EGZAMIN Z UKŁADÓW DYNAMICZNYCH, 24—27 CZERWCA 2023

Można korzystać ze wszystkich dostępnych źródeł, w tym- oczywiście- z notatek z wykładu i z ćwiczeń. Uwaga: rozwiązanie o treści "robiliśmy takie/podobne zadanie na ćwiczeniach" nie jest wystarczające.(!) Należy podać pełne uzasadnienie.

Zadań jest sporo, ale wszystkie poza jednym są bardzo podobne do tego co przerabialiśmy na ćwiczeniach. Proszę o przesłanie rozwiązań (mogą być skany ręcznie zapisanych rozwiązań) do 27 czerwca, godz. 21.

Zadanie 1 (zadanie o homeomorfizmach okręgu, wykorzystujące liczbę obrotu)**.**

Wykazać że przekształcenie przyporządkowujące homeomorfizmowi okręgu jego liczbę obrotu jest ciągłe w topologii C^0. Dokładniej: W przestrzeni homeomorfizmów okręgu zachowujących orientację mamy metrykę:

$$d(f,g) = \inf\{||F-G||_\infty, \quad \text{gdzie} \quad F - \text{podniesienie } f, G - \text{podniesienie } g\}$$

Należy wykazać ciągłość funkcji $f \mapsto \rho(f)$ w tej metryce.

Zadanie 2 (zadanie o sprzężeniu topologicznym w wymiarze 1)**.**

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$.

(1) Znaleźć orbity okresowe i podać liczby obrotu dla homeomorfizmów okręgu f_ε oraz g_ε danych (w podniesieniu) wzorami

$$F_\varepsilon(X) = X + \varepsilon \sin(2\pi n X), \qquad G_\varepsilon(X) = X + \frac{1}{n} + \varepsilon \sin(2\pi n X),$$

gdzie $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\pi n}$.

(2) Wykazać że dla dowolnych $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \frac{1}{2\pi n})$ przekształcenia $f_{\varepsilon_1}, f_{\varepsilon_2}$ są topologicznie sprzężone.

(3) Wykazać że dla dowolnych $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \frac{1}{2\pi n})$ przekształcenia $g_{\varepsilon_1}, g_{\varepsilon_2}$ są topologicznie sprzężone.

Zadanie 3 (różne topologiczne opisy "chaosu")**.** jedno zadanie związane z pojęciami: topologiczna tranzytywność, topologiczne mieszanie, topologiczna ekspansywność, chaos w sensie Devaney'ego (zadanie może odwoływać się do przykładów, które pojawiły się na wykładzie.

Robert Devaney wprowadził następującą definicję chaosu: Niech X będzie przestrzenią metryczną. Przekształcenie $f\colon X \to X$ nazywamy *chaotycznym* jeśli

- punkty okresowe dla f są gęstym podzbiorem X,
- $f : X \to X$ jest topologicznie tranzytywne
- f ma własność *wrażliwości na warunki początkowe*

(uwaga: potem okazało się że ta trzecia własność wynika z dwóch pozostałych)

Przypomnienie:

Niech X, d będzie przestrzenią metryczną. Mówimy że przekształcenie $f : X \to X$ ma własność *wrażliwości na warunki początkowe* (*sensitive dependence on initial conditions*), jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $x \in X$ istnieje $y \in X$ takie, że $d(x, y) < \varepsilon$ i $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ dla pewnego $n > 0$.

Mówimy że przekształcenie f jest *topologicznie tranzytywne*, jeśli dla dowolnych niepustych podzbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje $n \geqslant 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(1) Niech $f \colon M \to M$ będzie przekształceniem określonym na pełnym torusie M, definiującym solenoid. Niech Λ będzie podzbiorem niezmienniczym opisanym w konstrukcji solenoidu. Sprawdzić że $f \colon \Lambda \to \Lambda$ jest przekształceniem chaotycznym w sensie Devany'ego.

(2) Przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^2$ wyznaczone przez macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

wyznacza homeomorfizm f_A torusa $\mathbb{T}^2$ taki że $f_A \circ \pi(X, Y) = \pi \circ A(X, Y)$. Sprawdzić że przekształcenie $T_A \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ jest chaotyczne w sensie Devany'ego.

