Egzamin, Wstęp do RRCz, semestr letni 2023/24. *Wszędzie poniżej U jest zbiorem ograniczonym, otwartym o gładkim brzegu. Zadania 2-6 po 10 punktów, należy oddać wybrane 4 z tych zadań.*

Zadanie 1. (12 p.) Każdy podpunkt za 4 p. Odpowiedzi należy krótko uzasadnić.

(a) Niech $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia równanie

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0,$$

dla $b(x) = (1, 1, x_3)$, przy czym $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Wyznacz rodzinę krzywych, na której u jest stała, tj takich krzywych $\gamma_t(x)$ startujących z x, że $u(t, \gamma_t(x)) = const$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^3$ jako fuknkcja od czasu.

(b) Sformułuj twierdzenie o wartości średniej dla funkcji harmonicznych.

(c) Niech $U \subset \mathbb{R}^d$. Dla jakich wartości $p \in [1, +\infty]$ prawdziwe jest włożenie $W^{1,p}(U) \subset L^2(U)$?

Zadanie 2. Niech $U \subset \mathbb{R}^d$, zaś C oznacza stałą z nierówności Poincaré dla $H_0^1(U)$. Załóżmy, że $f \in L^p(U)$, $b = b(x) \in L^\infty(U)$, zaś $a \in \mathbb{R}$ jest ustaloną liczbą spełniającą $a < C\|b\|_{L^\infty}$. Rozważmy zagadnienie

$$a\Delta u + b \cdot \nabla u = f \text{ w } U, \quad u = 0 \text{ na } \partial U.$$

Rozstrzygnij, dla jakich $1 \leq p \leq \infty$ zagadnienie to jest dobrze postawione w słabym sensie.

Zadanie 3. Niech $U \subset \mathbb{R}^d$, $g \in C^\infty(\partial U)$ oraz niech $u : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną, $u = g$ na ∂U.

(a) Wykaż, że dla dowolnego $w_0 \in C^\infty(\bar{U})$ z $w_0 = g$ na ∂U, istnieje słabe rozwiązanie $w \in L^2(0, T; H^1(U))$, $\partial_t w \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ równania ciepła

$$\partial_t w - \Delta w = 0 \text{ w } [0, T] \times U, \quad \mathrm{Tr}(w) = g \text{ na } [0, T] \times \partial U, \quad w = w_0 \text{ na } \{0\} \times U.$$

(b) Przypuśćmy, że dla każdego $x \in U$ istnieje granica $\widetilde{w}(x) := \lim_{t \to \infty} w(t, x)$. Wykaż, że $u = \widetilde{w}$ p.w.

UWAGA: Nie trzeba przeprowadzać rozumowania z metody Galerkina, tylko zastosować odpowiednie twierdzenia z wykładu.

Zadanie 4. Niech $u \in C^\infty([0, \infty); C_c^\infty(\mathbb{R}^d))$, będzie funkcją spełniającą w sensie klasycznym równanie

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u - \Delta u = 0$$

z $u|_{t=0} = u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ i z danym $b \in \mathbb{R}^d$. Udowodnij, że dla każdej funkcji $\beta \in C^2(\mathbb{R})$ mamy

$$\partial_t \beta(u) + b \cdot \nabla \beta(u) - \Delta u \, \beta'(u) = 0.$$

Udowodnij, że jeśli $\beta \geq 0$ jest wypukła i $\beta(0) = 0$ to funkcja

$$[0, \infty) \ni t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \beta(u(t, x)) \, dx$$

jest ograniczona.

Zadanie 5. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ i niech $f \in L^2(U)$. Dla $m \in \mathbb{R}$ rozważmy zagadnienie

$$-u_{xx} - m u_{yy} = f \text{ w } U, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Korzystając z metody Galerkina wykaż, że ma ono słabe rozwiązanie dla wszystkich $m > 0$.

Zadanie 6. Niech $U \in \mathbb{R}^d$, zaś $\{k_j(x)\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty(U)$ będzie ciągiem funkcji dodatnich p.w. w U takim, że

$$k_j \xrightarrow{L^\infty(U)} k.$$

Załóżmy, że u_j jest słabym rozwiązaniem zagadnienia

$$-\mathrm{div}\,((k_j(x) + 1)\nabla u_j) + u_j = 1 \text{ w } U, \quad u_j = 0 \text{ na } \partial U.$$

Wykaż, że $u_j \xrightarrow{H^1(U)} u$, gdzie u jest słabym rozwiązaniem zagadnienia

$$-\mathrm{div}\,((k(x) + 1)\nabla u) + u = 1 \text{ w } U, \quad u = 0 \text{ na } \partial U.$$