Początkowo praca miała nazywać się "Wstęp do problemów otwartych w teorii grafów". Ucząc się tematyki związanej z grafami, czytałam sporo prac naukowych z różnych tematów. Pod koniec większości prac pojawiały się w podsumowaniu jakieś pytania i problemy otwarte nad którymi czytelnik mógł dalej pracować. Sporo z takich pytań próbowałam samodzielnie pociągnąć, otrzymując jakieś mniejsze lub większe wyniki które chciałam opisać w tej pracy i zostawić pytania jako otwarte. Praca była już porządnie rozbudowana, jednak ze względu na małą ilość czasu postanowiliśmy z tutorem o usunięciu trudniejszych rozdziałów. Licencjat więc stał się skryptem z teorii grafów i przyjął nazwę "Ultradługo wprowadzenie do teorii grafów". Skupia się na pokazaniu podstawowych własności z teorii grafów wraz z dowodami. Możemy dowiedzieć się z niego sporo na temat skojarzeń, cykli Eulera i Hamiltona, drzew, planarności oraz kolorowań. Z poprzedniej wersji pracy zostawiłam temat o homomorfizmach, w którym znajdują się opisane przeze mnie przemyślenia na temat oszacowań funkcji $\eta(k, l)$ oraz wstęp zachęcający do przeczytania pracy naukowej, której jestem współautorem. W niedalekiej przyszłości zapewne dołożę do pracy dodatkowe materiały. W rozdziale o planarności pojawi się ośmiostronicowy dowód twierdzenia Kuratowskiego a zaraz potem wynikający z niego dowód twierdzenia Wagnera. Można się również spodziewać opisanego przeze mnie tematów z χ -ograniczoności, kolorowania listowego czy metody rozładowań.

Podziękowanie

Serdeczne podziękowania dla Jaremy za to, że był moją gumową kaczuszką, której mogłam opowiadać dowody wszystkich twierdzeń.

Bibliografia

- [1] Claude Berge. Two theorems in graph theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 43(9):842–844, 1957.
- [2] Martin Aigner and Gnter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer Publishing Company, Incorporated, 6th edition, 2018.
- [3] Cristopher Moore and Stephan Mertens. *The Nature of Computation*. Oxford University Press, Inc., USA, 2011.
- [4] H. A. KIERSTEAD and A. V. KOSTOCHKA. A short proof of the hajnal–szemerédi theorem on equitable colouring. *Combinatorics, Probability and Computing*, 17(2):265–270, 2008.
- [5] universalset (<https://math.stackexchange.com/users/110684/universalset>). Proof of konig theorem. Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/635669> (version: 2014-01-12).
- [6] J. Misra and David Gries. A constructive proof of vizing’s theorem. *Information Processing Letters*, 41(3):131–133, 1992.
- [7] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour, and Robin Thomas. The four-colour theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1):2–44, 1997.
- [8] Percy John Heawood. Map color theorems. *Quant. J. Math.*, 24:332–338, 1890.
- [9] Heinrich Tietze. Einige bemerkungen über das problem des kartenfärbens auf einseitigen flächen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 19:155–159, 1910.
- [10] Frank Harary. *Graph theory*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London, 1969.
- [11] V. Chvátal. The minimality of the Mycielski graph. In *Graphs and combinatorics (Proc. Capital Conf., George Washington Univ., Washington, D.C., 1973)*, volume Vol. 406 of *Lecture Notes in Math*, pages pp 243–246. Springer, Berlin, 1974.
- [12] Laurent Beaudou, Florent Foucaud, and Reza Naserasr. Smallest C_{2l+1} -critical graphs of odd-girth $2k + 1$. *Discrete Applied Mathematics*, 319:564–575, 2022.
- [13] Anna Gujgiczler, Reza Naserasr, S Taruni, et al. Winding number and circular 4-coloring of signed graphs. *arXiv preprint arXiv:2307.04652*, 2023.
- [14] Laurent Beaudou, Florent Foucaud, and Reza Naserasr. Homomorphism bounds and edge-colourings of K_4 -minor-free graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 124:128–164, 2017.
- [15] A. M. H. Gerards. Homomorphisms of graphs into odd cycles. *J. Graph Theory*, 12(1):73–83, 1988.
- [16] Min Chen and André Raspaud. Homomorphisms from sparse graphs to the Petersen graph. *Discret. Math.*, 310(20):2705–2713, 2010.

- [17] Pavol Hell and Jaroslav Nešetřil. *Graphs and homomorphisms*, volume 28 of *Oxford lecture series in mathematics and its applications*. Oxford University Press, 2004.
- [18] Svatopluk Poljak and Zsolt Tuza. Maximum bipartite subgraphs of kneser graphs. *Graphs Comb.*, 3(1):191–199, 1987.
- [19] William Klostermeyer and Cun Quan Zhang. n -tuple coloring of planar graphs with large odd girth. *Graphs and Combinatorics*, 18(1):119–132, 2002.
- [20] Min Chen and André Raspaud. Homomorphisms from sparse graphs to the Petersen graph. *Discret. Math.*, 310(20):2705–2713, 2010.
- [21] Katarzyna Łyczek, Marysia Nazarczuk, and Paweł Rzażewski. Towards the chen-raspaud conjecture. *Discrete Mathematics*, 347(3):113798, 2024.
- [22] Neil Robertson and P.D. Seymour. Graph minors. i. excluding a forest. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 35(1):39–61, 1983.
- [23] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors .xiii. the disjoint paths problem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63(1):65–110, 1995.
- [24] Neil Robertson and P.D. Seymour. Graph minors. xx. wagner’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 92(2):325–357, 2004. Special Issue Dedicated to Professor W.T. Tutte.
- [25] Wendy Myrvold and Jennifer Woodcock. A large set of torus obstructions and how they were discovered. *Electronic Journal of Combinatorics*, 25, 01 2018.