2 Zadania, część poważniejsza

Zdecydowanie ważniejsza jest dla mnie cześć pierwsza, jednak nie polecam ignorowania tej. W związku z tym, że jest Was dużo potrzeba będzie conajmniej 6. zadań z porządnym opisem.[2]Myślę, że ta część nie powninna być dla nikogo trudna, niemniej pkt 3. zawiera opis oznaczeń/teorię/wskazówki.

2.1 Pomóż Małgosi

1. Małgosię teleportowało na któryś księżyc Saturna. Żeby wezwać pomoc, musi wiedzieć gdzie jest. Zmierzyła pole, wyszło jej coś koło $6000km^2$ (tak, nudziło jej się) i kąty (wynosiły $0,47\pi$, $0,32\pi$ i $0,24\pi$) trójkąta tworzonego przez trzy wzniesienia. Gdzie jest Małgosia?

2. Rissa, dysponująca statkiem latającym z prędkością ledwie $\frac{1}{10}c$ zaoferowała się, że podskoczy po Małgosię z początkiem lipca. Startując przesłała jej o tym informację. Po jakim czasie od otrzymania wiadomości Małgosia wyląduje na Ziemi[3]?

3. Biedna Malgosia musi jeszcze dojść na miejsce lądowania. Wie, że jest to koło dwóch znanych jej okrągłych kraterów i że punkt ten jest zarówno środkiem jednokładności jak i inwersji przekształcających jeden krater na drugi. Czy taki punkt jest wyznaczony jednoznacznie?[4]

4. Czekając na Rissę Małgosia próbuje skonstuować odcinek długości a, $(a \in \mathbb{R})$[5].
   - Wyjaśnij Małgosi, że to nie zawsze jest możliwe.
   - Ile jest liczb, które można skonstuować?

2.2 Zadania bez historyjki

1. Przez M oznaczmy środki boków trójkąta, przez H spodki wysokości, a przez E środki odcinków wierzchołek-ortocentrum. Wykaż, że[6]
   - punkty $M_1M_2M_3H_1$ leżą na jednym okręgu;
   - punkty $M_1H_1E_1E_2$ leżą na jednym okregu;

2. Opisz konstrukcję okręgu stycznego do prostej i dwóch okręgów.

3. Opisz, jak na każdą współrzędną przestrzeni euklidesowej działa złożenie obrotów o $\frac{\pi}{6}$ wokół osi x i o $\frac{\pi}{4}$ wokół osi z. A w odwrotnej kolejności?

[2] najlepiej w PDF, wtedy nie będzie problemów z sypiącym się formatowaniem ;)
[3] przymij, że informacja porusza się z prędkością światła
[4] w tym zadaniu chodzi o przyjęcie geometrii euklidesowej, można pominąć kulistość księżyca, chyba że ktoś bardzo chce się popisać.
[5] mając linijkę z cetrymetrową podziałką czy odcinek długości 1 (i cyrkiel)
[6] elementarnie, proszę, chcę zobaczyć jak Wam idzie dowodzenie

4. Masz do dyspozycji punkty, proste i półproste z relacją „$\subseteq$".

   - Pokaż, że relacja $A \sim B \leftrightarrow A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$ (gdzie A i B to półproste prostej L) jest relacją równoważności.
   - Ile ta relacja ma klas abstrakcji? Czy wybór jakiejś wyznacza relację porządku punktów na prostej? Jaką?
   - A jak wyznaczyć relację porządku na kątach wypukłych? (Zachowującą się jak znana ze szkoły miara kąta.)

3 Pomoce naukowe i uwagi inne

Nie ma punktów za niezaglądanie tutaj, ale jaka jest satysfakcja, jak tego nie zrobisz ;) W razie innych pytań: piszcie, będę odpisywać i dopisywać co istotniejsze rzeczy.

3.1 Szczegóły astronomiczne i geometryczne

1. Przyjąć, że Ziemia i Saturn się względem siebie nie przesuną, a księżyce Saturna są właściwie w tym samym miejscu co on, pominać takie rzeczy jak rozpędzanie przy starcie. Rissa leci po lini prostej, nie przyspiesza mijając Słońce i takie tam, chyba że znowu chcesz się popisać. Dane astronomiczne podaje między innymi WolframAlpha.

2. Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu R to przekształcenie przyporządkowujące punktowi P punkt Q na półprostej OP taki, że $|OP||OQ| = R^2$. Punktowi w O przyporządkowywany jest „punkt w nieskończoności". Inwersja jest nazywana symetrią względem okręgu i niektórzy uważają, że nadaje się do łapania lwa na pustyni.

3.2 Rzecz o relacjach

Klasycznym przykładem relacji jest relacja „znania". Dla pewnej grupy (zbioru) określamy, że osoba (element) może znać drugą albo nie znać. Czasem wymagamy, żeby taka relacja była symetryczna, czyli jeśli Małgosia zna Karolinę, to Karolina zna Małgosię. Małgosia jest jednak popularną osobą i jeśli ktoś ją zna, to nie znaczy, że ona zna jego, więc ich relacja nie musi być symetryczna. Może być też antysymetryczna. Jeśli Małgosia jest niższa od Piotrka to Piotrek nie jest od niej niższy. Małgosia jednak zna Małgosię (i można przyjąć że każdy zna samego siebie - relacja jest zwrotna). Nie jest przechodnia, to znaczy, że z tego, że Małgosia zna Bartka a Bartek zna Tomka nie możemy wnioskować, że Małgosia zna Tomka.

1. Jeśli dwa elementy są w relacji R zapisujemy to $(a, b) \in R$ albo po prostu aRb.

2. Jeśli relacja jest antysymetryczna[7] i przechodnia to matematycy nazywają ją relacją porządku. Jeśli dodatkowo z każdych dwóch elementów dwa są w relacji, to relację nazywają relacją porządku liniowego. Można to napisać tak $\leq$ lub tak $\preceq$ lub wymyślić coś swojego.

3. Jeśli relacja jest symetryczna, zwrotna i przechodnia, to nazywa się relacją równoważności, co można zapisać $=$, $\sim$ itp. Zbiór wszystkich elementów, będących w relacji z pewnym ustalonym nazywamy klasą abstrakcji tej relacji. Na przykład dla relacji bycia w jednej klasie w liceum klasa jest klasą abstrakcji.

3.3 Kiedy czegoś jest nieskończenie wiele

W zadaniu 2.1.4 nie chodzi o to, żeby odpowiedzieć „nieskończenie wiele", tylko prównać z jakimś znanym zbiorem (naturalne, wymierne, rzeczywiste). Można to zrobić przyporządkowując elementy jednego zbioru elementom drugiego.

3.4 Rzecz o macierzach

Podpowiedź jest taka, że w zadaniu 2.2.3 (z obrotami) chodzi o to, żeby zapisać obroty w postaci macierzy, a wektor jako jednokolumnową macierz[8]. Na przykład:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{12}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Nie wygląda może to pięknie, ale Wy będziecie mieć więcej zer.

[7] niektórzy definiują relację porządku jako relację antysymetryczną na różnych elementach i zwrotną

[8] taki pionowy wektor