

1. Dane są ideały  $I, J$  pierścienia  $R = \mathbb{Z}[x]$ :  $I = (3, x)$ ,  $J = (5, x)$ .  
Sprawdź, czy któryś z ideałów  $I \cap J, I + J$  jest ideałem pierwszym w  $R$ .
2. Niech  $R = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$  będzie pierścieniem funkcji ciągłych rzeczywistych na odcinku  $[0, 1]$  i niech  $I = \{f \in R \mid f(0) = f(1) = 0\}$ .
  - (a) Uzasadnić, że  $I$  jest ideałem w  $R$ .
  - (b) Wykazać, że  $R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

3. Które z pierścieni

$$\mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}[x]/(x^2, x^4 + 3), \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

są izomorficzne? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: działania w ostatnim pierścieniu, to zwykłe dodawanie i mnożenie macierzy.

4. Niech  $R = \mathbb{Z}[i]$ .
  - (a) Który z ideałów  $I_1 = (5)$ ,  $I_2 = (7)$  oraz  $I_3 = (5 + i)$  jest ideałem maksymalnym pierścienia  $R$ ?
  - (b) Znajdź generator ideału  $(3 - 6i, 6 + 2i)$  w pierścieniu  $R$ .
5. Niech  $G$  będzie grupą rzędu 165. Uzasadnić, że:
  - (a)  $G$  zawiera podgrupę normalną  $H$  taką, że  $|G/H| = 15$ ,
  - (b)  $G$  zawiera podgrupę normalną  $F$  taką, że  $G/F$  jest grupą cykliczną rzędu 3.

## Algebra 1 Teoria

1. a) Podaj definicję permutacji parzystej. Wyjaśnij, dlaczego ta definicja jest poprawna.  
b) Udowodnij, że zbiór  $A_n$  permutacji parzystych zbioru  $\{1, \dots, n\}$  jest podgrupą normalną indeksu 2 w  $S_n$ .
2. a) Napisz co oznacza, że podgrupa  $H$  grupy  $G$  jest podgrupą normalną. Podaj definicję grupy ilorazowej  $G/H$ .  
b) Wyjaśnij, jak w tej definicji korzysta się z założenia, że  $H$  jest podgrupą normalną.
3. a) Podaj warunki konieczne i dostateczne na to aby grupa  $G$  była iloczynem prostym (wewnętrznym) swoich podgrup  $G_1$  i  $G_2$ .  
b) Czy któraś z grup  $\mathbb{Z}_{10}, S_3$  jest iloczynem prostym swoich dwóch podgrup właściwych? Każdą z odpowiedzi uzasadnij.
4. a) Podaj definicję elementu pierwszego dziedziny  $R$ .  
b) Udowodnij, że element pierwszy jest nierozkładalny.
5. a) Podaj definicję dziedziny z jednoznacznością rozkładu.  
b) Podaj przykład dziedziny, która nie ma tej własności. Wyjaśnij.