Zadanie 4 (zadanie o przekształceniach zachowujących miarę)**.** [Przekształcenie piekarza] Rozważamy kwadrat $X = [0, 1]^2$ z miarą Lebesgue'a, określoną na σ-ciele zbiorów borelowskich. Definiujemy przekształcenie $T : X \to X$ wzorem

$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}),\ y \in [0, 1] \\ (2x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \text{dla } x \in [\frac{1}{2}, 1],\ y \in [0, 1] \end{cases}.$$

Wykazać, że T zachowuje (dwuwymiarową) miarę Lebesgue'a na kwadracie X. Poszukać gęstych orbit.

Zadanie 5 (zadanie-niespodzianka)**.**

Założenia Rozpatrujemy przekształcenie, od którego rozpoczął się wykład: $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$,

$$R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z,$$

gdzie $\alpha \notin Q$. Weźmy drugie przekształcenie tego typu

$$R_\beta(z) = e^{2\pi i\beta} z,$$

gdzie $\beta \notin Q$.

Załóżmy dodatkowo że $\alpha - \beta \notin Q$.

Z tymi dwoma przekształceniami można związać *błądzenie losowe na okręgu*:

Ustalmy $p \in (0,1)$; niech $q = 1 - p$. Błądzenie losowe (łańcuch Markowa) na okręgu jest zdefiniowane następująco: Niech $x \in \mathbb{S}^1$. Z prawdopodobieństwem p wybieramy R_α i punkt x przesuwamy do $R_\alpha(x)$ (czyli obracamy o kąt $2\pi\alpha$), z prawdopodobieństwem q wybieramy R_β i punkt x przesuwamy do $R_\beta(x)$ (czyli obracamy o kąt $2\pi\beta$).

Z tym łańcuchem są związane dwa operatory:

(1) *operator $\mathcal{L}$ na funkcjach $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$*, który ma postać:

$$\mathcal{L}(\varphi)(x) = p\varphi(R_\alpha(x)) + p\varphi(R_\beta(x)),$$

czyli - w równoważnym zapisie:

$$\mathcal{L}(\varphi) = p \cdot \varphi \circ R_\alpha + q \cdot \varphi \circ R_\beta.$$

(2) operator $\mathcal{P}$ działający w przestrzeni borelowskich miar probabilistycznych na $\mathbb{S}^1$:

$$\mathcal{P}(\mu)(A) = p\mu(R_\alpha^{-1}(A)) + q\mu(R_\beta^{-1}(A)).$$

Miara stacjonarna dla łańcucha Markowa to taka miara borelowska probabilistyczna μ na $\mathbb{S}^1$, że dla każdego zbioru borelowskiego A mamy

$$\mu(A) = p\mu(R_\alpha^{-1}(A)) + q\mu(R_\beta^{-1}(A)),$$

czyli taka miara dla której

$$\mathcal{P}(\mu) = \mu.$$

(1) Sprawdzić że unormowana miara Lebesgue' a λ jest miarą stacjonarną.

(2) Oznaczmy przez $\mathcal{L}^n$ n-tą iterację operatora $\mathcal{L}$.

Ustalmy $M \in \mathbb{Z}$, $M \neq 0$ i niech $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = z^M$

Wykazać że

$$\mathcal{L}^n(\varphi) \rightrightarrows 0$$

gdy $n \to \infty$ oraz że zbieżność jest *eksponencjalna* to znaczy

$$||\mathcal{L}^n(\varphi)||_\infty < e^{-nc}$$

dla pewnej stałej c (zależnej od M).

(3) Korzystając z punktu (2) oraz z gęstości wielomianów trygonometrycznych w przestrzeni funkcji ciągłych na S^1 o wartościach rzeczywistych, wykazać że dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ mamy

$$\mathcal{L}^n(f) \rightrightarrows \int_{S_1} f d\lambda$$

(gdzie λ jest unormowaną miarą Lebesgue'a).

(4) [dodatkowe pytanie] przedyskutować istotność założeń.