

## Kolokwium nr 2 z analizy matematycznej II.1

12 stycznia 2023,

110 minut

Rozwiązanie każdego zadania **należy** umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.

---

### Zadanie 1.

- a) Wykazać, że istnieje  $\varepsilon > 0$  oraz funkcja różniczkowalna  $g = (g_1, g_2) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  taka, że

$$\forall_{x,y \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \begin{cases} (1+y)e^{g_1(x,y)} + (1+x)e^{g_2(x,y)} = 2 \\ 2g_1(x,y)e^y + g_2(x,y)e^x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

- b) Rozstrzygnąć, czy istnieje taki  $\varepsilon > 0$ , że funkcja różniczkowalna

$$g = (g_1, g_2) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

spełniająca warunek (1) jest wyznaczona jednoznacznie.

---

**Zadanie 2.** Rozstrzygnąć, czy zbiór  $M$  jest rozmaitością jeśli:

- a)  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^6 + 3x^2y^2 = 3x^4y + y^3\}$ ,  
b)  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^4 - x^8 = 2x^2y^4\}$ .

W przypadku odpowiedzi twierdzącej podać wymiar rozmaitości.

---

**Zadanie 3.** Dana jest funkcja  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  taka, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+x+y^2) - f(x,y)}{x^2+y^2} = 1.$$

Wyznaczyć  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ . Rozstrzygnąć, czy  $f$  ma w  $(0,0)$  ekstremum lokalne.

---

**Zadanie 4.** Funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana jest wzorem

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 4xy^2 - 2x^2.$$

Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji  $f$  i dla każdego z tych punktów sprawdź, czy  $f$  ma w tym punkcie ekstremum lokalne. Czy funkcja  $f$  osiąga swoje kresy?