

Egzamin z analizy matematycznej II.2 (termin II)

2 września 2021, 9:00 – 13:00

Rozwiązanie każdego zadania **prosimy** umieścić w **jednym** pliku, najlepiej **pdf** lub każde zadanie na **oddzielnej** kartce.

Należy szczególnie uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy, ...

Można korzystać z książek, notatek, itp...

Zadania należy rozwiązywać **samodzielnie**. **Nie wolno** korzystać z pomocy innych osób.

Zadanie 1 (10 pkt.). Dla $a \in \mathbb{R}$ Określmy formę $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ wzorem

$$\omega = (x^2 + y) dx + (x - 2z^3) dy + a(z + yz^2) dz$$

(a) Znaleźć takie a , że $d\omega = 0$.

(b) Niech $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 21, y^2 + z^2 \leq 1\}$ będzie zorientowana tak, że wektor $\vec{n} = [-1, 0, 0]$ jest wektorem normalnym zewnętrznym do K w punkcie $(21, 0, 0)$.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ obliczyć $\int_{\partial K} \omega$.

Zadanie 2 (10 pkt.). Obliczyć $\int_M x d\sigma_2(x, y, z)$ gdzie

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 4, y^2 + (z - 1)^2 < 1, x > 0\}.$$

Zadanie 3 (10 pkt.). Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie całkowalna. Zdefiniujmy funkcję F wzorem

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(t^2 x) dt$$

Wykaż, że

(a) F jest dobrze określona jako funkcja z \mathbb{R} w \mathbb{R} (czyli, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja F przyjmuje skończoną wartość);

(b) F jest ciągła i ograniczona;

(c) jeżeli f ma nośnik zwarty, to F jest różniczkowalna na \mathbb{R} .

Zadanie 4 (10 pkt.). Ósemką nazywamy podzbiór \mathbb{R}^2 złożony z dwóch okręgów o dowolnych promieniach, przeciwnej orientacji i mających dokładnie jeden punkt wspólny (por. rysunek poniżej). Forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ jest taka, że dla dowolnej ósemki $A \subset \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$\int_A \omega = 0.$$

(a) Wykaż, że ω jest dokładna.

(b) Czy odpowiedź ulegnie zmianie jeśli zamienimy \mathbb{R}^2 na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Odpowiedź oczywiście należy precyzyjnie uzasadnić.

Przykłady ósemek. Strzałki oznaczają orientację.

